

# Outils de l'optique quantique avec des variables continues

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Quadratures du champ électromagnétique quantique . . . . .</b>	<b>30</b>
2.1.1	Composantes de quadrature d'un champ monomode classique . . . . .	30
2.1.2	Quantification du champ et opérateurs quadratures . . . . .	32
2.1.3	Modes spatio-temporels . . . . .	34
<b>2.2</b>	<b>Représentation des états quantiques . . . . .</b>	<b>35</b>
2.2.1	Matrice densité . . . . .	35
2.2.2	Fonction de Wigner . . . . .	36
2.2.3	Matrice de covariance des états gaussiens . . . . .	37
<b>2.3</b>	<b>Zoologie quantique : exemples d'états particuliers . . . . .</b>	<b>39</b>
2.3.1	Etat fondamental du champ : vide . . . . .	39
2.3.2	Etats nombres : base de Fock . . . . .	40
2.3.3	Etats cohérents dits quasi-classiques . . . . .	41
2.3.4	Etats comprimés . . . . .	42
2.3.5	Etats intriqués en quadratures . . . . .	43
2.3.6	Chats de Schrödinger . . . . .	45
<b>2.4</b>	<b>Manipulation des composantes de quadrature . . . . .</b>	<b>47</b>
2.4.1	Combinaison : lame partiellement réfléchissante . . . . .	47
2.4.2	Amplification indépendante de la phase . . . . .	50
2.4.3	Amplification sélective en quadratures . . . . .	51
<b>2.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>52</b>

---

L'objectif majeur de l'optique quantique actuelle est d'exploiter les particularités quantiques de la lumière pour réaliser des nouvelles tâches de traitement de l'information. En particulier, l'attention de la communauté scientifique s'est portée vers des tâches impossibles à effectuer avec des systèmes basés exclusivement sur la physique classique [1, 2, 3] : téléportation quantique, cryptographie quantique. . . Dans ce domaine, nous nous intéressons plus particulièrement à l'exploitation des variables quantiques continues plutôt qu'aux variables discrètes. En effet, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction ainsi qu'au chapitre précédent, les variables

continues offrent certains avantages sur les variables discrètes, notamment de plus forts débits d'information.

Avant de parler explicitement de communication quantique, ce chapitre introduit brièvement les différents outils apportés par l'optique quantique dans le cadre de la manipulation des variables quantiques continues. Une première section définit les opérateurs quantiques de quadrature qui sont les variables continues utilisées au cours de cette thèse. La section suivante présente différentes méthodes de représentation des états quantiques. Ces techniques seront ensuite appliquées pour décrire quelques états quantiques particulièrement intéressants. Enfin la dernière section traite des opérations de manipulation de base de nos variables continues. La question de la mesure des variables continues fera quant à elle l'objet du prochain chapitre, qui sera entièrement consacré à ce sujet.

Pour l'essentiel, ce chapitre est plus conçu comme un catalogue de définitions et de méthodes que comme une présentation rigoureuse et complète des variables continues. Les résultats ne seront donc pas redémontrés mais offrent plutôt le point de vue naïf d'un opticien utilisateur. Le lecteur intéressé pourra se référer aux nombreux ouvrages de références en optique quantique présentés dans la bibliographie, ma préférence personnelle allant aux références [15, 13, 17].

## 2.1 Quadratures du champ électromagnétique quantique

### 2.1.1 Composantes de quadrature d'un champ monomode classique

Pour décrire l'aspect ondulatoire de la lumière, la théorie de l'optique quantique repose partiellement sur le formalisme classique de description d'une radiation lumineuse. Quelques brefs rappels et notations sont énoncés ci-dessous dans le cadre de l'optique ondulatoire classique, notamment en vue d'introduire de façon heuristique la quantification du champ et d'établir des correspondances entre description quantique et formalisme classique.

A grande distance de la source de rayonnement, le champ électrique transverse solution des équations de Maxwell dans le vide peut se décomposer sur la base des ondes planes monochromatiques, où chaque mode  $\vec{E}_{cl,m}$  peut être conçu comme la modélisation dans l'espace  $\vec{r}$  et le temps  $t$  d'un faisceau lumineux issu d'une source monomode continue de fréquence  $\omega_m$ , de vecteur polarisation  $\vec{\varepsilon}_m$  et de direction de propagation  $\vec{k}_m$  [15].

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}_{\perp,cl}(\vec{r}, t) &= \sum_m \vec{E}_{cl,m}(\vec{r}, t) \\ &= \sum_m \mathcal{E}_m \vec{\varepsilon}_m \left( \alpha_m e^{i(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t)} - \alpha_m^* e^{-i(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t)} \right)\end{aligned}\quad (2.1)$$

où  $\alpha_m$  est un nombre sans unité quantifiant l'amplitude du champ monomode  $\vec{E}_{cl,m}$  et  $\mathcal{E}_m$  est homogène à un champ électrique. On introduit ici  $\mathcal{E}_m$  de telle sorte qu'un champ défini par  $\alpha_m = 1$  et localisé dans un volume  $V$  ait une énergie  $\hbar\omega_m$ , soit  $\mathcal{E}_m = \sqrt{\hbar\omega_m/(2\epsilon_0 V)}$  en volts par mètre.

En précisant que l'amplitude complexe généralisée  $\alpha_m$  se décompose en  $\alpha_m = |\alpha_m| e^{i\varphi_m}$ , chaque composante d'onde plane se met alors sous la forme générale d'un champ sinusoïdal décrit par  $|\alpha_m|$  et  $\varphi_m$  [15] :

$$\vec{E}_{cl,m}(\vec{r}, t) = -2 \mathcal{E}_m \vec{\varepsilon}_m |\alpha_m| \sin(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t + \varphi_m) \quad (2.2)$$

Ce champ oscillant peut se représenter dans un plan complexe par un vecteur de Fresnel d'amplitude normalisée  $|\alpha_m|$  et d'angle polaire ou phase relative  $\varphi_m$  (voir figure 2.1). Dans une telle représentation, la dépendance temporelle est alors passée sous silence, ce qui revient à définir le vecteur de Fresnel comme figé au sein d'un référentiel tournant à la fréquence optique  $\omega_m$ .

Au lieu de ses coordonnées polaires ( $|\alpha_m|, \varphi_m$ ), le champ monomode classique peut aussi être exprimé en fonction de ses coordonnées cartésiennes ( $\bar{X}_m, \bar{P}_m$ ). Les projections du vecteur de Fresnel sur les axes définissent ainsi les *composantes de quadrature classiques* du champ électrique :

$$\bar{X}_m = 2\sqrt{N_0}|\alpha_m|\cos\varphi_m \quad (2.3a)$$

$$\bar{P}_m = 2\sqrt{N_0}|\alpha_m|\sin\varphi_m \quad (2.3b)$$

où  $N_0$  est une constante de dimensionnement, fonction du choix des unités. En développant le terme en sinus dans l'équation (2.2), on peut directement exprimer le champ classique en fonction de ses composantes de quadrature :

$$\vec{E}_{cl,m}(\vec{r}, t) = -\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{N_0}}\vec{\varepsilon}_m \left( \bar{X}_m \sin(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t) + \bar{P}_m \cos(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t) \right) \quad (2.4)$$

Un tel mode du champ électromagnétique est donc parfaitement déterminé par la donnée d'un nombre *fini* de paramètres : son amplitude, sa phase relative, sa fréquence optique, sa direction de propagation et sa polarisation. Dans le cas plus réel d'un mode gaussien, il faudrait encore préciser la dépendance spatiale par le diamètre et la position du waist.

Cependant, une telle source de lumière parfaitement constante ne peut pas exister. D'une part, elle serait en contradiction avec les propriétés statistiques d'un faisceau lumineux réel et d'autre part, elle irait à l'encontre de la mécanique quantique. Ce détour par l'optique ondulatoire classique sera néanmoins fructueux, ne serait-ce que pour introduire par analogie les composantes de quadratures quantiques du champ lumineux, qui sont les variables continues étudiées lors de cette thèse.

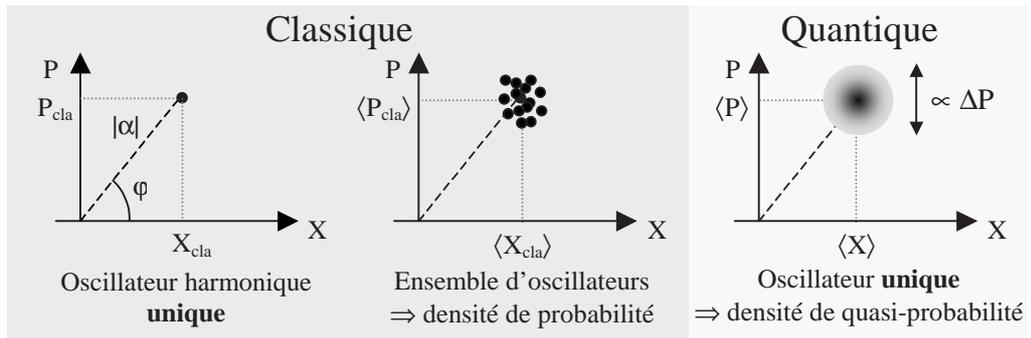


Figure 2.1: L'état d'un oscillateur classique peut être décrit à tout moment par la donnée d'un point dans l'espace des phases  $(X, P)$ . Toujours dans le cadre de la physique classique, on peut représenter l'état d'un ensemble de nombreux oscillateurs par une densité de probabilité. En mécanique quantique, aucun état ne peut être totalement spécifié, il faut recourir à une description par une densité de quasi-probabilité associée même à un état quantique unique.

