

# Ordres du groupe symétrique

Dans ce chapitre, nous rappelons des propriétés connues du groupe symétrique et en particulier les structures d'ordre qui lui sont associées. Le paragraphe 2.1 rappelle la structure de groupe sur les permutations et énonce les propriétés de base dont nous aurons besoin. Les ordres dits *faibles* sont définis dans le paragraphe 2.2, ils seront utilisés dans la suite de cette thèse principalement dans la partie III. Le paragraphe 2.3 est dédiée à l'étude de l'ordre dit *fort* ou *de Bruhat*. Nous rappelons en particulier comment comparer les éléments et calculer des bornes supérieures, propriétés utilisées dans le chapitre 4.

Les résultats que nous énonçons ici sont pour la plupart bien connus. Notre principale référence est l'article [LS96] de Lascoux et Schützenberger qui décrit en détail les ordres sur les groupes de Coxeter. Par ailleurs, dans le paragraphe 2.3.4, nous prouvons aussi quelques propriétés particulières sur les intervalles de type coset dont nous nous servirons dans le chapitre 4.

## 2.1 Le groupe symétrique

### 2.1.1 Structure de groupe sur les permutations

La définition 1.1.1 donne une description des permutations en terme de mots sur l'alphabet  $1, \dots, n$ . On peut aussi les interpréter comme des bijections de  $\{1, \dots, n\}$  vers  $\{1, \dots, n\}$ . Dans ce cas, le mot correspondant à la permutation est simplement la lecture des images. Par exemple, la permutation  $\mu = 4213$  est l'application qui envoie 1 sur 4, 2 sur 2, 3 sur 1 et 4 sur 3.

Vu de cette façon, l'ensemble des permutations de taille  $n$  forme un groupe non commutatif dont la loi est la composition des applications. L'élément neutre est la permutation identité, c'est-à-dire le mot  $123 \dots n$ . Par exemple, si  $\sigma = 2314$  et  $\mu = 4213$ , on a

$$\sigma\mu := \sigma \circ \mu = 4321, \quad (2.1)$$

$$\mu\sigma := \mu \circ \sigma = 2143, \quad (2.2)$$

$$\sigma^{-1} = 3124. \quad (2.3)$$

Un *point fixe* de  $\sigma$  est un entier  $i$  tel que  $\sigma(i) = i$ . La permutation identité ne contient que des points fixes. Le seul point fixe de la permutation  $\mu = 4213$  est 2. Une *transposition* est une permutation où seuls deux points ne sont pas fixes, on dit qu'elle "échange" deux valeurs. Par exemple, 153426 est la transposition qui échange 2 et 5 et on la note  $(2, 5)$ . Une *transposition simple* est une transposition où les valeurs échangées sont consécutives, on l'écrit  $s_i := (i, i + 1)$ . Lorsqu'on multiplie par la droite une permutation  $\sigma$  par une transposition  $(i, j)$ , cela revient à échanger les lettres en positions  $i$  et  $j$  dans  $\sigma$ . Si l'on multiplie par la gauche, alors on échange les valeurs  $i$  et  $j$ . Par exemple :

$$342615.(2, 5) = 312645 \quad (2.4)$$

$$(2, 5).342615 = 345612. \quad (2.5)$$

En tant qu'élément de groupe, une permutation peut se décomposer en un produit de cycles disjoints. Un *cycle* est une permutation particulière qui s'écrit  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  et qui signifie que l'image de  $a_1$  est  $a_2$ , l'image de  $a_2$  est  $a_3$ , etc, et l'image de  $a_r$  est  $a_1$ . Les éléments qui n'apparaissent pas dans  $a_1, \dots, a_r$  sont des points fixes. Deux cycles  $c_1$  et  $c_2$  sont dits disjoints s'ils n'agissent pas sur les mêmes valeurs, c'est-à-dire si les éléments qui apparaissent dans  $c_1$  sont des points fixes de  $c_2$ . Une permutation peut toujours s'écrire comme un produit de cycles disjoints. Par exemple, si  $\sigma = 524613$ , on a  $\sigma = (1, 5)(3, 4, 6)$ . Le produit entre deux cycles disjoints est commutatif, on a aussi  $\sigma = (3, 4, 6)(1, 5)$ . Cependant, la décomposition en cycle est unique à commutation des cycles près. Les cycles de taille 1 sont des points fixes et les cycles de taille 2 des transpositions ce qui justifie l'écriture  $(a, b)$  pour la transposition qui échange  $a$  et  $b$ .

Le groupe sur les permutations est aussi appelé *groupe symétrique* et on le note  $\mathfrak{S}_n$ . Le groupe symétrique de taille  $n$  est engendré par les transpositions simples  $s_i$  pour  $1 \leq i < n$  et admet la présentation suivante :

$$s_i^2 = 1, \quad (2.6)$$

$$s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } |i - j| > 1, \quad (2.7)$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \quad (2.8)$$

Les relations (2.7) et (2.8) sont appelées *relations de tresses*. Elles ne sont pas propres au groupe symétrique. En particulier, on peut définir des déformations du groupe symétrique où seule la relation (2.6) est modifiée. C'est le cas par exemple de l'algèbre de Hecke que nous verrons dans le chapitre 3.

## 2.1.2 Décompositions réduites et code

Toute permutation peut donc être écrite comme un produit de transpositions simples. On appelle cette écriture une *décomposition* de la permutation. Au vu des relations entre générateurs, elle n'est pas unique. La taille d'une décomposition est donnée par le nombre de générateurs qu'elle contient. Si la taille d'une décomposition est minimale, c'est-à-dire s'il n'existe pas d'autres décompositions de la permutation contenant moins de générateurs, on l'appelle une *décomposition réduite* de la permutation et sa taille définit la *longueur* de la permutation, notée  $\ell(\sigma)$ . Une permutation admet en général plusieurs décompositions réduites.

*Exemple 2.1.1.* La permutation  $\sigma = 523461$  admet entre autres comme décompositions réduites :

$$\sigma = s_4 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5, \quad (2.9)$$

$$\sigma = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_3 s_2 s_1, \quad (2.10)$$

elle est donc de longueur 8.

