Noyau et translation de Dunkl dans le cas d'un sous-système positif de racines orthogonales

Dans ce chapitre, on cherche à développer l'analyse de Dunkl dans le cas où le sous-système positif de racines considéré est composé de m vecteurs (avec $1 \leq m \leq d$) deux à deux orthogonaux.

En nous appuyant sur la formule de l'opérateur d'entrelacement récemment prouvée par Maslouhi et Youssfi dans [34], nous donnerons une formule explicite du noyau de Dunkl dans ce cadre là et nous établirons alors une formule produit pour ce noyau. Nous étudierons ensuite plus en détails le cas d'un système de racines de type $\mathcal{A}_1$. À cet effet, nous introduirons principalement les notions de polynôme de Jack et de fonction hypergéométrique multivariée qui nous seront utiles pour démontrer une égalité de fonctions spéciales. Enfin, nous verrons que la formule produit permet de démontrer classiquement que la translation de Dunkl est bornée. La plupart des résultats de l'analyse de Dunkl associée à $\mathbb{Z}_2^d$ semble donc généralisable dans ce contexte.

4.1 Noyau de Dunkl et formule produit

Commençons par définir le cadre de travail de ce chapitre.

On considère un sous-système positif de racines $\mathcal{R}_+ = \{\alpha^1, \dots, \alpha^m\}$ constitué de m vecteurs de $\mathbb{R}^d$ deux à deux orthogonaux (avec $1 \leq m \leq d$). On complète la famille $\{\alpha^j : 1 \leq j \leq m\}$ avec $d - m$ vecteurs notés $\beta^1, \dots, \beta^{d-m}$ de telle sorte que la famille $\{\alpha^j, \beta^l : 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq d - m\}$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^d$.

On fixe également une fonction de multiplicité κ associée au système de racines $\mathcal{R} = \{\pm\alpha^j : 1 \leq j \leq m\}$. Puisqu'il y a m classes de conjugaison de réflexions de $W(\mathcal{R})$, cette fonction de multiplicité prend m valeurs, notées $\kappa_1, \dots, \kappa_m$, qui sont respectivement associées à $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ et que l'on suppose strictement positives. La mesure μ_κ^W est dans ce cas donnée par

$$d\mu_\kappa^W(x) = \prod_{j=1}^m |\langle x, \alpha^j \rangle|^{2\kappa_j} dx.$$

Dans tout le chapitre, on notera par souci de simplification W le groupe de réflexions associé à $\mathcal{R}$ (plutôt que $W(\mathcal{R})$).

4.1.1 Formule explicite du noyau et formule produit

Nous allons donner dans cette sous-section une expression explicite du noyau de Dunkl associé à W ainsi qu'une formule produit pour ce noyau. Pour cela, commençons par rappeler la représentation intégrale suivante de l'opérateur d'entrelacement V_κ^W , récemment démontrée par Maslouhi et Youssfi ([34]).

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{R}_+ = \{\alpha^1, \dots, \alpha^m\}$ constitué de m vecteurs de $\mathbb{R}^d$ deux à deux orthogonaux (avec $1 \leq m \leq d$) et soit W le groupe de réflexions associé. Notons κ_j la valeur de la fonction de multiplicité en α^j . Soit la fonction $h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par*

$$h(t, x) = x + \sum_{j=1}^m (t_j - 1) \frac{\langle x, \alpha^j \rangle}{\langle \alpha^j, \alpha^j \rangle} \alpha^j.$$

Alors, l'opérateur d'entrelacement V_κ^W est donné par la représentation intégrale suivante

$$V_\kappa^W f(x) = \int_{[-1,1]^m} f(h(t, x)) \prod_{j=1}^m \mathcal{B}^{-1}\left(\kappa_j, \frac{1}{2}\right) (1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j-1} dt. \quad (4.1)$$

Remarque 4.2. Cette formule généralise celle du cadre $\mathbb{Z}_2^d$ démontrée par Xu (voir [60]) et rappelée dans le théorème 1.10.

On va bien évidemment utiliser la formule (4.1) pour en déduire une expression explicite du noyau de Dunkl. Au préalable, on introduit des notations.

Notations 4.3. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on désignera respectivement par x_{α^j} et x_{β^l} (pour $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq l \leq d-m$) les réels suivants

$$x_{\alpha^j} = \frac{\langle x, \alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|}, \quad x_{\beta^l} = \frac{\langle x, \beta^l \rangle}{\|\beta^l\|}.$$

On désignera par $x_{\alpha, \beta}$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ suivant

$$x_{\alpha, \beta} = (x_{\alpha^1}, \dots, x_{\alpha^m}, x_{\beta^1}, \dots, x_{\beta^{d-m}}).$$

Enfin, on notera $\bar{\kappa}^m$ la fonction de multiplicité associée au système de racines de $\mathbb{R}^m$ $\mathcal{R} = \{\pm e_j : 1 \leq j \leq m\}$ telle que pour tout $1 \leq j \leq m$

$$\bar{\kappa}^m(e_j) = \kappa_j,$$

et on notera $\bar{\kappa}^d$ la fonction de multiplicité associée au système de racines de $\mathbb{R}^d$ $\mathcal{R} = \{\pm e_j : 1 \leq j \leq d\}$ telle que

$$\bar{\kappa}^d(e_j) = \begin{cases} \kappa_j & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ 0 & \text{si } m < j \leq d. \end{cases}$$

On peut maintenant donner la formule du noyau.