## 2.1.2 Quantification du champ et opérateurs quadratures

### Champ quantique

Partant des équations de Maxwell dans le vide, la formule (2.1) exprime le champ transverse classique comme une superposition linéaire de différents modes oscillateurs harmoniques  $\alpha_m e^{-i\omega_m t}$  indépendants les uns des autres. Ce résultat est plus qu'un outil mathématique commode, il nous permet de définir la notion de mode du champ électromagnétique et guidera la quantification du champ.

Par analogie formelle avec la quantification d'un oscillateur harmonique matériel, les modes oscillants du champ électromagnétique sont quantifiés en remplaçant les nombres quantiques  $\alpha_m, \alpha_m^*$  par des opérateurs *annihilation*  $\hat{a}_m$  et *création de photon*  $\hat{a}_m^\dagger$  [12, 9, 15, 14] :

$$\begin{aligned}\alpha_m &\rightarrow \hat{a}_m \\ \alpha_m^* &\rightarrow \hat{a}_m^\dagger\end{aligned}\quad (2.5)$$

Cette quantification est complétée en postulant les relations de commutation :

$$\begin{aligned}[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] &= \delta_{m,n} \\ [\hat{a}_m, \hat{a}_n] &= [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] = 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

et en associant à la quantité  $\alpha_m \alpha_m^*$  l'opérateur symétrisé  $(\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger)/2$ .

### Opérateurs composantes de quadrature

De façon similaire à (2.1), l'opérateur champ électrique monomode s'écrit alors :

$$\hat{E}_m(\vec{r}, t) = \imath \mathcal{E}_m \vec{\varepsilon}_m \left( \hat{a}_m e^{i(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t)} - \hat{a}_m^\dagger e^{-i(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t)} \right) \quad (2.7)$$

Cette expression se réécrit suivant la forme (2.4) pour faire apparaître les opérateurs composantes de quadrature introduits par analogie avec les composantes de quadrature d'un champ classique :

$$\hat{E}_m(\vec{r}, t) = -\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{N_0}} \vec{\varepsilon}_m \left( \hat{X}_m \sin(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t) + \hat{P}_m \cos(\vec{k}_m \vec{r} - \omega_m t) \right) \quad (2.8)$$

En prenant comme définitions pour les *opérateurs composantes de quadrature*<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \sqrt{N_0} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{P} &= \sqrt{N_0} \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{\imath}\end{aligned}\quad (2.9)$$

où  $N_0$  est une constante réelle positive dépendant des variables considérées et du système d'unités choisi. Les observables associées à ces opérateurs peuvent prendre une infinité de valeurs possibles réparties dans un continuum, on parle alors de *variables continues*.

Il est également pratique de donner une expression des opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$  à partir des composantes de quadrature dans ce système de notations.

$$\hat{a} = \frac{\hat{X} + \imath \hat{P}}{2\sqrt{N_0}} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{X} - \imath \hat{P}}{2\sqrt{N_0}} \quad (2.10)$$

<sup>1</sup>Afin d'alléger les notations en l'absence d'ambiguïté, la notation  $\hat{\phantom{x}}$  pour désigner les opérateurs ne sera plus mentionnée dans les autres chapitres de ce manuscrit.

Compte tenu de la relation de commutation imposée  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , les opérateurs composantes de quadrature ne commutent pas et vérifient la relation :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = 2iN_0 \quad (2.11)$$

Du fait de cette non-commutation, il n'est pas possible selon le principe d'Heisenberg de connaître simultanément et avec une précision absolue les observables conjuguées  $X$  et  $P$  associées à un même état quantique. Toutes les caractéristiques d'un état quantique ne peuvent être spécifiées simultanément. La relation d'incertitude d'Heisenberg formalise cette affirmation en l'inégalité :

$$\Delta X \Delta P \geq N_0 \quad (2.12)$$

où  $\Delta$  désigne l'écart-type de la mesure associée à l'observable. En particulier pour un état cohérent, les variances associées à  $X$  et  $P$  sont égales et valent  $N_0$ . Pour cette raison, on désigne souvent  $N_0$  par le *niveau de bruit quantique standard* (appelé également selon le contexte bruit de photon, bruit de grenaille, shot noise...).

Le choix de la valeur de  $N_0$  est fonction de la convenance des différents auteurs et varie couramment d'une référence à l'autre. Pour les expérimentateurs, le bruit quantique  $N_0$  sert de référence pour les mesures, d'où la convention  $N_0 = 1$  fréquemment posée. Néanmoins ce choix qui impose alors  $\hbar = 2$  ne recueille généralement pas les suffrages des théoriciens qui lui préfèrent  $\hbar = 1$ , soit  $N_0 = 1/2$ . . . Ne voulant pas prendre parti dans ce débat, et conformément à la notation introduite dans la thèse de Frédéric Grosshans [71], nous conserverons la notation explicite  $N_0$  pour éviter toute confusion.

#### Remarques :

- Du fait de l'analogie entre un oscillateur mécanique et un mode du champ électromagnétique, les quadratures  $X$  et  $P$  sont souvent désignées comme la position et l'impulsion d'un oscillateur électromagnétique. Bien sûr, il ne s'agit que d'une analogie : les composantes de quadrature n'ont rien à voir avec la "position" ou "l'impulsion" d'un photon.
- L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique  $\hat{H}$  s'écrit alors sous la forme suivante et fait apparaître l'opérateur nombre de photons  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  [9].

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{4N_0} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.13)$$

- En appliquant un déphasage  $\hat{a} \rightarrow \hat{a}e^{-i\theta}$ , on peut définir des opérateurs composantes de quadratures généralisées :

$$\begin{aligned} \hat{X}_\theta &= \hat{X} \cos \theta + \hat{P} \sin \theta \\ \hat{P}_\theta &= -\hat{X} \sin \theta + \hat{P} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les nouveaux opérateurs  $(\hat{X}_\theta, \hat{P}_\theta)$  vérifient la même relation de commutation que  $(\hat{X}, \hat{P})$  et possèdent donc les mêmes propriétés quantiques.

- De la même manière que l'on définissait les composantes de quadratures classiques indépendamment du temps dans un repère tournant à la fréquence optique, les opérateurs quadratures quantiques se définissent dans un espace des phases dont les axes tournent à cette même fréquence. On omettra donc de préciser la dépendance temporelle en  $\omega_m t$  pour employer un choix d'observables "fixes" définies à partir d'une référence externe de phase (oscillateur local) ou par un choix adéquat de l'origine des temps.

### Autres variables continues

De nombreuses autres caractéristiques d'un mode du champ électromagnétique varient de façon continue et pourraient servir de variables continues pour les procédures de communication quantique : phase relative, polarisation, temps d'arrivée d'une impulsion... Généralement, il s'agit plutôt de "fausses" variables continues : les quantités citées codent dans un espace de dimension finie, ce qui en fait dès lors des variables discrètes. Pour l'essentiel, elles sont utilisées dans des protocoles mettant en œuvre des photons uniques ou des impulsions très atténuées, se limitant à un nombre restreint de réalisations possibles (fréquemment au nombre de 4 dans des protocoles de cryptographie quantique de type BB84).

Il faut cependant citer l'exception de la polarisation d'un faisceau brillant, où les composantes du vecteur de Stokes peuvent définir un "vrai" ensemble de variables continues. Dans le cas d'une composante intense fortement polarisée, les opérateurs de Stokes suivent une relation de commutation équivalente à (2.11). Des dispositifs exploitant ces variables continues en polarisation sont actuellement en cours de développement parallèlement à l'utilisation des quadratures du champ lumineux, et promettent des applications fructueuses. On peut citer pour référence les travaux des groupes de Gerd Leuchs [148, 199], Elisabeth Giacobino [200, 201], Ping Koy Lam [198] et Eugene Polzik [197].

### 2.1.3 Modes spatio-temporels

Si nous souhaitons décrire des impulsions lumineuses de durée finie se propageant dans le vide, la description monochromatique ci-dessus ne présente plus une approximation satisfaisante. En effet, une localisation dans l'espace des temps se traduit directement par une relation de transformée de Fourier en une certaine étendue dans l'espace des fréquences. Nous devons alors considérer des modes spatio-temporels définissant une impulsion, en quelque sorte délocalisés dans l'espace fréquentiel, mais localisés dans l'espace spatial et temporel [34, 36].

L'opérateur  $\hat{E}(t)$  définissant le champ signal en fonction du temps est la transformée de Fourier de l'opérateur  $\hat{a}_\omega^\dagger$  [37] :

$$\hat{E}(t) = \int \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega t} d\omega \quad (2.15)$$

Pour décrire la création d'un photon dans le mode de l'impulsion, il est alors naturel de considérer l'opérateur défini par [37, 36, 34] :

$$\hat{A}^\dagger = \int f(t) \hat{E}^\dagger(t) dt = \int \tilde{f}(\omega) \hat{a}_\omega^\dagger d\omega \quad (2.16)$$

avec  $f$  une fonction normée telle que  $\int |f(\omega)|^2 d\omega = 1$  ( $\tilde{f}$  désigne la transformée de Fourier de  $f$ ). La définition la plus utile pour  $f$  est de la prendre égale à l'enveloppe temporelle du paquet d'onde, normalisée par un facteur d'échelle. Dans ce cas,  $\tilde{f}$  désigne l'enveloppe spectrale de l'impulsion.

Le nouvel opérateur de création  $\hat{A}^\dagger$  obéit alors à la même relation de commutation et possède les mêmes propriétés qu'un opérateur monomode continu  $\hat{a}^\dagger$  :

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1 \quad (2.17)$$

Suivant la démarche de quantification du champ monomode continu, il est intéressant de considérer les états propres  $|N\rangle$  de l'opérateur nombre de photons dans l'impulsion  $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ . Ces

états vérifient les relations habituelles de création et d’annihilation pour des modes continus et décrivent une base orthonormale complète pour la décomposition de tous les paquets d’ondes :

$$\begin{aligned}\hat{A}^\dagger |N\rangle &= \sqrt{N+1} |N+1\rangle \\ \hat{A} |N\rangle &= \sqrt{N} |N-1\rangle\end{aligned}\tag{2.18}$$

Les opérateurs  $\hat{A}, \hat{A}^\dagger$  peuvent donc être considérés comme des équivalents parfaits aux opérateurs monomodes continus  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  dans le cadre de la description d’un mode “impulsion lumineuse”. En particulier, on peut reprendre la démarche présentée dans la section précédente et définir des opérateurs composantes de quadrature de façon similaire à (2.9).

