Modules hypergéométriques

7.1 Définition des modules hypergéométriques et premières propriétés

L'opérateur différentiel hypergéométrique $\mathrm{Hyp}(P,Q)$ est défini pour $P,Q \in \mathbb{C}[t]$ par :

$$\mathrm{Hyp}(P,Q) := P(t\partial_t) - tQ(t\partial_t)$$

On pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$ dans toute la suite. On définit le $\mathcal{D}$-module hypergéométrique $H(P,Q)$ comme :

$$H(P,Q) := \mathcal{D}/\mathcal{D}\cdot \mathrm{Hyp}(P,Q)$$

On va supposer ici que P et Q sont unitaires de même degré n. On note $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ et $(\beta_j)_{1\le j\le n}$ les racines de P et Q comptées avec multiplicité. On note alors :

$$\mathrm{Hyp}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)} := \mathrm{Hyp}(P,Q) = \prod_{i=1}^{n}(t\partial_t - \alpha_i) - t\prod_{j=1}^{n}(t\partial_t - \beta_j)$$

On note $H_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)} := H(P,Q)$, notation que l'on simplifiera en $H_{\alpha,\beta}$ si P et Q sont de degré 1.

Ces modules hypergéométriques ont été beaucoup étudiés (voir [Lev61], [BH89] et [Kat90] notamment). Une première propriété importante est que ces $\mathcal{D}$-modules sont irréductibles si et seulement si $\alpha_i \neq \beta_j$ modulo $\mathbb{Z}$ (corollaire 3.2.1 de [Kat90]). On suppose dans la suite que cette condition est satisfaite. On a en outre une propriété de stabilité par dualité : le dual $D(H(P,Q))$ d'un module hypergéométrique est isomorphe à un module hypergéométrique $H(P',Q')$.

Le terme dominant de l'équation différentielle étant $t^n(1-t)\partial_t^n$, on en déduit que l'opérateur différentiel hypergéométrique induit une connexion sur le fibré vectoriel holomorphe trivial de rang n sur $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$, soit un système local de rang n sur $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$. Les trois singularités sont en outre régulières. Le théorème 3.5.4 de [Kat90] montre que le système local induit par l'équation hypergéométrique est rigide. Autrement dit, et Riemann avait déjà constaté ce fait dès 1857 dans [Rie57], l'équation hypergéométrique peut être reconstruite, à isomorphisme près, à partir de la connaissance de ses monodromies en 0, 1 et ∞.

En notant A la matrice de taille n ayant comme blocs de Jordan les $J_{\alpha_i,\mathrm{mult}(\alpha_i)}$ et B celle ayant comme blocs de Jordan les $J_{-\beta_i,\mathrm{mult}(\beta_i)}$, on obtient une expression explicite des monodromies (définies à conjugaison près) en 0 et ∞ : $\exp(-2i\pi A)$ et $\exp(-2i\pi B)$ respectivement. La monodromie en 1 est quant à elle une pseudo-réflexion (somme de l'identité et d'une matrice de rang 1). Cela suffit à déterminer sa classe de conjugaison, déterminée par son déterminant, égal ici à $(\det(\exp(2i\pi(A+B))))$. En particulier pour $n=1$, les monodromies de $H_{\alpha,\beta}$ sont : $\exp(-2i\pi\alpha)$ en 0, $\exp(2i\pi\beta)$ en ∞ et $\exp(2i\pi(\alpha-\beta))$ en 1.

On déduit de la proposition 5.3.1 qu'il existe une variation de structure de Hodge polarisable sous-jacente au système local induit par l'équation hypergéométrique, unique à décalage près (partie (i) de la proposition 1.13 de [Del87]).

Remarque (Lien avec $\mathcal{L}_\lambda$ et $\mathcal{L}'_\lambda$ définis en sous-sections 2.6 et 2.8). On fixe $\alpha \in]0,1[$ et $\lambda = \exp(-2i\pi\alpha)$. Au niveau des systèmes locaux sur $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$, on a $\mathcal{L}_\lambda \simeq H_{\alpha,\alpha}$ et $\mathcal{L}'_\lambda \simeq H_{0,\alpha}$. Un premier argument est de comparer les monodromies en 0, 1 et ∞ et d'utiliser la rigidité du cas hypergéométrique. On peut aussi comparer les équations : pour $\mathcal{L}_\lambda$, $t\partial_t - \alpha - t(t\partial_t - \alpha) = (1-t)(t\partial_t - \alpha)$ est équivalente à $t\partial_t - \alpha$ car $1-t$ est inversible ; pour $\mathcal{L}'_\lambda$, $t\partial_t - t(t\partial_t - \alpha) = -t((t-1)\partial_t - \alpha)$ est équivalente à $(t-1)\partial_t - \alpha$ car t est inversible.