Proposition 4.4. *Soit x, y deux éléments de $\mathbb{R}^d$. On a*

$$E_\kappa^W(ix, y) = E_{\bar{\kappa}^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(ix_{\alpha, \beta}, y_{\alpha, \beta}). \quad (4.2)$$

Démonstration. En appliquant le théorème précédent à la fonction $y \mapsto e^{i\langle x, y \rangle}$, on obtient

$$E_{\kappa}^W(ix, \cdot)(y) = V_{\kappa}^W(e^{i\langle x, \cdot \rangle})(y) = \int_{[-1, 1]^m} e^{i\langle x, h(t, y) \rangle} \prod_{j=1}^m \mathcal{B}^{-1}\left(\kappa_j, \frac{1}{2}\right) (1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j-1} dt.$$

En remarquant que

$$h(t, y) = \sum_{j=1}^m t_j \frac{y_{\alpha^j}}{\|\alpha^j\|} \alpha^j + \sum_{l=1}^{d-m} \frac{y_{\beta^l}}{\|\beta^l\|} \beta^l,$$

on aboutit alors à

$$E_{\kappa}^W(ix, y) = \prod_{l=1}^{d-m} e^{ix_{\beta^l} y_{\beta^l}} \prod_{j=1}^m \int_{-1}^1 e^{it_j x_{\alpha^j} y_{\alpha^j}} \mathcal{B}^{-1}\left(\kappa_j, \frac{1}{2}\right) (1+t_j)(1-t_j^2)^{\kappa_j-1} dt_j.$$

En utilisant la formule de l'opérateur d'entrelacement dans le cas $\mathbb{Z}_2$ (égalité (1.1) du théorème 1.10 dans le cas où $d = 1$), on obtient

$$E_{\kappa}^W(ix, y) = \prod_{l=1}^{d-m} e^{ix_{\beta^l} y_{\beta^l}} \prod_{j=1}^m E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(ix_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}),$$

et le résultat s'en déduit trivialement. $\square$

Remarque 4.5. Bien évidemment, la formule de la proposition 4.4 est indépendante du choix des vecteurs β_l . Cela est tout simplement dû au fait que l'on a

$$\prod_{l=1}^{d-m} e^{ix_{\beta^l} y_{\beta^l}} = e^{i\langle x, y \rangle} e^{-i \sum_{j=1}^m x_{\alpha^j} y_{\alpha^j}}.$$

On peut donc écrire le noyau comme suit

$$E_{\kappa}^W(ix, y) = e^{i\langle x, y \rangle} e^{-i \sum_{j=1}^m \frac{\langle x, \alpha^j \rangle \langle y, \alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|^2}} \prod_{j=1}^m E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}\left(i \frac{\langle x, \alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|}, \frac{\langle y, \alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|}\right). \quad (4.3)$$

Remarque 4.6. Signalons que la formule (4.3) est en accord avec un résultat de Gallardo et Godefroy que nous allons présenter dans cette remarque.

Dans l'article [26], ils ont notamment démontré (pour un système de racines $\mathcal{R}$ fixé et le groupe de réflexions W associé) qu'il existe une unique (à permutation près) décomposition de $\mathbb{R}^d$ sous la forme

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{V}_0 \oplus^{\perp} \mathcal{V}_1 \oplus^{\perp} \dots \oplus^{\perp} \mathcal{V}_N,$$

où $\mathcal{V}_0 = \cap_{\alpha \in \mathcal{R}} H_{\alpha}$ et où chaque $\mathcal{V}_j$ ($1 \leq j \leq N$) a pour seuls sous-espaces stables (sous l'action de W) $\{0\}$ et $\mathcal{V}_j$. De plus, en notant $\mathcal{R}_j = \mathcal{R} \cap \mathcal{V}_j$, alors $\mathcal{R}_j$ est un système de racines dans $\mathcal{V}_j$ qui engendre $\mathcal{V}_j$, et W s'identifie au groupe produit $\prod_{j=1}^N W_j$, où W_j est le groupe de réflexions associé à $\mathcal{R}_j$. La conséquence remarquable de ce résultat est que le noyau de Dunkl E_{κ}^W s'écrit alors

$$E_{\kappa}^W = E_{\kappa}^{W_0} \otimes E_{\kappa}^{W_1} \otimes \dots \otimes E_{\kappa}^{W_N},$$

où $E_{\kappa}^{W_0}$ est l'exponentielle classique sur $\mathcal{V}_0$ et $E_{\kappa}^{W_j}$ ($1 \leq j \leq N$) est le noyau de Dunkl associé à W_j et à la restriction sur $\mathcal{R}_j$ de la fonction de multiplicité κ .

Grâce à la proposition 4.4, nous allons pouvoir énoncer et démontrer une formule produit pour le noyau de Dunkl associé à W .

Théorème 4.7. *Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. On a la formule produit suivante*

$$\begin{aligned} E_\kappa^W(ix, z)E_\kappa^W(iy, z) \\ = \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{d-m}} E_\kappa^W(iz, A^{-1}z') \left(\bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j} \otimes \bigotimes_{l=1}^{d-m} d\delta_{(x+y)_{\beta^l}} \right) (z'_1, \dots, z'_d), \end{aligned}$$

où l'on désigne par A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1^1}{\|\alpha^1\|} & \cdots & \frac{\alpha_d^1}{\|\alpha^1\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\alpha_1^m}{\|\alpha^m\|} & \cdots & \frac{\alpha_d^m}{\|\alpha^m\|} \\ \frac{\beta_1^1}{\|\beta^1\|} & \cdots & \frac{\beta_d^1}{\|\beta^1\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\beta_1^{d-m}}{\|\beta^{d-m}\|} & \cdots & \frac{\beta_d^{d-m}}{\|\beta^{d-m}\|} \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.8. On a donc $x_{\alpha, \beta} = Ax$. On emploiera indifféremment l'une des deux écritures (en faisant le choix qui nous semble le plus approprié).

