

Notions sur la théorie des probabilités

Dans le cadre de ce mémoire, l'approche probabiliste est choisie pour modéliser les incertitudes. Dans cette approche, les paramètres incertains vont être modélisés par des variables ou des champs aléatoires. Dans cette partie, on introduit d'abord quelques notations sur la théorie des probabilités. Ensuite, on présentera le chaos polynomial qui est souvent utilisé pour approcher une variable aléatoire dont la variance existe.

1.1.1 Notion sur les probabilités

On rappelle ici quelques notions de base ainsi que des notations de la théorie des probabilités qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

Dans l'observation d'un phénomène aléatoire, on introduit Θ l'ensemble des résultats possibles dont θ est un événement élémentaire. On munit Θ d'une tribu F (voir annexe 1 pour plus de détails) dont les éléments sont appelés événements. L'espace (Θ, F) est muni d'une mesure probabiliste P_Θ de F dans $[0 ; 1]$. On appelle (Θ, F, P_Θ) l'espace probabilisé.

Une variable aléatoire ζ réelle qui est une fonction de Θ dans R est associée à une loi de probabilité P_ζ :

$$P_\zeta(U) = P_\Theta(\zeta^{-1}(U)) \quad (1.1)$$

avec U appartient à une tribu B de R . On note $F_\zeta(x) = P_\zeta(\zeta \leq x)$ la fonction de répartition de ζ de R dans $[0 ; 1]$. Dans le cas où la loi de probabilité de ζ admet la relation suivante :

$$P_{\xi}(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) \cdot dt \quad (1.2)$$

avec f_{ξ} de R dans $[0, +\infty[$ alors f_{ξ} est appelée fonction de densité de probabilités de ξ .

Dans le cadre de cette thèse, on ne considère que des variables aléatoires qui admettent (1.2). On peut définir aussi les quantités souvent utilisées dans ce mémoire :

- *L'espérance de ξ :*

$$E[\xi] = \int_{\mathbb{R}} \xi \cdot f_{\xi}(x) \cdot dx \quad (1.3)$$

qui permet d'obtenir la valeur moyenne de ξ .

- *La variance de ξ : $\text{Var}(\xi) = E[(\xi - E(\xi))^2]$ représente « l'amplitude » de l'oscillation de ξ autour de sa valeur moyenne. La racine carrée σ_{ξ} de la variance est appelée écart-type de ξ .*
- *Le moment d'ordre k de ξ est l'espérance de ξ^k .*
- *Le moment centré d'ordre k de ξ : $\delta_k = E[(\xi - E(\xi))^k]$.*

◇ *L'asymétrie de ξ : $\gamma = \frac{\delta_3}{\sigma_{\xi}^3}$ avec δ_3 le moment centré d'ordre 3 et σ_{ξ} l'écart-type de ξ .*

◇ *Le coefficient d'aplatissement de ξ : $\beta = \frac{\delta_4}{\sigma_{\xi}^4}$ avec δ_4 le moment centré d'ordre 4 et σ_{ξ} l'écart-type de ξ .*

- *La covariance entre deux variables aléatoires ξ et κ : $\text{cov}(\xi, \kappa) = E[(\xi - E[\xi]) \cdot (\kappa - E[\kappa])]$. Cette quantité permet d'évaluer le degré de dépendance entre ξ et κ . Dans le cas où ξ et κ sont indépendantes, la covariance est nulle. Le coefficient de corrélation est défini par : $\rho_{\xi\kappa} = \frac{\text{cov}(\xi, \kappa)}{\sigma_{\xi}\sigma_{\kappa}}$.*

A partir de la notion de variable aléatoire, on peut introduire la notion de vecteur aléatoire: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$ de dimension d avec $\xi_i, i=1 : d$ des variables aléatoires réelles. On note \mathcal{O}^d l'ensemble des valeurs du vecteur ξ qui est un sous-ensemble de R^d (dans le cas de vecteur gaussien ξ , on a $\mathcal{O}^d \equiv R^d$). On note f_{ξ} la fonction de densité de probabilité de ce vecteur aléatoire. On peut définir une espace de Hilbert réel $H^d = L^2(\mathcal{O}^d, f_{\xi} d\xi)$ des fonctions g de \mathcal{O}^d dans R de carré intégrable par rapport à la mesure de probabilité $f_{\xi} d\xi$ muni du produit scalaire :

$$\langle g, h \rangle_{H^d} = \int_{\mathcal{O}^d} g(\xi) \cdot h(\xi) f_{\xi}(\xi) \cdot d\xi \quad (1.4)$$

et de la norme associée:

$$\|g\|_{\mathbb{H}^d} = \sqrt{\int_{\mathbb{O}^d} g^2(\boldsymbol{\xi}) \cdot f_{\boldsymbol{\xi}}(x) d\boldsymbol{\xi}} \quad (1.5)$$

1.1.2 Chaos polynomial

Cette partie est consacrée à une présentation générale de la notion de chaos polynomial [1]. Celui-ci est un outil utilisé dans les méthodes développées récemment pour propager des incertitudes au travers d'un modèle numérique.