*Dans la suite de cette thèse, nous travaillerons avec des impulsions lumineuses quasiment limitées par Fourier. Afin de se conformer aux notations communément utilisées dans la littérature et de permettre une lecture plus intuitive, les opérateurs création et annihilation de photon dans un mode impulsionnel seront notés par  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ , étant entendu que les modes considérés sont des modes impulsionnels définis par (2.16) et non plus des modes continus.*

Cette partie a permis de définir la notion d’opérateurs composantes de quadrature d’un mode lumineux au sens large. Ces quadratures nous serviront dans la suite de cette thèse comme variables continues pour le développement de protocoles de communication quantique. Un deuxième ingrédient fondamental pour ces protocoles est la manipulation d’états quantiques particuliers, qui fera l’objet du reste de ce chapitre.

## 2.2 Représentation des états quantiques

### 2.2.1 Matrice densité

Le premier postulat de la mécanique quantique [9] est de décrire complètement l’état d’un système physique par un vecteur d’état  $|\psi\rangle$  appartenant à un espace de Hilbert. Un système parfaitement préparé et qui peut se représenter par un vecteur  $|\psi\rangle$  unique dans l’espace de Hilbert sera appelé un état pur. Afin de décrire une classe plus large d’objets quantiques, il faut prendre en compte des imperfections lors de la génération des états quantiques qui peuvent préparer une superposition statistique de différents états purs  $|\psi_n\rangle$  avec des probabilités associées  $p_n$ . Un tel système ne peut plus être défini par un seul état pur, il faut recourir à la description en terme d’opérateur densité  $\hat{\rho}$  [17, 18] :

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\tag{2.19}$$

où les vecteurs d’états purs et les probabilités sont normalisées de telle sorte que  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ . La représentation de  $\hat{\rho}$  dans une base donnée est appelée *matrice densité*. Pour des états impurs, cette représentation n’est cependant pas unique et dépend de la base choisie.

La matrice densité permet de prédire la valeur moyenne de la mesure de n’importe quel observable  $\hat{O}$  appliquée à cet état quantique :

$$\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O})\tag{2.20}$$

La matrice densité contient donc toutes les informations concernant le système étudié et constitue la description la plus générale d’un état quantique. En ce sens, la connaissance d’un état quantique est ici identifiée à la capacité de prédire toute les informations statistiques de toutes

les quantités physiques observables [17]. En particulier, on peut quantifier le degré de mélange de l'état considéré en plusieurs états purs. On définit pour cela la notion de pureté  $\mathcal{P}$  de l'état par :

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Fonction de Wigner

Un système quantique ne pouvant être décrit de façon parfaitement déterministe, il est tentant de modéliser l'état quantique par une sorte de distribution de probabilité dans l'espace des phases, voisine de celle dessinée sur la figure 2.1. Une représentation très utilisée est la fonction de Wigner, introduite pour la première fois par E. Wigner dans son article de 1932 [24]. Avec les notations  $N_0$ , cette fonction se définit à partir de l'opérateur densité par [71] :

$$W(x, p) = \frac{1}{4\pi N_0} \int \langle x - \frac{q}{2} | \hat{\rho} | x + \frac{q}{2} \rangle e^{i\frac{pq}{2N_0}} dq \quad (2.22)$$

où  $|x\rangle$  désigne un état propre de l'opérateur quadrature  $\hat{X}$ .

La propriété la plus essentielle de la fonction de Wigner ainsi définie est qu'elle se comporte *comme* une densité de probabilité conjointe pour des mesures de  $X$  et  $P$ , sans jamais mentionner de mesure simultanée des quadratures. Par exemple, la distribution de probabilité  $\text{Pr}(x)$  associée à l'observable  $X$  correspond à la distribution marginale en  $X$  de la fonction de Wigner, comme on pouvait l'espérer pour une distribution de probabilité classique [25, 17, 18] :

$$\text{Pr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, p) dp \quad (2.23)$$

De façon plus générale pour n'importe quelle composante de quadrature définie par une rotation d'angle  $\theta$  :

$$\text{Pr}(x, \theta) = \langle X | \hat{U}_\theta \hat{\rho} \hat{U}_\theta^\dagger | X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x \cos \theta - p \sin \theta, x \sin \theta + p \cos \theta) dp \quad (2.24)$$

où  $\hat{U}_\theta = \exp(-i\theta \hat{a}^\dagger \hat{a})$  est l'opérateur rotation d'angle  $\theta$  dans l'espace des phases.

Si la fonction de Wigner présente de nombreuses similitudes avec une distribution classique de probabilités, une différence importante induite par la mécanique quantique est d'autoriser des valeurs négatives pour certains états quantiques. Cette négativité peut se concevoir comme une conséquence du fait que la probabilité de transition entre deux états orthogonaux est nulle, ce qui implique que le recouvrement des deux fonctions de Wigner correspondantes doit s'annuler. Or ce dernier point n'est possible que si une des fonctions prend des valeurs négatives. La négativité de la fonction de Wigner constitue donc une signature de l'aspect spécifiquement quantique d'un état. Des états présentant des fonctions de Wigner prenant des valeurs négatives sont par exemple le photon unique (présenté à la section suivante), ou le vide comprimé conditionné (qui fera l'objet d'une étude théorique et expérimentale lors du chapitre 9). Pour la distinguer d'une distribution de probabilité classique, on qualifie alors la fonction de Wigner de distribution de *quasi*-probabilité.

Du fait de sa relation (2.22) avec la matrice densité, la fonction de Wigner contient toutes les informations concernant un état quantique. De même que l'opérateur densité (2.20), elle peut être utilisée pour calculer la valeur moyenne d'une observable quelconque [17, 18] :

$$\langle \hat{O} \rangle = 4\pi N_0 \iint W(x, p) W_{\hat{O}}(x, p) dx dp \quad (2.25)$$

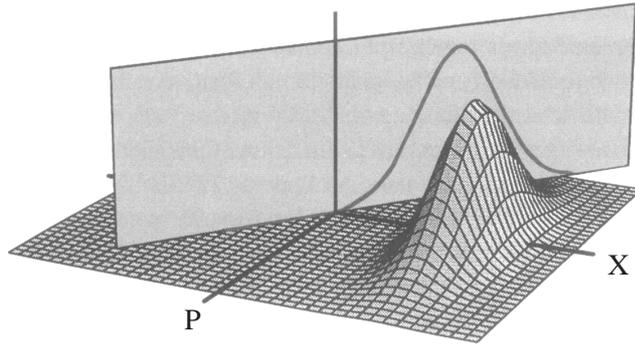


Figure 2.2: Principe de la tomographie quantique, d'après la référence [17].

où  $W_{\hat{O}}(x, p)$  est la “fonction de Wigner” associée à l'opérateur  $\hat{O}$  en remplaçant  $\hat{\rho}$  par  $\hat{O}$  dans (2.22). Tout résultat d'une mesure sur le système peut ainsi être considéré comme un filtrage adéquat de la fonction de Wigner. « Tout ce que nous pouvons voir, ce sont les ombres des états quantiques, dans un sens très proche de la fameuse parabole de la caverne de Platon » écrit Ulf Leonhardt dans son excellent ouvrage [17].

Si nous ne pouvons voir que les ombres des états quantiques, il devrait cependant être possible de reconstruire un modèle de l'état à partir de la connaissance de plusieurs ombres, enregistrées sous différents points de vue. Cette démarche repose sur une analogie avec la technique de tomographie médicale, qui dresse une cartographie tridimensionnelle d'un organe à partir de mesures d'absorption de rayons X pour différents angles de visée. Dans le domaine de l'optique quantique, la méthode de tomographie est transposée pour reconstruire la fonction de Wigner de l'état à partir des différentes projections qui sont les distributions de probabilité pour des composantes de quadratures quantiques, mesurées avec un système de détection homodyne. Pour accéder mathématiquement à la fonction de Wigner à partir des distributions de probabilités  $\text{Pr}(x, \theta)$ , il suffit en principe d'inverser la relation (2.24). Cette opération est connue sous le nom de transformée de Radon inverse [17, 29] et fera l'objet d'une étude spécifique lors de la caractérisation des états comprimés présentée au chapitre 7. Il existe également d'autres méthodes numériques pour la tomographie quantique. On peut citer pour référence les méthodes de “quantum state sampling” [17] et de “maximum likelihood” [32].

Enfin, il est possible de définir de nombreuses autres distributions de quasi-probabilités pour représenter l'état quantique. Parmi elles, on peut citer la fonction P ou fonction de Glauber-Sudarshan et la fonction Q ou fonction de Husimi [18, 17]. La fonction P correspond à l'ordre normal ( $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ ) des opérateurs création et annihilation et peut présenter des points singuliers pour des états non-classiques. Inversement, la fonction Q correspond à l'ordre anti-normal des opérateurs et varie faiblement suivant l'état quantique. Enfin, la fonction de Wigner correspond à un arrangement symétrique des opérateurs. Cette dernière peut prendre des valeurs négatives, mais ne présente pas de singularités, ce qui fait généralement préférer la fonction de Wigner comme représentation de l'état.

### 2.2.3 Matrice de covariance des états gaussiens

Les états gaussiens, définis par le fait que leur fonction de Wigner associée est gaussienne, forment une classe importante des états de l'espace de Hilbert. D'une part, ce sont les états les plus simples à produire expérimentalement (le vide est gaussien) et d'autre part, leurs fonctions

de Wigner sont en tous points définies positives et on peut alors pousser plus loin l'analogie avec une vraie distribution de probabilité pour exploiter tous les théorèmes statistiques.

