
Outil d'analyse de l'engrènement

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de proposer un outil de simulation d'engrènement capable de simuler l'influence des défauts géométriques de l'engrenage sur ses caractéristiques fonctionnelles. D'une manière générale, l'objectif de l'analyse de l'engrènement est de fournir une information quantitative de l'impact de paramètres géométriques (écarts ou paramètres de conception) de l'engrenage sur son erreur cinématique. La géométrie nominale de l'engrenage est conçue pour assurer l'*homocinétisme* de la transmission sans charge et il existe de nombreux phénomènes et écarts influant sur l'erreur cinématique [Bruyère 2006]. En voici une liste non exhaustive :

- Ecarts de forme des surfaces actives.
- Ecarts de position et d'orientation des surfaces actives.
- Paramètres influant de la lubrification utilisée : épaisseur du film de lubrifiant entre dentures, viscosité,...
- Déformations dues aux effets dynamiques et aux efforts (déformation de contact, flexion et cisaillement)
- Déformation du corps de l'engrenage, des arbres, du carter, des éléments de guidage.
- Acyclisme moteur et récepteur.
- ...

Dans la suite de ces travaux, nous limitons notre étude à un engrènement sans charge, sans effet dynamique, sans effet d'usure. Toutes les pièces intervenantes sont considérées comme indéformables et il n'y a pas de lubrification ni d'acyclisme. Le comportement cinématique est quasi-statique et sans charge.

Afin d'estimer l'impact des défauts géométriques sur l'erreur cinématique et d'analyser les tolérances sur des caractéristiques spécifiées, il est nécessaire d'avoir une représentation mathématique, ou modèle mathématique des défauts géométriques et des surfaces actives : c'est le modèle de substitution. Ce modèle correspond à une description de la géométrie de l'engrenage intégrant les défauts géométriques et utilisable pour la simulation de l'engrènement. Le modèle de substitution se substitue à la réalité et est adapté à l'utilisation d'outils et de méthodes mathématiques pour la simulation de l'engrènement sans charge. Basé sur ce modèle géométrique, un modèle de comportement cinématique est utilisé afin de simuler l'engrènement sans charge.

L'estimation de l'erreur cinématique est faite par l'intermédiaire de l'utilisation de méthodes numériques adaptées à chaque modèle de comportement

Ainsi, l'outil de simulation proposé peut être explicité comme à la *Figure 2-1*.

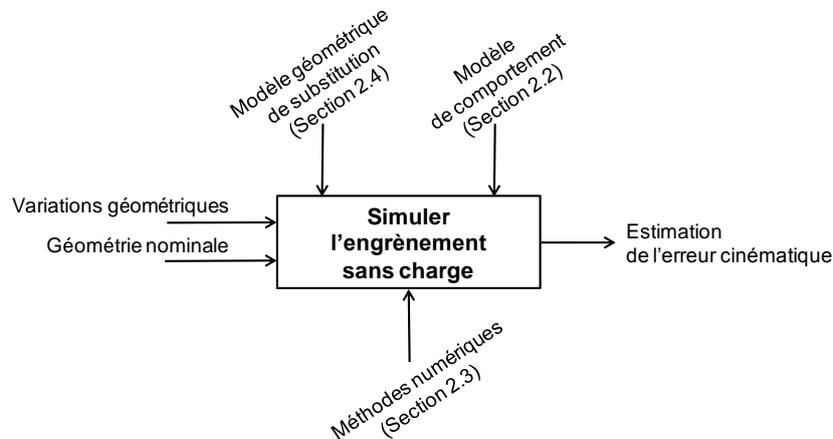


Figure 2-1 - Structure générale de l'outil de simulation d'engrènement.

Ce chapitre expose en premier lieu le principe de la simulation de l'engrènement sans charge d'une manière générale puis propose différents modèles de comportement (section 2.2). La section 2.3 aborde les différentes méthodes numériques utilisées suivant le modèle de comportement étudié et la section 2.4 décrit le modèle de substitution de l'engrenage.

2.2 Principe de la simulation d'engrènement-Modèles de comportement

L'objectif de la simulation d'engrènement est de déterminer une estimation de la position angulaire d'une roue pour un ensemble fini ou non de positions angulaires de l'autre roue, les paramètres de l'ellipse de contact (orientation et position et taille en utilisant le modèle d'Hertz par exemple), le(s) point(s) de contact, ... Dans le cas d'engrènement quasi statique et sans charge, la simulation d'engrènement revient à chercher l'angle de rotation de la roue en fonction de l'angle de rotation du pignon par exemple, de telle manière à ce qu'il y ait contact entre deux dents qui engrènent (*Figure 2-2*).

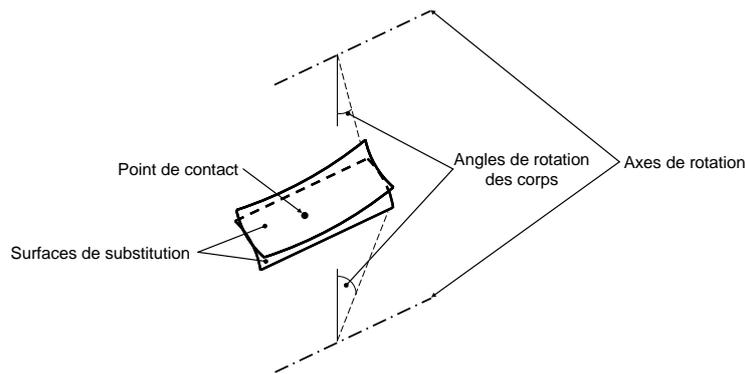


Figure 2-2- Principe de la simulation d'engrènement

Il existe plusieurs modèles de comportements cinématiques sans charge qui peuvent s'appuyer sur une modélisation en deux dimensions ou trois dimensions. La section suivante en expose une liste non exhaustive (Figure 2-3).

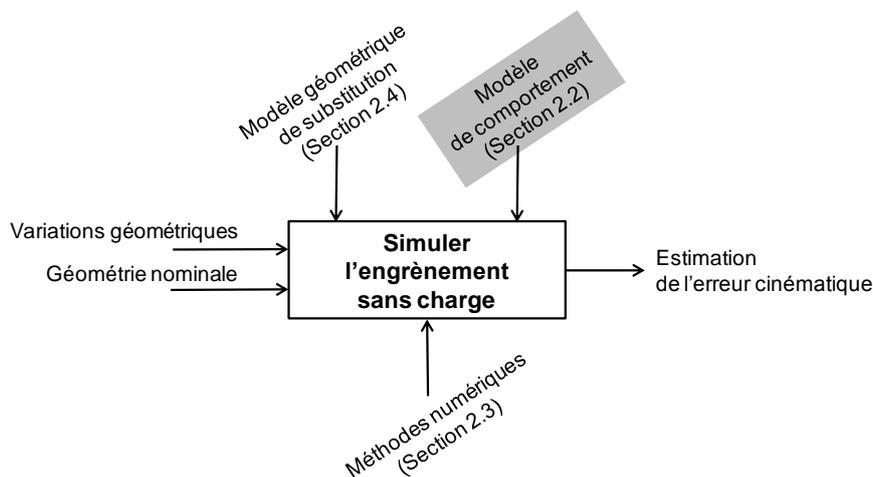


Figure 2-3 – Position de la section 2.2 dans la simulation de l'engrènement sans charge

2.2.1 Modèles de comportement cinématique 2D

La modélisation 2D du comportement cinématique repose sur l'hypothèse suivante : les contacts entre profils conjugués se font relativement proches du plan simultanément tangent aux cylindres de base du pignon et de la roue appelé plan d'action dans le cas des engrenages cylindriques à denture droite à profils développante de cercle [Velex 1995] (Figure 2-4).

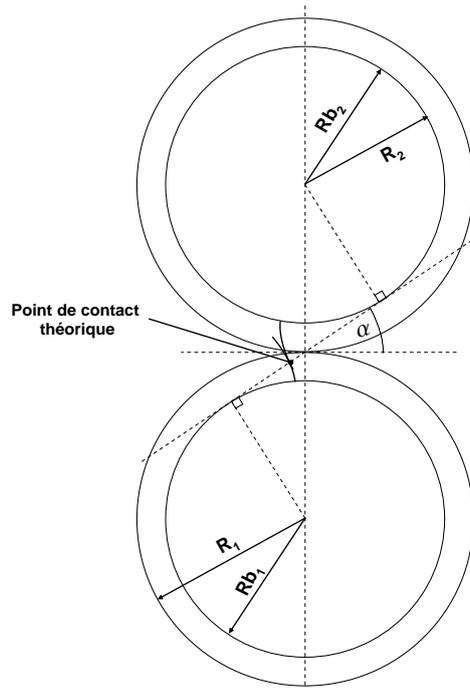


Figure 2-4- Point de contact et droite d'action dans un plan normal aux axes de rotation

La présence de variations géométriques (les écarts de forme des dents, les écarts d'orientation et de position) engendre des écarts entre les deux profils. L'écart total en un point M_i du pignon et de la roue est noté $e(M_i)$ (dans la direction normale au plan d'action). (Figure 2-5).

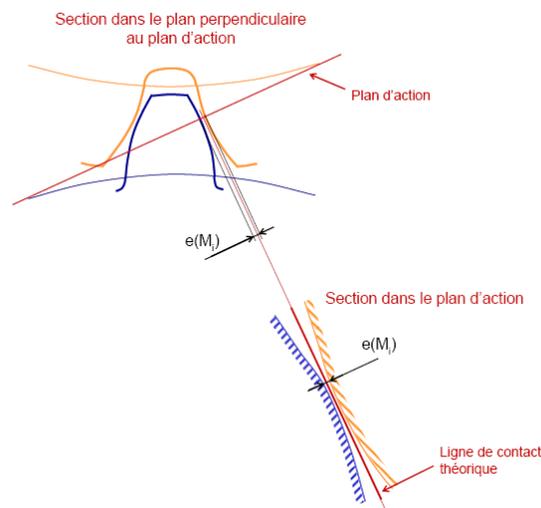


Figure 2-5 – Ecart total dans le plan d'action (denture droite)

Il est explicité par la formule :

$$e(M_i) = ef_p(M_i) + ef_r(M_i) + e_m(M_i) + e_x(M_i) \quad (2.1)$$

Avec :

- $ef_r(M_i)$: écart de forme de la roue au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.
- $ef_p(M_i)$: écart de forme du pignon au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.
- $e_m(M_i)$: écart de montage au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.
- $e_x(M_i)$: écart d'excentration au point M_i normal à la ligne de contact théorique dans le plan d'action.