On considère une variable aléatoire Y dont la variance existe qui est une fonction d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$:

$$Y = g(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.6)$$

où $\xi_i, i=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes et chacune suit une loi normale centrée réduite. Le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ peut être formé de données d'entrée incertaines d'un modèle dont Y est une grandeur de sortie d'intérêt. On note $f_{\boldsymbol{\xi}}$ la fonction de densité de probabilité de $\boldsymbol{\xi}$. Lorsque la variance de Y existe, la fonction g appartient alors à l'espace hilbertien $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{O}^d, f_{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi})$. Dans la suite, on va rappeler comment on peut construire une base polynomiale de $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{O}^d, f_{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi})$ qui nous permettra d'approcher $Y = g(\boldsymbol{\xi})$.

1.1.2.1. Base hilbertienne de \mathbb{H}^d

On peut constater qu'une variable aléatoire est complètement déterminée lorsque celle-ci est écrite sous la forme d'une fonction de variables aléatoires connues. Lors de la résolution d'un modèle stochastique, il n'est pas évident de représenter exactement une variable aléatoire de sortie par une fonction des variables aléatoires d'entrée. Une technique utilisée régulièrement dans le calcul numérique consiste à chercher son approximation dans un espace vectoriel (cet espace est un sous espace vectoriel appartenant à l'espace contenant la fonction à approcher) de dimension finie. Cette technique nécessite d'abord la construction des fonctions de base de l'espace vectoriel. Revenons à notre problème, une base hilbertienne $\{h_{\alpha}, \alpha \in \mathcal{N}\}$ de \mathbb{H}^d introduite dans la partie 1.1.2 est définie de la façon suivante [37] :

- h_i est une fonction définie de \mathbb{O}^d dans \mathbb{R} .
- $\{h_i, i \in \mathcal{N}\}$ est un système orthonormal, ce qui signifie que :

$$\langle h_i, h_j \rangle_{\mathbb{H}^d} = \delta_{ij} \quad (1.7)$$

$$\text{avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i - j \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le sous espace engendré par l'ensemble $h_i(\boldsymbol{\xi})$ est dense dans $L^2(\mathbb{O}^d, f_{\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi})$, c'est-à-dire : si $\langle g, h_i \rangle_{\mathbb{H}^d} = 0$ pour tous $i \in \mathcal{N}$ alors $g = 0$.

On a le théorème [37] suivant :

Théorème 1: Soit $\{h_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert \mathbb{H}^d . Alors pour tout g dans \mathbb{H}^d on a :

$$g = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i h_i \quad (1.8)$$

Les coefficients g_i sont tels que :

$$g_i = \langle g, h_i \rangle_{\mathbb{H}^d} \quad (1.9)$$

La détermination de g peut se ramener à la détermination des coefficients g_i . Lors de la résolution numérique, on limite le calcul à un nombre fini de termes $g_i, i = 0 : P$. On discutera du choix de P par la suite. Une estimation numérique de (1.9) peut être utilisée pour déterminer les coefficients g_i .

Dans la suite, on présentera une construction des polynômes orthogonaux multidimensionnels qui forment une base $\{H_i, i \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{H}^d à partir des polynômes monodimensionnels.

1.1.2.2. Polynômes de Hermite

Rappelons que dans cette partie f_ξ est la densité de probabilités du vecteur variable aléatoire $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où $\xi_j, j=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi normale centrée réduite. Dans ce cas $\mathbb{O}^d \equiv \mathbb{R}^d$. Une base $\{H_i, i \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{H}^d peut être construite en utilisant dans ce cas des polynômes de Hermite monodimensionnels comme on va le voir dans la suite.