Notons que si  $\sigma$  admet une décomposition réduite  $v$ , une décomposition réduite de  $\sigma^{-1}$  est simplement le retourné de  $v$  car  $s_i^2 = 1$ . Une permutation et son inverse ont donc même longueur. La longueur d'une permutation est aussi donnée par son nombre *d'inversions*.

**Définition 2.1.2.** Une *inversion* d'une permutation  $\sigma$  est un couple  $(i, j)$  avec  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

Une *coinversion* d'une permutation  $\sigma$  est un couple  $(a, b)$  tel que  $a < b$  et  $\sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(b)$ .

Par exemple, les inversions de  $\sigma = 523461$  sont  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(1, 6)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(4, 6)$  et  $(5, 6)$  ses coinversions sont  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(1, 6)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 5)$ , et  $(4, 5)$ . Une permutation est entièrement codée par ses inversions. On peut aussi utiliser son *code de Lehmer*.

**Définition 2.1.3.** Le code de Lehmer (ou tout simplement code) d'une permutation  $\sigma$  est le vecteur  $v$  défini par  $v(i) = \#\{\sigma(j) < \sigma(i), j > i\}$ .

Par exemple, le code de la permutation  $\sigma = 523461$  est  $v = [4, 1, 1, 1, 1, 0]$ . Le code de Lehmer suffit pour retrouver la permutation de départ. En effet, si  $v(1) = i$ , alors  $\sigma(1) = i + 1$ . Puis si  $v(2) = j$ , alors  $\sigma(2)$  est le  $j + 1$ ème nombre restant par ordre croissant et ainsi de suite. On peut donc travailler indifféremment avec une permutation ou avec son code.

De façon évidente, pour  $n$  donné, il n'existe qu'une seule permutation de taille  $n$  qui n'ait pas d'inversions. C'est la permutation identité  $12 \dots n$  dont la longueur est 0, c'est-à-dire dont la décomposition réduite est le mot vide. Il existe aussi une seule permutation de longueur maximale, donnée par  $n \ n - 1 \dots 1$ . Son code est  $[n - 1, n - 2, \dots, 1, 0]$  et sa longueur est donc  $\frac{n(n-1)}{2}$ . On l'appelle la *permutation maximale* et on la note  $\omega$ .

Nous aurons besoin de deux autres notions sur les permutations.

**Définition 2.1.4.** Une descente d'une permutation  $\sigma$  est une position  $i$  telle que  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ . Un recul de  $\sigma$  est une descente de  $\sigma^{-1}$ , c'est-à-dire une valeur  $a$  telle que  $\sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(a+1)$ .

Les descentes de la permutation 523461 sont 1 et 5, ses reculs sont 1 et 4.

### 2.1.3 Groupes de Coxeter

Le groupe symétrique appartient à une catégorie plus large de groupes appelés les *groupes de Coxeter*. Bien que l'objet principal de cette thèse soit le groupe symétrique, de nombreuses notions que nous abordons admettent une définition plus générale. Notre travail s'inscrit donc au sein de cette théorie et nous avons jugé utile d'en donner les définitions de base. Pour une approche plus complète, nous invitons le lecteur à lire [Hil82].

**Définition 2.1.5.** Un groupe de Coxeter est un groupe engendré par une famille de générateurs  $r_1, \dots, r_n$  admettant une présentation sous forme  $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$  où  $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup +\infty$  et vérifie :

1.  $m_{ii} = 1$
2.  $m_{ij} = m_{ji}$
3.  $m_{ij} \geq 2$  si  $i \neq j$ .

Pour  $\mathfrak{S}_n$ , les générateurs sont  $s_1, \dots, s_{n-1}$  et on a  $m_{ij} = 2$  si  $|i - j| \neq 1$  et  $m_{i, i+1} = 3$ . Les groupes de Coxeter finis ont été classifiés dès 1935, ils correspondent à des groupes de réflexions dans l'espace euclidien. Le groupe  $\mathfrak{S}_n$  est appelé *groupe de Coxeter de type A* ou  $A_{n-1}$ . Les groupes de type *BC* et *D* seront abordés dans le chapitre 5 et nous en donnons donc une définition ici.

**Définition 2.1.6.** Le groupe de Coxeter de type *BC* de taille  $n$  est le groupe engendré par l'ensemble des générateurs et relations de  $A_n$  ( $s_1, \dots, s_{n-1}$ ) et un générateur supplémentaire  $s_n^B$  (aussi noté  $s_n^C$ ) vérifiant les relations :

$$s_i s_n^B = s_n^B s_i \text{ pour } i \neq n-1 \quad (2.11)$$

$$s_{n-1} s_n^B s_{n-1} s_n^B = s_n^B s_{n-1} s_n^B s_{n-1}. \quad (2.12)$$

C'est-à-dire  $m_{in} = 2$  pour  $i \neq n-1$  et  $m_{n-1, n} = 4$ .

**Définition 2.1.7.** Le groupe de Coxeter de type *D* de taille  $n$  est le groupe engendré par l'ensemble des générateurs et relations de  $A_n$  ( $s_1, \dots, s_{n-1}$ ) et un générateur supplémentaire  $s_n^D$  vérifiant les relations :

$$s_i s_n^D = s_n^D s_i \text{ pour } i \neq n-2 \quad (2.13)$$

$$s_{n-2} s_n^D s_{n-2} = s_{n-2} s_n^D s_{n-2}. \quad (2.14)$$

C'est-à-dire  $m_{in} = 2$  pour  $i \neq n-2$  et  $m_{n-2, n} = 3$ .

Nous verrons dans le chapitre 3 que les groupes  $BC$  et  $D$  peuvent être identifiés respectivement aux permutations signées et permutations signées avec un nombre pair de négatifs.

Les notions de *décomposition réduite* et *longueur* des éléments décrites dans le paragraphe 2.1.2 s'étendent naturellement à l'ensemble des groupes de Coxeter. De même, les descentes peuvent être définies comme suit : un générateur  $r_i$  est une descente de  $\sigma$  si  $\ell(\sigma r_i) = \ell(\sigma) - 1$ , c'est un recul de  $\sigma$  si  $\ell(r_i \sigma) = \ell(\sigma) - 1$ . Dans le cas du groupe symétrique, le générateur  $s_i$  est identifié à la position  $i$  et on dit que la permutation a une descente en  $i$  si  $s_i$  vérifie la propriété ci-dessus.