Considérons un point de contact M^* dans le plan d'action entre les deux dents rigides du pignon et de la roue. Notons \vec{n} la normale commune aux deux surfaces en contact en M^* , orientée suivant le coté extérieur matière au pignon. Dans le cas de mouvement de corps rigides on a :

$$\overrightarrow{V_{M^* \in 2/1}} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.2)$$

Ainsi :

$$(\overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1 M^*} - \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{O_2 M^*}) \cdot \vec{n} + \frac{d}{dt}(e(M^*)) = 0 \quad (2.3)$$

Si la vitesse de rotation d'entrée est Ω_1 , dans le cas des engrenages cylindriques la vitesse de sortie Ω_2 obéit à :

$$\Omega_2 = \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \cdot \Omega_1 - \varepsilon \cdot \frac{\frac{d}{dt}(e(M^*))}{R_{b2} \cdot \cos(\beta_b)} \quad (2.4)$$

Avec :

- $\varepsilon = 1$ si le pignon tourne dans le sens trigonométrique, -1 sinon.
- β_b l'angle d'hélice de base, R_{bi} le rayon de base de l'élément i .

Le second terme de cette équation représente les variations angulaires du solide 2 dues aux écarts géométriques et l'erreur cinématique qui dans ce cas est l'erreur de transmission sans charge. Le calcul de l'écart total $e(M)$ nécessite une discrétisation de la surface active dans le plan d'action (*Figure 2-6*) :

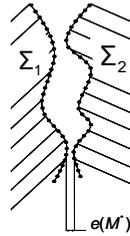


Figure 2-6 – Illustration de l'écart total dans le plan d'action

L'écart minimal $e(M^*)$, représentant le contact entre deux sections de profils dans le plan d'action correspond à la distance minimale signée entre Σ_1 et Σ_2 . Sa valeur est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes qui peut être formulé sous la forme suivante :

$$e(M^*) = \text{Min}(\text{distances signées}(\Sigma_1, \Sigma_2)) \quad (2.5)$$

Enrichi, ce modèle de comportement permet d'étudier le comportement dynamique des engrenages [Velex 1995].

Dans le cadre de la simulation de l'engrènement sans charge, nous proposons un autre modèle de comportement cinématique basé sur la projection des points de la dent du pignon et de la roue qui engrènent, dans le plan d'action. La représentation des surfaces est un ensemble de points et la recherche du point de contact se fait dans le plan d'action :

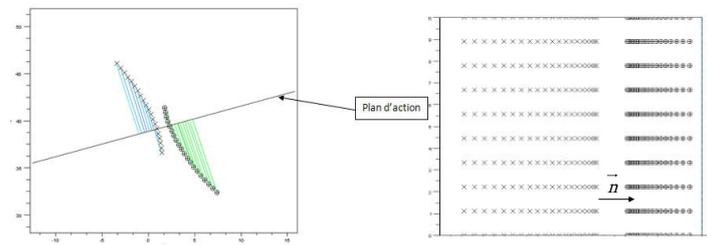


Figure 2-7 – Projection des points dans le plan d'action et points après projection

Considérons \vec{n} la normale à la ligne de contact théorique, projetée dans le plan d'action, extérieure à la matière du pignon (Figure 2-7), Φ_1 l'angle de rotation du pignon (imposé par exemple), Φ_2 l'angle de rotation de la roue à déterminer, P_{pi} (resp. P_{rj}) un point projeté des p points de la dent du pignon (resp. des q points de la roue) sur le plan d'action. La recherche de l'angle de rotation de la roue Φ_2 est effectuée en recherchant la distance minimale signée entre les nuages de points du pignon et de la roue. De la même manière que la formalisation proposée par Velex, la valeur estimée de Φ_2 est obtenue en résolvant un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\text{Min}(\text{distances signées}(\{P_{pi}\}, \{P_{rj}\})) \text{ et distances signées} \geq 0$$

Détermination de Φ_2 : ou

$$\text{distances signées mini}(\{P_{pi}\}, \{P_{rj}\}) = 0$$
(2.6)

La *Figure 2-7* montre une projection de points de surface nominale dans le plan d'action. Des écarts de forme, de position et d'orientation introduisent des écarts entre denture. Dans ce cas, si la condition de non interpénétration est vérifiée sur tous les points du pignon et de la roue, il se peut que le contact réel ne puisse être trouvé. La *Figure 2-8* a montre qu'il existe deux points qui vérifient $\overline{P_{pi}P_{rj}} \cdot \vec{n} \leq 0$, alors que physiquement, il n'y a pas interpénétration des deux nuages de points projetés. L'algorithme ne peut pas converger vers une solution convenable. Pour remédier à cela, la recherche du point de contact ne se fait pas simultanément sur la totalité des nuages de points, mais dans plusieurs espaces de subdivision (*Figure 2-8* b)). La condition de non interpénétration n'est ainsi pas vérifiée sur la totalité du nuage mais indépendamment, à l'intérieur de chaque subdivision. De plus, il n'est pas utile d'étendre la recherche sur tous les points, ainsi est définie une zone de restriction autour de la ligne de contact théorique permettant de diminuer considérablement les temps de calcul. La condition de non interpénétration est vérifiée pour chaque subdivision.

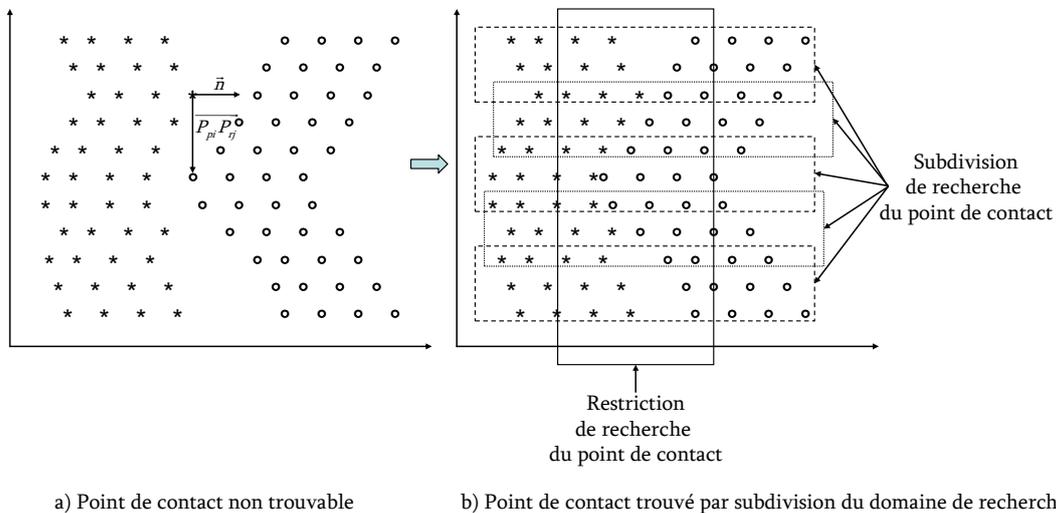


Figure 2-8 – Méthode de recherche du point de contact par subdivision

Ce modèle de comportement est basé sur l'hypothèse que le point de contact est très proche du plan d'action. La dimension de l'étude est abaissée d'un rang puisque les points des surfaces de substitution sont projetés dans un plan, ce qui revient à considérer une perte d'information au niveau de la recherche du point de contact. Cette remarque met en évidence la limite de cette

méthode lorsque les défauts d'orientation, de position et de forme sont importants, ou lorsque l'analyse de l'engrènement se fait sur d'autres profils que celui de la développante de cercle, comme par exemple les engrenages Wildhaber Novikov [Cloutier 1967] à profils en arc de cercle. Ce type de profil convexo-concave ne permet pas l'utilisation d'un modèle de comportement cinématique par projection. En effet la construction géométrique nominale de ce type d'engrenage ne se fait pas à partir d'un plan d'action, mais en s'appuyant sur une trajectoire du point de contact désirée. Le profil est choisi de façon à « habiller » l'engrenage autour de cette trajectoire. La méthode de projection se limite au profil en développante de cercle, ou à tous profils approximables à une développante de cercle, au voisinage du point de contact.

Les deux modèles de comportement cinématique détaillés ci-dessus proposent d'estimer l'erreur cinématique tel qu'il y ait contact en deux surfaces actives de substitution. Cette recherche du point de contact est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte ou de résolution d'une équation non linéaire. Les modèles 2D nécessitent l'existence d'un plan d'action.

Dans la réalité, le point de contact ne se localise pas nécessairement sur le plan d'action à cause de certains défauts géométriques de l'engrenage. Afin d'avoir une meilleure estimation de la position du point de contact et par conséquent de l'erreur cinématique, il est parfois nécessaire d'utiliser des modèles de comportement cinématique en trois dimensions.