Polynômes de Hermite monodimensionnels :

On note dans ce cas f_ξ la fonction de densité de probabilités de la variable aléatoire gaussienne ξ centrée réduite. La définition des polynômes de Hermite h_i de \mathbb{R} dans \mathbb{R} d'indice $i \in \mathbb{N}$ est la suivante :

$$h_i(\xi) f_\xi(\xi) = (-1)^i \frac{d^i}{d\xi^i} f_\xi(\xi) \quad (1.10)$$

avec $f_\xi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{\xi^2}{2})$. On peut montrer que :

$$h_0(\xi) = 1, \quad h_{i+1}(\xi) = \xi h_i(\xi) - \frac{d}{d\xi} h_i(\xi) \quad (1.11)$$

La construction de $h_i(\xi)$ peut être réalisée d'une façon récurrente à l'aide de l'équation (1.11). On donne à titre d'exemple les premiers polynômes de Hermite monodimensionnels:

$$\begin{aligned}
h_0(\xi) &= 1 \\
h_1(\xi) &= \xi \\
h_2(\xi) &= \xi^2 - 1 \\
h_3(\xi) &= \xi^3 - 3\xi \\
h_4(\xi) &= \xi^4 - 6\xi^2 + 3
\end{aligned}$$

On peut introduire les polynômes normalisés $H_i(\xi)$:

$$H_i(\xi) = \frac{h_i(\xi)}{\sqrt{i!}} \quad (1.12)$$

On peut démontrer que la famille $H_i(\xi)$, $i \in \mathbb{N}$ est orthonormée, ce qui signifie que :

$$\langle H_i(\xi), H_j(\xi) \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}} H_i(\xi) H_j(\xi) \cdot f_\xi(\xi) d\xi = \delta_{ij} \quad (1.13)$$

Une fois les polynômes de Hermite unidimensionnels construits, on peut les associer pour former les polynômes de Hermite multidimensionnels.

Polynômes de Hermite multidimensionnels :

Revenons au cas où f_ξ est la densité du vecteur variable aléatoire $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où ξ_j , $j = 1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes dont chacune suit une loi normale centrée réduite. Un polynôme de Hermite multidimensionnel $H_i(\xi)$ avec $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ est défini par :

$$H_i(\xi) = H_{i_1}(\xi_1) \cdot H_{i_2}(\xi_2) \cdots H_{i_d}(\xi_d) \quad (1.14)$$

Le degré d'un polynôme $H_{(i_1, \dots, i_d)}(\xi)$ est défini par : $p = i_1 + \dots + i_d$. On a alors le nombre P de polynômes de degré inférieur ou égal à p qui vérifie :

$$P = C_{d+p}^p = \frac{(d+p)!}{d! p!} \quad (1.15)$$

Pour simplifier la notation, on va noter $H_\alpha(\xi)$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ au lieu de $H_{(i_1, i_2, \dots, i_d)}(\xi)$ avec $(i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ (voir [7] pour plus de détail concernant la relation entre α et i). On donne à titre d'exemple les 6 premiers polynômes de Hermite ($p = 2$) dans le cas $d = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_0(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(0,0)}(\xi_1, \xi_2) = H_0(\xi_1)H_0(\xi_2) = 1 \\
\mathbf{H}_1(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(1,0)}(\xi_1, \xi_2) = H_1(\xi_1)H_0(\xi_2) = \xi_1 \\
\mathbf{H}_2(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(0,1)}(\xi_1, \xi_2) = H_0(\xi_1)H_1(\xi_2) = \xi_2 \\
\mathbf{H}_3(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(2,0)}(\xi_1, \xi_2) = H_2(\xi_1)H_0(\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1^2 - 1) \\
\mathbf{H}_4(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(1,1)}(\xi_1, \xi_2) = H_1(\xi_1)H_1(\xi_2) = \xi_1\xi_2 \\
\mathbf{H}_5(\xi_1, \xi_2) &= \mathbf{H}_{(0,2)}(\xi_1, \xi_2) = H_0(\xi_1)H_2(\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2^2 - 1)
\end{aligned}$$

A partir de (1.13), on peut constater que la famille $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ définie par (1.14) est orthonormée dans $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{R}^d, f_\xi d\xi)$. En utilisant le théorème de Martin-Cameron [13], on peut démontrer que le sous espace engendré par l'ensemble $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ est dense dans $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{R}^d, f_\xi d\xi)$. Par conséquent, $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ forme une base Hilbertienne de \mathbb{H}^d .

Dans la suite, on va utiliser cette base des polynômes de Hermite pour approcher une variable aléatoire Y de la forme (1.6).