Démonstration. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. D'après la proposition 4.4, on peut écrire

$$E_\kappa^W(ix, z)E_\kappa^W(iy, z) = E_{\kappa^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(ix_{\alpha, \beta}, z_{\alpha, \beta})E_{\kappa^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(iy_{\alpha, \beta}, z_{\alpha, \beta}),$$

c'est-à-dire

$$E_\kappa^W(ix, z)E_\kappa^W(iy, z) = \prod_{l=1}^{d-m} e^{i(x+y)_{\beta^l} z_{\beta^l}} \prod_{j=1}^m E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(ix_{\alpha^j}, z_{\alpha^j})E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(iy_{\alpha^j}, z_{\alpha^j}).$$

En utilisant la formule produit unidimensionnelle (voir théorème 2.13) on obtient

$$E_\kappa^W(ix, z)E_\kappa^W(iy, z) = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} \prod_{l=1}^{d-m} e^{i(x+y)_{\beta^l} z_{\beta^l}} E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(iz_{\alpha^j}, z'_j) d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z'_j),$$

égalité qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} E_\kappa^W(ix, z)E_\kappa^W(iy, z) \\ = \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{l=1}^{d-m} e^{i(x+y)_{\beta^l} z_{\beta^l}} E_{\kappa^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(i(z_{\alpha^1}, \dots, z_{\alpha^m}), (z'_1, \dots, z'_m)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z'_j). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Or, pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq m$, on a

$$z'_j = (A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}))_{\alpha^j}. \quad (4.5)$$

En effet, on a par définition

$$\begin{aligned} (A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}))_{\alpha^j} \\ = \frac{\langle A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}), \alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & (A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}))_{\alpha^j} \\ &= \frac{\langle (z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}), A\alpha^j \rangle}{\|\alpha^j\|} = z'_j, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'orthonormalité de la matrice A . De même, on peut remarquer que pour tout l vérifiant $1 \leq l \leq d-m$

$$(x+y)_{\beta^l} = (A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}))_{\beta^l}. \quad (4.6)$$

En utilisant (4.5) et (4.6), on peut écrire l'égalité (4.4) comme suit

$$\begin{aligned} & E_{\kappa}^W(ix, z)E_{\kappa}^W(iy, z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} E_{\kappa}^{\mathbb{Z}_2^d} \left(iz_{\alpha, \beta}, (A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}))_{\alpha, \beta} \right) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z'_j), \end{aligned}$$

et l'on aboutit en utilisant la proposition 4.4 à

$$\begin{aligned} & E_{\kappa}^W(ix, z)E_{\kappa}^W(iy, z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} E_{\kappa}^W(iz, A^{-1}(z'_1, \dots, z'_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}})) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z'_j). \end{aligned}$$

On en déduit facilement la formule souhaitée. $\square$

Remarque 4.9. Cette formule produit ne dépend pas du choix des vecteurs β^l . C'est une simple conséquence de l'égalité (4.4), à savoir

$$\begin{aligned} & E_{\kappa}^W(ix, z)E_{\kappa}^W(iy, z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{l=1}^{d-m} e^{i(x+y)_{\beta^l} z_{\beta^l}} E_{\kappa}^{\mathbb{Z}_2^m} (i(z_{\alpha^1}, \dots, z_{\alpha^m}), (z'_1, \dots, z'_m)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z'_j), \end{aligned}$$

et du fait que

$$\prod_{l=1}^{d-m} e^{i(x+y)_{\beta^l} z_{\beta^l}} = e^{i\langle x+y, z \rangle} = e^{-i \sum_{j=1}^m \frac{(x+y)_{\alpha^j}}{\|\alpha^j\|} \langle \alpha^j, z \rangle}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser à un cas particulier de sous-système positif de racines orthogonales.

4.1.2 Un cas particulier intéressant

Considérons dans cette sous-section le cas particulier du système de racines de type $\mathcal{A}_1$, c'est-à-dire que l'on fixe dans $\mathbb{R}^2$ le système $\mathcal{R} = \{\pm(e_1 - e_2)\}$, et que l'on choisit comme sous-système positif $\mathcal{R}_+ = \{e_1 - e_2\}$ (en prenant $\alpha_0 = (2, 1)$).

Ce système orthogonal est intéressant pour la raison suivante. On connaît explicitement grâce aux travaux de Baker et Forrester (voir [5, 6]) la fonction de Bessel généralisée $J_{\kappa}^{\mathbb{S}^2}$: c'est une fonction hypergéométrique multivariée ${}_0F_0^{(\alpha)}$ à deux arguments, et l'on sait d'après Lassalle ([32]) que celle-ci s'exprime en dimension 2 au moyen de polynômes

de Gegenbauer. Par conséquent, en utilisant la formule explicite du noyau de Dunkl dans le cas $\mathcal{A}_1$ (cas particulier de la proposition 4.4), nous allons pouvoir donner une expression des fonctions de Bessel normalisées au moyen d'un développement en polynômes de Gegenbauer.

Même si nous n'allons nous intéresser qu'au seul cas de la dimension deux et à la fonction ${}_0F_0^{(\alpha)}$, nous introduisons les notions de polynôme de Jack et de fonction hypergéométrique multivariée en toute généralité. Pour cela, il faudra au préalable définir la notion de partition.

Partitions, polynômes de Jack et fonctions hypergéométriques multivariées

Pour plus de détails, nous renvoyons principalement le lecteur au livre de Macdonald [33] pour les partitions, à l'article de Stanley [47] pour les polynômes de Jack, aux articles de Baker et Forrester [5, 6] et à l'article de Yan [61] pour les fonctions hypergéométriques multivariées.