## 2.2 Ordres faibles : treillis sur les permutations

### 2.2.1 Définition

**Définition 2.2.1.** Deux éléments  $\sigma$  et  $\mu$  de  $\mathfrak{S}_n$  sont comparables pour l'ordre faible droit (ou simplement ordre droit) s'il existe une décomposition réduite de  $\sigma$  qui soit un facteur gauche d'une décomposition réduite de  $\mu$ . On écrit  $\sigma \leq_R \mu$ .

De même, deux éléments sont comparables pour l'ordre faible gauche s'il existe une décomposition réduite de  $\sigma$  qui soit un facteur droit d'une décomposition réduite de  $\mu$ , et on écrit  $\sigma \leq_L \mu$ .

Par exemple, la permutation  $3142 = s_2 s_1 s_3$  est plus petite pour l'ordre droit que  $4312 = s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$  et plus petite pour l'ordre gauche que  $4231 = s_3 s_1 s_2 s_1 s_3$ . Cette définition n'est pas spécifique au type  $A$  mais nous étudierons ici uniquement le cas de  $\mathfrak{S}_n$ .

Les relations de couverture se déduisent facilement de la définition. Une permutation  $\sigma$  est couverte par une permutation  $\mu$  dans l'ordre droit (c'est-à-dire que  $\mu$  est son successeur direct) si  $\mu = \sigma s_i$  avec  $\ell(\mu) = \ell(\sigma) + 1$ . On a multiplié  $\sigma$  par la droite avec une transposition simple, d'où la terminologie *ordre droit*. De la même façon, dans le cas de l'ordre gauche, on multiplie par la gauche par une transposition simple.

On a  $\ell(\sigma s_i) = \ell(\sigma) + 1$  si et seulement si  $\sigma s_i$  a une descente en  $i$ , la transposition  $s_i$  échange alors  $\sigma(i)$  et  $\sigma(i + 1)$ . Le nombre d'éléments couverts par une permutation  $\mu$  dans l'ordre droit est donc exactement son nombre de descentes.

De même, dans l'ordre gauche,  $\ell(s_i \sigma) = \ell(\sigma) + 1$  si et seulement si  $s_i \sigma$  a un recul en  $i$  et la transposition  $s_i$  échange les valeurs  $i$  et  $i + 1$  dans  $\sigma$ . Le nombre d'éléments couverts par une permutation  $\mu$  dans l'ordre gauche est donc son nombre de reculs.

De par leur définition, les ordres droits et gauches sont gradués par le nombre d'inversions des permutations. Ils sont en fait isomorphes par passage à l'inverse. Plongé dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ , leur diagramme de Hasse est un polytope connu, le *permutoèdre*, et on appelle parfois ces ordres les *ordres du permutoèdre*. Dans toute cette thèse, on représentera toujours l'ordre faible tel que le plus petit élément (la permutation identité) soit en haut du diagramme. Les diagrammes de Hasse des ordres faibles

droits et gauches pour les tailles 3 et 4 sont donnés figures 2.1 et 2.2. Les relations de couverture correspondent aux transpositions simples : à chaque passage par une arête du graphe, on échange deux valeurs à des positions consécutives dans le cas de l'ordre droit et deux valeurs consécutives dans le cas de l'ordre gauche. Une décomposition réduite d'une permutation est un chemin dans l'ordre droit entre l'identité et la permutation où chaque arête correspond à une transposition simple.

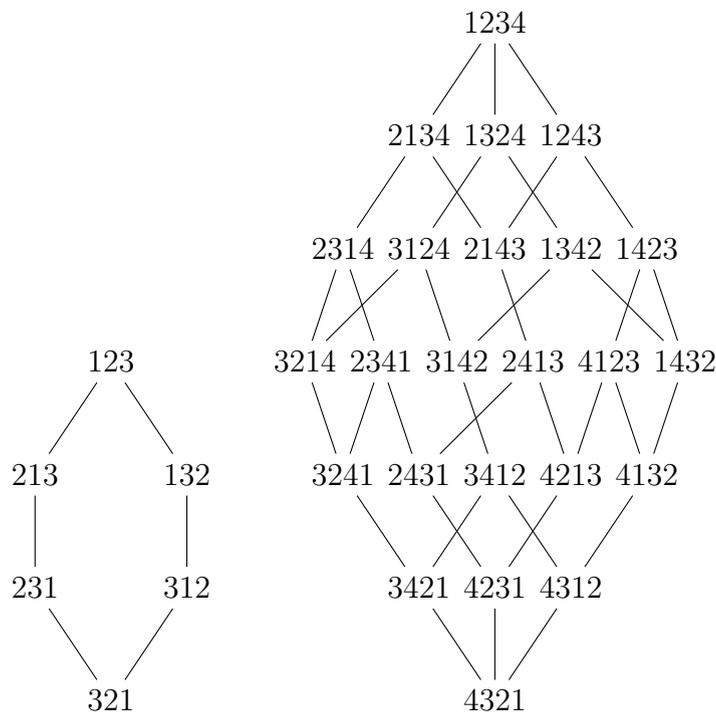


FIGURE 2.1 – Ordre faible droit pour les tailles 3 et 4.

### 2.2.2 Structure de treillis

Les ordres, droit et gauche, possèdent chacun une structure de treillis [RG71]. Comme on l'a vu paragraphe 1.3, la base d'un treillis est formée des éléments couvrant un unique élément. De ce fait, la base de l'ordre droit est formée des permutations n'ayant qu'une seule descente, appelées *grassmanniennes*. De même, la base de l'ordre gauche est formée par l'inverse des permutations grassmanniennes, c'est-à-dire les permutations n'ayant qu'un seul recul. La figure 2.3 représente les deux bases en taille 4.

