## Optimisation de forme aérodynamique

L'optimisation de forme est utilisée lors de la phase de conception préliminaire, pour aider l'ingénieur aérodynamicien à concevoir les formes de l'avion. L'optimisation automatique de forme aérodynamique permet de minimiser une fonction coût sous contraintes, en jouant sur des variables géométriques qui paramétrisent la forme. La fonction coût est issue des données aérodynamiques. C'est typiquement la traînée de l'avion, ou un écart à une répartition de pression objectif. Les contraintes peuvent être d'ordre aérodynamique (respecter une portance minimale) ou concernant la forme (envergure maximale de l'aile, épaisseur ou volume minimal). On appelle observation le calcul d'une quantité (comme la portance) sur le champ aérodynamique, qui entre en compte dans la formulation de la fonction coût ou d'une contrainte. Enfin, l'optimisation automatique de forme nécessite une méthode de déformation de la surface. Dassault Aviation, comme d'autres [6], a fait le choix de paramétrer la forme aérodynamique.

La minimisation de la fonction coût se fait à l'aide d'une méthode utilisant un gradient. Cela demande le calcul des dérivées partielles des observations aérodynamiques par rapport aux variables géométriques. Il faut donc connaître les dérivées partielles du champ aérodynamique par rapport aux variables géométriques. Deux méthodes existent pour calculer ces dérivées. La méthode directe calcule pour chaque variation de variable géométrique la variation de toutes les observations. La méthode adjointe, issue de la théorie du contrôle optimal [99, 114, 126] utilise un système adjoint associé à une observation pour obtenir en un seul calcul toutes les variations de variables géométriques. La méthode directe est plus efficace lorsqu'il y plus d'observations que de variables, et la méthode adjointe est plus intéressante lorsqu'il y plus de variables que d'observations. Pour plus de détails, on pourra consulter [4, 37, 42].

Le gradient des équations de la mécanique des fluides peut s'obtenir de deux façons. Soit les équations sont linéarisées analytiquement et résolues à l'aide de schéma *ad hoc*, soit le schéma numérique de résolution des équations non-linéaires est linéarisé par différenciation automatique (la section 2.3.2 traite spécifiquement cette notion). La première méthode, qui est utilisée dans [86, 126, 147], est appelée gradient continu. La deuxième [6] est dénommée



FIGURE 1.1 – Mode symétrique de voilure sur un Rafale avec emports.

gradient discret. Ces deux techniques ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Sans volonté d'exhaustivité, la méthode du gradient continu permet une analyse théorique du schéma, mais la définition des conditions aux limites est technique. A contrario, la méthode du gradient discret ne demande pas de travail théorique important pour les conditions aux limites, mais rend délicate l'analyse du schéma. Par exemple, le gradient de la stabilisation du schéma non-linéaire doit être inclus dans le linéarisé. L'analyse théorique de ce terme est compliquée (sur son impact pratique, on pourra consulter les résultats de la section 5.2.3). Enfin, on notera que l'utilisation du gradient discret permet toujours de diminuer la fonction coût sur le maillage choisi, tandis que la méthode du gradient continu ne garantit cette diminution que dans la limite d'une discrétisation infiniment fine.

## 1.1.2 Aeroélasticité

Le flottement (*flutter* en anglais) est un phénomène aéroélastique, c'està-dire de couplage entre le fluide et la structure de l'avion. Il correspond à un transfert d'énergie du fluide vers la structure. Si ce transfert d'énergie est supérieur à l'amortissement des modes structuraux, ceux-ci deviennent auto-entretenus et leur amplitude augmente, parfois jusqu'à destruction de l'aéronef. La vitesse de l'avion influe sur la quantité d'énergie que le fluide apporte aux modes structuraux.

Afin d'éviter de devoir coupler les calculs de mécanique des fluides et de structure, les forces aérodynamiques générées par chaque mode sont calculées séparément, avant d'être recombinées par la méthode p-k [85], que l'on trouvera également décrite dans [51]. Les calculs sont effectués sur des modes de structure. La figure 1.1 montre le déplacement associé à un mode de voilure symétrique sur un Rafale avec emports.

Les efforts aérodynamiques associés à chaque mode doivent être calculés sur un ensemble de dix fréquences et au moins six vitesses de l'avion. Plus de 400 modes sont évalués ainsi, pour une campagne d'évaluation de flottement sur un avion. Cela fait un total de 24000 calculs à réaliser.