Partitions La dimension d étant fixée, on appelle partition à au plus d parties tout d -uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ d'entiers naturels rangés dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire vérifiant

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0.$$

On note $\mathbb{N}^{d,P}$ l'ensemble des partitions à au plus d parties. Le nombre d'éléments $\lambda_j \neq 0$ (les éléments non nuls sont les parties de λ) s'appelle la longueur de la partition, et on note cette longueur $l(\lambda)$. Le poids de la partition, noté $|\lambda|$, est défini par

$$|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_d.$$

On identifie une partition $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ avec son diagramme

$$\{(j, k) : 1 \leq j \leq l(\lambda), 1 \leq k \leq \lambda_j\}.$$

La partition conjuguée (ou duale) λ' de $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ est le m -uplet $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ donné par

$$\lambda'_j = \#\{k : \lambda_k \geq j\},$$

c'est-à-dire λ'_j est le nombre de nœuds sur la j -ème colonne de λ .

On définit enfin pour tout $(j, k) \in \lambda$ la longueur-crochet supérieure $h_\lambda^*(j, k)$ et la longueur-crochet inférieure $h_\lambda^*(j, k)$ par

$$\begin{aligned} h_\lambda^*(j, k) &= \lambda'_k - j + \alpha(\lambda_j - k + 1) \\ h_\lambda^*(j, k) &= \lambda'_k - j + 1 + \alpha(\lambda_j - k) \end{aligned}$$

avec α un réel strictement positif.

On va maintenant introduire les polynômes de Jack.

Polynômes de Jack Soit $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ et soit α un réel strictement positif. Le polynôme de Jack d'indice α (ou de paramètre de Jack α) est l'unique (à normalisation près) fonction $C_\lambda^{(\alpha)}$ homogène, symétrique et qui est fonction propre de l'opérateur

$$\sum_{j=1}^d x_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{2}{\alpha} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^d \frac{x_j^2}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

pour la valeur propre

$$v_\lambda = \sum_{j=1}^d \left(\lambda_j \left(\lambda_j - 1 - \frac{2}{\alpha}(j-1) \right) \right) + \frac{2}{\alpha} |\lambda| (d-1).$$

On choisit de normaliser les polynômes de Jack de telle sorte que

$$(x_1 + \cdots + x_d)^n = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} C_\lambda^{(\alpha)}(x).$$

L'autre normalisation classique est celle donnée par Stanley ([47]), où les polynômes de Jack $\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}$ sont choisis de telle sorte que

$$(x_1 + \cdots + x_d)^n = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!}{h(\lambda)} \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(x),$$

avec $h(\lambda)$ donné par

$$h(\lambda) = \prod_{(j,k) \in \lambda} h_\lambda^*(j,k) h_\lambda^\lambda(j,k).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ de poids n , la relation entre les $C_\lambda^{(\alpha)}$ et les $\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}$ est donc la suivante

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha^n n!}{h(\lambda)} \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}. \quad (4.7)$$

Remarque 4.10. Nous ne respectons pas les notations prises par Stanley afin d'éviter des confusions avec les fonctions de Bessel normalisées et les fonctions de Bessel généralisées.

Venons-en maintenant aux fonctions hypergéométriques multivariées.

Fonctions hypergéométriques multivariées Avant de donner la définition de ces fonctions, rappelons la définition de deux objets usuels de la théorie des fonctions spéciales. Pour tout complexe z et tout entier naturel n , on notera $(z)_n$ le symbole de Pochhammer défini par

$$(z)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \prod_{j=1}^n (z + j - 1) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Pour tout complexe z , tout réel α strictement positif et toute partition $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$, on notera $(z)_\lambda^{(\alpha)}$ le symbole de Pochhammer généralisé défini par

$$(z)_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{j=1}^d \left(z - \frac{1}{\alpha}(j-1) \right)_{\lambda_j}.$$

On introduit également la notation commode suivante.

Notation 4.11. Par souci de simplification, on désignera par $\mathbf{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^d$ $(1, \dots, 1)$.

On peut maintenant donner la définition des fonctions hypergéométriques multivariées.

Définition 4.12. Soit p et q deux entiers naturels, soit $\lambda \in \mathbb{N}^{d,P}$ et soit α un réel strictement positif. Soit $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ des nombres complexes tels que $(b_j)_\lambda^{(\alpha)} \neq 0$ pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq q$.

La fonction hypergéométrique multivariée (à deux arguments) ${}_pF_q^{(\alpha)}$ est définie par la série

$${}_pF_q^{(\alpha)}(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x; y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{(a_1)_\lambda^{(\alpha)} \cdots (a_p)_\lambda^{(\alpha)}}{(b_1)_\lambda^{(\alpha)} \cdots (b_q)_\lambda^{(\alpha)}} \frac{C_\lambda^{(\alpha)}(x) C_\lambda^{(\alpha)}(y)}{|\lambda|! C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1})}.$$

D'après les travaux de Baker et Forrester ([5, 6]), on sait que la fonction de Bessel généralisée est donnée dans le cas du système de racines de type $\mathcal{A}_{d-1}$ par