Partant du résultat de statistique classique qu'une distribution gaussienne est parfaitement connue par ses moments d'ordre un (sa moyenne) et d'ordre deux (sa variance), un état quantique gaussien quelconque est parfaitement connu par la donnée des valeurs moyennes et des variances des différentes composantes de quadrature de ses modes. Pour un état à  $n$  modes, on définit par commodité le vecteur  $r = (X_1, P_1, X_2, P_2, \dots, X_n, P_n)$ . L'état gaussien est alors parfaitement déterminé par le vecteur des valeurs moyennes  $(\langle r_i \rangle)_{i=1,2n}$  et par la *matrice de covariance*  $\gamma$  [13, 123] :

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{2N_0} (\langle \delta r_i \delta r_j \rangle + \langle \delta r_j \delta r_i \rangle) \quad (2.26)$$

avec  $\delta r_i = r_i - \langle r_i \rangle$ . Dans le cas particulier d'un état monomode de valeur moyenne nulle, la matrice de covariance s'écrit explicitement :

$$\gamma = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} \langle X^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle \\ \frac{1}{2} \langle XP + PX \rangle & \langle P^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La donnée de cette matrice permet de connaître différentes grandeurs physiques pertinentes. La réduction maximale de bruit quantique (*squeezing*), i.e. la plus faible variance en quadrature mesurable  $V_{min}$  est déterminée par la plus petite valeur propre de la matrice de covariance, ce qui s'exprime en fonction de la trace et du déterminant de  $\gamma$  par [123] :

$$V_{min} = \frac{N_0}{2} \left[ \text{Tr}(\gamma) - \sqrt{\text{Tr}^2(\gamma) - 4 \det(\gamma)} \right] \quad (2.28)$$

Par ailleurs, la pureté  $\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  pour un mélange statistique vaut :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\det(\gamma)}} \quad (2.29)$$

Enfin, dans le cas d'états gaussiens à plusieurs modes, il est toujours possible par des opérations locales de se ramener à un choix de base où les quadratures en  $X$  et  $P$  sont découplées [134]. Dans le cas d'un système à deux modes dont les quadratures sont de valeurs moyennes nulles, la matrice de covariance devient alors :

$$\gamma = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} \langle X_1^2 \rangle & 0 & \frac{1}{2} \langle X_1 X_2 + X_2 X_1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle P_1^2 \rangle & 0 & \frac{1}{2} \langle P_1 P_2 + P_2 P_1 \rangle \\ \frac{1}{2} \langle X_1 X_2 + X_2 X_1 \rangle & 0 & \langle X_2^2 \rangle & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \langle P_1 P_2 + P_2 P_1 \rangle & 0 & \langle P_2^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

La détermination expérimentale de la matrice de covariance d'un vide comprimé avec et sans mesures homodynes fera l'objet du chapitre 8. L'étude d'un faisceau intriqué à deux modes sera présentée au chapitre 10. Afin de donner une vision plus intuitive des représentations des états quantiques, la partie suivante se concentre sur les propriétés de quelques états quantiques particuliers.

## 2.3 Zoologie quantique : exemples d'états particuliers

Dans cette section, nous rappelons brièvement les définitions et propriétés de différents états quantiques utiles pour les applications en communication quantique. Conformément à nos notations précédentes et au travail de Frédéric Grosshans [71], les formules ci-dessous sont présentées dans la notation normalisée de  $N_0$  pour la variance du bruit de photon.

Le premier de ces états est l'état de quadrature  $|x\rangle$ , défini comme l'état propre de l'opérateur  $\hat{X}$  avec la valeur propre  $x$ . L'ensemble de ces états forme une base orthogonale complète de l'espace de Hilbert. Néanmoins, comme ces états ne sont visiblement pas normalisables, ils n'ont pas de réalité physique propre et apparaissent davantage comme une commodité mathématique pour définir la fonction d'onde d'un état  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ . A l'opposé, la fonction d'onde  $\psi(x)$  possède bien une réalité physique : son module carré représente la distribution de probabilité en  $x$  de l'état, qui est mesurée avec une détection homodyne.

### 2.3.1 Etat fondamental du champ : vide

L'état fondamental  $|0\rangle$  de l'oscillateur harmonique est défini par l'annulation de l'opérateur annihilation :

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (2.31)$$

Cette équation implique que le nombre moyen de photons dans cet état est nul,  $\langle \hat{N} \rangle = 0$ . Pour cette raison, l'état  $|0\rangle$  est appelé l'état *vide*.

L'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique définie par l'hamiltonien (2.13) est alors minimale, d'où l'appellation d'état fondamental du champ. Cette énergie vaut alors :

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.32)$$

Dans ce système de notation, l'énergie d'un mode vide n'est pas nulle et vaut l'énergie d'un demi-photon ! Ce résultat est à relier au fait que si la valeur moyenne du champ est nulle, le champ présente néanmoins des fluctuations statistiques non nulles, conformément au principe d'Heisenberg. Si on considère l'ensemble des modes vides de l'espace, l'énergie contenue dans le vide diverge vers l'infini, ce qui pose le problème critique de la normalisation de la théorie quantique des champs. Cependant, nos mesures expérimentales de l'énergie électromagnétique ne permettent d'accéder qu'à une différence d'énergie à partir de l'énergie du vide. La valeur du niveau de référence n'aura donc pas d'influence dans nos expériences.

Plutôt que de considérer le mode vide sous ses aspects énergétiques, on peut s'intéresser aux moments statistiques de son champ électromagnétique :

$$\langle X \rangle = 0 \quad (2.33)$$

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle = N_0 \neq 0 \quad (2.34)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la moyenne du champ électrique dans le vide est nulle. Par contre, même dans le vide, les composantes de quadratures fluctuent avec une variance  $N_0$  non nulle. Ces fluctuations sont des aspects spécifiquement quantiques du champ et sont absolument nécessaires à la théorie quantique, sans quoi la relation fondamentale d'incertitude de Heisenberg serait violée. On peut d'ailleurs noter que pour l'état vide, les variances sont symétriques et minimales au sens de la relation d'Heisenberg :  $\Delta X^2 = \Delta P^2 = N_0$ .

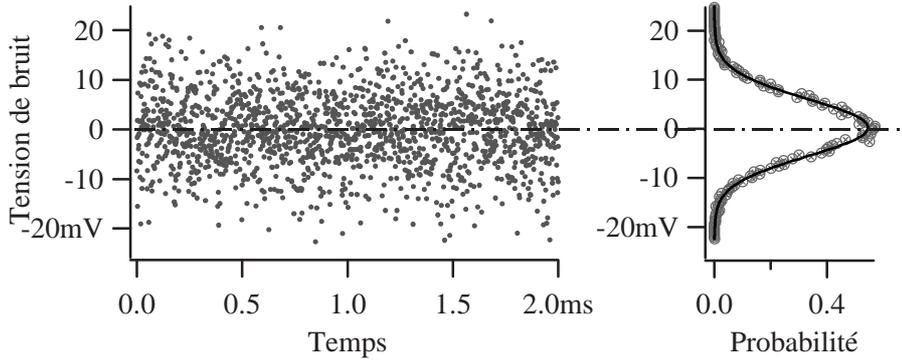


Figure 2.3: Mesure expérimentale d'une quadrature du vide avec une détection homodyne.

Une équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde du vide s'obtient en réécrivant la formule (2.31) avec (2.10) et  $\hat{P} = i \frac{\partial}{\partial x}$  [9]. La fonction d'onde en  $X$  du vide s'écrit alors :

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{4N_0}} \quad (2.35)$$

Ce qui permet de calculer la fonction de Wigner associée [18, 17] :

$$W_0(x, p) = \frac{1}{2\pi N_0} e^{-\frac{x^2 + p^2}{2N_0}} \quad (2.36)$$

On remarquera que ces fonctions sont des gaussiennes. L'état vide est un exemple fondamental d'état gaussien.

### 2.3.2 Etats nombres : base de Fock

Les états nombres ou états de Fock  $|n\rangle$  sont les états pour lesquels le nombre de photons dans le mode est parfaitement défini [13, 15] :

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.37)$$

Cette définition en tant qu'états propres de l'opérateur nombre de photons impose alors des relations décrites par (2.18) où l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$  intervient pour la création d'un photon. On peut alors définir n'importe quel état  $|n\rangle$  comme une excitation obtenue à partir du vide :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2.38)$$

De cette définition découle alors l'orthonormalité des états de Fock et le fait qu'ils forment une base complète de l'espace de Hilbert. Cette propriété constitue l'intérêt essentiel des états de Fock pour représenter n'importe quel autre état quantique. En effet, ces états sont difficiles à produire expérimentalement au-delà de  $n = 2$  et apportent donc plutôt une commodité de représentation et de calcul.

L'expression de la fonction d'onde de l'état de Fock  $|n\rangle$  est donnée par l'expression [18, 17] :

$$\psi_n(x, \theta) = \frac{H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2N_0}}\right)}{(2\pi N_0)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{4N_0}} e^{-i n \theta} \quad (2.39)$$

où  $H_n$  désigne le  $n$ -ième polynôme de Hermite défini par :

$$H_0(x) = 1 ; H_1(x) = 2x ; H_2(x) = 4x^2 - 2 ; \frac{dH_n}{dx} = 2n H_{n-1}(x) \quad (2.40)$$

La fonction de Wigner associée à l'état  $|n\rangle$  s'écrit [18, 71] :

$$W_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{2\pi N_0} e^{-\frac{x^2+p^2}{2N_0}} L_n\left(\frac{x^2+p^2}{N_0}\right) \quad (2.41)$$

où  $L_n$  désigne le  $n$ -ième polynôme de Laguerre défini par :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-x)^k}{k!} \quad (2.42)$$

Cette expression montre que pour  $n$  impair, la fonction de Wigner  $W_n$  est négative à l'origine, ce qui est une signature flagrante de l'aspect spécifiquement quantique des états de Fock.