Cela exclut l'utilisation d'une méthode temporelle, où l'on calculerait l'écoulement aérodynamique autour de l'avion en mouvement à la fréquence souhaitée, car elle serait trop coûteuse en temps de calcul. Une méthode linéarisée fréquentielle, telle que décrite par Lesoine dans [97], permet de diminuer substantiellement le temps de calcul. L'approche linéarisée fréquentielle est utilisée chez Dassault Aviation [38], mais également par le DLR [111, 158] à l'aide du code Tau [60].

Un calcul d'ordre de grandeur permet de trouver un temps acceptable pour une utilisation industrielle de l'approche linéarisée. Si chacun des 24000 calculs demande une minute pour sa résolution, le temps total de calcul de la campagne d'aéroélasticité est d'un peu plus de 16 jours, ce qui est raisonnable et compatible avec une utilisation industrielle.

#### 1.1.3 Aéroacoustique

L'aéroacoustique traite de l'acoustique en présence d'écoulements (propagation et production de bruit), et sert à évaluer l'impact sonore des avions au décollage, à l'atterrissage ou encore au sol. Plusieurs types de sources acoustiques génèrent le bruit d'un avion. Les sources aérodynamiques, dues à la turbulence, émettent un bruit sur un large spectre, qui est dû aux nombreuses échelles spatiales de la turbulence. Les sources issues des machines tournantes, principalement les réacteurs, ont un spectre resserré sur des fréquences caractéristiques (et leurs harmoniques) qui sont directement liées à la vitesse de rotation et au nombre de pales de la machine. La propagation du bruit de ces sources peut se faire efficacement à l'aide d'une méthode fréquentielle, d'autant qu'elles sont généralement connues par leurs composantes fréquentielles.

Les équations de propagation acoustique s'obtiennent en considérant une petite perturbation de l'écoulement dans les équations d'Euler. En l'absence d'écoulement porteur, les équations d'Euler linéarisées se réduisent à une équation d'Helmholtz, dont la résolution ne demande pas nécessairement une discrétisation du volume. Une équation de type Helmholtz peut être trouvée lorsque l'écoulement porteur est potentiel [1]. Des couches de cisaillement présentes dans l'écoulement porteur nécessitent d'utiliser les équations d'Euler linéarisées pour prendre correctement en compte les effets de réfraction associés.

Dans cette thèse, on s'est intéressé à la propagation acoustique de bruit de soufflante de réacteur, dont la source peut être modélisée par une décomposition modale sur quelques fréquences. Une approche linéarisée fréquentielle est bien sûr très adaptée. Pour résoudre ces problèmes, certains codes utilisent cependant une approche temporelle, comme dans [106, 128] ou encore [117].

Une étude de propagation aéroacoustique pour un bruit de machine

tournante part d'une description de la source, qui est connue fréquence par fréquence, et décomposée en mode sur chacune de celles-ci. Ensuite, chacune de ces composantes donne lieu à un calcul de propagation aéroacoustique depuis le réacteur jusqu'à l'endroit d'intérêt en utilisant les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement porteur. Enfin, le bruit total est recomposé par une somme pondérée et décorrélée de toutes ces composantes.

Selon son but, un calcul de propagation aéroacoustique peut chercher à déterminer le bruit en champ proche ou en champ lointain. Dans le premier cas, il s'agit d'évaluer le bruit sur une surface proche de la tuyère du réacteur afin de détecter d'éventuels problèmes de fatigue acoustique (des matériaux) causés par un niveau sonore trop élevé. Le bruit en champ lointain sert à calculer la signature sonore d'un avion au décollage ou à l'atterrissage, afin de quantifier la gêne acoustique des habitants riverains d'un aéroport.

Dans ces calculs en champ lointain, la propagation acoustique utilisant les équations d'Euler linéarisées est réalisée jusqu'à une surface d'interpolation située une certaine distance (typiquement une dizaine de longueur d'onde) afin d'une part que les termes acoustiques évanescents de champ proche soient éliminés, et d'autre part d'être loin des gradients de vitesse de propagation induits par l'écoulement – en d'autres termes être dans une zone de champ porteur uniforme non perturbé par l'avion. La propagation depuis cette surface d'interpolation, dite de Kirchhoff, jusqu'aux micros virtuels à grande distance se fait par une méthode intégrale basée sur des fonctions de Green. Ces dernières sont faciles à exprimer puisque l'écoulement est uniforme.