Pour comparer deux permutations, il suffit donc de comparer les ensembles de permutations grassmanniennes qui leur sont inférieures. On a en fait une propriété plus forte,

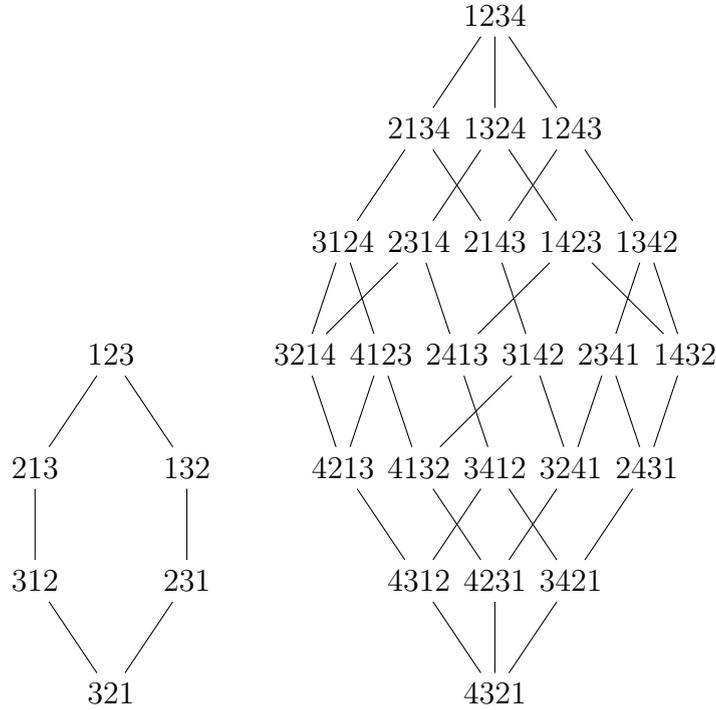


FIGURE 2.2 – Ordre faible gauche pour les tailles 3 et 4.

$$\sigma \leq_R \mu \Leftrightarrow \text{coinv}(\sigma) \subset \text{coinv}(\mu), \tag{2.15}$$

$$\sigma \leq_L \mu \Leftrightarrow \text{inv}(\sigma) \subset \text{inv}(\mu), \tag{2.16}$$

où  $\text{coinv}(\sigma)$  et  $\text{inv}(\sigma)$  correspondent respectivement à l'ensemble des coinversions et des inversions de  $\sigma$ . Par exemple, les coinversions de la permutation 3124 sont (1, 3) et (2, 3). Elle est plus petite pour l'ordre droit que 4312 dont les coinversions sont (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) et (3, 4).

On appelle  $\mathfrak{S}_n^k$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{S}_n$  ayant une unique descente en  $k$  auquel on adjoint l'identité. Cet ensemble est un treillis pour l'ordre droit [BW88]. Ses éléments sont les permutations minimales des classes du quotient de  $\mathfrak{S}_n$  par  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ , le groupe engendré par les  $s_i$  avec  $i \neq k$ . On aura besoin de l'application suivante  $\rho^k : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n^k$  qui à chaque permutation  $\sigma$  associe l'élément minimal de son coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ . Cela revient à réordonner les valeurs de la permutations à gauche et à droite de  $k$ . Par exemple :

$$\rho^3(361425) = 136|245. \tag{2.17}$$

De même,  ${}^r\mathfrak{S}_n$ , l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{S}_n$  ayant un unique recul en  $r$  auquel on adjoint l'identité, est aussi un treillis. On définit  ${}^r\rho$  qui à chaque permutation  $\sigma$  associe l'élément minimal de son coset  $(\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_{n-r})\sigma$ . Cela revient à réordonner séparément les valeurs inférieures et supérieures à  $r$ . Par exemple :

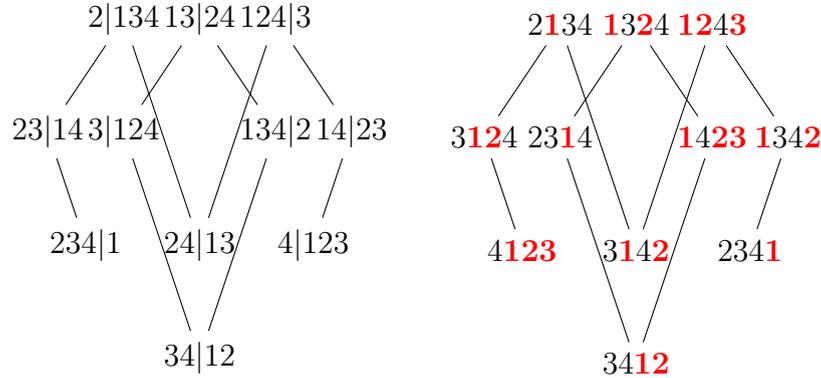


FIGURE 2.3 – Permutations grassmanniennes et inverses, bases de l'ordre faible.

$${}^4\rho(\mathbf{361425}) = \mathbf{152346}. \quad (2.18)$$

Par ailleurs, nous aurons aussi besoin de l'application  $\tilde{\rho}^k$  qui à une permutation  $\sigma$  associe cette fois l'élément maximal de son coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ . Dans l'exemple précédent, cela donne :

$$\tilde{\rho}^3(361425) = 631|542. \quad (2.19)$$

## 2.3 Ordre de Bruhat

### 2.3.1 Définition

**Définition 2.3.1.** Deux éléments  $\sigma$  et  $\mu$  de  $\mathfrak{S}_n$  sont comparables pour l'ordre de Bruhat (ou ordre fort) si une décomposition réduite de  $\sigma$  est un sous-mot d'une décomposition réduite de  $\mu$ . On écrit  $\sigma \leq_B \mu$ .

Par exemple, la permutation  $2143 = s_1s_3$  est plus petite que  $3421 = s_2s_1s_2s_3s_2$ . Pour alléger l'écriture, la notation  $\leq$  pour les permutations désignera dans toute cette section  $\leq_B$ . De façon générale, il suffit de considérer les sous-mots d'une décomposition réduite arbitraire d'une permutation pour obtenir l'ensemble des permutations qui lui sont inférieures [Bou68]. Un facteur étant un sous-mot particulier, l'ordre de Bruhat est une extension à la fois de l'ordre faible gauche et de l'ordre faible droit, cependant il n'est pas restreint à l'union de ces deux ordres. Par exemple,  $4123 = s_3s_2s_1$  est plus grande que  $2143 = s_3s_1$  mais n'est son successeur ni pour l'ordre droit, ni pour l'ordre gauche.