### 2.3.3 Etats cohérents dits quasi-classiques

Afin de modéliser un champ monomode dépourvu de bruit technique, on cherche un état quantique dont la valeur du champ en amplitude et phase est définie au mieux compte tenu de la relation d'Heisenberg. Cet état servira alors pour modéliser intuitivement le champ issu d'un laser monomode opérant largement au-dessus du seuil. L'expression du champ électromagnétique quantifié (2.7) conduit à définir cet état quasi-classique  $|\alpha\rangle$  comme la valeur propre de l'opérateur  $\hat{a}$ .

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.43)$$

Cette définition permet immédiatement de calculer les valeurs moyennes et les variances des composantes de quadratures :

$$\langle X \rangle = 2\sqrt{N_0} \operatorname{Re}(\alpha) \quad (2.44)$$

$$\langle P \rangle = 2\sqrt{N_0} \operatorname{Im}(\alpha) \quad (2.45)$$

$$\Delta X^2 = \Delta P^2 = N_0 \quad (= \text{constante}) \quad (2.46)$$

Ce qui justifie a posteriori la définition (2.43) : l'état cohérent  $|\alpha\rangle$  possède des fluctuations en quadratures minimales indépendantes de l'amplitude et est centré sur la valeur  $\alpha$  attendue pour un champ classique. En particulier, l'état vide  $|0\rangle$  est aussi un état cohérent. Cette similitude peut être poussée plus loin en démontrant que tout état cohérent est un état vide déplacé dans l'espace des phases [13, 15].

En se servant des états de Fock comme base de l'espace de Hilbert, un état cohérent peut se décomposer selon [13, 15] :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.47)$$

Cette équation montre en particulier que le nombre de photon d'un état cohérent suit une distribution de Poisson de moyenne  $|\alpha|^2$  et d'écart-type  $|\alpha|$ . On retrouve alors la célèbre formule de Schottky du bruit de photon ou *shot noise* : l'écart-type du bruit de détection est proportionnel à la racine carrée du nombre moyen de photons.

Compte tenu de la relation de déplacement entre un état cohérent et le vide, on peut déduire la fonction d'onde d'un état cohérent  $|\alpha\rangle$  [18, 17] :

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{4N_0}} e^{+i\frac{\langle P \rangle p}{2N_0} - i\frac{\langle X \rangle \langle P \rangle}{4N_0}} \quad (2.48)$$

A un terme de phase près, la fonction d'onde correspond à celle d'un vide déplacé. La densité de probabilité associée est alors exactement celle d'un état vide centré sur les valeurs moyennes des quadratures. Cette relation permet d'exprimer la fonction de Wigner associée de façon très intuitive :

$$W_\alpha(x, p) = W_0(x - \langle X \rangle, p - \langle P \rangle) \quad (2.49)$$

Les états cohérents sont donc eux aussi des états gaussiens.

Une dernière propriété importante est que les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux :

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp(-|\beta - \alpha|^2) \quad (2.50)$$

Cette propriété sera essentielle pour l'étude des protocoles de cryptographie quantique présentée au chapitre 4.

### 2.3.4 Etats comprimés

Les états cohérents ont la particularité de ne pas posséder davantage de fluctuations statistiques que l'état vide, et de minimiser la relation d'incertitude d'Heisenberg. Dans son esthétique démonstration de 1932 [10], Wolfgang Pauli démontra que les fonctions d'ondes minimisant la relation d'incertitude d'Heisenberg étaient nécessairement des gaussiennes. La relation d'Heisenberg (2.12) ne spécifiant que le produit des variances, il est possible d'imaginer des états quantiques tels que la variance d'une quadrature soit inférieure au niveau de bruit quantique standard  $N_0$ . Le prix à payer pour cette réduction de bruit est une augmentation du bruit de la quadrature conjuguée, de sorte à conserver un niveau minimal de la relation d'Heisenberg. On appelle ces états des *états comprimés*, tels que :

$$\Delta X^2 = s N_0 \quad \Delta P^2 = \frac{1}{s} N_0. \quad (2.51)$$

où  $s$  est un facteur de compression, pris par convention inférieur à 1. Les expériences basées sur la génération d'états comprimés par amplification paramétrique utilisent également la notion de paramètre de compression  $r$  tel que  $s = e^{-2r}$ . Le paramètre  $r$  est alors directement lié à la nonlinéarité effective de l'interaction.

Lorsque les valeurs moyennes des quadratures sont nulles, l'état comprimé est centré sur l'origine de l'espace des phases et on parle alors de *vide comprimé*. Il est intéressant de noter que la valeur moyenne du nombre de photons dans un état vide comprimé est non nulle et vaut  $\langle \hat{N} \rangle = \sinh^2 r$ . Cet effet peut se comprendre comme une conséquence de l'émission spontanée dans le milieu non-linéaire. Une autre propriété intéressante démontre [13] que tout état comprimé se déduit d'un vide comprimé par l'application d'un opérateur de déplacement.

Du fait de leurs relations entre les distributions de bruit des quadratures, les états comprimés présentent des particularités spécifiquement quantiques. Par exemple, le vide comprimé de facteur de compression  $s = e^{-2r}$  peut se décomposer sur la base des états de Fock selon [17] :

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ C_{2k}^k \left( \frac{1}{2} \tanh(r) \right)^{2k} \right]^{1/2} |2k\rangle \quad (2.52)$$

Cette relation montre que les seuls termes présents dans la décomposition sont les termes pairs en nombre de photons, ce qui est une conséquence physique du fait que les photons sont émis par paires lors du processus d'interaction paramétrique à l'origine de la compression des fluctuations. Cette particularité quantique sera essentielle à la conception d'une source d'états non-gaussiens présentée en détails au chapitre 9.

D'un point de vue élémentaire, notre intuition conçoit le vide comprimé comme un état vide dont les échelles des axes de quadratures auraient été étirées ou comprimées. Cette intuition se retrouve de manière plus formelle dans l'expression de la fonction d'onde du vide comprimé donnée ici à un terme de phase près [18, 17] :

$$\psi_s(x) = \frac{1}{s^{\frac{1}{4}}} \psi_0\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) \quad (2.53)$$

Il en va de même pour la fonction de Wigner associée :

$$W_s(x, p) = W_0\left(\frac{x}{\sqrt{s}}, \sqrt{s} p\right) \quad (2.54)$$

### 2.3.5 Etats intriqués en quadratures

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des états monomodes. Une des richesses de la mécanique quantique est de manipuler des états à plusieurs composantes spatiales qui ne peuvent se réduire à un simple produit tensoriel d'états indépendants. En particulier, certains états ont la spécificité de présenter des corrélations au niveau des distributions quantiques entre leurs composantes.

Dans leur célèbre expérience de pensée proposée en 1935 [132], Einstein, Podolsky et Rosen prédisent l'existence de corrélations quantiques entre deux objets décrits par leurs opérateurs "position" et "impulsion"  $(X_A, P_A)$  et  $(X_B, P_B)$ , qui vérifient la relation de commutation (2.11). Leur intuition est de remarquer qu'alors les opérateurs  $X_A - X_B$  et  $P_A + P_B$  commutent :  $[X_A - X_B, P_A + P_B] = 0$ . Selon le principe de Heisenberg, cette relation autorise la connaissance parfaite des quantités  $(X_A - X_B)$  et  $(P_A + P_B)$ . Ainsi, des états bi-modes peuvent exister dans le cas particulier où les opérateurs  $X_A$  et  $X_B$  sont parfaitement corrélés alors que  $P_A$  et  $P_B$  sont parfaitement anti-corrélés <sup>2</sup>. De tels états sont alors appelés *états intriqués* ou *états EPR*.

La génération expérimentale de tels états est possible dans le cadre de l'optique quantique, par couplage de deux vides comprimés déphasés sur une lame semiréfléchissante [146] ou bien par amplification paramétrique non-dégénérée [143]. La qualité des corrélations expérimentales est cependant évidemment limitée, ne serait-ce que par couplage de l'état avec l'environnement. Il faut donc décrire l'état par le degré fini des corrélations entre composantes. Suivant la méthode choisie pour générer ces états, différentes notations sont utilisées : par la variance  $V$  de l'état thermique vu par chaque composante, par le facteur de compression  $s$  ou par le paramètre d'interaction nonlinéaire  $r$ . Ces notations sont résumées dans le tableau 2.1. L'utilisation de la variance  $V$  est plus appliquée au cas de la cryptographie quantique, le facteur de compression  $s$  est davantage utilisé dans les expériences générant l'intrication par un mélange de deux vides comprimés tandis que le paramètre de nonlinéarité  $r$  est adapté aux techniques de génération par amplification paramétrique.

En fin de compte, l'expression la plus intuitive est celle présentée par Grosshans et Grangier dans [70]. Dans une expression inspirée des notations en traitement du signal, la quadrature

<sup>2</sup>L'interprétation initiale de ces corrélations par Einstein, Podolsky et Rosen en tant que remise en cause fondamentale de la mécanique quantique sera discutée au chapitre 10 traitant de la génération d'états intriqués.