7.2 Transformation de Mellin

On aimerait avoir sur $\mathbb{G}_m$ une transformation avec des propriétés similaires à la transformée de Fourier sur $\mathbb{A}^1$, à savoir transformer le produit de convolution en produit tensoriel. Là encore, l'analyse est un bon point de départ et l'on dispose de la transformée de Mellin qui à une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ (bornée en 0 et à décroissance rapide en $+\infty$) associe :

$$\widehat{\varphi}(s) = \int_0^{+\infty} t^s \varphi(t) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Si l'on note τ l'opérateur de translation $s \mapsto s+1$, on a $\widehat{t\varphi} = \tau\widehat{\varphi}$ et une intégration par partie permet de montrer que $\widehat{t\partial_t\varphi} = -s\widehat{\varphi}$. Ainsi, l'action d'un opérateur différentiel $P(t, t\partial_t) \in \mathcal{D}$ sur φ est changée en l'action d'un opérateur aux différences $P(\tau, -s)$ sur $\widehat{\varphi}$.

Il est alors naturel de définir la $\mathbb{C}$-algèbre (non commutative) $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$ engendrée par s, τ et τ^{-1} avec la relation $\tau s = (s+1)\tau$. On vient ni plus ni moins de voir que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[t,t^{-1}]\langle t\partial_t\rangle & \to & \mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle \\ t & \mapsto & \tau \\ t\partial_t & \mapsto & -s \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre.

Définition 7.2.1 La transformée de Mellin d'un $\mathcal{D}$-module M, notée ${}^M M$, est définie comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel M sur lequel on a l'action suivante de $\mathbb{C}[s]\langle\tau,\tau^{-1}\rangle$: τ agit comme t, s agit comme $-t\partial_t$.

Notons qu'on peut généraliser la construction faite ici sur $\mathbb{G}_m$ et définir la transformée de Mellin sur le tore $(\mathbb{G}_m)^p$ (voir par exemple [Fab06]). Dans la situation qui nous intéresse ici, la transformée de Mellin de M n'est rien d'autre qu'un $\mathbb{C}[s]$-module muni d'une action inversible de τ, qui n'est pas $\mathbb{C}[s]$-linéaire mais qui vérifie la propriété $\tau(f \cdot m) = \tau f \cdot \tau m = f(s+1) \cdot \tau m$ pour $f \in \mathbb{C}[s]$ et $m \in M$.

En reprenant les définitions de convolutions données en sous-section 2.6, on a, similairement à la proposition 2.7.2, pour M, N deux $\mathcal{D}$-modules holonomes la propriété

$${}^M(M *_* N) = {}^M M \overset{L}{\otimes} {}^M N$$

et par dualité

$${}^M(M *_! N) = D(D^M M \overset{L}{\otimes} D^M N)$$

De manière parfaitement similaire à la transformée de Fourier sur $\mathbb{A}^1$, la sous-catégorie P n'est rien d'autre ici que la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D})$ constituée des N tels que ${}^M N$ et $D^M N$ (ou de manière équivalente ${}^M DN$) sont $\mathbb{C}[s]$-plats. Une manière simple d'appréhender $D^M N$ dans la pratique est de considérer sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[s]}({}^M M, \mathbb{C}[s])$ l'action de τ définie par $(\tau\varphi)m = \tau^{-1}(\varphi(\tau m))$.

7.3 Modules hypergéométriques et convolution

Une propriété fondamentale des modules hypergéométriques est le théorème 5.3.1 de [Kat90] :

Théorème 7.3.1 *Pour $P, Q, R, S \in \mathbb{C}[t]$ avec PR et QS sans racine commune modulo $\mathbb{Z}$, on a*

$$H(PR, QS) \simeq H(P, Q) * H(R, S),$$

identité valable pour les trois types de convolutions.