Historiquement, l'ordre de Bruhat a d'abord été décrit comme la clôture transitive de la relation de couverture suivante.

**Proposition 2.3.2.** Une permutation  $\sigma$  est couverte par une permutation  $\mu$  si et seulement si  $\mu = \sigma\tau$  avec  $\tau$  une transposition et  $\ell(\mu) = \ell(\sigma) + 1$ .

On dira alors que la transposition  $\tau$  est une transposition de Bruhat pour la permutation  $\sigma$ .

Cette relation diffère de celle de l'ordre droit car la transposition  $\tau$  n'est plus nécessairement une transposition simple. Par ailleurs, on peut donner une définition similaire avec un produit à gauche qui donnera le même ordre. En effet, si  $\mu = \sigma\tau$  alors il existe une transposition  $\tau'$  telle que  $\mu = \tau'\sigma$ . La proposition suivante donne un critère simple pour savoir si une transposition  $\tau$  est une transposition de Bruhat pour une permutation  $\sigma$ .

**Proposition 2.3.3.** *Soit  $\tau = (a, b)$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Alors  $\tau$  est une transposition de Bruhat pour  $\sigma$  si et seulement si :*

1.  $\sigma(a) < \sigma(b)$
2. Il n'existe pas de  $i$  tel que  $a < i < b$  et  $\sigma(a) < \sigma(i) < \sigma(b)$ .

En d'autres termes, les valeurs positionnées entre  $\sigma(a)$  et  $\sigma(b)$  ne sont pas comprises entre  $\sigma(a)$  et  $\sigma(b)$ .

Cette proposition est juste une reformulation de la condition  $\ell(\sigma\tau) = \ell(\sigma) + 1$ . En effet, si  $\sigma(a) < \sigma(b)$  alors on augmente la longueur de  $\sigma$  en les inversant. Si  $a < i < b$  et  $\sigma(i) < \sigma(a)$ , l'inversion  $(a, i)$  est conservée. De même, si  $\sigma(i) > \sigma(b)$ , l'inversion  $(i, b)$  est conservée. Mais si  $\sigma(a) < \sigma(i) < \sigma(b)$ , alors la transposition  $(a, b)$  rajoute les inversions  $(a, i)$  et  $(i, b)$  en plus de  $(a, b)$  qui ne sont pas compensées. Par ailleurs, il n'y a pas d'inclusion des inversions ou des coinversions entre une permutation et son successeur. Par exemple, si  $a < b < c$  et  $\sigma(a) < \sigma(c) < \sigma(b)$ , l'inversion  $(b, c)$  devient une inversion  $(a, c)$ . Par exemple, si  $\sigma = 251436$ , la transposition  $(1, 4)$  est une transposition de Bruhat. Le successeur de  $\sigma$  est alors  $\sigma' = 451236$ . La permutation  $\sigma$  comporte 5 inversions :  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 5)$  et  $(4, 5)$ . Son successeur en comporte bien 6 :  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ , et  $(2, 5)$ . Par contre,  $(1, 6)$  n'est pas une transposition de Bruhat pour  $\sigma = 251436$  à cause des valeurs 4 et 5 qui sont à la fois comprises et positionnées entre les valeurs 2 et 6.

La correspondance entre l'ordre obtenu par la clôture transitive de la relation et l'ordre sur les sous-mots se prouve par récurrence sur la longueur des permutations en utilisant une propriété fondamentale, le *lemme d'échange* décrit par Bourbaki [Bou68].

**Lemme 2.3.4** (Lemme d'échange). *Soit  $\sigma$  une permutation et  $s_i$  une transposition simple telle que  $\ell(\sigma s_i) > \ell(\sigma)$ , alors l'idéal inférieur engendré par  $\sigma s_i$  se décompose en trois ensembles disjoints :*

- $I_1 = \{\mu \leq \sigma, \mu s_i \leq \sigma\}$ ,
- $I_2 = \{\nu \leq \sigma, \nu s_i > \sigma\}$ ,
- $I_3 = \{\eta > \sigma, \eta s_i \leq \sigma\}$ .

*Dit autrement, il n'existe pas de permutation  $\sigma s_i \geq \eta > \sigma$  telle que  $\eta s_i > \sigma$ .*

De la proposition 2.3.2, on déduit immédiatement que l'ordre est gradué. Les diagrammes de Hasse pour les tailles 3 et 4 sont donnés en figure 2.4. Contrairement aux ordres faibles, l'ordre de Bruhat n'est pas un treillis. Cela apparaît dès la taille 3 : on a que  $\wedge\{231, 312\} = \emptyset$ . Par ailleurs, on a vu que les ordres faibles étaient isomorphes l'un à l'autre par passage à l'inverse. Dans le cas de l'ordre de Bruhat, le passage à l'inverse est un *automorphisme*, c'est-à-dire  $\sigma \leq \mu \Leftrightarrow \sigma^{-1} \leq \mu^{-1}$ , ce qui est clair par la définition. Cela se traduit par une propriété de symétrie dans toutes les propositions liées à l'ordre de Bruhat. Ainsi, on a vu en proposition 2.3.2 que la relation de couverture se décrit aussi bien par un produit à droite qu'à gauche.