2.2.2 Modèles de comportement cinématique 3D

Tooth Contact Analysis

Ce modèle appelé TCA a été développé par la société américaine « The Gleason Work » afin de mieux connaître le contact entre les dents de roues spiro-coniques et hypoïdes. Faydor F. Litvin [Litvin 1986], [Litvin 1992] a développé cette technique et l'utilise pour la conception de roues dentées. Ce modèle trouve son application dans différentes utilisations comme par exemple l'analyse de l'influence des corrections apportées aux surfaces actives sur la sensibilité de l'erreur cinématique aux défauts d'orientation et de position [Litvin 2000], la conception d'engrenages spiro-coniques, l'influence de défauts géométriques de l'engrenage et de montage sur l'erreur cinématique, l'estimation du point de contact entre denture en vue d'une analyse de l'engrènement sous charges (connaissance du point d'application des efforts dans un modèle

éléments fini, étude de la tâche de contact,..), l'influence des variations des paramètres de l'outil générateur sur l'erreur cinématique, etc..

TCA est basé sur la tangence des surfaces aux points de contact. L'estimation de l'angle de rotation de la roue repose sur la recherche d'un point de contact régulier. Cette configuration se traduit mathématiquement par deux conditions qui décrivent le contact :

- Il y a contact, donc égalité des surfaces au point de contact (condition 1).
- Il existe un plan tangent commun aux surfaces au point de contact (condition 2).

Cette modélisation du comportement cinématique en 3D requiert une représentation paramétrique des surfaces actives de toutes les dents du pignon et de la roue qui doit être exprimée dans un même repère. Ainsi la configuration d'un point de contact régulier, c'est-à-dire que les dérivées partielles de la surface par rapport à ses paramètres descripteurs existent, est traduite par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overrightarrow{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \overrightarrow{n_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= -\overrightarrow{n_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 (u_1, v_1) &\in D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Avec :

- $\overrightarrow{s_f^{(i),j}}$ les coordonnées d'un point courant de la j-ième surface du corps i exprimé dans le repère Rf
- $\overrightarrow{n_f^{(i),j}}$ la normale unitaire d'un point courant de la j-ième surface du corps i exprimée dans le repère f.
- u_i et v_i sont les paramètres descripteurs des surfaces du corps i et ϕ_i l'angle de rotation (en radians) du corps i autour de son axe.
- Les domaines D_1 et D_2 dépendant de l'équation des surfaces considérées. D_3 peut être pris égal à R.

La première équation du système (2.7) traduit la condition 1, la seconde la condition 2.

La *Figure 2-9* montre deux surfaces Σ_1 et Σ_2 en contact en un point régulier. Le système (2.7) traduit cette configuration. T représente le plan tangent commun aux deux surfaces Σ_1 et Σ_2 en contact en un point régulier M .

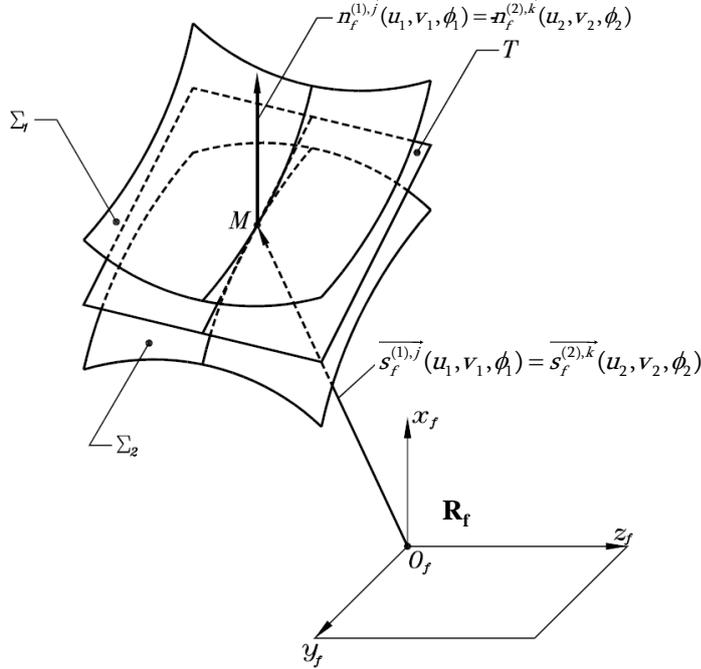


Figure 2-9 – Contact en un point régulier.

Lors de l'engrènement, il se peut que le contact ait lieu sur un des bords des surfaces actives. Dans ce cas, le contact n'a plus lieu en un point régulier, et le plan tangent de la surface n'est pas défini. La dérivée partielle de cette surface au point de contact est orthogonale au vecteur normal de l'autre surface en ce même point. La configuration correspondant à un contact en frontière u_{1fr} de la surface Σ_1 est donnée par le système (2.8).

$$\begin{aligned}
 \overline{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1) &= \overline{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \frac{\delta \overline{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1)}{\delta v_1} \cdot \overline{n_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) &= 0 \\
 u_{1fr} &\text{ fixé} \\
 v_1 &\in F_1 \subset D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La *Figure 2-10* montre deux surfaces Σ_1 et Σ_2 en contact en un point sur une des frontières de Σ_1 .

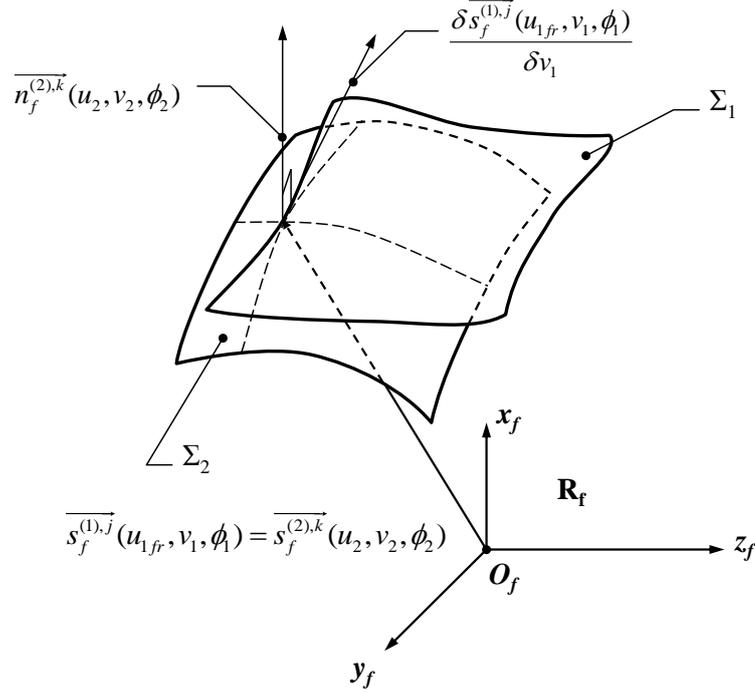


Figure 2-10 – Contact en un point sur la frontière d'une des deux surfaces

Le système (2.7) traduisant le contact en un point régulier est un système non linéaire de 6 équations. Considérons par exemple que l'angle ϕ_1 soit un paramètre d'entrée du système à résoudre. L'objectif de la simulation de l'engrènement est de fournir la relation liant l'angle de rotation de la roue (corps 2) à l'angle de rotation du pignon (corps 1) soit :

$$\phi_2 = f(\phi_1) \quad (2.9)$$

Les systèmes (2.7) et (2.8) font intervenir les normales unitaires des surfaces en un point courant :

$$\overline{n}_f^{(i),k}(u_i, v_i, \phi_i) = \frac{\frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta u_i} \wedge \frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta v_i}}{\left\| \frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta u_i} \wedge \frac{\delta s_f^{(i),j}(u_i, v_i, \phi_i)}{\delta v_i} \right\|} \quad (2.10)$$

Dépendant de l'expression des surfaces dans le repère global R_f , l'expression des normales unitaires peut être relativement lourde à manipuler du fait de la normalisation. Il est donc judicieux de modifier l'expression des systèmes (2.7) et (2.8) pour alléger la résolution. Dans le cas d'un point de contact régulier, la configuration du contact est traduite par le système (2.11) et dans le cas d'un contact en frontière, par le système (2.12). Le système (2.11) est un système non linéaire, de 6 équations scalaires à 6 inconnues qui sont $(u_1, v_1, u_2, v_2, \phi_2, \lambda)^T$. λ est le coefficient de colinéarité des normales qui permet donc de s'affranchir de la normalisation de celles-ci. Le

système (2.12) est lui aussi un système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues qui sont $(v_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overrightarrow{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \overrightarrow{N_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \lambda \cdot \overrightarrow{N_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \lambda &\in R \\
 (u_1, v_1) &\in D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1) &= \overrightarrow{s_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 \frac{\delta \overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_{1fr}, v_1, \phi_1)}{\delta v_1} \cdot \overrightarrow{N_f^{(2),k}}(u_2, v_2, \phi_2) &= 0 \\
 u_{1fr} &\text{ fixé} \\
 v_1 &\in F_1 \subset D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il est impossible d'obtenir des solutions explicites des inconnues en fonction du paramètre d'entrée ϕ_1 et des écarts géométriques. Il est nécessaire de résoudre ces systèmes en faisant appel à des méthodes numériques de résolutions de systèmes non linéaires. Ainsi, la résolution se fait sur un ensemble de valeurs numériques de ϕ_1 , et pour chacune de ses valeurs, les systèmes (2.11) et (2.12) sont résolus suivant la configuration du contact. La représentation de l'erreur cinématique obtenue est un ensemble de bipoints $(\phi_{2i}, \phi_{1i})^T$.

Ce modèle de comportement cinématique 3D, s'affranchit des hypothèses des modèles 2D. TCA est très flexible : il est en effet possible de considérer une très grande diversité de formes pour les surfaces. Il est néanmoins nécessaire d'avoir une représentation paramétrique des surfaces. De plus, la résolution des systèmes peut parfois poser des problèmes de convergence.