On a également le résultat suivant :

Proposition 7.3.2 *Si P et Q sont sans racine commune mod $\mathbb{Z}$, alors $H(P, Q)$ est dans la catégorie P.*

Preuve. Tout d'abord, comme $H(P, Q)$ est irréductible en tant que $\mathcal{D}$-module, il en est de même pour sa transformée de Mellin $M = {}^{M}H(P, Q)$ en tant que $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module. Soit T un sous-$\mathbb{C}[s]$-module de M de $\mathbb{C}[s]$-torsion, posons

$$T' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau^k T.$$

Il s'agit d'un sous-$\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module de M de $\mathbb{C}[s]$-torsion. Comme M n'est pas lui-même de $\mathbb{C}[s]$-torsion, on en déduit, par irréductibilité de M en tant que $\mathbb{C}[s]\langle\tau, \tau^{-1}\rangle$-module, que $T' = 0$. Il en résulte que $T = 0$, ainsi l'on en conclut que M est $\mathbb{C}[s]$-plat.

Enfin, comme le dual $D(H(P, Q))$ est isomorphe à un module hypergéométrique $H(P', Q')$, on en déduit que sa transformée de Mellin ${}^{M}D(H(P, Q))$ est également $\mathbb{C}[s]$-plate. □

Remarque. En lien avec le résultat précédent, on peut montrer que tout $\mathcal{D}$-module holonome irréductible M tel que $\dim_{\mathbb{C}(s)}(\mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}[s]} {}^{M}M) = 1$ est isomorphe à un module hypergéométrique $H(P, Q)$ (avec P et Q sans racine commune modulo $\mathbb{Z}$), voir le théorème 3.7.1 de [Kat90] et le théorème 1 de [LS91].

7.4 Formules de Fedorov

Le théorème 6.3.1 et son corollaire multiplicatif la proposition 6.4.2 permettent de redémontrer avec une toute nouvelle approche un résultat récent de Fedorov sur l'expression de données numériques de Hodge des modules hypergéométriques. Nous nous intéresserons en particulier au théorème 3 de [Fed17] donnant l'expression des données numériques locales de Hodge cycles proches à l'infini et en 0. L'intérêt des propositions 6.4.2 et 6.4.5 réside dans le fait qu'elles donnent explicitement le comportement au voisinage de ces deux points, évitant notamment d'avoir à déplacer la singularité à l'infini en un autre point comme le fait Fedorov.

On pose $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = ((\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n))$ un couple de n-uplets de $[0, 1[^n$ (non nécessairement ordonnés) vérifiant $\alpha_i \neq \beta_j$ pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$. On utilise la notation $\{\cdot\}$ pour désigner la partie fractionnaire. Commençons par faire un état des lieux de la situation au voisinage des trois singularités.

<u>En ∞ :</u> Pour $m \in \{1, ..., n\}$, on note $\mathrm{mult}(\beta_m) = \#\{j \in \{1, ..., n\} \mid \beta_j = \beta_m\}$, $\ell_m(\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{mult}(\beta_m) - 1$ et $\lambda_m = \exp(2i\pi\beta_m)$. La matrice de la monodromie à l'infini de $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ est composée pour chacune des valeurs propres λ_m d'un unique bloc de Jordan de taille $\mathrm{mult}(\beta_m)$. On en déduit que $\nu_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 0$ sauf pour $\ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta})$ pour lequel cette quantité vaut 1. L'étude de $\nu^p_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ se réduit donc à déterminer la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle cette quantité pour $\ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta})$ est non nulle (et égale à 1).

<u>En 0 :</u> Pour $m \in \{1, ..., n\}$, on note $\mathrm{mult}(\alpha_m) = \#\{j \in \{1, ..., n\} \mid \alpha_j = \alpha_m\}$, $\ell_m(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{mult}(\alpha_m) - 1$ et $\mu_m = \exp(-2i\pi\alpha_m)$. La matrice de la monodromie en 0 de $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ est composée pour chacune des valeurs propres μ_m d'un unique bloc de Jordan de taille $\mathrm{mult}(\alpha_m)$. On en déduit que $\nu_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 0$ sauf pour $\ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha})$ pour lequel cette quantité vaut 1. L'étude de $\nu^p_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ se réduit donc à déterminer la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle cette quantité pour $\ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha})$ est non nulle (et égale à 1).

<u>En 1 :</u> Commençons par préciser certaines propriétés de la monodromie en 1. Il s'agit d'une pseudo-réflexion, à savoir la somme de l'identité et d'une matrice de rang 1. On sait par un résultat de Pochhammer qu'il y a $n-1$ vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre 1 (voir [BH89, prop. 2.8] et [Beu08, th. 1.1]). En notant $\gamma_s = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)$, on a que $\lambda_s = \exp(-2i\pi\gamma_s)$ est également valeur propre de la monodromie, appelée *valeur propre spéciale*. Par convention, on prendra $\gamma_s \in]0, 1]$. Il y a alors deux possibilités : soit $\lambda_s \neq 1$ et alors la matrice de la monodromie est diagonalisable, soit $\lambda_s = 1$ et auquel cas la monodromie est une transvection. Notons que dans le cas $n = 1$, comme $\alpha_1 \neq \beta_1$, il n'y a qu'une valeur propre, la valeur propre spéciale, et elle est différente de 1.