L'aéroacoustique possède une particularité qui la démarque des deux autres applications précédemment mentionnées. Les calculs de propagation demandent un maillage différent de celui utilisé pour calculer le champ porteur. Les maillages Navier-Stokes sont très structurés près de la surface de l'avion, afin de capturer correctement la couche limite. Une discrétisation adéquate de cette couche limite demande de nombreux points près de la surface. Cela conduit à des éléments très étirés dans cette zone, comme on présenté sur la figure 1.2 en haut. Un calcul de propagation acoustique demande un maillage isotrope, afin de respecter une discrétisation suffisante (qui dépend de la longueur d'onde calculée) dans toutes les directions possibles de propagation des ondes.

La solution du calcul Navier-Stokes non linéaire est projetée sur le maillage acoustique. Ce maillage est trop grossier pour discrétiser correctement la couche limite, comme on le voit sur la figure 1.2, image du milieu, ligne du bas. De plus, l'épaisseur de la couche limite est en pratique très petite devant les longueurs d'ondes calculées, et ainsi son effet sur la propagation acoustique est minimal et négligé. De surcroît, il serait trop coûteux de la mailler convenablement. Il faut donc supprimer la couche limite de l'écoulement porteur, ce qui est fait par un lissage volumique appliqué aux éléments proches de la paroi. Cette solution lissée sur le maillage acoustique est en tout point similaire à la solution du calcul non-linéaire original. Enfin, la



FIGURE 1.2 – Haut : maillages utilisés pour le calcul Navier-Stokes du champ porteur par RANS et pour la propagation acoustique. Bas : Effet de la projection de la solution RANS sur le maillage acoustique, puis effet du lissage de la couche limite.

suppression de la couche limite impose d'utiliser une condition de glissement à la paroi.

# 1.2 État de l'art

Le code AeTher, développé par Dassault Aviation, utilise la méthode des éléments finis stabilisés par SUPG pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles. Il est décrit plus en détails dans le chapitre 2. Le code AeTher a été linéarisé par différenciation automatique, en utilisant le logiciel TAPENADE [76].

Le code AeTher non-linéaire utilise l'algorithme GMRES [137] pour résoudre les problèmes implicites à chaque pseudo-pas de temps. Ce même algorithme a été repris pour les systèmes linéaires issus de la discrétisation des équations de Navier-Stokes linéarisées. Ces systèmes linéaires sont plus délicats à faire converger, et les tolérances de convergence sont beaucoup plus faibles. Pour l'application au linéarisé, le solveur GMRES a été doté d'une déflation des vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres selon la méthode de Morgan [115] améliorée par des astuces numériques [132]. Tout comme le code non-linéaire, les systèmes linéaires sont préconditionnés par une méthode de Schwarz additif, dont les solveurs locaux sont des préconditionneurs de type SOR par bloc (BSOR) ou ILU(0).

Le code AeTher est écrit en Fortran 77. L'intégralité des travaux décrits dans cette thèse a été implémentée dans ce code. Certains de ces travaux ont été industrialisés, et sont mis à la disposition de tous les utilisateurs du code linéarisé. AeTher utilise la bibliothèque MPI pour la parallélisation sur cluster de calcul haute performance. Toutes les simulations de cette thèse ont été réalisées sur les clusters de calcul de Dassault Aviation, en particulier sur le cluster Bull. Il se compose de lame possédant 2 processeurs Xeons *Ivy Bridge* de 12 cœurs chacun. Sur chaque cœur est lancé un processus MPI, qui s'occupe d'un sous-domaine. Des calculs industriels nécessitant 512 sous-domaines ont été lancés.

Dans le cadre des programmes avions, le code linéarisé est utilisé industriellement pour l'optimisation de formes [153]. Le temps de résolution des systèmes linéaires est par contre trop long pour envisager une utilisation industrielle pour une campagne d'aéroélasticité. En aéroacoustique, des premiers calculs avaient été menés avec le code Navier-Stokes linéarisé, mais avec des conditions limites particulières. Le plan d'imposition était traité comme une paroi limite vibrante. L'onde acoustique était générée par une vitesse non nulle imposée à cette paroi. Ce type de condition limite pose problème, car elle est complètement réfléchissante.