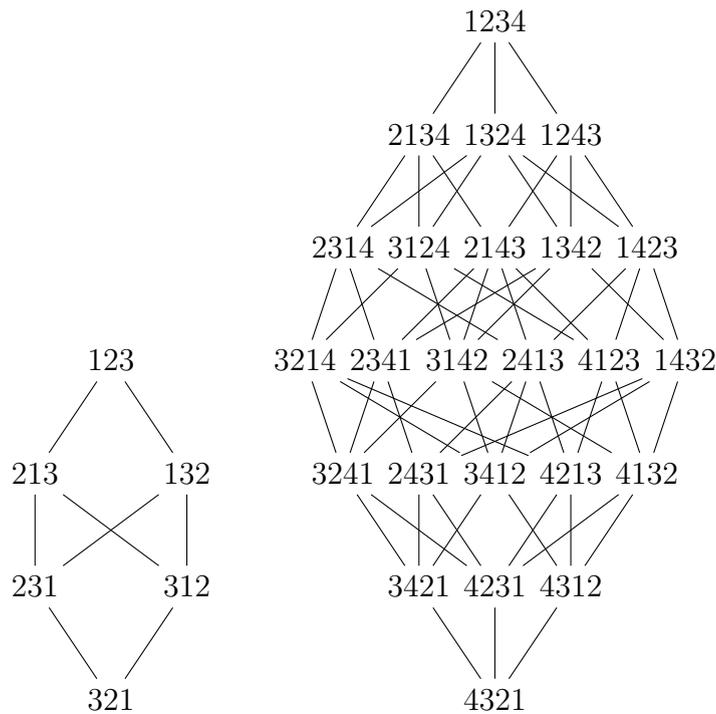


FIGURE 2.4 – Ordres de Bruhat, tailles 3 et 4

### 2.3.2 Comparaison des éléments

La comparaison des éléments dans l'ordre de Bruhat nous amène à considérer une nouvelle projection  ${}^r\rho^k := \rho^k \circ {}^r\rho = {}^r\rho \circ \rho^k$  bien définie car les opérations  ${}^r\rho$  et  $\rho^k$  commutent. Cette projection envoie les éléments de  $\mathfrak{S}_n$  sur l'ensemble  ${}^r\mathfrak{S}_n^k$  des permutations ayant une unique descente en  $k$  et un unique recul en  $r$  auquel on adjoint l'identité.

$${}^4\rho^3(361425) = {}^4\rho(136245) = 125346 \quad (2.20)$$

$$= \rho^3(152346) = 125346 \quad (2.21)$$

On appelle *permutations bigrassmanniennes* les permutations possédant une unique descente et un unique recul (cf. figure 2.5), c'est-à-dire l'intersection des bases des ordres droits et gauches. Un résultat de Deodhar nous dit que :

$$\sigma \leq \mu \Leftrightarrow \forall k, r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, {}^r \rho^k(\sigma) \leq \mu. \tag{2.22}$$

Cela signifie que la base de l'ordre de Bruhat est incluse dans l'ensemble des permutations bigrassmanniennes. Les projecteurs  $\rho^k$  et  ${}^r \rho$  ainsi que les permutations bigrassmanniennes sont définis de façon générale sur les groupes de Coxeter et la base de l'ordre de Bruhat est toujours incluse dans l'ensemble des bigrassmanniennes. Dans le cas du type  $A$ , nous verrons que la base est constituée exactement des permutations bigrassmanniennes.

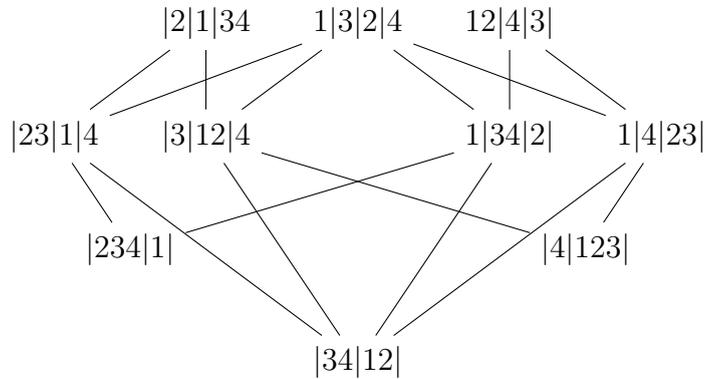


FIGURE 2.5 – Permutations bigrassmanniennes en taille 4, une permutation bigrassmannienne correspond à un échange de deux blocs de nombres consécutifs sur la permutation identité (représentés par les barres verticales). L'unique descente se situe avant la deuxième barre, l'unique recul avant la troisième barre.

Historiquement, l'ordre de Bruhat pour le type  $A$  a été décrit par Ehresmann comme la comparaison des clés des permutations [Ehr34].

**Définition 2.3.5.** *La clé d'une permutation  $\sigma$  est la suite de ses facteurs gauches réordonnés. On la note  $\text{cle}(\sigma)$ .*

Par exemple, la clé de la permutation 361425 est

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ & & 1 & 3 & 3 & 4 \\ & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 \end{array} \tag{2.23}$$

On a alors la propriété suivante

**Proposition 2.3.6.**

$$\sigma \leq \mu \Leftrightarrow \text{cle}(\sigma) \leq \text{cle}(\mu) \quad (2.24)$$

par la comparaison terme à terme.

La proposition 2.3.6 admet une autre écriture.

$$\begin{aligned} \sigma \leq \mu \Leftrightarrow & (\forall r, 1 \leq r < n), (\forall k, 1 \leq k < n) \\ & \#\{\sigma_i \leq r, i \leq k\} \geq \#\{\mu_i \leq r, i \leq k\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

où  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$  et  $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$ . Vue de cette façon, la comparaison des clés est une interprétation directe des projecteurs  $r\rho^k$ . Par ailleurs, en plus de la symétrie par passage à l'inverse, l'ordre de Bruhat possède aussi une symétrie par retournement des permutations. Soit  $\tilde{\sigma}$  le retourné de  $\sigma$ , alors

$$\sigma \leq \mu \Leftrightarrow \tilde{\sigma} \geq \tilde{\mu}. \quad (2.26)$$

Plus précisément,

$$\#\{\sigma_i \leq r, i \leq k\} \geq \#\{\mu_i \leq r, i \leq k\} \Leftrightarrow \#\{\sigma_i \leq r, i > k\} \leq \#\{\mu_i \leq r, i > k\} \quad (2.27)$$

car  $\#\{\sigma_i \leq r, i \leq k\} = r - \#\{\sigma_i \leq r, i > k\}$ . La proposition 2.3.6 peut alors s'écrire de façon plus générale comme

**Proposition 2.3.7.** *Soit  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$  et  $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$ , alors  $\sigma \leq \mu$  si et seulement si il existe  $k$  tel que  $\text{cle}(\sigma_1 \dots \sigma_k) \leq \text{cle}(\mu_1 \dots \mu_k)$  et  $\text{cle}(\sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_k) \geq \text{cle}(\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_k)$ .*

Cette symétrie est fondamentale dans notre travail. Dans la suite de cette thèse, en particulier pour les résultats du chapitre 4, nous utiliserons de façon poussée la comparaison des éléments dans l'ordre de Bruhat, et en particulier la proposition 2.3.7 sur la comparaison des clés. Un exemple de comparaison des clés en partant de la gauche, de la droite, ou en coupant au milieu est donné figure 2.6.