- Si $\lambda_s \neq 1$, alors d'une part $\mu_{1,\lambda_s}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \nu_{1,\lambda_s}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 1$ et d'autre part $\nu_{1,1}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = n - 1$ et $\mu_{1,1}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 0$. La seule chose qui reste à déterminer est la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle $\mu^p_{1,\lambda_s,0}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ est non nul (et égale à 1).

- Si $\lambda_s = 1$, alors $\nu_{1,1}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = n$ et $\mu_{1,1}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 1$. Plus précisément, $\mu_{1,1,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = 0$ sauf pour $\ell = 0$ où cette quantité vaut 1. La seule chose qui reste à déterminer est la valeur de $p \in \mathbb{Z}$ pour laquelle $\mu^p_{1,1,0}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$ est non nul (et égale à 1).

Commençons par donner deux définitions qui seront utiles dans la suite :

Définition 7.4.1 *Soit $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1[$. On dit que (α, β) est séparé par γ si $\exp(2i\pi\gamma)$ se trouve dans l'intervalle ouvert du cercle orienté $]\exp(2i\pi\alpha), \exp(2i\pi\beta)[$, ce que l'on note $\alpha \to \gamma \to \beta$. Cela signifie que $0 \leq \alpha < \gamma < \beta < 1$ ou bien $0 \leq \gamma < \beta < \alpha < 1$ ou bien $0 \leq \beta < \alpha < \gamma < 1$.*

Remarque. C'est la même notation que celle du début du chapitre 4 de [Fed17], à la différence que α, β et γ ne sont pas nécessairement distincts (mais dans ce cas, la propriété $\alpha \to \gamma \to \beta$ n'est pas satisfaite).

Définition 7.4.2 *On définit $p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma) = \#\{k \mid \neg(\alpha_k \to \gamma \to \beta_k)\} = \#\{k \mid \alpha_k \to \gamma \to \beta_k\}^{\complement}$. Notons que cette quantité est invariante par renumérotation du n-uplet de couples $((\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_n, \beta_n))$.*

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 7.4.3 *Étant donnée la décomposition* $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = H_{\alpha_1,\beta_1} * \cdots * H_{\alpha_n,\beta_n}$ *en convolutions d'hypergéométriques de rang 1, le module hypergéométrique précédent est muni d'une pVHS naturelle* $(V, F^\bullet V, \nabla)$ *vérifiant les identités suivantes :*

(a)
$$\nu^p_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_m) \text{ et } \ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b)
$$\nu^p_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\beta_m) \text{ et } \ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c)
$$\mu^p_{1,\lambda_s,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \# \left\{ i \;\middle|\; \left\{ \sum_{k=1}^{i} (\beta_k - \alpha_k) \right\} < \gamma_s \right\} \text{ et } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques préliminaires. 1) L'ordre dans lequel sont effectuées les convolutions n'importe pas, car $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ est obtenu comme $\pi_+(H_{\alpha_1,\beta_1} \boxtimes \cdots \boxtimes H_{\alpha_n,\beta_n})$, où $\pi : (\mathbb{G}_m)^n \to \mathbb{G}_m$ désigne la multiplication.
2) Étant donnée une décomposition en convolutions d'hypergéométriques de rang 1, il existe une unique filtration de Hodge associée, si on est parti de la filtration de Hodge triviale en rang 1. Autrement dit, la filtration n'est naturelle que si on se donne une telle décomposition. Par unicité de la filtration de Hodge à décalage près, on en déduit que changer de décomposition induit un décalage dans la filtration.

Preuve. Nous allons démontrer ces trois formules par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, longueur des uplets α et β. Le résultat est vérifié pour $n = 1$. Soient $n \geq 1$, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = ((\alpha_0, ..., \alpha_n), (\beta_0, ..., \beta_n))$ deux $(n+1)$-uplets quelconques vérifiant $\alpha_i \neq \beta_j$ pour tous $i, j \in \{0, ..., n\}$, et $m \in \{0, ..., n\}$.

Formule (b). Supposons que la formule (b) est vérifiée pour tous les couples d'uplets de longueur n.