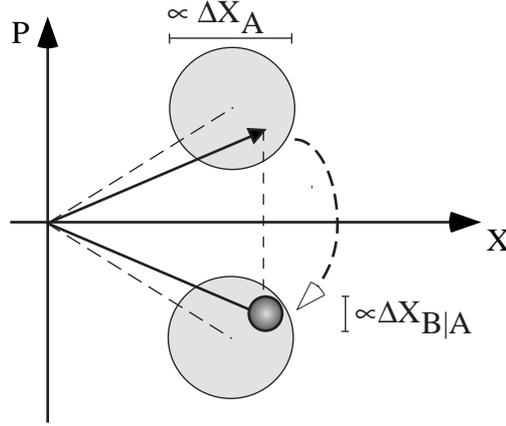


Figure 2.4: Représentation d'un état EPR dans le diagramme de Fresnel. La mesure d'une composante fournit une information conditionnelle sur l'autre où l'incertitude est donnée par l'écart-type conditionnel  $\Delta X_{B|A} = \sqrt{V_{X_B|X_A}}$ .

$\langle X_A^2 \rangle = \langle X_B^2 \rangle$	$V N_0$	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + s \right) N_0$	$\cosh(2r) N_0$
$\langle (X_A - X_B)^2 \rangle$	$2(V - \sqrt{V^2 - 1}) N_0$	$2s N_0$	$2e^{-2r} N_0$
$\langle X_A X_B \rangle$	$\sqrt{V^2 - 1} N_0$	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - s \right) N_0$	$\sinh(2r) N_0$
$V_{X_B X_A}$	$N_0 / V$	$2N_0 / \left( s + \frac{1}{s} \right)$	$N_0 / \cosh(2r)$

Tableau 2.1: Différents systèmes de notations pour décrire un état intriqué en quadratures à deux composantes  $A$  et  $B$ , avec pour conventions  $V > 1$ ,  $s < 1$  et  $r > 0$ . Les expressions pour la quadrature  $P$  sont identiques, à un signe négatif près dû aux anti-corrélations.

reçue  $X_B$  s'exprime en une partie corrélée à  $X_A$  (le signal atténué par le gain de la ligne), plus un terme de fluctuations indépendantes (le bruit) :

$$X_B = g X_A + B \quad (2.55)$$

avec  $B$  indépendant de  $X_A$ ,  $\langle B X_A \rangle = 0$  et

$$g = \tanh 2r = \frac{1 - s^2}{1 + s^2} \quad (2.56)$$

$$\langle B^2 \rangle = \frac{N_0}{\cosh 2r} = \frac{2s}{1 + s^2} N_0 \quad (2.57)$$

Les corrélations quantiques que possèdent ces états intriqués constituent une ressource physique fondamentale pour l'exploitation de protocoles de communication quantique. L'influence particulière de l'intrication en cryptographie quantique sera abordée au chapitre 6, tandis que la génération expérimentale d'états intriqués en quadrature fera l'objet du chapitre 10.

### 2.3.6 Chats de Schrödinger

Si la mécanique quantique prédit l'existence d'états du champ électromagnétique, elle autorise également toute superposition linéaire de tels états. Suite au fameux "paradoxe" de l'(in)existence de superposition macroscopique d'états quantiques, la communauté de l'optique quantique désigne une superposition linéaire de deux états cohérents par le nom de *chat de Schrödinger*. Nous nous limiterons par la suite à l'étude de la superposition  $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$  avec  $\alpha$  réel et dans le cas où les deux états cohérents sont suffisamment distincts, i.e.  $\langle -\alpha|\alpha\rangle = e^{-4\alpha^2} \ll 1$  ce qui impose  $\alpha > 2$ . Dans ce cas, l'état *chat de Schrödinger* s'écrit :

$$|\psi\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle). \quad (2.58)$$

Les gaussiennes ne se recouvrant presque pas, la distribution de probabilité en  $X$  associée correspond à la moyenne des distribution de probabilité des deux états [202] :

$$|\psi(x)|^2 \simeq \frac{1}{2} (|\langle x|\alpha\rangle|^2 + |\langle x|-\alpha\rangle|^2) \quad (2.59)$$

La distribution suivant la quadrature  $X$  ne se distingue donc pas d'un mélange statistique classique de l'état  $|\alpha\rangle$  et de l'état  $|-\alpha\rangle$  avec des probabilités 1/2.

La particularité quantique de ces états apparaît en quadrature  $P$ , où les fonctions d'ondes de chaque état cohérent sont quasiment identiques à un facteur de phase près. Les termes de phase vont alors interférer dans la superposition quantique, avec pour conséquence l'apparition de franges d'interférences. La distribution de probabilité en  $P$  s'écrit alors comme une gaussienne modulée par un cosinus [202, 71] :

$$|\psi(p)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi N_0}} e^{-\frac{p^2}{2N_0}} \cos^2 \frac{\alpha p}{\sqrt{N_0}}. \quad (2.60)$$

Cette distribution gaussienne modulée diffère fondamentalement d'un simple mélange statistique qui prédirait une gaussienne simple. Cependant, tout couplage avec l'environnement (décohérence) aura pour effet de brouiller la visibilité des franges d'interférence et ramènera au cas d'un mélange statistique.

Le terme d'interférence se retrouve dans la fonction de Wigner de l'état [71, 17] :

$$W_{chat,\alpha}(x,p) = \frac{1}{2} W_\alpha(x,p) + \frac{1}{2} W_{-\alpha}(x,p) + 2 W_{interf}(x,p) \quad (2.61)$$

où  $W_{interf}$  décrit un terme d'interférence prenant des valeurs négatives :

$$W_{interf}(x,p) = \frac{1}{4\pi N_0} e^{-\frac{x^2+p^2}{2N_0}} \cos \frac{2\alpha p}{\sqrt{N_0}}. \quad (2.62)$$

L'étude d'états du type "chats de Schrödinger" nous a conduit à proposer un nouveau schéma théorique de test des inégalités de Bell avec des variables continues et une détection homodyne. Ce schéma sera détaillé dans le chapitre 11.

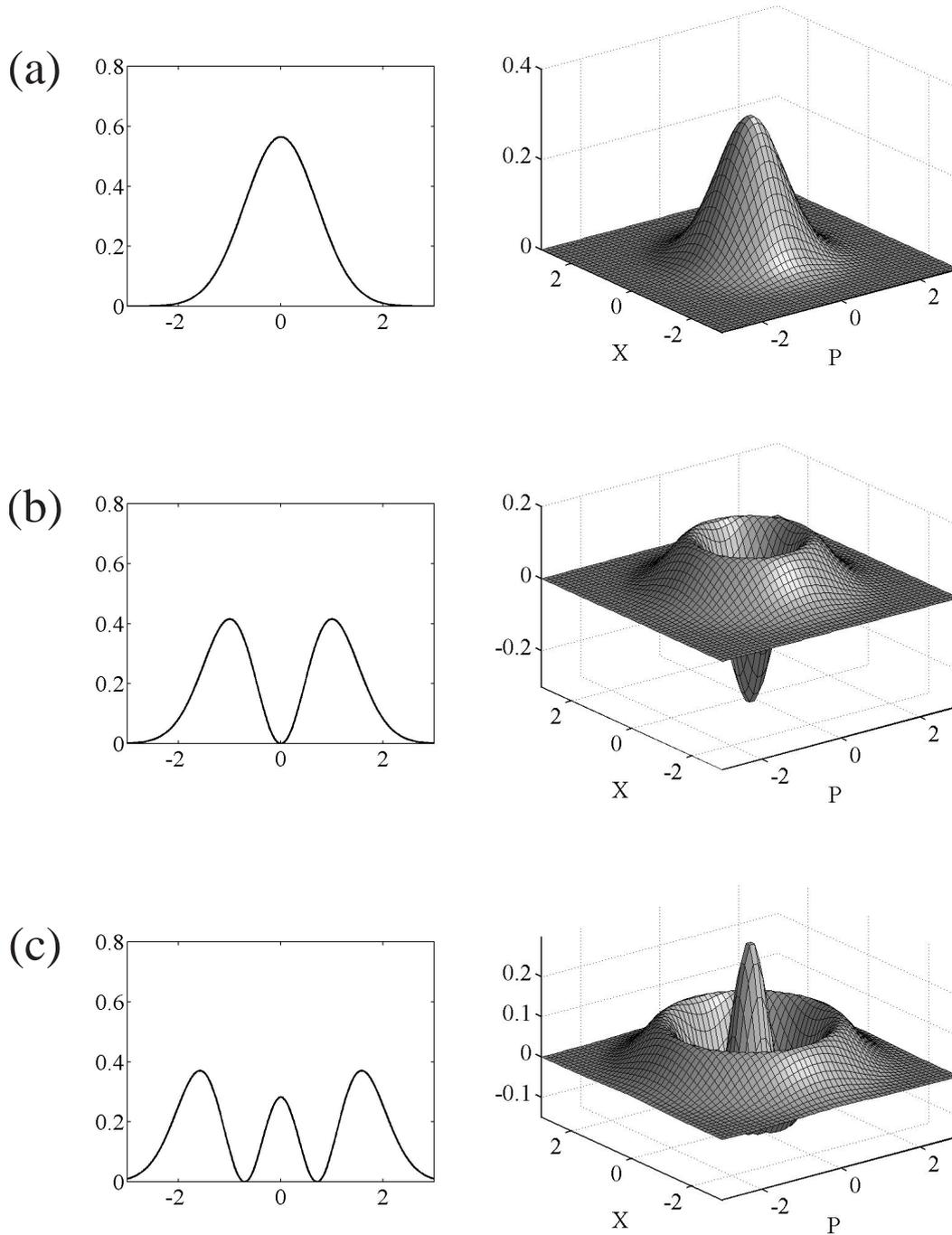


Figure 2.5: Densité de probabilité pour une quadrature arbitraire et fonction de Wigner de différents états quantiques. (a) Vide  $|0\rangle$ , (b) Photon unique  $|1\rangle$ , (c) Etat de Fock  $|2\rangle$ . Les tracés ont été effectués avec la notation  $N_0 = 1/2$ .