Dichotomie « 3D »

Les systèmes non linéaires décrits par les équations (2.11) et (2.12) sont généralement lourds à manipuler et plus particulièrement les équations faisant intervenir les normales. Nous proposons un modèle de comportement cinématique basé sur la dichotomie pour la résolution. Le modèle de comportement cinématique basé sur la dichotomie en trois dimensions s'affranchit des équations des normales et dérivées partielles des surfaces. La recherche du point de contact entre deux dents qui engrènent est basée sur l'égalité des surfaces au point de contact et sur une condition de non interpénétration des surfaces de substitution :

$$\begin{aligned}
 \overline{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overline{s_f^{(2),j}}(u_2, v_2, \phi_2) \\
 (u_1, v_1) &\in D_1 \\
 (u_2, v_2) &\in D_2 \\
 (\phi_1, \phi_2) &\in D_3 \\
 \text{distance signée } (\overline{s_f^{(1),j}}(u_1^*, v_1^*, \phi_1), \overline{s_f^{(2),j}}(u_2^*, v_2^*, \phi_2)) &> \varepsilon \\
 \varepsilon &\geq 0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ce système est composé de trois équations non linéaires. L'angle ϕ_1 est un paramètre d'entrée. L'angle de rotation de la roue est tel qu'il y ait contact entre deux surfaces de substitution, sans interpénétration. Il est obtenu en résolvant ce système non linéaire, sous contrainte.

L'étude menée sur les différents modèles de comportement géométrique met en avant deux types d'approches : l'estimation de la relation cinématique de l'engrenage basé sur un modèle 2D ou 3D. Dans chacune des approches exposées, la recherche de l'angle de rotation de la roue en fonction de l'angle de rotation du pignon se fait de manière à ce qu'il y ait contact sans interpénétration entre deux dents qui engrènent. L'estimation de cet angle est basée sur des méthodes numériques propres à chaque modèle : les modèles cinématique 2D sont basé sur un problème d'optimisation sous contraintes ou la résolution d'une équation non linéaire non connue sous sa forme analytique mais calculable en un ensemble de points. La méthode TCA est basée sur la résolution numérique de systèmes non linéaires. La dichotomie « 3D » est basée sur la résolution numérique de systèmes non linéaires sous contraintes (*Figure 2-11*) ou la résolution d'une équation non linéaire non connue sous sa forme analytique mais calculable en un ensemble de points.

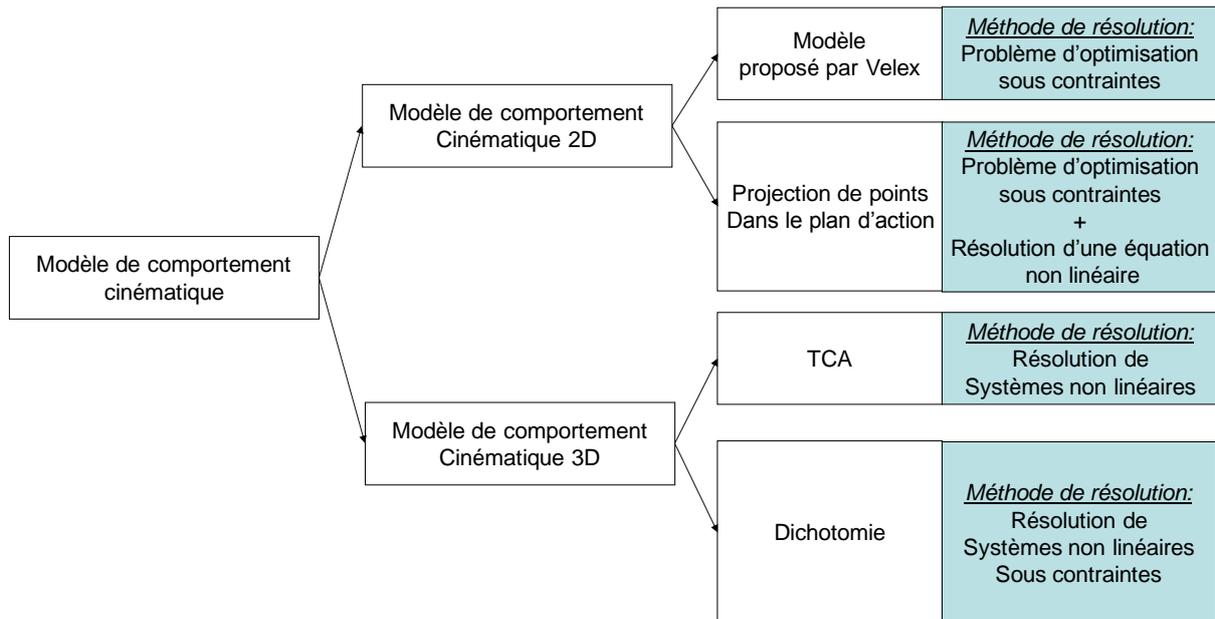


Figure 2-11 – Modèles de comportement et méthodes de résolution associées

L'objectif de la section suivante est de détailler les méthodes numériques mises en œuvre pour chacun des quatre modèles de comportement proposés.

2.3 Méthodes numériques pour la simulation de l'engrènement

La section précédente montre que l'estimation de l'erreur cinématique d'un engrenage repose sur la recherche du point de contact entre deux dents qui engrènent. La formulation mathématique de la recherche du point de contact revient à un problème d'optimisation sous contraintes ou à la résolution de systèmes non linéaires contraints ou non pour les modèles étudiés. L'objectif de cette section est de détailler ces méthodes numériques pour les modèles que nous proposons à savoir la méthode de projection de points dans le plan d'action, la méthode TCA et la méthode basée sur la dichotomie en trois dimensions (*Figure 2-12*)

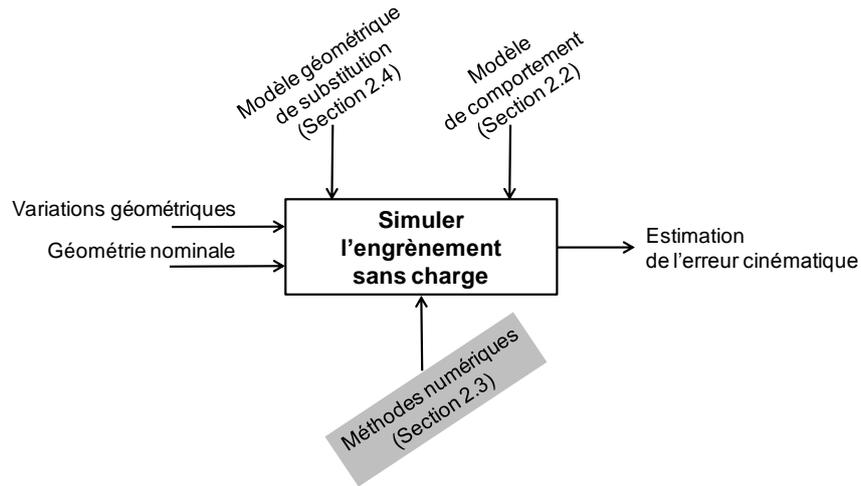


Figure 2-12 - Position de la section 2.3 dans la simulation de l'engrènement sans charge

2.3.1 Méthodes numériques dans le cas d'une formulation basée sur un modèle 2D par projection des points dans le plan d'action

Formulation mathématique du problème :

$$\text{Min}(\text{distance signée}(\{P_{pi}\}\{P_{rj}\})) \text{ et distance signée} \geq 0$$

ou

$$\text{distance signée mini}(\{P_{pi}\}\{P_{rj}\}) = 0$$

Cette formulation correspond au modèle de comportement basé sur la projection des points des surfaces de substitution dans le plan d'action. Pour ce modèle de comportement, il a été vu que l'estimation de l'angle de rotation de la roue est basée sur un problème d'optimisation sous contraintes ou la résolution d'une résolution non linéaire non connue sous sa forme analytique mais calculable en tous points. Plusieurs méthodes numériques ont été expérimentées et nous proposons une résolution de ce problème en utilisant une méthode basée sur la méthode de la sécante. L'allure de la distance minimale séparant les deux nuages de points, en fonction de l'angle de rotation Φ_2 est donnée *Figure 2-13*. La distance minimale est une fonction discrète et croissante de l'angle de rotation de la roue Φ_2 (représentée en pointillé). Une distance minimale négative correspond à une interpénétration des nuages de points. L'objectif est de déterminer l'angle Φ_{2c} tel que d_{mini} soit minimale et positive. La méthode de la sécante est particulièrement bien adaptée à ce problème du fait de la monotonie de la fonction. L'angle Φ_{2a} (resp. Φ_{2b}) correspond au cas où les nuages s'interpénètrent (resp. ne s'interpénètrent pas) :

$$d_{\text{mini}_a} = \text{distance signée mini}(\Phi_{2a}) < 0 \text{ et } d_{\text{mini}_b} = \text{distance signée mini}(\Phi_{2b}) > 0$$

L'angle Φ_{2c} est donné par la relation :

$$\Phi_{2c} = \Phi_{2b} - d_{\text{mini}_b} \cdot \frac{\Phi_{2b} - \Phi_{2a}}{d_{\text{mini}_b} - d_{\text{mini}_a}}$$

Si distance signée $\text{mini}(\Phi_{2c}) < 0$ alors $\Phi_{2a} = \Phi_{2c}$, si distance signée $\text{mini}(\Phi_{2c}) > 0$ alors $\Phi_{2b} = \Phi_{2c}$.

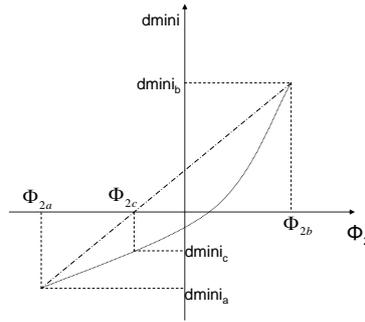


Figure 2-13 – Allure de la distance minimale signée séparant les nuages de points projetés dans le plan d'action.