(Cas 1) Supposons $\beta_m \neq \beta_0$. D'après l'identité 2.2.13 de [DS13], on a

$$\nu^p_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \nu^p_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}(H_{\{\boldsymbol{\alpha}-\alpha_0\},\{\boldsymbol{\beta}-\alpha_0\}}).$$

Or on sait que

$$H_{\{\boldsymbol{\alpha}-\alpha_0\},\{\boldsymbol{\beta}-\alpha_0\}} = H_{\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0}-\alpha_0\},\{\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}-\alpha_0\}} * H_{0,\{\beta_0-\alpha_0\}} = \mathrm{MC}'_{\exp(-2i\pi\{\beta_0-\alpha_0\})}\left(H_{\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0}-\alpha_0\},\{\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}-\alpha_0\}}\right),$$

où $\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0}$ désigne le uplet $\boldsymbol{\alpha}$ où l'on a retiré α_0, de même pour $\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}$. En appliquant maintenant la proposition 6.4.2, on obtient

$$\nu^p_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}(H_{\{\boldsymbol{\alpha}-\alpha_0\},\{\boldsymbol{\beta}-\alpha_0\}}) = \begin{cases} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}\left(H_{\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0}-\alpha_0\},\{\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}-\alpha_0\}}\right) & \text{si } \{\beta_m - \alpha_0\} > \{\beta_0 - \alpha_0\} \\ \nu^{p}_{\infty,\lambda_m \exp(-2i\pi\alpha_0),\ell}\left(H_{\{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0}-\alpha_0\},\{\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}-\alpha_0\}}\right) & \text{si } \{\beta_m - \alpha_0\} < \{\beta_0 - \alpha_0\}. \end{cases}$$

En réappliquant l'identité 2.2.13 de [DS13], on obtient finalement

$$\nu^{p}_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} \nu^{p}_{\infty,\lambda_m,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) & \text{si } \alpha_0 \to \beta_m \to \beta_0 \\ \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_m,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \beta_m)$ et $\ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta}) = \ell_m(\widehat{\boldsymbol{\beta}_0})$.

(Cas 2) Supposons $\beta_m = \beta_0$ et $\ell_0(\boldsymbol{\beta}) \geq 1$. En appliquant le même raisonnement que précédemment et en utilisant la proposition 6.4.2 (cas $\lambda = \overline{\lambda_0}$, $\ell \geq 1$ du théorème), on obtient

$$\nu^{p}_{\infty,\lambda_0,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\ell-1}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right),$$

quantité non nulle si et seulement si $\ell = \ell_0(\boldsymbol{\beta}) = \ell_0(\widehat{\boldsymbol{\beta}_0})+1$. Dans ce cas, on a $p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \beta_0) = p(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0}, \widehat{\boldsymbol{\beta}_0}, \beta_0)+1$ car on n'a pas $\alpha_0 \to \beta_0 \to \beta_0$.

(Cas 3) Supposons $\beta_m = \beta_0$ et $\ell_0(\boldsymbol{\beta}) = 0$, on a donc $\beta_1 \neq \beta_0$. En appliquant le même raisonnement que dans le cas 1, on obtient

$$\begin{aligned} \nu^{p}_{\infty,\lambda_0,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) &= \begin{cases} \nu^{p}_{\infty,\lambda_0,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1},\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}}\right) & \text{si } \{\beta_0 - \alpha_1\} < \{\beta_1 - \alpha_1\} \\ \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1},\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}}\right) & \text{si } \{\beta_0 - \alpha_1\} > \{\beta_1 - \alpha_1\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \nu^{p}_{\infty,\lambda_0,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1},\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}}\right) & \text{si } \alpha_1 \to \beta_0 \to \beta_1 \\ \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1},\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, et comme l'ordre dans lequel sont effectuées les convolutions n'importe pas, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \beta_0)$ et $\ell = \ell_0(\boldsymbol{\beta}) = \ell_0(\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}) = 0$.

En conclusion, la formule (b) est bien vérifiée pour le couple $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Formule (a). Supposons que la formule (a) est vérifiée pour tous les couples d'uplets de longueur n.

(Cas 1) Supposons $\alpha_m \neq \alpha_0$. D'après la proposition 6.4.5 et l'identité 2.2.13 de [DS13], et en raisonnant de manière similaire à la preuve du cas 1 de la formule (b), on a

$$\nu^{p}_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} \nu^{p}_{0,\mu_m,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) & \text{si } \alpha_0 \to \alpha_m \to \beta_0 \\ \nu^{p-1}_{0,\mu_m,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \alpha_m)$ et $\ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha}) = \ell_m(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0})$.