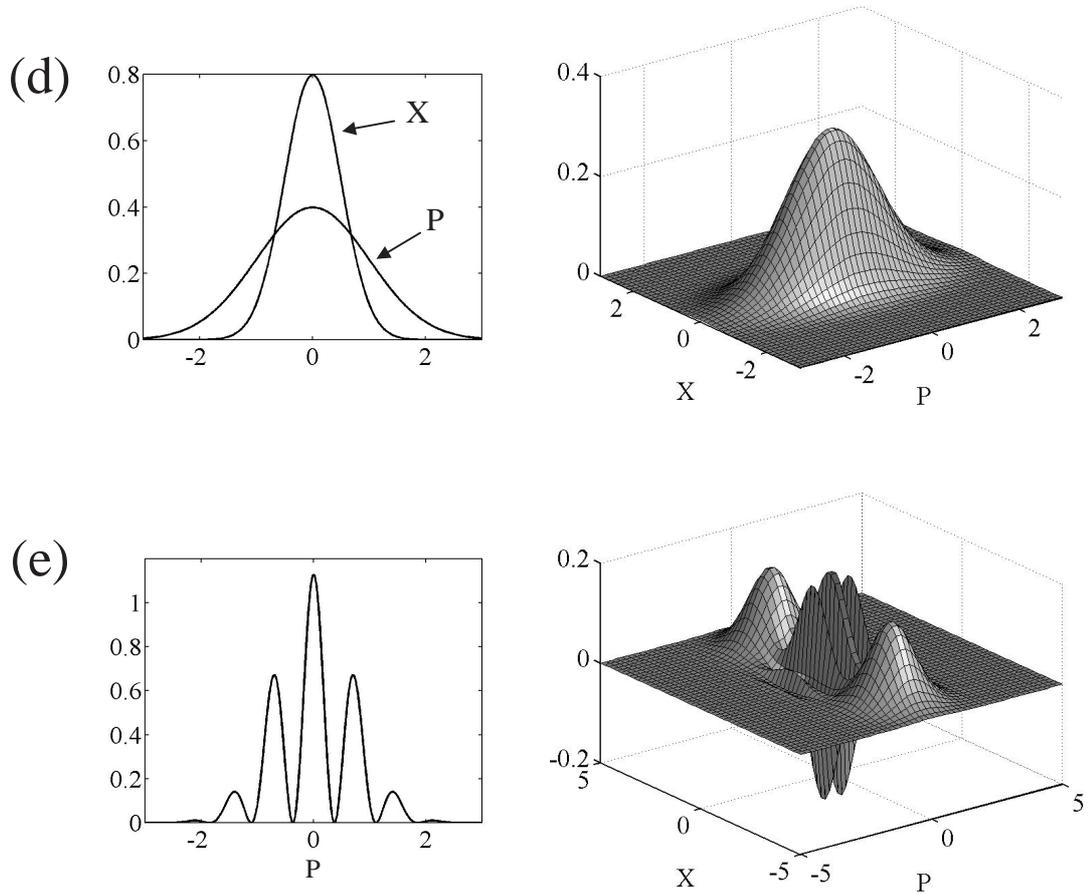


Figure 2.6: (d) Vide comprimé de compression  $s = 0.5$ , (e) Chat de Schrödinger  $\alpha = 3$ .

## 2.4 Manipulation des composantes de quadrature

Les états quantiques décrits précédemment seront utilisés tout au long de cette thèse, de la cryptographie quantique aux tests des inégalités de Bell. Afin de présenter les manipulations les plus usuelles de ces états, cette section décrit quelques composants optiques de base pour l'optique quantique avec des variables continues : la lame partiellement réfléchissante et les amplificateurs dépendants et indépendants de la phase.

### 2.4.1 Combinaison : lame partiellement réfléchissante

Comparée à d'autres branches de la physique, la photonique quantique se distingue par la simplicité de ses montages : une table optique, un laser monomode, quelques composants optiques de base et un thésard suffisent généralement aux expériences de ce domaine. Parmi ces composants optiques de base, la lame partiellement réfléchissante – au demeurant très simple

– permet déjà de mettre en évidence différents effets de la nature quantique de la lumière : interférences à un photon [19], corrélations bi-photoniques [20], génération d'états intriqués en variables discrètes [2] ou avec des variables continues [146]...

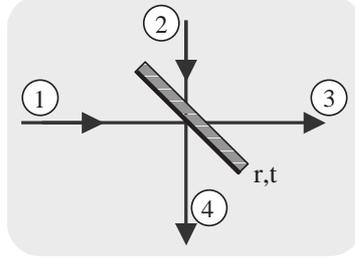


Figure 2.7: Modèle d'une lame semi-réfléchissante sans pertes.

Considérons une lame partiellement réfléchissante représentée sur la figure 2.7. Nous supposons que cette lame n'absorbe pas la lumière et n'induit aucun déphasage particulier. De la sorte, deux modes incidents  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  interfèrent sur la lame pour produire deux modes émergents  $\hat{a}_3, \hat{a}_4$ . Dans cette description, la lame est toujours considérée comme un élément à quatre ports : deux entrées et deux sorties. Même si un seul faisceau physique est présent en entrée, le formalisme de l'optique quantique considère que le second port d'entrée est occupé par un mode *vide* incident introduit dans la section 2.3.1.

Nous nous restreignons ici au cas de transformations unitaires à coefficients réels. Une analogie avec l'électromagnétisme classique nous conduit à exprimer la relation de passage à travers la lame par :

$$\begin{aligned}\hat{a}_3 &= t\hat{a}_1 + r\hat{a}_2 \\ \hat{a}_4 &= -r\hat{a}_1 + t\hat{a}_2\end{aligned}\tag{2.63}$$

où  $r$  et  $t$  désignent les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la lame, liés par la conservation de l'énergie  $r^2 + t^2 = 1$ . Un calcul rigoureux [14] basé sur l'expression de l'interaction entre le champ lumineux et les atomes de la lame permet de justifier ces relations (2.63). Les relations de transformation appliquées aux quadratures  $X, P$  se déduisent alors automatiquement, et permettent de vérifier que la relation de commutation (2.11) est toujours vérifiée pour les modes sortants.

En représentation de Schrödinger, la fonction d'onde à deux modes sortant se déduit par une rotation dans l'espace des phases de la fonction d'onde entrant [17] :

$$\psi(x_1, x_2) \Rightarrow \psi(tx_3 - rx_4, rx_3 + tx_4)\tag{2.64}$$

Cette expression fournit une vision nouvelle de l'intrication émergeant de l'interférence sur une lame semi-réfléchissante de deux vides comprimés déphasés de  $\pi/2$  :

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2) &\propto \exp\left(-\frac{x_1^2}{4sN_0}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{4N_0/s}\right) \\ \Rightarrow \psi(x_3, x_4) &\propto \exp\left(-\frac{(x_3 - x_4)^2}{8sN_0}\right) \exp\left(-\frac{(x_3 + x_4)^2}{8N_0/s}\right)\end{aligned}\tag{2.65}$$

Cela met en évidence les corrélations entre les quadratures des faisceaux EPR émergents.

La décomposition sur la base des états de Fock offre une perspective différente. L'action générale d'une lame sur un état de type  $|n_1, n_2\rangle$  donne une formule complexe que l'on peut trouver par exemple dans l'équation (4.42) de la référence [17]. Un cas particulier de cette formule utile pour cette thèse consiste en le cas où l'un des ports est occupé par un état de Fock  $|n\rangle$  alors que l'autre mode est vide. On a alors la transformation suivante qui exprime la répartition binomiale des photons entre chaque sortie :

$$|n, 0\rangle \Rightarrow \sum_{k=0}^n \sqrt{C_n^k} t^k r^{n-k} |k, n-k\rangle \quad (2.66)$$

Les photons ne sont pas scindés en fractions; le cas  $n = 1, r = t = 1/\sqrt{2}$  donne en sortie l'état maximalement intriqué  $(|0, 1\rangle + |1, 0\rangle)/\sqrt{2}$ , ce qui ouvre les perspectives d'utilisation d'une lame pour mettre en évidence la dualité onde-corpuscule de la lumière et pour servir de source d'intrication. La formule (2.66) sera particulièrement utile dans les chapitres 9 et 11.

L'application la plus utile et la plus commune de la lame réfléchissante avec des variables continues est de modéliser l'effet de pertes par atténuation. L'absorption, les réflexions parasites, les problèmes de recouvrement de faisceaux sont décrits par un modèle de pertes très simple basé sur une lame partiellement réfléchissante de facteur de transmission en intensité  $\eta$  [17]. Cette formulation est également très intéressante pour comprendre la philosophie de la manipulation des variables continues, des mesures quantiques non-destructives à la cryptographie quantique.

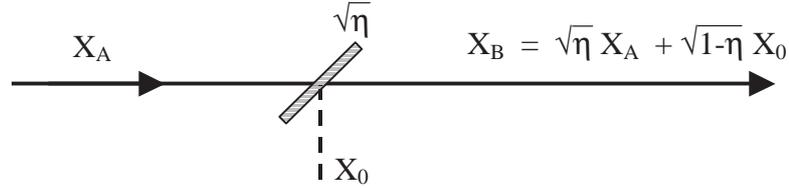


Figure 2.8: Modélisation des pertes d'un canal quantique par une lame de transmission en intensité  $\eta$ .

Considérons un signal  $X_A$  envoyé à travers un canal quantique de transmission  $\eta$  où les pertes sont modélisées par une lame (voir figure 2.8). La seconde entrée de la lame est occupée par un mode vide  $X_0$  qui va s'ajouter en sortie sur le signal et diminuer le rapport signal à bruit. L'effet des pertes sur la quadrature en sortie  $X_B$  s'exprime alors par :

$$X_B = \sqrt{\eta} X_A + \sqrt{1-\eta} X_0 \quad (2.67)$$

Cette équation fait apparaître le canal quantique comme un *canal de communication à bruit additif gaussien* similaire à celui présenté dans la section 1.2.3 traitant de la théorie classique de l'information. Il est utile d'introduire un *bruit équivalent en entrée*  $B_{eq}$  tel que :

$$X_B = \sqrt{\eta} (X_A + B_{eq}) \quad (2.68)$$

$$B_{eq} = \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta}} X_0 \quad (2.69)$$

ce qui fait apparaître un bruit gaussien centré de variance  $\langle B_{eq}^2 \rangle = (1-\eta)/\eta N_0$  additionné au signal. Ce point de vue sera généralisé à un bruit quelconque dans la présentation de cryptographie quantique au chapitre 4.