Etant donné la formulation discrète du problème pour ce cas, l'estimation de l'angle Φ_2 tel qu'il y ait contact ne peut se faire que pour un ensemble fini de valeurs pour Φ_1 . L'erreur cinématique estimée est un ensemble discret de couplets $(\phi_{1k}, \phi_{2k})^T$.

Considérons une valeur quelconque de ϕ_{1k} telle qu'il y a un contact potentiel entre deux dents.

Pour un angle de rotation de la roue ϕ_2 , la liste V de dimension $p.q$ tel que :

$$V(\Phi_2) = \left\{ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{p.q} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\| \overline{P_{p1} P_{r1}} \right\| \\ \left\| \overline{P_{p1} P_{r2}} \right\| \\ \vdots \\ \left\| \overline{P_{pp} P_{rq}} \right\| \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

représente l'ensemble des distances entre les deux nuages de points. Le pseudo code d'estimation de ϕ_{2k} est le suivant :

$\Phi_{2k} = \text{Secante}(\Phi_{1k})$
<p>Initialisation :</p> $d\text{mini}_a = \min(V(\Phi_{2a}))$ $d\text{mini}_b = \min(V(\Phi_{2b}))$ $\Phi_{2c} = \Phi_{2b} - d\text{mini}_b \cdot \frac{\Phi_{2b} - \Phi_{2a}}{d\text{mini}_b - d\text{mini}_a}$ $d\text{mini}_c = \min(V(\Phi_{2c}))$ $\varepsilon = 10^{-5}$ $\text{stop} = 1000;$
<p>Tant que la distance minimale de \vec{V} est supérieure à ε et que le critère d'arrêt n'est pas atteint :</p> <p>While $d\text{mini}_c \geq \varepsilon$ et $d\text{mini}_c < 0$ et $\text{stop}_i \leq \text{stop}$</p> <p style="padding-left: 20px;">$\text{stop}_i = \text{stop}_i + 1$</p> <p style="padding-left: 20px;">Si il y a interpénétration, alors Φ_{2a} est recalculé</p> <p style="padding-left: 20px;">If $d\text{mini}_c < 0$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\Phi_{2a} = \Phi_{2c}$</p> <p style="padding-left: 20px;">Sinon Φ_{2b} est recalculé</p> <p style="padding-left: 20px;">ElseIf $\Phi_{2b} = \Phi_{2c}$</p> <p style="padding-left: 20px;">Fin If</p> <p style="padding-left: 20px;">$d\text{mini}_a = \min(\vec{V}(\Phi_{2a}))$</p> <p style="padding-left: 20px;">$d\text{mini}_b = \min(\vec{V}(\Phi_{2b}))$</p> <p style="padding-left: 20px;">$\Phi_{2c} = \Phi_{2b} - d\text{mini}_b \cdot (\Phi_{2b} - \Phi_{2a}) / (d\text{mini}_b - d\text{mini}_a)$</p> <p style="padding-left: 20px;">$d\text{mini}_c = \min(\vec{V}(\Phi_{2c}))$</p> <p>Fin While</p> <p>$\Phi_{2k} = \Phi_{2c}$</p>

Tableau 2-1- Pseudo Code pour la méthode de projection de points

2.3.2 Méthodes numériques dans le cas d'une formulation de type systèmes non linéaires continus

Lors de l'engrènement sans charge, il existe au moins un point de contact entre deux dents qui engrènent. La méthode TCA permet de traduire mathématiquement l'existence d'un point de contact régulier (système (2.11)) ou sur les bords d'une des deux surfaces (système (2.12)) sous la forme de systèmes non linéaires. La recherche du point de contact basée sur la dichotomie quant à elle est donnée par la résolution du système (2.13). L'objectif de cette section est de présenter la démarche utilisée pour la résolution des systèmes non linéaires continus. Trois algorithmes ont été testés (Newton-Raphson, Levenberg Marquardt, Brent) et comparés entre terme de précision (résidu minimum) et de rapidité (temps de résolution des systèmes).

Quelque soit l'algorithme utilisé pour la résolution d'un système non linéaire, il est nécessaire de posséder une valeur approchée de la solution recherchée. Cette valeur doit être, dans la mesure du possible, la plus proche de la solution du système (risque de non convergence de l'algorithme). Elle peut être obtenue de différentes manières : mesures physiques du cas traité, approximation graphiques, expérience de l'utilisateur, etc...

Les différents algorithmes étudiés

Algorithme de Newton Raphson :

Considérons un système non linéaire de n équations à n inconnues. Résoudre ce système revient à écrire :

$$\begin{cases} f_1(\vec{X}) = 0 \\ f_2(\vec{X}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\vec{X}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{X}) = \vec{0} \quad \vec{X} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{cases} \quad (2.15)$$

\vec{F} est une application vectorielle à valeur dans \mathbb{R}^n , dans notre cas composée des n équations du système. \vec{X} est le vecteur inconnu composé des n inconnues.

La méthode de Newton-Raphson [Vignes 1980], [Nougier 2001] consiste à linéariser \vec{F} au voisinage d'une solution initiale \vec{X}_0 proche de la solution recherchée.

Considérons $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ un vecteur de départ proche de \vec{X}^* la solution recherchée, et \vec{F} dérivable. Alors si \vec{X}^0 est relativement proche de \vec{X}^* , il est possible de donner un développement limité de $\vec{F}(\vec{X}^*)$ au voisinage de \vec{X}^0 :

$$f_i(\overline{X}^*) = f_i(\overline{X}^0) + \sum_{j=1}^n (x_j^* - x_j^0) \cdot \frac{\partial f_i(\overline{X}^0)}{\partial x_j} + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (x_j^* - x_j^0) \cdot (x_k^* - x_k^0) \cdot \frac{\partial^2 f_i(\overline{X}^0)}{\partial x_j \partial x_k} + \dots \quad (2.16)$$

$i = 1, \dots, n.$

En ne considérant que l'ordre 1, une approximation \overline{X}^1 de \overline{X}^* est donné par :

$$f_i(\overline{X}^0) + \sum_{j=1}^n (x_j^1 - x_j^0) \cdot \frac{\partial f_i(\overline{X}^0)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.17)$$

$i = 1, \dots, n.$

Ainsi en notant $\Delta \overline{X}^0 = \overline{X}^1 - \overline{X}^0$, le développement de la formule (2.17) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1(\overline{X}^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_1(\overline{X}^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial f_1(\overline{X}^0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^0 + f_1(\overline{X}^0) = 0 \\ \frac{\partial f_2(\overline{X}^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_2(\overline{X}^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial f_2(\overline{X}^0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^0 + f_2(\overline{X}^0) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(\overline{X}^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^0 + \frac{\partial f_n(\overline{X}^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^0 + \dots + \frac{\partial f_n(\overline{X}^0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^0 + f_n(\overline{X}^0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

La valeur de \overline{X}^1 est à priori plus proche de \overline{X}^* que ne l'est \overline{X}^0 . Une méthode itérative est donc mise en place :

$$\overline{X}^{n+1} = \overline{X}^n + \Delta \overline{X}^n \quad (2.19)$$

Ainsi le système linéaire (2.18) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1(\overline{X}^m)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^m + \frac{\partial f_1(\overline{X}^m)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^m + \dots + \frac{\partial f_1(\overline{X}^m)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^m + f_1(\overline{X}^m) = 0 \\ \frac{\partial f_2(\overline{X}^m)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^m + \frac{\partial f_2(\overline{X}^m)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^m + \dots + \frac{\partial f_2(\overline{X}^m)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^m + f_2(\overline{X}^m) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_n(\overline{X}^m)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1^m + \frac{\partial f_n(\overline{X}^m)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2^m + \dots + \frac{\partial f_n(\overline{X}^m)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n^m + f_n(\overline{X}^m) = 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

(2.20) peut être défini via une écriture matricielle. En appelant $J(\overline{X})$ la matrice jacobienne de dimension $n \times n$:

$$J(\bar{X}) = \left[\frac{\partial f_i(\bar{X})}{\partial x_j} \right]$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, n$$

On a :

$$J(\bar{X}^n) \cdot \Delta \bar{X}^n + \vec{F}(\bar{X}^n) = 0 \quad (2.21)$$

Si $Det(J(\bar{X}^n)) \neq 0$ alors :

$$\bar{X}^{n+1} = \bar{X}^n - J^{-1}(\bar{X}^n) \cdot \vec{F}(\bar{X}^n) \quad (2.22)$$

La méthode de Newton-Raphson propose donc une convergence quadratique qui dans certain cas converge pour un faible nombre d'itérations. Néanmoins elle n'est pas sans inconvénients : Il est nécessaire d'avoir un vecteur de départ qui soit suffisamment proche de la solution recherchée. Dans le cas contraire, il se peut que la suite (2.22) ne converge pas. De plus elle nécessite l'inversion de la matrice jacobienne, ce qui peut poser problème dans le cas où la matrice est singulière (déterminant nul) ou mal conditionnée (déterminant proche de 0).