1.1.2.3. Chaos polynômial

On vient de rappeler dans la partie précédente que l'ensemble des polynômes de Hermite $\mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ forme une base hilbertienne de $\mathbb{H}^d = L^2(\mathbb{R}^d, f_\xi d\xi)$ avec f_ξ , la densité conjointe du vecteur de variables aléatoires $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où $\xi_i, i=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes dont chacune suit la loi normale centrée réduite. En utilisant le **théorème 1**, une variable aléatoire $Y = g(\boldsymbol{\xi})$ dont la variance existe peut être approchée par :

$$Y \approx g_p(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha=0}^{p-1} g_\alpha \mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.16)$$

Les coefficients g_α , à déterminer, peuvent s'écrire sous la forme :

$$g_\alpha = \langle g, \mathbf{H}_\alpha \rangle_{\mathbb{H}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{H}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \cdot f_\xi(\boldsymbol{\xi}) d\xi \quad (1.17)$$

Une fois que Y est approchée par (1.16) les informations sur Y (différents moments, fonction de densité de probabilité, etc.) peuvent être obtenues aisément. Cela peut nécessiter l'évaluation des termes $E[\mathbf{H}_{\alpha_1} \mathbf{H}_{\alpha_2} \dots \mathbf{H}_{\alpha_n}]$. Dans l'annexe 2, une méthode semi analytique est présentée pour réaliser cette évaluation.

Puisque on a $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{\xi})$, alors si P est suffisamment grand, on peut obtenir une approximation $g_p(\boldsymbol{\xi})$ de $g(\boldsymbol{\xi})$ avec une erreur suffisamment faible. On ne connaît pas $g(\boldsymbol{\xi})$ mais

une méthode pour évaluer la qualité de l'approximation consiste à comparer $g_p(\xi)$ et $g_{p+k}(\xi)$, $k=1 : N_0$ (N_0 peut être choisi égal à 1 ou plus si la fonction à approximer possède des symétries). Si la distance entre $g_p(\xi)$ et $g_{p+k}(\xi)$ est faible, l'approximation pourra être considérée comme correcte. Pour des cas particuliers, on peut disposer d'un estimateur d'erreur qui nous permet d'avoir la distance avec la solution exacte [18].

Dans certains cas où $g(\xi)$ prend une forme « peu régulière » [30], la convergence $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(\xi) = g(\xi)$ peut être très lente. Ces cas nécessitent des traitements adaptés pour accélérer la vitesse de convergence. Ce phénomène est discuté dans le chapitre 2.

Dans [14], il est montré qu'une généralisation est possible avec des lois non gaussiennes. On a dans ce cas $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ où $\xi_i, i=1 : d$ sont des variables aléatoires indépendantes. Les fonctions de densité de probabilités f_{ξ_i} de $\xi_i, i=1 : d$ sont identiques. La fonction f_{ξ_i} peut être la fonction de densité d'une loi Beta, uniforme, etc... Dans ce cas, une autre famille de polynômes monodimensionnels $\psi_{i_k}(\xi_k)$ va être mise en œuvre (voir le Tableau 1 extrait de [14]). Les polynômes multidimensionnels sont établis à partir de ces polynômes monodimensionnels par :

$$\Psi_{\alpha}(\xi) = \psi_{i_1}(\xi_1) \cdot \psi_{i_2}(\xi_2) \cdots \psi_{i_d}(\xi_d) \quad (1.18)$$

Dans le reste de cette thèse on note $\Psi_{\alpha}(\xi)$ avec $\alpha \in \mathcal{N}$ le chaos polynomial généralisé.

Tableau 1. Chaos polynomial généralisés

	Variable aléatoire	Chaos polynomial	Support
Continue	Gaussienne	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	Gamma	Laguerre	$[0, +\infty)$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
Discrète	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$
	Hypergéométrique	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Dans la suite, nous allons traiter un exemple simple pour illustrer l'utilisation d'une décomposition en chaos polynomial pour résoudre un problème stochastique et démontrer aussi l'importance du choix de la base d'approximation.

1.1.2.4. Exemple d'application

Cette partie illustre l'application du chaos polynomial afin d'approcher une grandeur aléatoire. On utilisera deux types de polynôme : les polynômes de Legendre et les polynômes d'Hermite.