(Cas 2) Supposons $\alpha_m = \alpha_0$ et $\ell_0(\boldsymbol{\alpha}) \geq 1$. En appliquant le même raisonnement que précédemment et en utilisant la proposition 6.4.5 (cas $\lambda = 1$, $\ell \geq 1$ de la proposition), on obtient

$$\nu^p_{0,\mu_0,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \nu^{p-1}_{0,\mu_0,\ell-1}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right),$$

quantité non nulle si et seulement si $\ell = \ell_0(\boldsymbol{\alpha}) = \ell_0(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0})+1$. Dans ce cas, on a $p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_0) = p(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0},\alpha_0)+1$ car on n'a pas $\alpha_0 \to \alpha_0 \to \beta_0$.

(Cas 3) Supposons $\alpha_m = \alpha_0$ et $\ell_0(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, on a donc $\alpha_1 \neq \alpha_0$. En appliquant le même raisonnement que dans le cas 1, on obtient

$$\nu^p_{0,\mu_0,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} \nu^p_{0,\mu_0,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1},\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}}\right) & \text{si } \alpha_1 \to \alpha_0 \to \beta_1 \\ \nu^{p-1}_{0,\mu_0,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1},\widehat{\boldsymbol{\beta}_1}}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, et comme l'ordre dans lequel sont effectuées les convolutions n'importe pas, la quantité de gauche est non nulle si et seulement si $p = p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_0)$ et $\ell = \ell_0(\boldsymbol{\alpha}) = \ell_0(\widehat{\boldsymbol{\alpha}_1}) = 0$.

En conclusion, la formule (a) est bien vérifiée pour le couple $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

Formule (c). Supposons que la formule (c) est vérifiée pour tous les couples d'uplets de longueur n. On note λ_s la valeur propre spéciale de $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, λ'_s la valeur propre spéciale de $H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}$ et $\gamma_0 = \{\beta_0 - \alpha_0\}$. Les réels γ_s et γ'_s de l'intervalle $]0,1]$ vérifiant $\lambda_s = \exp(-2i\pi\gamma_s)$ et $\lambda'_s = \exp(-2i\pi\gamma'_s)$ sont liés par la relation $\gamma_s = \gamma'_s + \gamma_0 \bmod \mathbb{Z}$.

D'après la proposition 6.4.1 et l'identité 2.2.14 de [DS13], et en raisonnant de manière similaire à la preuve du cas 1 de la formule (b), on a

$$\mu^p_{1,\lambda_s,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} \mu^p_{1,\lambda'_s,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) & \text{si } \gamma_s \in\,]0,\gamma_0] \\ \mu^{p-1}_{1,\lambda'_s,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) & \text{si } \gamma_s \in\,]\gamma_0,1]. \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\mu^p_{1,\lambda'_s,\ell}\left(H_{\widehat{\boldsymbol{\alpha}_0},\widehat{\boldsymbol{\beta}_0}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\left\{i \geq 1 \;\middle|\; \left\{\sum_{k=1}^{i}(\beta_k - \alpha_k)\right\} < \gamma'_s\right\} \text{ et } \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on remarque que

$$\#\left\{i \geq 0 \;\middle|\; \left\{\sum_{k=0}^{i}(\beta_k - \alpha_k)\right\} < \gamma_s\right\} = \begin{cases} \#\left\{i \geq 1 \;\middle|\; \left\{\sum_{k=1}^{i}(\beta_k - \alpha_k)\right\} < \gamma'_s\right\} & \text{si } \gamma_s \in\,]0,\gamma_0] \\ \#\left\{i \geq 1 \;\middle|\; \left\{\sum_{k=1}^{i}(\beta_k - \alpha_k)\right\} < \gamma'_s\right\} + 1 & \text{si } \gamma_s \in\,]\gamma_0,1]. \end{cases}$$

En conclusion, la formule (c) est bien vérifiée pour le couple $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. □

Remarque. Il est également possible pour la formule (b) d'appliquer directement le théorème 6.3.1 plutôt que sa variante multiplicative en remarquant qu'en notant $j : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion, en utilisant la proposition 1.1.8 de [DS13] et en écrivant les équations, on obtient la relation

$$\mathrm{MC}_{\exp(-2i\pi\gamma_0)}(j_+ H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})(*0) = j_+ H_{(0,\{\boldsymbol{\alpha}+\gamma_0\}),(\gamma_0,\{\boldsymbol{\beta}+\gamma_0\})},$$

que l'on peut aussi utiliser pour montrer la propriété d'hérédité.