### 2.3.3 Borne supérieure et treillis enveloppant

La description en termes de clés donne une méthode pour calculer les bornes supérieures et inférieures d'une partie donnée.

**Proposition 2.3.8.** *Une permutation  $\sigma$  est la borne supérieure d'un ensemble de permutations si  $\text{cle}(\sigma)$  est le Sup composante à composante des clés de l'ensemble.*

On en donne un exemple figure 2.7. L'ordre de Bruhat n'est pas un treillis. En effet, l'ensemble des clés n'est pas stable par passage au Sup (voir deuxième exemple de la figure 2.7). On définit alors l'ensemble des *triangles monotones* qui contient les clés et qui est stable par passage au Sup.

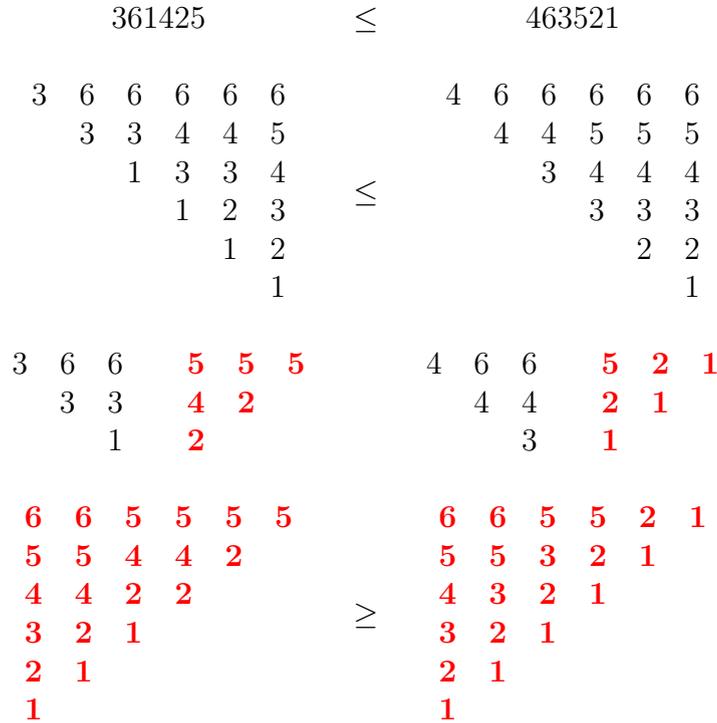


FIGURE 2.6 – Exemple de comparaison de clés

**Définition 2.3.9.** *Un triangle monotone est une suite de colonnes de tailles  $1, 2, \dots, n$  vérifiant des conditions de croissance large sur les ligne de gauche à droite, décroissance stricte sur les colonnes de haut en bas et décroissance large sur les diagonales de haut-gauche vers bas-droit.*

A un triangle  $t$  de taille  $n$  rempli avec les lettres  $\{1, \dots, n\}$ , on peut toujours associer un ensemble de bigrassmanniennes  $\mathcal{B}$  tel que  $t = \vee \mathcal{B}$  et on en déduit la proposition suivante.

**Proposition 2.3.10.** *Le treillis enveloppant de l'ordre de Bruhat est isomorphe à l'ensemble des triangles monotones rempli avec les lettres  $\{1, \dots, n\}$  où l'ordre est la comparaison composante à composante.*

*Remarque 2.3.11.* Il existe une bijection bien connue entre les triangles monotones et les matrices à signes alternants. Le treillis enveloppant de l'ordre de Bruhat peut donc être vu comme un treillis sur les matrices à signe alternants. Les permutations correspondent alors aux matrices de permutations (ne contenant que des 1) et les triangles qui ne sont pas des clés aux matrices contenant des  $-1$ .

Le nombre de prédécesseurs d'un triangle monotone est le nombre de composantes du triangle qui peuvent être diminuées de 1 en conservant les conditions de croissance. On a vu dans le paragraphe 2.3.2 que la base de l'ordre de Bruhat était comprise dans l'ensemble des bigrassmanniennes. En fait, les bigrassmanni-

$$\begin{array}{ccccc}
 52134 & \vee & 34251 & = & 53241 \\
 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\
 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \\
 & 1 & 2 & 3 & \vee & 2 & 3 & 3 \\
 & & 1 & 2 & & 2 & 2 & \\
 & & & 1 & & & 1 & \\
 \hline
 42531 & \vee & 34251 & = & \emptyset \\
 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\
 & 2 & 4 & 4 & 4 & & 3 & 3 & 4 & 4 & & \mathbf{3} & \mathbf{4} & 4 & 4 \\
 & & 2 & 3 & 3 & \vee & 2 & 3 & 3 & = & & \mathbf{2} & 3 & 3 \\
 & & & 2 & 2 & & 2 & 2 & & & & 2 & 2 & \\
 & & & & 1 & & & 1 & & & & & & 1
 \end{array}$$

FIGURE 2.7 – Exemple de *Sup* pour Bruhat, dans le deuxième exemple, le triangle Sup ne correspond pas à une clé de permutation car la deuxième colonne n'est pas incluse dans la troisième. En fait, on se restreint à une condition locale sur les triplets, le triplet problématique a été coloré en rouge.

ennes correspondent exactement aux triangles possédant un unique prédécesseur et forment donc la base du treillis enveloppant et donc de l'ordre de Bruhat.