# 1.3 Résumé des travaux

Durant cette thèse, deux approches ont été suivies pour améliorer la résolution des équations de Navier-Stokes linéarisées. La première est évidemment les méthodes numériques de résolution de systèmes linéaires. La deuxième a été de travailler sur les schémas de discrétisation qui conduisent à ces systèmes. Ces deux axes ne sont pas opposés, bien au contraire. En effet, un problème mal discrétisé peut être difficile à résoudre car la solution du système linéaire n'est pas physique, et améliorer le solveur au prix de grands efforts serait un travail perdu.

Après un chapitre d'introduction sur le code AeTher, la thèse est divisée en deux grandes parties introduites précédemment, divisées chacune en deux chapitres. Dans les sections suivantes, les apports principaux de la thèse sont détaillés.

### 1.3.1 Solveur linéaire parallèle

Les maillages utilisés par Dassault Aviation pour résoudre les équations de Navier-Stokes sont très fins. Ils contiennent de plusieurs millions à quelques dizaines de millions de nœuds. Ainsi, les problèmes ne peuvent être résolus sur un seul processeur, mais doivent être partagés sur plusieurs dizaines voire centaines de processeur sur un super-calculateur. Les équations de Navier-Stokes ayant cinq inconnues, les systèmes linéaires issus de la discrétisation des équations de Navier-Stokes linéarisées ont plusieurs dizaines à centaines de millions d'inconnues. La taille de ces problèmes, qui conduit à un impératif de parallélisation, a guidé ce travail vers des solveurs linéaires qui soient très efficaces et qui se parallélisent bien.

L'algorithme GMRES est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires non symétriques. Inventé par Saad et Schultz [137], il se base sur la minimisation du résidu sur l'espace de Krylov généré par le résidu initial. Un espace de Krylov est généré par les itérés successifs de la matrice avec le vecteur initial choisi. L'orthonormalisation des itérés successifs par une méthode d'Arnoldi fournit une matrice de forme Hessenberg qui représente l'action de la matrice du système linéaire sur la base de Krylov construite. Afin d'améliorer les redémarrages, une déflation des petites valeurs propres est effectuée en ajoutant au début de l'espace de Krylov les vecteurs générant l'espace des vecteurs propres à éliminer, suivant une idée de Morgan [115].

Dans le chapitre 3, une extension de l'algorithme GMRES aux systèmes linéaires à plusieurs seconds membres a été testée. Une campagne de flottement nécessite la résolution, à la même fréquence et autour du même écoulement de référence, de nombreux modes structuraux qui chacun fournissent un second membre. La méthode block-GMRES est en tout point semblable à l'algorithme GMRES, mais s'applique à des vecteurs blocs, c'est-à-dire ayant plusieurs colonnes. Quelques modifications concernent l'orthonormalisation de la base de Krylov : l'étape de normalisation du vecteur dans la méthode d'Arnoldi se transforme en une décomposition QR pour la méthode bloc associée.

L'algorithme block-GMRES peut être plus rapide pour résoudre s seconds membres simultanément que s résolutions successives par l'algorithme GMRES, pour deux raisons. La première est d'ordre informatique : les accès à la mémoire sont regroupés, ce qui accélère (entre autre) les produits matrice-vecteurs. De même, les opérations parallèles (comme les assemblages de vecteurs, les sommes globales pour terminer un produit scalaire) sont regroupées. La deuxième raison est mathématique. L'espace de Krylov est plus riche, et la solution de chaque second membre peut utiliser l'espace de Krylov généré par les autres seconds membres.

Comme cette technique a été identifiée dans le cas standard (non bloc) comme étant primordiale pour la convergence de l'algorithme GMRES, la déflation des plus petites valeurs propres a également été implémentée, en étendant les idées de Morgan [115] au cas bloc.

Les tests numériques effectués ont montré que la méthode block-GMRES n'apportait pas les gains espérés. Cet algorithme est plus lent ou moins robuste, selon les cas tests. Pour une méthode de Krylov, augmenter la taille de l'espace de recherche permet d'être plus robuste, au prix d'un ralentissement de la méthode dû au temps d'orthonormalisation accru. Or, l'augmentation du nombre de seconds membres résolus simultanément augmente d'autant la taille de l'espace de Krylov. Ainsi, si la résolution simultanée des seconds membres ne diminue pas grandement le nombre d'itérations requis pour atteindre la convergence, la méthode block-GMRES ne sera pas compétitive face à l'algorithme GMRES utilisant une taille réduite d'espace de Krylov.