A titre d'exemple, on s'intéresse au problème électrique suivant :

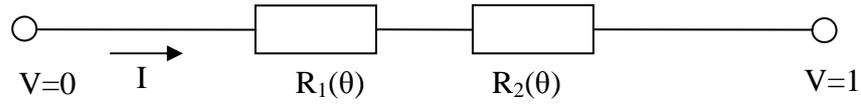


Figure 1. Exemple électrique

Les deux résistances $R_1(\theta)$ et $R_2(\theta)$ sont des variables aléatoires uniformes indépendantes qui varient dans l'intervalle $[2 ; 4]$. On s'intéresse au courant I qui est aussi une variable aléatoire.

Dans ce problème, le courant est obtenu analytiquement par :

$$I(\theta) = \frac{1}{R_1(\theta) + R_2(\theta)} \quad (1.19)$$

La fonction de densité de probabilités de variable aléatoire $I(\theta)$ présentée sur la Figure 2 est tracée par la méthode de noyau [35]. On cherche maintenant à approcher $I(\theta)$ de (1.19) par un chaos polynomial.

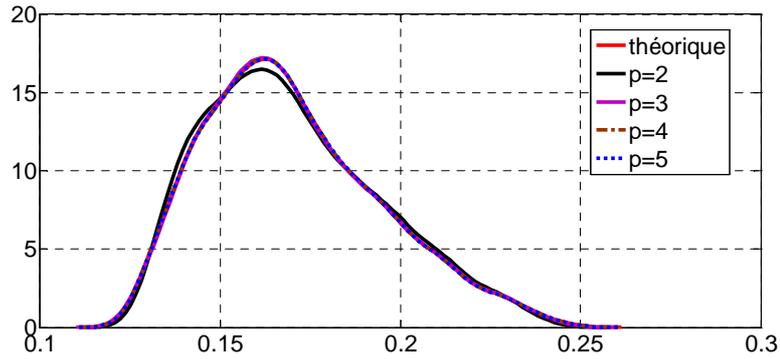


Figure 2. Fonctions de densité de probabilités de I et I_p – polynômes de Legendre

On peut constater que $R_1(\theta)$ et $R_2(\theta)$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_1 &= 3 + \xi_1 \\ R_2 &= 3 + \xi_2 \end{aligned}$$

avec ξ_1 et ξ_2 les variables aléatoires uniformes indépendantes dans l'intervalle $[-1 ; 1]$. Par conséquent, le courant peut s'écrire sous la forme :

$$I(\xi) = I(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{6 + \xi_1 + \xi_2} \quad (1.20)$$

Le courant est approché par :

$$I(\xi) \approx I_p(\xi) = \sum_{\alpha=0}^P I_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \quad (1.21)$$

avec $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\Psi_\alpha(\xi)$ les polynômes de Legendre et I_α les coefficients à déterminer par la méthode de projection [7]. Sur la Figure 2, on donne la fonction de densité de probabilités de I_p avec différents degrés maximal p des polynômes utilisés.

L'erreur de l'approximation (1.21) est définie par :

$$e = \mathbb{E}[(I_p - I)^2] \quad (1.22)$$

Dans le Tableau 2, on donne l'évolution de l'erreur (1.22) en fonction des valeurs de p . On peut constater que avec $p \geq 3$, la fonction approchée I_p est très proche de I .

Tableau 2. Erreurs en fonction de degré maximal p

p	Erreur	
	Chaos de Polynôme de Legendre	Chaos de Polynôme de Hermite
2	$1.51*10^{-5}$	$8.71*10^{-4}$
3	$4.16*10^{-7}$	$1.50*10^{-4}$
4	$1.12*10^{-8}$	$8.97*10^{-5}$
5	$3.20*10^{-10}$	$1.96*10^{-5}$

On cherche maintenant à approcher I (1.19) sous la forme (1.21) mais avec $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ où ξ_1, ξ_2 sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes et $\Psi_\alpha(\xi)$ les polynômes d'Hermite. Une relation de R_1 avec ξ_1 et R_2 avec ξ_2 peut s'établir par une transformation isoprobabiliste :

$$\begin{aligned} F_{R_1}(R_1) &= F_{\xi_1}(\xi_1) \\ F_{R_2}(R_2) &= F_{\xi_2}(\xi_2) \end{aligned}$$

avec $F_{R_1}, F_{R_2}, F_{\xi_1}, F_{\xi_2}$ les fonctions de répartition des variables aléatoires R_1, R_2, ξ_1, ξ_2 respectivement. Sur la Figure 3, on donne la fonction de densité de probabilité de I_p et dans le Tableau 2, on donne l'évolution de l'erreur (1.22) en fonction du degré maximal p des polynômes utilisés.