Lien entre le théorème 7.4.3 et les formules de Fedorov. Les parties (a) et (b) du théorème précédent correspondent aux parties (a) et (b) du théorème 3 de [Fed17]. Cela ne se voit cependant pas de manière complètement évidente dans la mesure où Fedorov considère dans son article l'espace des solutions de la connexion associée à l'équation hypergéométrique alors que l'on considère pour notre part l'espace des sections horizontales de la connexion. Commençons donc par transposer les formules de Fedorov dans la cadre des sections horizontales avec le lemme suivant. Notons que l'on ne suppose pas nécessairement que les n-uplets sont ordonnés.

Lemme 7.4.4 *Les parties (a) et (b) du théorème 3 de [Fed17] sont équivalentes à l'énoncé suivant : Le module hypergéométrique $H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ est muni d'une pVHS $(V, F^\bullet V, \nabla)$ vérifiant, à décalage près, les identités suivantes :*

(a)
$$\nu^p_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\} \ \text{ et } \ \ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b)
$$\nu^p_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\} \ \text{ et } \ \ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. On sait que l'espace des solutions de la connexion et l'espace des sections horizontales de la connexion sont duaux l'un de l'autre (voir par exemple le corollaire 7.1.1 de [Pha79]). Si l'on note $*$ le dual, on a la relation $(P_\ell H)^* \simeq N^\ell P_\ell(H^*)$ et donc

$$(\mathrm{gr}^p_F P_\ell H)^* \simeq \mathrm{gr}^{-p}_F (P_\ell H)^* \simeq \mathrm{gr}^{-p}_F N^\ell P_\ell(H^*) \simeq \mathrm{gr}^{-p+\ell}_F P_\ell(H^*).$$

Par conséquent, la dualité implique la transformation $(p, \ell) \mapsto (-p + \ell, \ell)$.

En appliquant la transformation ci-dessus, on en déduit que la partie (a) du théorème 3 de [Fed17] est équivalente à écrire que

$$\nu^p_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = -(\#\{i \mid \alpha_i \leq \alpha_m\} - \#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\}) + \ell_m(\boldsymbol{\alpha}) \ \text{ et } \ \ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit

$$\nu^p_{0,\mu_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\} \ \text{ et } \ \ell = \ell_m(\boldsymbol{\alpha}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, la partie (b) du théorème 3 de [Fed17] est équivalente à écrire que

$$\nu^p_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = -(\#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\} - \#\{j \mid \beta_j < \beta_m\}) + \ell_m(\boldsymbol{\beta}) \;\text{ et }\; \ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit

$$\nu^p_{\infty,\lambda_m,\ell}(H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = \#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\} \;\text{ et }\; \ell = \ell_m(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Il reste maintenant à montrer que les formules du lemme précédent correspondent aux formules du théorème 7.4.3, à décalage près. Il s'agit d'une conséquence du lemme combinatoire suivant, dans la mesure où la quantité $\#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$ ne dépend que des n-uplets $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.

Lemme 7.4.5 *On a les relations suivantes :*
(i) $p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_m) - (\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}) = \#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$ *;*
(ii) $p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\beta_m) - (\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}) = \#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$*.*

Preuve. Soit $k \in \{1,...,n\}$, résumons dans le tableau suivant les contributions de l'entier k dans les quantités $p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}$ selon les positions relatives de α_k, β_k et α_m.

contribution de k dans		$p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_m)$	$\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}$
$\alpha_k < \beta_k$	$0 \leq \alpha_m < \alpha_k < \beta_k < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k = \alpha_m < \beta_k < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k < \alpha_m < \beta_k < 1$	0	-1
	$0 \leq \alpha_k < \beta_k < \alpha_m < 1$	1	0
$\alpha_k > \beta_k$	$0 \leq \alpha_m < \beta_k < \alpha_k < 1$	0	0
	$0 \leq \beta_k < \alpha_m < \alpha_k < 1$	1	1
	$0 \leq \beta_k < \alpha_k = \alpha_m < 1$	1	1
	$0 \leq \beta_k < \alpha_k < \alpha_m < 1$	0	0

Ce tableau prouve que les quantités $p(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\alpha_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j < \alpha_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \alpha_m\}$ diffèrent de $\#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$, ce qui démontre la formule (i).