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_d}(x, y) = {}_0F_0^{(1/\kappa)}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{C_\lambda^{(1/\kappa)}(x) C_\lambda^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|! C_\lambda^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})}, \quad (4.8)$$

et dans le cas du système de racines de type $\mathcal{B}_d$ par

$$\begin{aligned} J_\kappa^{\mathfrak{S}_d \times \mathbb{Z}_2^d}(x, y) &= {}_0F_1^{(1/\kappa_2)}\left(b; \left(\frac{x_1^2}{2}, \dots, \frac{x_d^2}{2}\right), \left(\frac{y_1^2}{2}, \dots, \frac{y_d^2}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{d,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{C_\lambda^{(1/\kappa_2)}\left(\frac{x_1^2}{2}, \dots, \frac{x_d^2}{2}\right) C_\lambda^{(1/\kappa_2)}\left(\frac{y_1^2}{2}, \dots, \frac{y_d^2}{2}\right)}{(b)_\lambda^{(1/\kappa_2)} |\lambda|! C_\lambda^{(1/\kappa_2)}(\mathbf{1})}, \end{aligned}$$

avec κ_1 et κ_2 les deux valeurs de la fonction de multiplicité et

$$b = \kappa_1 + (d-1)\kappa_2 + \frac{1}{2}.$$

Signalons que Demni a récemment démontré dans [13] une formule explicite dans le cas d'un système de racines de type diédral, cette formule faisant également intervenir des fonctions hypergéométriques multivariées.

Une égalité de fonctions spéciales Grâce à l'expression de la fonction de Bessel généralisée $J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$ et à l'expression du noyau de Dunkl $E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$, nous allons pouvoir en déduire une expression de la fonction de Bessel normalisée d'ordre $\kappa - \frac{1}{2}$ en termes de polynômes de Gegenbauer. Avant d'être plus précis, rappelons la définition des polynômes de Gegenbauer (aussi appelés polynômes ultrasphériques). Pour une étude détaillée de ces fonctions spéciales, nous renvoyons le lecteur au livre de Andrews, Askey et Roy ([4]).

Définition 4.13. Soit $\alpha, \beta > -1$ deux réels et soit n un entier naturel. Les polynômes de Jacobi, notés $P_n^{(\alpha, \beta)}$, sont définis par

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}).$$

On définit alors, pour tout réel $\alpha > -\frac{1}{2}$ et tout entier naturel n , les polynômes de Gegenbauer U_n^α par

$$U_n^\alpha(x) = \frac{(2\alpha)_n}{\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(\alpha-1/2, \alpha-1/2)}(x).$$

Remarque 4.14. Les polynômes de Gegenbauer sont traditionnellement notés C_n^α . Nous avons décidé ici de prendre une autre notation afin d'éviter d'éventuelles confusions avec les polynômes de Jack.

Écrivons à présent la formule que l'on souhaite démontrer.

Théorème 4.15. *Soit κ la valeur strictement positive de la fonction de multiplicité que l'on associe à $\mathcal{A}_1$. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 x_2 > 0, y_1 y_2 > 0$. Notons pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^{2,P}$*

$$c(\lambda) = h^{-1}(\lambda) \prod_{(j,k) \in \lambda} (2 - (j-1) + \alpha(k-1)) = \prod_{(j,k) \in \lambda} \left(\frac{(2 - (j-1) + \alpha(k-1))}{h_\lambda^*(j,k) h_*^\lambda(j,k)} \right),$$

et notons

$$G(\lambda, \kappa, x, y) = (x_1 x_2 y_1 y_2)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} U_{\lambda_1 - \lambda_2}^\kappa \left(\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \right) U_{\lambda_1 - \lambda_2}^\kappa \left(\frac{y_1 + y_2}{2\sqrt{y_1 y_2}} \right).$$

Alors, on a l'égalité de fonctions spéciales suivante

$$\begin{aligned} j_{\kappa - \frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \right) \\ = e^{\frac{-(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{2,P} \\ |\lambda| = n}} c(\lambda) \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{|\lambda|} \left((\lambda_1 - \lambda_2)! (2\kappa)_{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 G(\lambda, \kappa, x, y). \end{aligned}$$

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin du lemme suivant qui donne une formule explicite des polynômes de Jack en dimension 2. Ce lemme n'est rien d'autre qu'une réécriture d'un résultat de Lassalle (voir [32]).

Lemme 4.16. *Soit α un réel strictement positif et soit $\lambda \in \mathbb{N}^{2,P}$. Le polynôme de Jack $C_\lambda^{(\alpha)}$ est donné pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x_1 x_2 > 0$ par*

$$C_\lambda^{(\alpha)}(x) = c(\lambda) \alpha^{|\lambda|} |\lambda|! (\lambda_1 - \lambda_2)! \left(\frac{2}{\alpha} \right)_{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} U_{\lambda_1 - \lambda_2}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \right).$$

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^{2,P}$, on dispose, d'après l'article [32] de Lassalle, de la formule suivante

$$\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(x) = \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}) (\lambda_1 - \lambda_2)! \left(\frac{2}{\alpha} \right)_{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} U_{\lambda_1 - \lambda_2}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \right).$$

Or, on sait d'après Stanley (voir [47]) que

$$\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}) = \prod_{(j,k) \in \lambda} (2 - (j-1) + \alpha(k-1)).$$

Par conséquent

$$\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(x) = \prod_{(j,k) \in \lambda} (2 - (j-1) + \alpha(k-1)) (\lambda_1 - \lambda_2)! \left(\frac{2}{\alpha} \right)_{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} U_{\lambda_1 - \lambda_2}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \right).$$