Algorithme de Levenberg-Marquardt :

L'algorithme de Levenberg-Marquardt [Levenberg 1944], [Marquardt 1963], [Ma 2007] fournit une solution au problème de minimisation des moindres carrés. Au lieu de minimiser directement le vecteur $\vec{F}(\bar{X})$, Levenberg puis Marquardt ont proposé de minimiser la norme au carré de ce vecteur :

$$\min_{\bar{X}} \left(\sum_{i=1}^n f_i(\bar{X})^2 \right) \quad (2.23)$$

Appelons $g(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n f_i(\bar{X})^2$ la fonction à minimiser. Un développement limité de $g(\bar{X})$ au second ordre au voisinage de $\bar{X}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^T$ estimé à la k ème itération est donné par :

$$g(\bar{X}) \approx g(\bar{X}^k + \Delta \bar{X}) \approx g(\bar{X}^k) + \Delta \bar{X}^T \cdot \nabla g(\bar{X}^k) + \Delta \bar{X}^T \cdot H(\bar{X}^k) \cdot \Delta \bar{X} \quad (2.24)$$

Avec :

$$-\nabla g(\bar{X}^k) = \left(\frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_n} \right)^T \text{ le vecteur gradient de } g \text{ en } \bar{X}^k$$

$$-H(\bar{X}^k) = \left[\frac{\partial^2 S(\bar{X}^k)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \text{ la matrice hessienne de } S \text{ en } \bar{X}^k.$$

Si la relation (2.24) est exacte, c'est-à-dire que les termes d'ordres supérieurs stricts à deux sont négligeables devant les termes d'ordre inférieurs, alors on peut écrire le gradient de g de la manière suivante :

$$\nabla g(\bar{X}) = \nabla g(\bar{X}^k) + 2.H(\bar{X}^k).\Delta \bar{X} \quad (2.25)$$

L'objectif étant de trouver une valeur de \bar{X}_k qui minimise $g(\bar{X})$, donc qui annule le gradient $\nabla g(\bar{X})$, on peut écrire la relation récurrente suivante :

$$2.H(\bar{X}^k).(\bar{X}^{k+1} - \bar{X}^k) = -\nabla g(\bar{X}^k) \quad (2.26)$$

Avec :

$$\nabla g(\bar{X}^k) = \begin{cases} \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g(\bar{X}^k)}{\partial x_n} \end{cases} = 2 \cdot \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{X}^k)}{\partial x_1} \cdot f_i(\bar{X}^k) \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{X}^k)}{\partial x_2} \cdot f_i(\bar{X}^k) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{X}^k)}{\partial x_n} \cdot f_i(\bar{X}^k) \end{cases} \quad (2.27)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\nabla g(\bar{X}^k) = 2.J(\bar{X}^k)^T \cdot \bar{F}(\bar{X}^k) \quad (2.28)$$

Finalement, à partir de (2.28), (2.26) devient :

$$H(\bar{X}^k).(\bar{X}^{k+1} - \bar{X}^k) = -J(\bar{X}^k)^T \cdot \bar{F}(\bar{X}^k) \quad (2.29)$$

La matrice hessienne peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(\bar{X}^k) = J(\bar{X}^k)^T \cdot J(\bar{X}^k) + B \quad (2.30)$$

Avec :

$$B_{ij}(\bar{X}^k) = 2 \cdot \sum_{l=1}^n f_l(\bar{X}^k) \cdot \frac{\partial^2 f_l(\bar{X}^k)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.31)$$

Cette matrice, qui traduit la non linéarité du système, est dans certains cas lourde à calculer. Levenberg propose de remplacer cette matrice par une matrice proportionnelle à la matrice identité. Ainsi, (2.31) devient :

$$(J(\bar{X}^k)^T \cdot J(\bar{X}^k) + \mu.I).(\bar{X}^{k+1} - \bar{X}^k) = -J(\bar{X}^k)^T \cdot \bar{F}(\bar{X}^k) \quad (2.32)$$

μ est comparable à un coefficient d'amortissement. Le choix de μ se fait généralement de manière heuristique [Marquardt 1963]. Si la matrice J est mal conditionnée, alors il faudra choisir une valeur de μ suffisamment grande pour que $J(\overline{X}^k)^T . J(\overline{X}^k)$ devienne négligeable devant $\mu . I$. Ainsi le problème se rapproche de la méthode de la plus grande pente [Nougier 2001]. Dans le cas contraire, μ prendra une valeur faible et le problème reviendra donc à la méthode de Newton-Raphson.

La méthode de Levenberg-Marquardt est donc une méthode « mixant » la méthode de Newton-Raphson et la méthode de la plus grande pente. Elle est donc très utile dans le cas où la matrice jacobienne est mal conditionnée (cas des contacts proches des bords de la dent). Cependant dans le cas où le jacobien est régulier, cette méthode peut prendre plus de temps à converger que la méthode de Newton-Raphson.

Algorithme de Brent :

La méthode de Brent combine plusieurs méthodes de recherche de zéros d'une fonction : la dichotomie, l'interpolation quadratique inverse, et la méthode de la sécante [Vignes 1980]. Dans la mesure du possible, la méthode de Brent privilégie l'utilisation de l'interpolation inverse ou la méthode de la sécante car la dichotomie possède l'inconvénient de ne reposer que sur le signe de la fonction à minimiser, ce qui constitue une perte d'information et donc, peut donner lieu à des temps de convergence très long. La méthode de Brent est une méthode hybride qui converge très souvent, et s'affranchit du calcul des dérivées de la fonction à minimiser, mais peut donner lieu à des résidus plus importants que ceux offerts par la méthode de Newton Raphson ou Levenberg Marquardt.

Choix de l'algorithme utilisé

Le choix de l'algorithme utilisé est basé sur deux critères : le résidu et le temps mis pour résoudre un système non linéaire. Le **Tableau 2-2** montre les résultats obtenus pour la résolution de 3600 systèmes non linéaires (3600 contacts différents entre dents – identiques pour chaque algorithme) sur le même ordinateur.

	Temps de calcul moyen	Résidu moyen
Levenberg-Marquardt	0,39"	8.10^{-27}
Newton	1,09"	10^{-26}
Brent	0,22"	$7,3.10^{-10}$

Tableau 2-2 – Comparaison des méthodes de résolution de systèmes non linéaires

L'algorithme de Brent converge plus rapidement que les deux autres, mais donne un résidu moyen le plus grand. L'algorithme basé sur la méthode de Levenberg Marquardt est un bon compromis entre la rapidité de calcul et la précision sur le résidu. Il est donc utilisé dans l'outil d'analyse de l'engrènement basé sur la méthode TCA et la méthode de la dichotomie. Le pseudo algorithme utilisé pour la méthode TCA est le suivant :

$$\Phi_{2k} = \text{TCA}(\Phi_{1k})$$

Initialisation :

$$res_{\max} = 10^{-10}$$

Recherche de point de contact potentiel en testant p.q solutions initiales : pour chacune de ces valeurs résoudre le système (1.11).

For pp=1 to p,

For qq=1 to q,

$$(u_{10}, v_{10}, u_{20}, v_{20}, k, \phi_{2k}^i) = (u_{10pq}, v_{10pq}, u_{20pq}, v_{20pq}, k_0, \frac{z_1}{z_2} \phi_{1k}^i)$$

Résoudre le système (1.11) et enregistrer les solutions

$$(u_{10pqsol}, v_{10pqsol}, u_{20pqsol}, v_{20pqsol}, k_{sol}, \phi_{2ksol}^i)$$

End For

End For

Eliminer les solutions qui correspondent à un résidu supérieur à res_{\max}

Pour chaque solution restante, vérifier leur appartenance aux domaines de travail

For pp=1 to p,

For qq=1 to q,

If $(u_{10pqsol}, v_{10pqsol}) \notin D_1$ ou $(u_{20pqsol}, v_{20pqsol}) \notin D_2$

Résoudre le système (1.12) correspondant, Enregistrer les solutions offrant un résidu inférieur à res_{\max} .

Sinon Enregistrer les solutions comprises dans les domaines

End For

End For

Parmi toute les solutions, conserver celle qui correspondent à la valeur maximum des ϕ_{2k}^i trouvées.

$$\phi_{2k} = \max(\phi_{2k}^i)$$

La configuration du contact est donnée par $(\phi_{1k}, u_{1sol}, v_{1sol}, u_{2sol}, v_{2sol}, k_{sol}, \phi_{2ksol})$

Tableau 2-3 – Pseudo code pour la méthode TCA

La définition du vecteur de départ influe sur la résolution du système non linéaire. De ce fait, plusieurs définitions ont été testées : point milieu de la dent, quadrillage de la surface de la dent et point de contact identifié à l'itération précédente. Lorsque l'engrenage présente un bombé supérieur au défaut de forme, la première et la dernière solutions sont satisfaisantes et évitent de résoudre plusieurs fois le système non linéaire avec des vecteurs de départ différents. Par contre, lorsque le bombé est faible ou inexistant, la solution de quadrillage est pertinente. Nous avons testé deux répartitions du quadrillage : 3 x 3 points et 4 x 4 points répartis sur le flanc. Dans le cas où le contact risque de passer d'un côté à l'autre de la dent, cette définition par quadrillage est nécessaire : Simulation de l'engrènement sans charge d'un engrenage hélicoïdal à partir de données de métrologie effectuées au laboratoire BIMAQ de l'Université de BREMEN.