Pour accélérer la méthode block-GMRES, la technique dite de déflation de second membre se propose d'éliminer les seconds membres qui auraient convergés avant les autres ou seraient une combinaison linéaire des autres. Cependant, une exploration préliminaire de cette technique ne laisse pas penser qu'il y ait de forts gains à tirer de cette technique sur les cas tests étudiés.

L'autre pan de cette partie sur les solveurs linéaires est traité dans le chapitre 4 et concerne le préconditionnement, qui consiste à transformer le système linéaire en un système équivalent numériquement plus facile à résoudre. Pour ce faire, on peut multiplier à gauche ou à droite le système par une matrice  $\mathbf{M}$  approchant l'inverse de la matrice  $\mathbf{A}$  du système linéaire. L'équation  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$  sera plus facile à résoudre que le système initial. Un équilibre nécessaire existe entre qualité du préconditionnement et temps d'application. Un préconditionneur si bon qu'il réduit à quelques dizaines par exemple le nombre d'itérations pour résoudre un système est inutile si son temps de création et d'application est largement supérieur à la méthode itérative. Il faut donc trouver un préconditionnement efficace et rapide. Un deuxième défi du préconditionnement est sa parallélisation.

Puisque la matrice  $\mathbf{A}$  est distribuée sur plusieurs processeurs, il faut trouver un moyen de calculer une inverse approchée de suffisamment bonne qualité. Pour cela, le code AeTher utilise une méthode issue de la décomposition de domaine, appelée méthode de Schwarz additif [44, 156]. Dans sa version la plus simple, la méthode de Schwarz additif applique l'inverse des matrices locales  $\mathbf{A}_i$  (*i.e.* la restriction de la matrice globale  $\mathbf{A}$  à un sous-domaine *i*) à la restriction sur le sous-domaine *i* du vecteur qui est préconditionné. La méthode de Schwarz additive s'utilise en préconditionnement en remplaçant l'inverse exacte de la matrice locale par une inverse approchée.

L'avantage de la méthode de Schwarz additif tient dans sa simplicité, notamment d'implémentation, mais elle découple partiellement les sousdomaines, ce qui peut conduire à une perte de performance lorsque le découpage augmente. Pour rendre plus robuste la méthode de Schwarz au nombre de sous-domaine, la méthode de Schwarz à deux niveaux a été implémentée durant cette thèse. Elle consiste à ajouter un problème grossier commun à tous les sous-domaines, qui permet un transfert de l'information entre tous les sous-domaines. La méthode repose sur un espace grossier, dont une base est notée  $\mathbf{Z}$  composé de vecteurs dont on veut enlever l'influence sur la convergence du solveur de Krylov. La matrice du problème grossier, notée  $\mathbf{E}$ , est définie par  $\mathbf{E} = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}$ . Le préconditionneur à deux niveaux est  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T$  et on résout le système  $\mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{b}$ . Enfin, la solution est reconstruite en y rajoutant la contribution de l'espace grossier :  $\mathbf{x} = \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{Z} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}}$ .

Une bonne définition de l'espace grossier est cruciale pour l'intérêt de la méthode. Le premier espace testé a été celui de Nicolaides [120], qui est composé des vecteurs constants par sous-domaines. Ils composent le noyau des problèmes de Neumann dans chaque sous-domaine pour l'opérateur laplacien. De bonnes performances annoncées pour les équations de Navier-Stokes dans [5] ainsi que la simplicité de la méthode nous ont poussé à tester cet espace. Pour deux cas tests, l'un 2D et l'autre 3D, aucune accélération significative de la convergence n'a été constatée, même si le cas 2D a montré une amélioration de l'extensibilité. L'espace GDSW (pour Generalized Dryja-Smith-Widlund), plus complexe a été également testé. Il se base sur une partition de l'interface entre les sous-domaine en faces, arêtes et coins. Les vecteurs grossiers de l'espace GDSW sont générés par l'extension harmonique d'une impulsion sur chacune de ces faces, arêtes et coins. L'utilisation de cet espace ajoute beaucoup de difficultés, tant pour la création des vecteurs que la formation de la matrice du problème grossier. En 2D, il n'a pas donné de résultats suffisamment intéressants pour que son extension délicate à des problèmes 3D industriels soit menée.