En utilisant le lien entre les $\mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}$ et les $C_\lambda^{(\alpha)}$ (égalité (4.7)), on aboutit à

$$\begin{aligned} & \frac{h(\lambda)}{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!} C_\lambda^{(\alpha)}(x) \\ &= \prod_{(j,k) \in \lambda} (2 - (j-1) + \alpha(k-1)) (\lambda_1 - \lambda_2)! \left(\frac{2}{\alpha}\right)_{\lambda_1 - \lambda_2} (x_1 x_2)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} U_{\lambda_1 - \lambda_2}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}}\right), \end{aligned}$$

et le résultat s'en déduit trivialement. $\square$

Remarque 4.17. On a en particulier

$$C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}) = c(\lambda) \alpha^{|\lambda|} |\lambda|!, \quad (4.9)$$

où l'on a utilisé le résultat bien connu sur les polynômes de Gegenbauer (voir par exemple [4, page 302])

$$U_n^\alpha(1) = \frac{(2\alpha)_n}{n!}.$$

En revenant à la définition de $c(\lambda)$ et d'après l'égalité annoncée au cours de la preuve précédente

$$\prod_{(j,k) \in \lambda} (2 - (j-1) + \alpha(k-1)) = \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}),$$

on obtient

$$C_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}) = \frac{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!}{h(\lambda)} \mathcal{J}_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{1}),$$

ce qui est cohérent puisque l'on retrouve l'égalité de normalisation (4.7).

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 4.15.

Démonstration. Par définition de la fonction de Bessel généralisée dans le cas $W(\mathcal{A}_1) \simeq \mathfrak{S}_2$, on a

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x, y) = \frac{1}{2} \left(E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x, y) + E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}((x_2, x_1), y) \right).$$

En utilisant la formule explicite du noyau $E_\kappa^{\mathfrak{S}_2}$ (cas particulier de la proposition 4.4), on aboutit à

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x, y) = \frac{1}{2} e^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}} \left(E_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) + E_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Or, on a

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) + E_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) = 2J_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right),$$

c'est-à-dire

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) + E_\kappa^{\mathbb{Z}_2} \left(\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}} \right) = 2j_{\kappa - \frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \right).$$

On peut donc affirmer que

$$J_\kappa^{\mathfrak{S}_2}(x, y) = e^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}} j_{\kappa - \frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \right).$$

D'après la formule explicite (4.8), on peut également écrire

$$J_{\kappa}^{\mathfrak{S}_2}(x, y) = {}_0F_0^{(1/\kappa)}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{2,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(x) C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|! C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})}.$$

Par conséquent

$$e^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}} j_{\kappa-\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{2,P} \\ |\lambda|=n}} \frac{C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(x) C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|! C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})}. \quad (4.10)$$

En utilisant le lemme 4.16 et l'égalité (4.9) donnée dans la remarque précédente, on obtient après simplifications

$$\frac{C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(x) C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|! C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})} = c(\lambda) \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{|\lambda|} \left((\lambda_1 - \lambda_2)! (2\kappa)_{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 (x_1 x_2 y_1 y_2)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} U_{\lambda_1 - \lambda_2}^{\kappa} \left(\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} \right) U_{\lambda_1 - \lambda_2}^{\kappa} \left(\frac{y_1 + y_2}{2\sqrt{y_1 y_2}} \right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(x) C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(y)}{|\lambda|! C_{\lambda}^{(1/\kappa)}(\mathbf{1})} = c(\lambda) \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{|\lambda|} \left((\lambda_1 - \lambda_2)! (2\kappa)_{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 G(\lambda, \kappa, x, y).$$

En utilisant cette égalité dans (4.10), cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} e^{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}{2}} j_{\kappa-\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \right) \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^{2,P} \\ |\lambda|=n}} c(\lambda) \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{|\lambda|} \left((\lambda_1 - \lambda_2)! (2\kappa)_{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 G(\lambda, \kappa, x, y), \end{aligned}$$

et le théorème est ainsi démontré. $\square$

Revenons à présent au cas général d'un sous-système positif de racines orthogonales. Nous allons voir dans la section suivante que la formule produit du théorème 4.7 permet de démontrer que l'opérateur de translation généralisé est borné.

4.2 Translation de Dunkl

Commençons par donner la représentation intégrale de la translation de Dunkl.

Proposition 4.18. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a la représentation intégrale suivante*

$$\tau_x^{W, \kappa}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(A^{-1}z) \left(\bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j} \otimes \bigotimes_{l=1}^{d-m} d\delta_{(x+y)_{\beta^l}} \right) (z_1, \dots, z_d), \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (4.11)$$

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 2.16. $\square$

Une fois encore, la formule ne dépend pas du choix des vecteurs β^l puisque la formule produit du noyau de Dunkl E_κ^W n'en dépend pas. La proposition précédente entraîne le caractère borné de la translation de Dunkl. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 4.19. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit p vérifiant $1 \leq p \leq +\infty$. La translation de Dunkl $\tau_x^{W,\kappa}$ s'étend à $L^p(\mu_\kappa^W)$ en un opérateur borné qui vérifie*

$$\|\tau_x^{W,\kappa} f\|_{W,\kappa,p} \leq 4^m \|f\|_{W,\kappa,p}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$. Nous allons montrer que

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}(z_1, \dots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}})) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \in L^p(\mu_\kappa^W).$$

Pour éviter de trop longues écritures, nous noterons dans cette preuve

$$(z_1, \dots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}) = v(z, x+y).$$

On se limite au cas où $1 < p < +\infty$ (le cas $p = +\infty$ est évident, le cas $p = 1$ utilise les mêmes arguments que ceux que nous allons présenter). Soit alors q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En écrivant

$$\begin{aligned} & \left| f(A^{-1}v(z, x+y)) \prod_{j=1}^m \mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j) \right| \\ &= |f(A^{-1}v(z, x+y))| \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)|^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

on obtient après application de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}v(z, x+y)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \right|^p \\ & \leq 4^{\frac{mp}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(A^{-1}v(z, x+y))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)| d\mu_{\kappa^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(z) \right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que (d'après le point 2.(b) du théorème 2.13)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j)| d\mu_{\kappa^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(z) \right)^{\frac{p}{q}} \leq 4^{\frac{mp}{q}}.$$