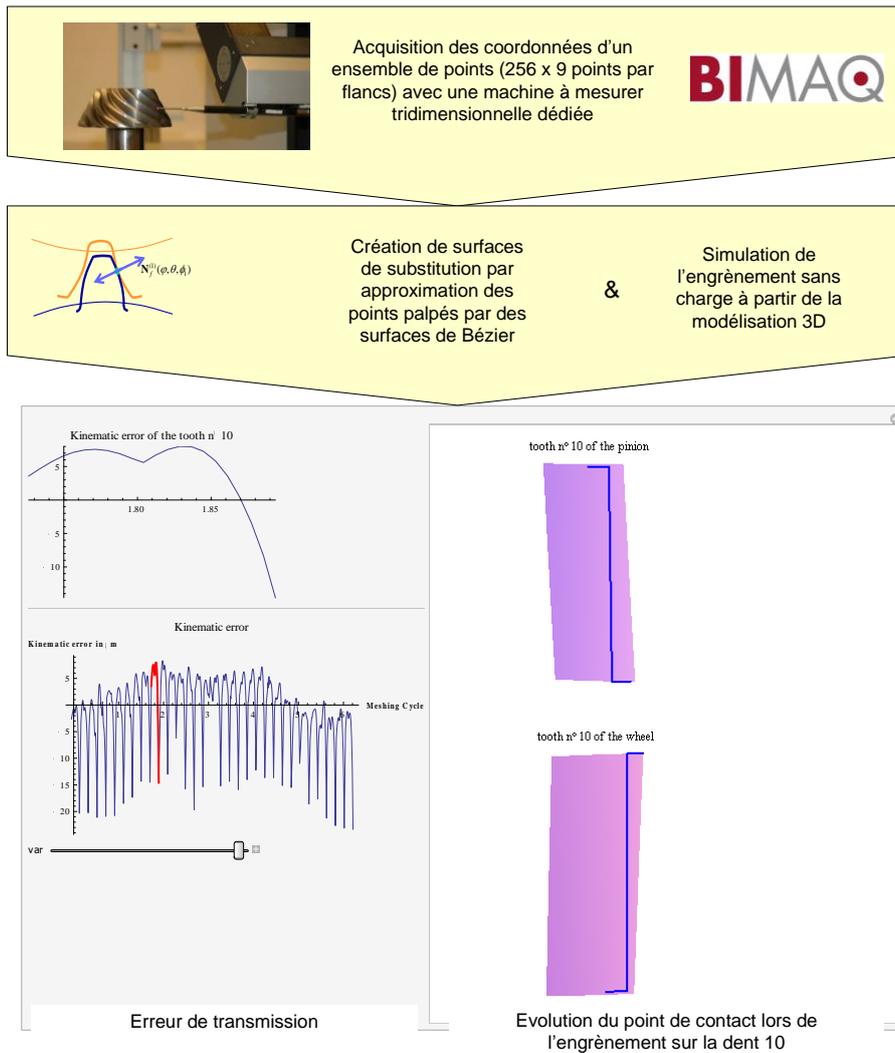


Figure 2-14 Simulation d'engrènement à partir de données de métrologie 3D.

2.3.3 Méthodes numériques dans le cas d'une formulation basée sur un modèle 3D via une résolution par dichotomie.

Le modèle de comportement basé sur la dichotomie repose sur la résolution d'un système non linéaire et d'une contrainte de non interpénétration. La résolution du système (2.13) est faite en utilisant la méthode de Levenberg-Marquardt. Le système (2.13) est non linéaire, composé de 3 équations :

$$\begin{aligned} \overline{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1) &= \overline{s_f^{(2),j}}(u_2, v_2, \phi_2) \\ (u_1, v_1) &\in D_1 \\ (u_2, v_2) &\in D_2 \\ (\phi_1, \phi_2) &\in D_3 \end{aligned}$$

L'angle de rotation du pignon est un paramètre d'entrée et l'angle de rotation de la roue ϕ_2 est estimé en utilisant la méthode de la dichotomie. Cette méthode itérative nécessite la résolution du système précédent qui possède alors 5 inconnues qui sont le vecteur $(u_1, v_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$ (ϕ_1 est un paramètre d'entrée du système)

Ainsi pour résoudre le système (2.13), il est nécessaire de fixer un paramètre supplémentaire parmi les 5 inconnues restantes : prenons arbitrairement v_1 , il reste 4 inconnues : $(u_1, u_2, v_2, \phi_2)^T$. Ce système possède une infinité de solutions.

La dichotomie est alors appliquée sur la variable Φ_{2k} avec la contrainte de non interprétation :

$$\text{distance signée } (\overrightarrow{s_f^{(1),j}}(u_1, v_1, \phi_1), \overrightarrow{s_f^{(2),j}}(u_2, v_2, \phi_1)) > \varepsilon$$

$$\varepsilon \geq 0$$

En utilisant cette méthode, il est pourtant pratiquement impossible de trouver l'unique point de contact entre les dents. En réalité, la valeur souhaitée de l'angle $\phi_{2i}(\phi_{1i})$ correspondant physiquement à une très légère pénétration des dents. Pour cette valeur, il existe donc un nombre p de points de contact très rapprochés, qui seront considérés comme le point de contact entre dents. La démarche suivie est la suivante :

- Il est possible de trouver deux valeurs ϕ_{2ia} (resp. ϕ_{2ib}) pour lesquelles les surfaces ne s'intersectent pas (resp. s'intersectent) correspondant à une valeur ϕ_{1i} .
- La dichotomie est ensuite utilisée pour réduire l'intervalle $[\phi_{2ia}, \phi_{2ib}]$ en garantissant les contraintes d'intersection pour ϕ_{2ia} et de non intersection pour ϕ_{2ib} .
- Un point de contact est ensuite choisi parmi ces p points de contact (interpénétration minimale par exemple).

La *Figure 2-15* expose la démarche suivie.

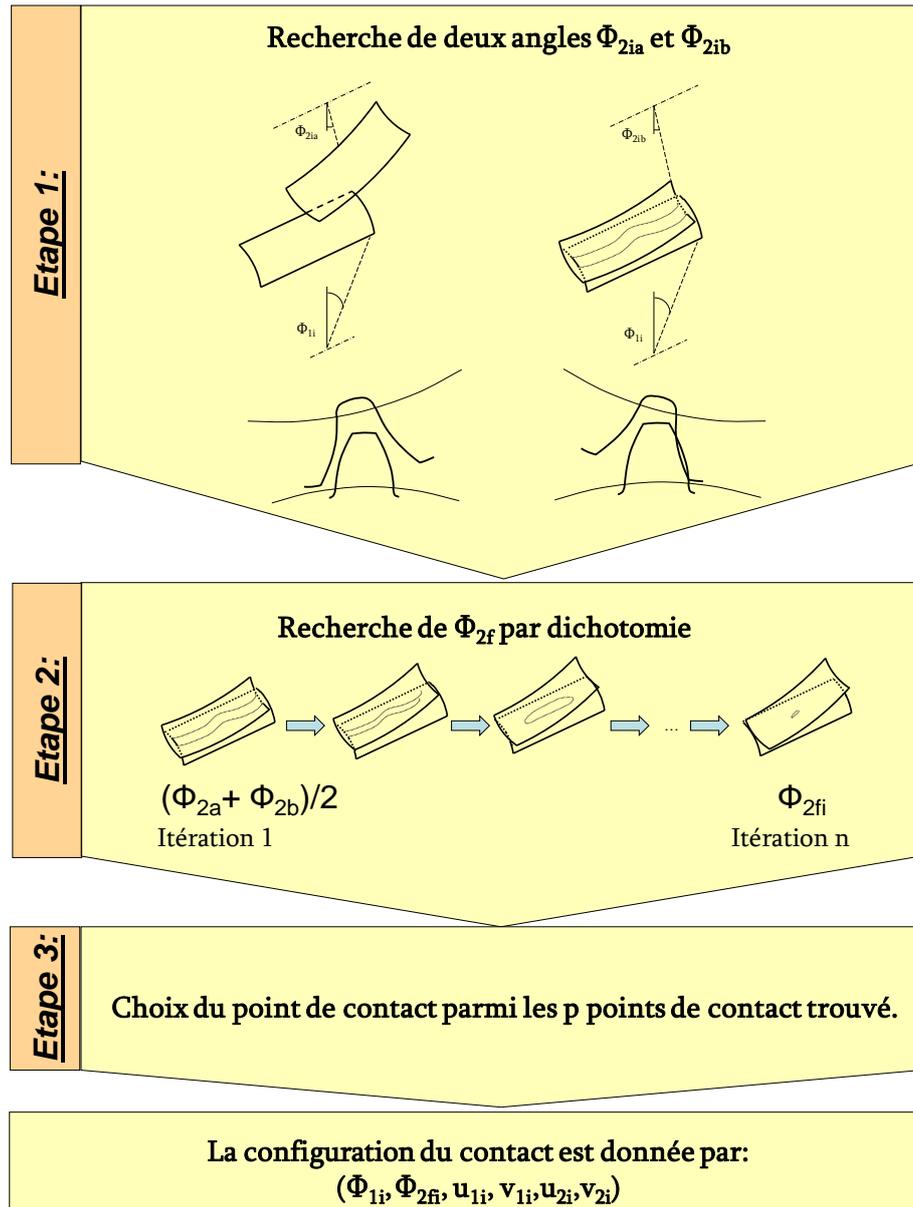


Figure 2-15 – Démarche pour la recherche du point de contact basé sur la dichotomie « 3D ».

Le pseudo code de la méthode d'estimation de l'angle de rotation de la roue est le suivant :

$\Phi_{2k} = \text{Dichotomie}(\Phi_{1k})$
<p>Initialisation :</p> <p>Résidu maximum admissible :</p> $res_{\max} = 10^{-10}$ <p>Erreur sur l'angle de rotation ϕ_2 :</p> $\varepsilon_{\phi_2} = 10^{-7}$ <p>Critère d'arrêt en cas de non convergence :</p> <p>stopi=100 ; stop=0 ;</p> <p>Recherche d'un angle ϕ_{2ka}^i tel qu'il n'y ait pas interpénétration</p> <p>Recherche d'un angle ϕ_{2kb}^i tel qu'il y ait interpénétration</p> <p>Début de la méthode par dichotomie</p> <p>stop=0 ;</p> $\phi_{2a} = \phi_{2ka}^i \text{ et } \phi_{2b} = \phi_{2kb}^i$ $\phi_{2c} = \frac{(\phi_{2a} + \phi_{2b})}{2}$ <p>While stop < stopi or $\phi_{2a} - \phi_{2b} > \varepsilon_{\phi_2}$,</p> <p style="padding-left: 20px;">For l=1 to nbv₁</p> $v_{1l} = \frac{l-1}{nbv_1 - 1}$ <p style="padding-left: 40px;">Résoudre le système 1.13 pour nbv₁ valeurs de v₁ et la valeur de ϕ_{2c}</p> <p style="padding-left: 40px;">Conservé les nbsol solutions correspondant à un résidu inférieur à res_{max}</p> <p style="padding-left: 20px;">End For</p> <p style="padding-left: 20px;">If nbsol ≠ 0,</p> <p style="padding-left: 40px;">Si il y a des solutions, alors les surfaces se touchent</p> $\phi_{2a} = \phi_c$ <p style="padding-left: 40px;">Elseif $\phi_{2b} = \phi_c$</p> <p style="padding-left: 20px;">Endif</p> $\phi_{2c} = \frac{(\phi_{2a} + \phi_{2b})}{2}$ <p style="padding-left: 20px;">End While</p> $\phi_{2k} = \phi_{2c}$

Tableau 2-4 – Pseudo code pour la dichotomie

2.3.4 Méthodes numériques d'agrégation de l'erreur cinématique

Les différentes méthodes présentées permettent d'estimer la valeur de l'angle de rotation de la roue Φ_{2k} tel qu'il y ait contact, pour une valeur fixée de l'angle de rotation du pignon Φ_{1k} . Nous proposons différents modèles de comportement cinématiques :

- Le modèle basé sur la projection des points de deux surfaces de substitution qui engrènent. La formulation mathématique est basée sur un problème de la résolution d'une équation non linéaire. Φ_{2k} est estimé en utilisant une méthode basée sur la méthode de la sécante.
- Le modèle basé sur la méthode TCA. La formulation mathématique est basée sur la résolution de systèmes non linéaires. Φ_{2k} est estimé en utilisant la méthode numérique de Levenberg-Marquardt.
- Le modèle basé sur la dichotomie « 3D ». La formulation mathématique est basée sur la résolution de systèmes non linéaires. Φ_{2k} est estimé en utilisant la méthode de la dichotomie, couplée à la méthode de résolution numérique de Levenberg-Marquardt.