Enfin, l'effet d'autres préconditionneurs locaux ainsi que l'impact du recouvrement dans la méthode de Schwarz additif ont été testés, à l'aide de la bibliothèque PETSc [12, 13, 14]. Elle propose entre autre des solveurs et



Préconditionneur	BSOR	ILU(1)
Temps (s)	420	98

FIGURE 1.3 – Cas DTP (cas test II). À gauche, courbe de convergence de l'algorithme GMRES pour le préconditionnement BSOR et ILU(1). À droite, temps de résolution.

des préconditionneurs « clef en main ». Elle a permis de tester, sans autre effort que celui de l'interfacer avec le code AeTher, le recouvrement des sousdomaines dans la méthode de Schwarz additif et d'autres préconditionneurs locaux, tel que l'ILU(k). Ce dernier est une décomposition LU incomplète d'où le nom d'ILU – en autorisant un certain niveau de remplissage dénoté par k. Il s'est avéré que ce préconditionneur local accélère grandement la résolution des systèmes linéaires. Par rapport au préconditionneur SOR par bloc (BSOR), l'utilisation de l'ILU(k) (également par bloc) a diminué jusqu'à un facteur dix le nombre d'itérations pour atteindre la convergence et le temps de résolution. Pour des calculs haute vitesse (c'est-à-dire en vol de croisière transsonique), l'ILU(1) est recommandé. La figure 1.4 présente les courbes de convergence ainsi que le temps de résolution pour le cas DTP (cas test II) pour le préconditionnement BSOR et ILU(1). Sur ce cas, le nombre d'itérations est divisé par six et le temps de résolution par quatre. Pour des applications basse vitesse en configuration hypersustentée, l'ILU(3) donne en général de meilleurs résultats. Le recouvrement des sous-domaines n'a pas apporté de gain suffisant sur le nombre d'itérations pour que les résolutions soient accélérées. L'utilisation de l'ILU(k) a permis de ramener le temps de résolution de chaque calcul d'une campagne d'aéroélasticité à l'ordre de la minute, ce qui rend possible l'utilisation industrielle de cette approche.

L'intégration de PETSc dans AeTher a été réalisée plus subtilement que d'utiliser la bibliothèque PETSc comme une boîte noire, à laquelle on fournirait un système linéaire à résolute et le nom du solveur et du préconditionneur à utiliser pour la résolution. En effet, l'algorithme GMRES de PETSc ne permettait pas une déflation des plus petites valeurs propres satisfaisante pour des problèmes dans  $\mathbb{R}$ , et cette déflation n'existe pas pour des problèmes complexes. La méthode GMRES codée dans AeTher a été conservée, en réduisant l'utilisation de PETSc à des opérations sur les grands vecteurs, à savoir les produits matrices-vecteurs, les produits scalaires et les combinaisons linéaires de vecteurs.

### 1.3.2 Schéma de discrétisation

La deuxième partie de cette thèse expose le travail effectué sur le schéma de discrétisation. Deux chapitres la composent, le premier (le chapitre 5) se concentre sur la stabilisation des éléments finis, et le deuxième (le chapitre 6) sur les conditions aux limites de Dirichlet.

Le code AeTher utilise la méthode des éléments finis pour discrétiser les équations de Navier-Stokes. Des éléments finis standards ne sont pas stables pour des équations d'advection-diffusion dont le nombre de Péclet est supérieur à un, ce qui interdit leur utilisation pour les équations de Navier-Stokes. Pour ce faire, le code AeTher utilise la méthode de stabilisation appelée SUPG [24]. Elle consiste en la modification des fonctions test. Si  $\mathcal{L}_{NS} : \mathbf{V} \mapsto \widetilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{V}_{,i} + (\widetilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i}$  est l'opérateur de Navier-Stokes, et  $\widetilde{\mathbf{A}}_i$  la jacobienne du flux d'Euler selon la direction *i*, la stabilisation SUPG s'écrit :

$$\sum_{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \left( \mathbf{W} + \boldsymbol{\tau} \widetilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{W}_{,i} \right) \cdot \mathcal{L}_{\text{NS}}(\mathbf{V}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \tag{1.1}$$

où  $\tau$  est la matrice de stabilisation, paramètre central de la méthode SUPG, définie sur chaque élément  $\Omega^e$  du maillage.

La construction de cette matrice de stabilisation dans AeTher suit celle donnée par Mallet dans [104]. La démonstration de cette construction est reprise dans cette thèse. Sur un système d'advection-diffusion 1D, l'ajout d'une viscosité artificielle bien choisie à un schéma de différences finies centrées permet d'obtenir un résultat exact aux nœuds. Cet ajout de viscosité se transpose pour une formulation élément fini par l'ajout d'un terme constant par élément aux fonctions test. L'extension à un système d'équations d'advection est immédiate, si l'opérateur d'advection est diagonalisable. On se ramène alors dans l'espace de ces vecteurs propres à des systèmes découplés d'advection. L'utilisation des variables entropiques pour formuler les équations d'Euler permet d'être dans ce cas, en se plaçant dans un espace bien choisi.