Résumons maintenant les contributions de l'entier k dans les quantités $p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \beta_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}$ selon les positions relatives de α_k, β_k et β_m.

contribution de k dans		$p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \beta_m)$	$\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}$
$\alpha_k < \beta_k$	$0 \leq \beta_m < \alpha_k < \beta_k < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k < \beta_m < \beta_k < 1$	0	-1
	$0 \leq \alpha_k < \beta_k = \beta_m < 1$	1	0
	$0 \leq \alpha_k < \beta_k < \beta_m < 1$	1	0
$\alpha_k > \beta_k$	$0 \leq \beta_m < \beta_k < \alpha_k < 1$	0	0
	$0 \leq \beta_k = \beta_m < \alpha_k < 1$	1	1
	$0 \leq \beta_k < \beta_m < \alpha_k < 1$	0	0
	$0 \leq \beta_k < \alpha_k < \beta_m < 1$	1	1

Ce tableau prouve que les quantités $p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \beta_m)$ et $\#\{j \mid \beta_j \leq \beta_m\} - \#\{i \mid \alpha_i < \beta_m\}$ diffèrent de $\#\{k \mid \alpha_k < \beta_k\}$, ce qui démontre la formule (ii). $\square$

7.5 Convolution multiplicative avec des modules hypergéométriques

Un des intérêts de la proposition 7.3.2 est que l'on peut considérer le foncteur $\mathrm{MC}(P, Q)$ de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D})$ qui à M associe $M *_{\mathrm{mid}} H(P, Q)$. On utilisera aussi la notation $\mathrm{MC}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$, ainsi que $\mathrm{MC}_{\alpha,\beta}$ lorsque $n = 1$.

On a la proposition suivante :

Proposition 7.5.1 *On a* $\mathrm{MC}_{(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)} = \mathrm{MC}_{\alpha_2,\beta_2} \circ \mathrm{MC}_{\alpha_1,\beta_1}$ *pour* $\alpha_i \neq \beta_j$ *modulo* $\mathbb{Z}$*.*

Preuve. Soit M un $\mathcal{D}$-module holonome. On a

$$\mathrm{MC}_{(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)}(M) = M *_{\mathrm{mid}} H_{(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)} = M *_{\mathrm{mid}} (H_{\alpha_1,\beta_1} * H_{\alpha_2,\beta_2})$$

où la dernière convolution est n'importe laquelle des trois convolutions. Comme

$$\mathrm{MC}_{\alpha_2,\beta_2} \circ \mathrm{MC}_{\alpha_1,\beta_1}(M) = (M *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_1,\beta_1}) *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_2,\beta_2},$$

le problème est donc réduit à une question d'associativité.

Pour cela, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M *_! H_{\alpha_1,\beta_1} *_! H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d, twoheadrightarrow] & (M *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_1,\beta_1}) *_! H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[r, hookrightarrow] \arrow[d, twoheadrightarrow] & (M *_* H_{\alpha_1,\beta_1}) *_! H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[d, twoheadrightarrow] \\
(M *_! H_{\alpha_1,\beta_1}) *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d, hookrightarrow] & (M *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_1,\beta_1}) *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[r, hookrightarrow] \arrow[d, hookrightarrow] & (M *_* H_{\alpha_1,\beta_1}) *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[d, hookrightarrow] \\
(M *_! H_{\alpha_1,\beta_1}) *_* H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[r, twoheadrightarrow] & (M *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_1,\beta_1}) *_* H_{\alpha_2,\beta_2} \arrow[r, hookrightarrow] & M *_* H_{\alpha_1,\beta_1} *_* H_{\alpha_2,\beta_2}
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont injectives/surjectives par définition de $*_{\mathrm{mid}}$, les horizontales des première et troisième lignes car les foncteurs $*_! H_{\alpha_2,\beta_2}$ et $*_* H_{\alpha_2,\beta_2}$ sont exacts (on rappelle que $H_{\alpha_2,\beta_2} \in P$), et les horizontales de la deuxième ligne car le foncteur $*_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_2,\beta_2}$ préserve les injections et les surjections.

On en déduit que $(M *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_1,\beta_1}) *_{\mathrm{mid}} H_{\alpha_2,\beta_2}$ s'identifie à l'image de

$$M *_! H_{\alpha_1,\beta_1} *_! H_{\alpha_2,\beta_2} \to M *_* H_{\alpha_1,\beta_1} *_* H_{\alpha_2,\beta_2}$$

à savoir $M *_{\mathrm{mid}} (H_{\alpha_1,\beta_1} * H_{\alpha_2,\beta_2})$. Ce qui achève la preuve. $\square$

Cette proposition montre que l'étude du comportement des données numériques par $\mathrm{MC}(P, Q)$ se ramène par récurrence à l'étude du rang 1, à savoir l'étude du comportement des données numériques par $\mathrm{MC}_{\alpha,\beta}$.