Les pseudos algorithmes proposés constituent le cœur de l'estimation de l'erreur cinématique sans charge. Afin d'avoir une image représentative de l'erreur cinématique, il est nécessaire d'estimer un ensemble de couple $(\phi_{2k}, \phi_{1k})^T$. L'analyse de l'engrènement se fait en deux étapes :

- L'engrènement est étudié pour chaque dent indépendamment les unes des autres
- L'ensemble des résultats sont ensuite assemblés le cas des contacts doubles sont traités.

La section suivante détaille cette démarche explicitée Figure 2-16.

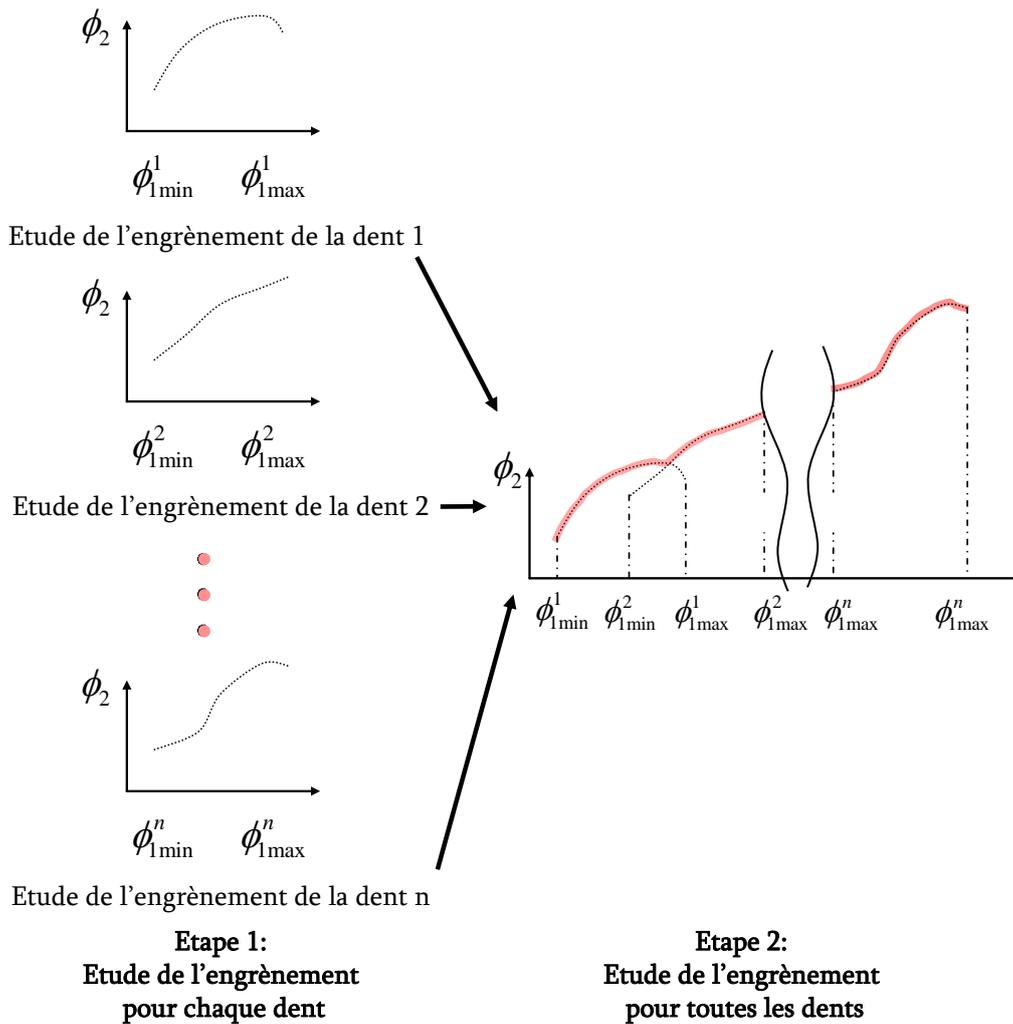


Figure 2-16 – Démarche pour l'analyse de l'engrènement

Etude de l'engrènement pour chaque dent :

Pour la i ème dent, l'angle de rotation ϕ_1 varie entre deux valeurs $\phi_{1\min}^i$ et $\phi_{1\max}^i$. L'intervalle est discrétisé en m valeurs et pour chacune de ces valeurs, une des méthodes numériques vue précédemment est appliquée. Pour la dent i , l'angle ϕ_{1k}^i de la k ème position angulaire vaut :

$$\phi_{1k}^i = \frac{2\pi}{z_1} (i-1) + \frac{1}{(m-1)} \cdot (k \cdot (\phi_{1\max} - \phi_{1\min}) + m \cdot \phi_{1\min} - \phi_{1\max})$$

$$i = 1, \dots, z_1$$

$$k = 1, \dots, m$$
(2.33)

Les angles $\phi_{1\min}$ et $\phi_{1\max}$ sont identiques pour chaque dent considérée. Ils peuvent être déterminés par le calcul basé sur la géométrie des profils étudiés [Bruyère 2006] ou graphiquement si seul un modèle CAO est disponible. Ils correspondent aux positions théoriques du point de contact parcourant un profil entièrement, de l'élément (cercle ou cône) de pied à l'élément de tête. Afin

d'assurer la continuité d'engrènement, l'amplitude de l'intervalle $[\phi_{1\min}; \phi_{1\max}]$ doit être supérieure à la valeur du pas du corps considéré. En général, l'amplitude est choisie pour avoir un rapport de conduite [Bruyère 2006] égale environ à 1.33 :

$$\phi_{1\max} - \phi_{1\min} \approx 1,33 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{z_1} \quad (2.34)$$

Dans ses travaux de thèse, J. Bruyère [Bruyère 2006] donne la démarche complète pour l'estimation de ces angles.

L'erreur cinématique EC_k^i est ensuite estimée à partir de ces valeurs. Elle correspond à la différence entre la valeur théorique et simulée de l'angle de rotation de la roue. La valeur théorique donnée par le rapport de transmission de l'engrenage.

$$EC_k^i = \frac{z_1}{z_2} \cdot \phi_{1k}^i - \phi_{2k}^i \quad (2.35)$$

L'étude individuelle de l'engrènement n'est pas suffisante. Les domaines $[\phi_{1\min}^i; \phi_{1\max}^i]$ se chevauchent partiellement (*Figure 2-16*) puisqu'il y a continuité d'engrènement. Dans ce cas, il y a double contact sur l'intervalle $[\phi_{1\min}^{i+1}; \phi_{1\max}^i]$. Ce traitement est exposé dans la section suivante.

Etude de l'engrènement pour toutes les dents :

La *Figure 2-16* montre les résultats typiques lorsque les portions d'erreurs cinématique sont mises bout à bout, en triant ϕ_1 par ordre croissants. Pour une même valeur de ϕ_1 , il y a deux configuration angulaires possibles pour la roue (*Figure 2-17*).

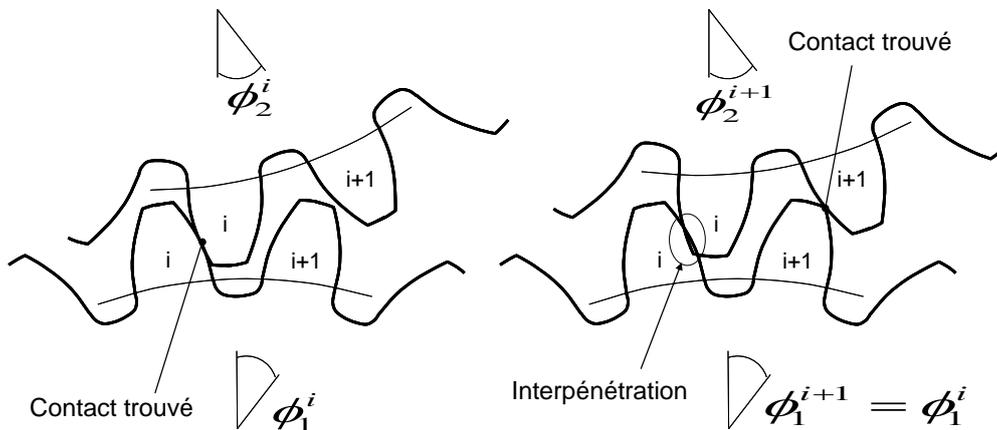


Figure 2-17 – Différentes positions angulaires pour une même valeur de ϕ_1