Une approximation est réalisée dans la construction théorique de la matrice  $\tau$  lors du passage à plusieurs dimensions. Pour ce faire, il faut généraliser la notion de valeur absolue d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire **B**. Mallet [104] propose d'utiliser  $\sqrt{\mathbf{B}^T \mathbf{B}}$ .

La matrice de stabilisation dans AeTher suit la construction de Mallet, en y ajoutant une approximation sur l'extension multidimensionnelle de  $\tau$ . Les termes croisés, entre autres, y sont négligés.

Durant cette thèse, nous avons cherché à quantifier l'impact de ces approximations en reprenant littéralement la formule proposée par Mallet,



FIGURE 1.4 – À gauche, coupe de pression sur le cas Falcon croisière (cas test V). À droite, convergence du résidu non-linéaire en fonction du nombre cumulé d'itérations GMRES sur le cas Falcon décollage (cas test VI).

sans simplifications. Cela rend le calcul de  $\tau$  bien plus complexe, puisqu'alors une matrice de taille 5 × 5 doit être diagonalisée numériquement avec LAPACK pour pouvoir calculer l'inverse de sa racine carrée. Cette nouvelle forme de matrice de stabilisation, que l'on appelle complète, a été testée sur des calculs non-linéaires pour déterminer un écoulement stationnaire, et linéarisés pour les applications sus-citées. Les calculs non-linéaires ont montré une réduction substantielle du nombre d'itérations GMRES nécessaire à la résolution des problèmes linéaires implicites à chaque pseudo pas de temps. Ils ont permis de constater que la matrice complète introduit moins de viscosité numérique, à tel point qu'il est délicat de l'utiliser pour des calculs transsoniques. La figure 1.4 illustre ces deux effets sur deux cas tests différents. Enfin, des simulations à basse vitesse montrent une réduction de la sensibilité du code aux variations de normales du maillage surfacique au niveau du fuselage. En linéarisé, la réduction du nombre d'itérations n'a pas été retrouvée. L'impact de la différentiation de la stabilisation est également discutée.

Le chapitre 6 – deuxième chapitre de cette partie consacrée au schéma de discrétisation – s'intéresse aux conditions aux limites de Dirichlet. Tout d'abord, une méthode d'imposition des conditions de Dirichlet non homogènes à des variables non triviales du calcul est présentée. Le code AeTher utilise les variables entropiques pour exprimer les équations de Navier-Stokes. De nombreuses propriétés mathématiques intéressantes sont apportées par ces variables, mais leur utilisation complique l'imposition des conditions aux limites. Prenons l'exemple de la pression. On choisit de l'imposer par la première variable entropique  $V_1$ , qui est la seule n'étant pas uniquement proportionnelle à la vitesse ou la température. On inverse l'expression de la pression en fonction des cinq variables entropiques pour isoler la première variable  $V_1 = f_p(V_2, \ldots, V_5, p)$ . La linéarisation de cette relation donne



FIGURE 1.5 – Décentrement différent des caractéristiques  $w^{(2)}$  et  $w^{(3)}$  avec la discrétisation SUPG pour une vitesse de fluide nulle. Schéma repris de la figure 6.9.

$$dV_1 = \sum_{i=2}^{5} \frac{\partial f_p}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial f_p}{\partial p} dp$$

qui permet d'éliminer la variable  $V_1$  et imposer la variation de pression dp demandée. Une méthode de transformation algébrique du système linéaire à résoudre est donnée.

Les conditions aux limites de Dirichlet non homogènes ont été implémentées pour trois variables. Le travail sur les conditions non homogènes a été motivé par l'aéroacoustique. Tout d'abord, l'imposition d'une variation de pression a été développée. Cette condition aux limites a permis l'utilisation sur des cas industriels du code Navier-Stokes linéarisé en aéroacoustique. Pour offrir un contrôle sur l'énergie acoustique injectée, une condition aux limites sur la variable caractéristique entrante a été testée. Une caractérisation angulaire de cette condition par une méthode originale de cavité résonante a montré qu'elle reste performante pour des angles à la normale de la surface inférieurs à 50°. La dernière utilisation des conditions de Dirichlet non homogènes a été d'imposer une vitesse imaginaire pure à la paroi de l'avion pour les calculs d'aéroélasticité. Auparavant, la vitesse était imposée par pénalisation, ce qui faussait légèrement les courbes de convergence pour la première itération.