En intégrant et après interversion licite, on aboutit à

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}v(z, x+y)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \right|^p d\mu_\kappa^W(y) \\ & \leq 4^{\frac{mp}{q}} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}v(z, x+y))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j) \langle y, \alpha^j \rangle^{2\kappa_j}| dy \right) d\mu_{\kappa^m}^{\mathbb{Z}_2^m}(z). \quad (4.12) \end{aligned}$$

Or, en effectuant le changement de variable $y' = Ay$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}v(z, x + y))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j) \langle y, \alpha^j \rangle^{2\kappa_j}| dy &= \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} \times \\ \int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1} + x_{\beta^1}, \dots, y'_d + x_{\beta^{d-m}}))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j) y_j'^{2\kappa_j}| dy' &, \end{aligned}$$

et par invariance par translation

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}v(z, x + y))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}, z_j) \langle y, \alpha^j \rangle^{2\kappa_j}| dy \\ = \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1}, \dots, y'_d))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j) y_j'^{2\kappa_j}| dy'. \end{aligned}$$

Par conséquent, en revenant à l'inégalité (4.12) on a

$$\begin{aligned} 4^{\frac{-mp}{q}} \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{-2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}v(z, x + y)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \right|^p d\mu_{\kappa}^W(y) \\ \leq \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1}, \dots, y'_d))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j) y_j'^{2\kappa_j}| dy' \right) d\mu_{\frac{\mathbb{Z}_2^m}{\kappa}}(z). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour alléger les écritures, posons momentanément

$$(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1}, \dots, y'_d) = w(z, y'_{m+1, d}).$$

Puisque l'on a d'une part

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(A^{-1}w(z, y'_{m+1, d}))|^p \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j) y_j'^{2\kappa_j}| dy' = \\ \int_{\mathbb{R}^{d-m}} |f(A^{-1}w(z, y'_{m+1, d}))|^p \left(\int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j) y_j'^{2\kappa_j}| dy'_1 \dots dy'_m \right) dy'_{m+1} \dots dy'_d, \end{aligned}$$

et d'autre part (en utilisant les propriétés de symétrie de chaque $\mathcal{K}_{\kappa_j}$ et en utilisant à nouveau le point 2.(b) du théorème 2.13)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m |\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_{\alpha^j}, y'_j, z_j) y_j'^{2\kappa_j}| dy'_1 \dots dy'_m \leq 4^m,$$

on peut affirmer en revenant à l'inégalité (4.13) que

$$\begin{aligned} 4^{\frac{-mp}{q}} \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{-2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}v(z, x + y)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \right|^p d\mu_{\kappa}^W(y) \\ \leq 4^m \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{d-m}} |f(A^{-1}(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1}, \dots, y'_d))|^p \prod_{j=1}^m |z_j|^{2\kappa_j} dz_1 \dots dz_m dy'_{m+1} \dots dy'_d. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$z' = A^{-1}(z_1, \dots, z_m, y'_{m+1}, \dots, y'_d),$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} 4^{-\frac{mp}{q}} \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{-2\kappa_j} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}v(z, x+y)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \right|^p d\mu_{\kappa}^W(y) \\ \leq 4^m \int_{\mathbb{R}^d} |f(z')|^p \prod_{j=1}^m \left(\frac{|\langle z', \alpha^j \rangle|}{\|\alpha^j\|} \right)^{2\kappa_j} dz', \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(A^{-1}v(z, x+y)) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j) \right|^p d\mu_{\kappa}^W(y) \leq 4^{m+\frac{mp}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(z')|^p d\mu_{\kappa}^W(z').$$

Le théorème est ainsi démontré. $\square$

Bien évidemment, on a comme conséquence immédiate du caractère borné de la translation de Dunkl le corollaire suivant concernant la convolution de Dunkl.

Corollaire 4.20. *Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Alors l'application $(f, g) \mapsto f \underset{W, \kappa}{*} g$ définie initialement sur $L^2(\mu_{\kappa}^W) \times L^2(\mu_{\kappa}^W)$ s'étend en une application continue de $L^p(\mu_{\kappa}^W) \times L^q(\mu_{\kappa}^W)$ dans $L^r(\mu_{\kappa}^W)$ et on a

$$\|f \underset{W, \kappa}{*} g\|_{W, \kappa, r} \leq c_{\kappa}^W 4^m \|f\|_{W, \kappa, p} \|g\|_{W, \kappa, q}.$$

On dispose donc des mêmes outils puissants que dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$. En fait, il est vraisemblable que la plupart des résultats qui ont été démontrés dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ soit généralisable au cas où l'on considère un sous-système positif de racines deux à deux orthogonales (et dont le cas $\mathbb{Z}_2^d$ est un cas particulier). Ces deux théories sont très proches, et ce lien peut être illustré par l'égalité suivante portant sur les transformations de Dunkl

$$\mathcal{F}_{\kappa}^W(f)(x) = \mathcal{F}_{\kappa^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(f \circ A^{-1})(x_{\alpha, \beta}). \quad (4.14)$$

En effet, on peut écrire par définition

$$\mathcal{F}_{\kappa}^W(f)(x) = c_{\kappa}^W \int_{\mathbb{R}^d} E_{\kappa}^W(-ix, y) f(y) \prod_{j=1}^m |\langle y, \alpha^j \rangle|^{2\kappa_j} dy.$$