### 2.3.4 Intervalles et cosets

L'ordre de Bruhat n'étant pas un treillis, l'intersection de deux intervalles n'est en général pas un intervalle. En effet, bien que l'intersection soit close par intervalle, elle peut posséder plusieurs éléments minimaux ou maximaux. Cependant, nous prouvons ici une propriété particulière de certains intervalles appelés *cosets* dont nous nous servirons dans le chapitre 4.

Pour  $k$  donné, on étudie les classes d'équivalences du quotient de  $\mathfrak{S}_n$  par  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ , c'est-à-dire les permutations qui sont envoyées sur le même élément par la projection  $\rho^k$  (voir paragraphe 2.2.2). L'ensemble des permutations appartenant à une même classe d'équivalence est appelé un *coset*. Tous les cosets sont isomorphes à  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$  et forment donc chacun des intervalles de  $\mathfrak{S}_n$ . Un coset particulier s'écrit  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$  où  $\sigma$  est un représentant quelconque de la classe.

**Lemme 2.3.12.** *Soient  $\sigma$  et  $\nu$  deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$  telles que  $\nu > \sigma$ . Alors, pour  $k < n$ , on a que l'intersection du coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$  et de l'intervalle  $[\sigma, \nu]$  est un intervalle.*

*Démonstration.* Il nous faut prouver que l'intersection possède un unique élément maximal. Les éléments du coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$  correspondent aux permutations  $\mu$

telles que  $\{\mu_1, \dots, \mu_k\} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ . Tout d'abord, nous décrivons la construction d'un élément particulier  $\nu'$  appartenant à l'intersection puis nous prouvons qu'il est maximal.

Soit  $V_1 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ , alors  $\nu'_1 = \max(v \in V_1, v \leq \nu_1)$ . Puis on définit  $V_2 = V_1 \setminus \{\nu'_1\}$  et  $\nu'_2 = \max(v \in V_2, v \leq \nu_2)$ . On continue la construction jusqu'à  $\nu'_k$ . Pour la partie droite de  $\nu'$ , on prend  $V_n = \{\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n\}$  et  $\nu'_n = \min(v \in V_n, v \geq \nu_n)$ , puis  $V_{n-1} = V_n \setminus \{\nu'_n\}$  et on continue la construction jusqu'à  $\nu'_{k+1}$ . Par exemple, pour  $\sigma = 13245$ ,  $k = 2$  et  $\nu = 54123$ , on a  $\nu' = 31524$ . Le reste de la preuve sera fait uniquement sur la partie gauche de  $\nu'$ , la preuve sur la partie droite est complètement symétrique.

Tout d'abord, comme  $\nu > \sigma$ , la construction de l'élément  $\nu'$  est toujours possible. On prouve que  $V_i$  contient toujours un élément  $v \leq \nu_i$ . En effet, soit  $v_{\min} = \min(v \in V_i)$ , les éléments strictement plus petits que  $v_{\min}$  dans  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  ont donc déjà été choisis et on a  $\#\{\sigma_j < v_{\min}, j \leq k\} = \#\{\nu'_j < v_{\min}, j < i\} = \#\{\nu_j < v_{\min}, j < i\}$ . Par ailleurs, comme  $\sigma < \nu$ , on a que  $\#\{\sigma_j < v_{\min}, j \leq k\} \geq \#\{\nu_j < v_{\min}, j \leq k\}$  et donc  $\#\{\nu_j < v_{\min}, j \leq k\} = \#\{\nu_j < v_{\min}, j < i\}$  ce qui signifie que  $v_{\min} \leq \nu_i$ .

Par ailleurs, il est clair par construction que  $\nu'$  appartient au coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$  et que  $\nu' \leq \nu$ . Soit  $\mu \in \sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$  tel que  $\sigma \leq \mu \leq \nu$ , prouvons que  $\mu \leq \nu'$ . Supposons que  $\mu \not\leq \nu'$ , alors il existe  $r < n$  et  $i < k$  tel que

$$\#\{\mu_j \leq r, j \leq i\} < \#\{\nu'_j \leq r, j \leq i\}. \quad (2.28)$$

Cela signifie en particulier qu'il existe  $\mu_\ell > r$  avec  $\ell \leq i$  tel que  $\mu_\ell \notin \{\nu'_1, \dots, \nu'_i\}$ , c'est-à-dire que  $\mu_\ell \in \{\nu'_{i+1}, \dots, \nu'_k\}$ . On choisit  $\mu_\ell$  minimal. Pour  $j \leq i$ , on a que  $\mu_\ell \in V_j$  et que  $\mu_\ell \neq \nu'_j$  ce qui signifie que  $\nu'_j < \mu_\ell$  si et seulement si  $\nu_j < \mu_\ell$ , d'où

$$\#\{\nu_j < \mu_\ell, j \leq i\} = \#\{\nu'_j < \mu_\ell, j \leq i\}. \quad (2.29)$$

Par ailleurs, comme  $\mu_\ell$  a été choisi minimal, que  $\mu_\ell > r$  et  $\mu_\ell \notin \{\nu'_1, \dots, \nu'_i\}$  on a que

$$\#\{\mu_j < \mu_\ell, j \leq i\} < \#\{\nu'_j < \mu_\ell, j \leq i\}. \quad (2.30)$$

Or on a  $\mu \leq \nu$  et donc  $\#\{\mu_j < \mu_\ell, j \leq i\} > \#\{\nu_j < \mu_\ell, j \leq i\}$  ce qui contredit (2.29) et (2.30). D'où  $\mu \leq \nu'$ .  $\square$

Le Lemme 2.3.12 peut être généralisé sous la forme suivante.

**Lemme 2.3.13.** *Soient  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m < n$  et  $\sigma$  et  $\nu$  deux permutations de  $\mathfrak{S}_n$  telles que  $\sigma \leq \nu$ . Alors l'intersection du coset  $\sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2-k_1} \times \mathfrak{S}_{k_3-k_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n-k_m})$  et de l'intervalle  $[\sigma, \nu]$  forme un intervalle.*

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence étant donné que  $\sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{n-k_1}) \supset \sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2-k_1} \times \mathfrak{S}_{n-k_2}) \supset \dots \supset \sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2-k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n-k_m})$ .  $\square$