### 2.4.2 Amplification indépendante de la phase

On peut chercher à étendre les formules de manipulation des quadratures pour une lame partiellement réfléchissante au cas d'un coefficient de transmission supérieur à un, c'est-à-dire à une amplification de gain supérieur à l'unité. L'étude des limites imposées par la physique quantique à l'amplification a été menée par Carlton Caves [79] dans le cas des amplificateurs linéaires. Dans cette section, nous cherchons à décrire un amplificateur monomode dont le champ en sortie dépend linéairement du champ d'entrée, sans effet de discrimination entre les quadratures, i.e. indépendamment de la phase relative du champ entrant.

L'amplification étant linéaire, l'opérateur annihilation en sortie  $\hat{a}_{out}$  doit alors s'écrire comme une superposition linéaire des opérateurs  $\hat{a}_{in}, \hat{a}_{in}^\dagger$  du champ entrant, plus un terme  $\hat{a}_{bruit}^\dagger$  qui introduit du bruit d'émission spontanée de photons intervenant lors de l'amplification. Comme on impose le choix d'une amplification indépendante de la phase,  $\hat{a}_{out}$  ne doit pas dépendre de  $\hat{a}_{in}^\dagger$ , ce qui donne in fine [79] :

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{G} \hat{a}_{in} + \hat{a}_{bruit}^\dagger \quad (2.70)$$

où  $G$  désigne le gain en intensité, considéré comme réel. La physique quantique imposant une transformation unitaire, le terme de bruit  $\hat{a}_{bruit}^\dagger$  doit commuter avec  $\hat{a}_{in}$ , ce qui nous permet de calculer le commutateur  $[\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger]$  :

$$[\hat{a}_{out}, \hat{a}_{out}^\dagger] = 1 = G + [\hat{a}_{bruit}, \hat{a}_{bruit}^\dagger] \quad (2.71)$$

Compte tenu de la relation d'incertitude d'Heisenberg, ce commutateur fixe une limite fondamentale au bruit ajouté lors d'une amplification indépendante de la phase :

$$\Delta \hat{a}_{bruit}^2 \geq \frac{1}{2} |[\hat{a}_{bruit}, \hat{a}_{bruit}^\dagger]| = \frac{1}{2}(G - 1) \quad (2.72)$$

Il n'est donc pas possible de concevoir un amplificateur quantique de gain strictement supérieur à 1 et indépendant de la phase (i.e. insensible en quadrature) qui soit dénué de tout bruit ajouté. Dès lors qu'il y a amplification, il existe nécessairement un bruit d'émission spontanée.

La limite de Caves est atteinte dans le cas d'un amplificateur paramétrique non-dégénéré, décrit par l'hamiltonien d'interaction entre deux modes  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  [13] :

$$\hat{H}_{nd} = i\hbar\chi (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \hat{a}_2) \quad (2.73)$$

où  $\chi$  est une constante de couplage nonlinéaire proportionnelle à la susceptibilité quadratique du milieu et à l'intensité de la pompe. Les équations d'évolution d'Heisenberg s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_1}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_1, \hat{H}_{nd}] = \chi \hat{a}_2^\dagger \\ \frac{d\hat{a}_2}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}_2, \hat{H}_{nd}] = \chi \hat{a}_1^\dagger \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ces équations permettent de décrire les modes en sortie de l'amplificateur en fonction des modes en entrée :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{out,1} &= \hat{a}_{in,1} \cosh r + \hat{a}_{in,2}^\dagger \sinh r \\ \hat{a}_{out,2} &= \hat{a}_{in,2} \cosh r + \hat{a}_{in,1}^\dagger \sinh r \end{aligned} \quad (2.75)$$

où on a posé  $r = \chi\tau$  avec  $\tau$  le temps caractéristique de l'interaction. Ces équations montrent que le gain de l'amplification paramétrique quantique correspond au gain classique attendu :

$$G = \cosh^2 r \quad (2.76)$$

On peut enfin exprimer les relations entre les quadratures des modes de sortie 1 et 2, en écrivant explicitement le terme de gain de l'amplification :

$$\begin{aligned}
 X_{out,1} &= \sqrt{G} X_{in,1} + \sqrt{G-1} X_{in,2} \\
 P_{out,1} &= \sqrt{G} P_{in,1} - \sqrt{G-1} P_{in,2} \\
 X_{out,2} &= \sqrt{G} X_{in,2} + \sqrt{G-1} X_{in,1} \\
 P_{out,2} &= \sqrt{G} P_{in,2} - \sqrt{G-1} P_{in,1}
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Dans le cas d'un amplificateur où le mode 2 entrant est vide, il est facile de voir que cet amplificateur non-dégénéré atteint la limite prévue par Caves en identifiant :

$$\hat{a}_{bruit} = \sinh(r) \hat{a}_{in,2} = \sqrt{G-1} \hat{a}_{in,2} \tag{2.78}$$

Un tel amplificateur est un élément essentiel pour l'information quantique, où il intervient notamment dans les actions de clonage quantique avec des variables continues [82, 3] ou dans la génération d'états intriqués en quadratures [143]. Son implication dans les stratégies d'espionnage quantique sera étudiée au chapitre 4, tandis que la réalisation expérimentale d'un tel amplificateur fera l'objet du chapitre 10.

### 2.4.3 Amplification sélective en quadratures

S'il n'est pas possible de concevoir un amplificateur sans bruit et indépendant de la phase, nous allons voir qu'en relâchant la contrainte sur la phase il est possible de réaliser un amplificateur qui n'ajoute aucun bruit supplémentaire.

La démarche a été effectuée par Caves dans le même article [79], où l'amplification dépendante en quadrature s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
 X_{out} &= \sqrt{G_X} X_{in} + X_{bruit} \\
 P_{out} &= \sqrt{G_P} P_{in} + P_{bruit}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

En imposant toujours une transformation unitaire et en calculant le commutateur  $[X_{out}, P_{out}]$ , on montre que le bruit ajouté doit vérifier la relation d'Heisenberg [79] :

$$\Delta X_{bruit} \Delta P_{bruit} \geq (\sqrt{G_X G_P} - 1) N_0 \tag{2.80}$$

En choisissant alors  $G_X = 1/G_P$ , le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus s'annule et il est alors théoriquement possible de supprimer toutes les fluctuations de bruit.

Une telle amplification est réalisée par un amplificateur optique dégénéré. La description de cet amplificateur se fait très simplement en considérant le cas non-dégénéré de la section précédente et en remplaçant  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  par un seul mode  $\hat{a}_{in}$  [13]. L'opérateur annihilation en sortie de l'amplificateur s'écrit :

$$\hat{a}_{out} = \hat{a}_{in} \cosh r + \hat{a}_{in}^\dagger \sinh r \tag{2.81}$$

où à nouveau  $r$  est un terme d'interaction non-linéaire, proportionnel à la susceptibilité en second ordre du milieu, à l'intensité pompe et au temps d'interaction. On remarquera en particulier que l'expression (2.81) ne comporte aucun terme de bruit ajouté, mais est sensible à la phase. On en déduit immédiatement l'expression pour les quadratures en sortie :

$$X_{out} = e^{+r} X_{in} \qquad P_{out} = e^{-r} P_{in} \tag{2.82}$$

L'amplification est bien réalisée sans bruit supplémentaire et est sensible en phase : la quadrature  $X$  est amplifiée tandis que la quadrature  $P$  est déamplifiée.

En particulier, on peut remarquer ici que si le mode incident est un mode vide, alors les variances du mode en sortie sont de la forme :

$$\langle X^2 \rangle = e^{+2r} N_0 \qquad \langle P^2 \rangle = e^{-2r} N_0 \qquad (2.83)$$

ce qui constitue la signature d'un vide comprimé. L'amplificateur dégénéré sera donc une source de compression des fluctuations quantiques au même titre que l'amplificateur non-dégénéré est une source de corrélations quantiques. Cette technique d'amplification paramétrique dépendante de la phase sera utilisée expérimentalement pour générer des états comprimés, et est détaillée au chapitre 7.

## 2.5 Conclusion

Les différents outils de l'optique quantique présentés au cours de ce chapitre sont essentiels aux protocoles de traitement de l'information quantique avec des variables continues [3, 1], pour la représentation des ressources quantiques comme pour la manipulation des composantes de quadrature.

L'utilisation des états quantiques de référence présentés se fera tout au long de cette thèse. La mesure du vide est à la base de la calibration de notre système de détection homodyne, les états cohérents serviront à l'expérience de cryptographie quantique, les états comprimés et intriqués seront générés et caractérisés expérimentalement pour fournir les ressources nécessaires à de futures mises en œuvre de protocoles de communication quantique. Enfin, les superpositions quantiques d'états cohérents seront utiles pour envisager des tests des inégalités de Bell avec des variables continues.

Un point essentiel pour la manipulation des variables continues a été volontairement passé sous silence au cours de ce chapitre : comment mesurer expérimentalement une composante de quadrature ? Cette quantité étant dépendante du champ électromagnétique, il n'est pas possible de la mesurer avec une simple photodiode sensible à l'intensité moyenne du champ, mais il faut recourir à un système interférométrique plus complexe appelé *détection homodyne*. La description théorique et expérimentale d'une telle détection sera l'objet essentiel du chapitre suivant.