En utilisant la formule du noyau (4.2), on obtient

$$\mathcal{F}_{\kappa}^W(f)(x) = c_{\kappa}^W \int_{\mathbb{R}^d} E_{\kappa^d}^{\mathbb{Z}_2^d}(-ix_{\alpha, \beta}, y_{\alpha, \beta}) f(y) \prod_{j=1}^m |\langle y, \alpha^j \rangle|^{2\kappa_j} dy,$$

et en effectuant le changement de variable $y' = Ay$ on aboutit à

$$\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x) = \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} c_\kappa^W \int_{\mathbb{R}^d} E_{\frac{\mathbb{Z}_2^d}{\kappa^d}}(-ix_{\alpha,\beta}, y')(f \circ A^{-1})(y') \prod_{j=1}^m |y'_j|^{2\kappa_j} dy',$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_\kappa^W(f)(x) = \prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} c_\kappa^W \left(\frac{\mathbb{Z}_2^d}{\kappa^d}\right)^{-1} \mathcal{F}_{\frac{\mathbb{Z}_2^d}{\kappa^d}}(f \circ A^{-1})(x_{\alpha,\beta}).$$

Or, un calcul rapide montre que

$$\prod_{j=1}^m \|\alpha^j\|^{2\kappa_j} c_\kappa^W = c_{\frac{\mathbb{Z}_2^d}{\kappa^d}},$$

et on en déduit l'égalité (4.14).

Terminons ce chapitre avec une discussion sur l'opérateur maximal M_κ^W .

4.3 Opérateur maximal de Dunkl

Commençons par donner une estimation fine de la translattée de Dunkl de χ_{B_r} . Rappelons au préalable que l'on note

$$I(x, r) =]\max\{0; |x| - r\}, |x| + r[.$$

Théorème 4.21. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$ on a*

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leq C \prod_{j=1}^m \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}]-r, r[}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_{\alpha^j}, r))},$$

où $C = C(m, \kappa)$ est une constante indépendante de x, y, r .

Démonstration. Écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$

$$\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^m} (\chi_{B_r} \circ A^{-1})(z_1, \dots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j).$$

Puisque la fonction χ_{B_r} est radiale, on peut alors écrire

$$\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{B_r}(z_1, \dots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j).$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.22, on a

$$\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{B_r}(z_1, \dots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j, +}(z_j),$$

en rappelant que

$$d\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2, \kappa, +}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_\kappa(|x|, |y|, |z|)(1 - \rho_{x,y,z}) d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) & \text{si } x, y \neq 0 \\ d\delta_x(z) & \text{si } y = 0 \\ d\delta_y(z) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Puisque cette mesure est positive, on peut désormais affirmer que

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{Q_r}(z_1, \dots, z_m, (x+y)_{\beta^1}, \dots, (x+y)_{\beta^{d-m}}) \bigotimes_{j=1}^m d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j, +}(z_j).$$

Les variables étant séparées, on en déduit que

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leq \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} \chi_{] -r, r[}(z_j) d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j, +}(z_j).$$

Or, pour tout $1 \leq j \leq m$, on a par parité de $z_j \mapsto \chi_{] -r, r[}(z_j)$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{] -r, r[}(z_j) d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j, +}(z_j) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{] -r, r[}(z_j) d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(z_j),$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{] -r, r[}(z_j) d\nu_{x_{\alpha^j}, y_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j, +}(z_j) = \tau_{x_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(\chi_{] -r, r[})(y_{\alpha^j}).$$

Finalement, on a donc

$$|\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leq \prod_{j=1}^m \tau_{x_{\alpha^j}}^{\mathbb{Z}_2, \kappa_j}(\chi_{] -r, r[})(y_{\alpha^j}). \quad (4.15)$$

On obtient le résultat escompté en utilisant le théorème 2.23 dans l'inégalité (4.15). $\square$

Supposons dorénavant que le sous-système positif de racines orthogonales est composé de d vecteurs $\alpha^1, \dots, \alpha^d$ et que les valeurs $\kappa_1, \dots, \kappa_d$ de la fonction de multiplicité sont strictement positives.

En utilisant l'estimation de la proposition précédente et en suivant la méthode donnée dans la preuve de la proposition 2.30, on peut construire un opérateur qui va contrôler M_{κ}^W . Plus précisément, notons R_{α} l'ensemble

$$R_{\alpha}(x, r) = I(x_{\alpha^1}, r) \times \dots \times I(x_{\alpha^d}, r),$$

et notons $M_{\kappa}^{W, R_{\alpha}}$ l'opérateur

$$M_{\kappa}^{W, R_{\alpha}} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_{\kappa}^W(R_{\alpha}(x, r))} \int_{\{y: (|y_{\alpha^1}|, \dots, |y_{\alpha^d}|) \in R_{\alpha}(x, r)\}} |f(y)| d\mu_{\kappa}^W(y).$$

On peut alors aisément prouver la proposition suivante en adaptant la preuve de la proposition 2.30.

Proposition 4.22. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a l'inégalité de contrôle suivante*

$$M_{\kappa}^W f(x) \leq C M_{\kappa}^{W, R_{\alpha}} f(x), \quad (4.16)$$

où $C = C(d, \kappa)$ est indépendante de f et de x .

Cet opérateur $M_{\kappa}^{W, R_{\alpha}}$ est bien entendu de type Hardy-Littlewood : on peut donc montrer pour $M_{\kappa}^{W, R_{\alpha}}$ (et donc pour M_{κ}^W grâce à l'inégalité (4.16)) un théorème maximal scalaire par des techniques de recouvrement et d'interpolation, et des inégalités de Fefferman-Stein pour $M_{\kappa}^{W, R_{\alpha}}$ (et donc pour M_{κ}^W grâce à l'inégalité (4.16)) en suivant la méthode du chapitre 2.