Ensuite, une propriété étonnante en aéroacoustique des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur toutes les variables a été expliquée. Ces conditions aux limites simples se sont révélées être transparentes pour les ondes sortantes dans les calculs de propagation. L'explication est simple. La stabilisation SUPG apporte un décentrement de la discrétisation de chaque caractéristique. Ce décentrement est total en 1D sans terme temporel. Comme le montre le schéma de la figure 1.5, la caractéristique sortante  $w^{(2)}$  a une discrétisation décentrée. Elle atteint la condition de Dirichlet homogène en N sans que sa valeur aux nœuds précédents soit influencée par cette condition.

La caractéristique entrante  $w^{(3)}$  est uniformément nulle sur tout le segment de discrétisation. L'ajout du terme fréquentiel complique l'analyse, mais ne change pas les conclusions et permet en outre d'étudier analytiquement la performance du schéma stabilisé par SUPG. En deux ou trois dimensions, la matrice  $\tau$  ne permet pas de décentrer parfaitement chaque caractéristique. La démonstration n'est plus exacte, mais des expériences numériques en 2D et en 3D montrent que la propriété de transparence se conserve bien. L'influence de la matrice  $\tau$  complète sur la réflexion de ces conditions homogènes est négative : les réflexions sur les parois augmentent fortement. Cela montre que le contenu spectral de la matrice complète n'est pas bon et ne permet pas un bon décentrement de toutes les caractéristiques en 3D.

Le chapitre sur les conditions aux limites se conclut par des simulations sur un cas test industriel, qui est une tuyère modèle utilisée dans le cadre du projet européen *Clean Sky* [34]. Dans les cas sans écoulement, une comparaison très favorable est réalisée avec un code de propagation par éléments de frontière utilisant les équations d'Helmholtz, sur des modes acoustiques de plus en plus complexes. Un calcul avec écoulement montre des résultats prometteurs, même si la comparaison avec le code éléments frontières n'est alors plus possible.

# **1.4** Publications et communications

Plusieurs communications scientifiques ont été réalisées durant cette thèse. Elles sont listées ci-dessous.

# Articles de revues

[21] BISSUEL, A., ALLAIRE, G., DAUMAS, L., BARRÉ, S. et REY, F. Linearized Navier-Stokes equations for Aeroacoustics using Stabilized Finite Elements : Boundary Conditions and Industrial Application to Aft-Fan Noise Propagation. *Computers and Fluids*, 2017. En cours de revue.

N.B. Cet article a été traduit pour composer la majeure partie du chapitre 6 de cette thèse.

#### Actes de conférences

[23] BISSUEL, A., ALLAIRE, G., DAUMAS, L. MALLET, M. et CHA-LOT, F. Solving linear systems with multiple right-hand sides with GMRES : an application to aircraft design, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. doi :10.7712/100016.2339.7593, https://doi.org/10.7712/ 100016.2339.7593.

#### Communication orale

[22] BISSUEL, A., ALLAIRE, G., DAUMAS, L., CHALOT, F., BARRÉ, S. et REY, F. Linearized Navier-Stokes for Aeroacoustics : Assessment of Aft Fan Noise Radiated from Business Jet Engine Nozzles, *Finite Elements* in Flow 2017.

#### Posters

BISSUEL, A., ALLAIRE, G., DAUMAS, L., Improving the convergence of the linearized Navier-Stokes equations, *Journée HPCC-DD*, 7 avril 2016, Université Paris 13 – Villetaneuse.

BISSUEL, A., ALLAIRE, G., DAUMAS, L., Use of the linearized Navier-Stokes equations for shape optimization, flutter and aeroacoustics, *Séminaire mécanique des fluides numérique*, 30-31 janvier 2017, Institut Henri Poincaré, Paris.

BISSUEL, A., ALLAIRE, G., DAUMAS, L., BARRÉ, S. et REY, F. Équations de Navier-Stokes linéarisées pour l'aéroacoustique : propagation du bruit de moteur d'un avion d'affaire, *Rencontres maths-industrie : acoustique numérique et traitement du signal audio*, 13 mars 2017, École Polytechnique, Palaiseau.