Modules d'unités en théorie d'Iwasawa.

5.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on fixe k un corps quadratique imaginaire et p un nombre premier totalement décomposé dans k. Soient $\mathfrak{p}$ et $\bar{\mathfrak{p}}$ les deux idéaux maximaux de $\mathcal{O}_k$ au-dessus de p. Par la théorie du corps de classes, il existe une unique $\mathbb{Z}_p$-extension k_∞ de k non-ramifiée en dehors de $\mathfrak{p}$. On considère une extension K_∞ de degré fini de k_∞, abélienne sur k. On pose $G_\infty := \mathrm{Gal}\,(K_\infty/k)$, et on fixe une décomposition [1]

$$G_\infty \quad = \quad G \times \Gamma,$$

où $G = \mathrm{Gal}\,(K_\infty/k_\infty)$ est le sous-groupe de torsion de G_∞ et Γ est un groupe topologique isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Remarquons que le choix de Γ est arbitraire, cependant d'après le lemme A.1.5.3, pour $n \in \mathbb{N}$ le groupe $\Gamma_n := \Gamma^{p^n}$ ne dépend pas du choix de Γ dès que p^n annule le p-Sylow de G. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note K_n le sous-corps de K_∞ fixé par Γ_n. Enfin, on note $\Lambda := \mathbb{Z}_p\,[[G_\infty]]$ l'algèbre d'Iwasawa (voir la sous-section A.1.2).

Dans ce chapitre, nous établissons quelques résultats élémentaires concernant divers Λ-modules d'unités, résultats qui seront utilisés au chapitre 6.

5.2 Unités semi-locales.

5.2.1 Définitions, notations.

Pour toute extension abélienne finie L de k, rappelons que le $\mathbb{Z}\,[\mathrm{Gal}\,(L/k)]$-module des unités semi-locales $\mathcal{O}_{L,\mathrm{s.l}}^\times$ de L au-dessus de $\mathfrak{p}$ est défini par

$$\mathcal{O}_{L,\mathrm{s.l}}^\times \quad := \quad \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{L_\mathfrak{P}}^\times,$$

où le produit est pris sur tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_L$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, et où pour un tel idéal $\mathfrak{P}$, $L_\mathfrak{P}$ est le complété de L en $\mathfrak{P}$. Une unité semi-locale $x := (x_\mathfrak{P})_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}$ est dite principale si pour tout $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, $x_\mathfrak{P}$ est congru à 1 modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{L_\mathfrak{P}}$.

On note $\mathcal{U}_L$ le pro-p-complété de $\mathcal{O}_{L,\mathrm{s.l}}^\times$. On rappelle que le morphisme canonique $\mathcal{O}_{L,\mathrm{s.l}}^\times \to \mathcal{U}_L$ se restreint en un isomorphisme du sous-groupe des unités semi-locales principales vers $\mathcal{U}_L$ (dans la suite, nous identifions donc $\mathcal{U}_L$ au sous-groupe des unités semi-locales principales).

[1] Une telle décomposition est possible d'après le lemme A.1.5.1.

Pour toute extension finie L' de L, abélienne sur k, on définit la norme

$$\mathrm{N}_{L'/L} : \qquad \mathcal{O}^{\times}_{L',\mathrm{s.l}} \longrightarrow \mathcal{O}^{\times}_{L,\mathrm{s.l}}, \qquad (x_{\mathfrak{P}'})_{\mathfrak{P}'|\mathfrak{p}} \longmapsto \left(\prod_{\mathfrak{P}'|\mathfrak{P}} \mathrm{N}_{L'_{\mathfrak{P}'}/L_{\mathfrak{P}}}(x_{\mathfrak{P}'})\right)_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}.$$

On définit la norme $\mathrm{N}_{L'/L} : \mathcal{U}_{L'} \to \mathcal{U}_L$ par restriction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{U}_n := \mathcal{U}_{K_n}$, et on définit

$$\mathcal{U}_\infty \quad := \quad \varprojlim_n \mathcal{U}_n,$$

en prenant la limite projective par rapport aux normes. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_{K_\infty} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_{K_n}$, on note $\mathfrak{P}_n := \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_{K_n}$ l'idéal premier[2] de $\mathcal{O}_{K_n}$ en dessous de $\mathfrak{P}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{U}_{n,\mathfrak{P}}$ le sous-groupe de $\mathcal{O}^{\times}_{K_{n,\mathfrak{P}_n}}$ formé des unités congrues à 1 modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_{n,\mathfrak{P}_n}}$. On pose

$$\mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}} := \varprojlim_n \mathcal{U}_{n,\mathfrak{P}},$$

en prenant la limite projective par rapport aux normes $\mathrm{N}_{K_{n+1,\mathfrak{P}_{n+1}}/K_{n,\mathfrak{P}_n}}$. On a alors la décomposition suivante,

$$\mathcal{U}_\infty \quad = \quad \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}},$$

où le produit est pris sur tous les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ (qui sont en nombre fini, puisque K_∞/K_n est totalement ramifiée en les places au-dessus de $\mathfrak{p}$, pour n assez grand).

5.2.2 Liberté du $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$-module des unités semi-locales.

Soit $K_{\infty,\mathfrak{P}} := \bigcup_{n=0}^{\infty} K_{n,\mathfrak{P}_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on identifie $\mathrm{Gal}\,(K_{n,\mathfrak{P}_n}/k_{\mathfrak{p}})$ au sous-groupe de décomposition G'_n de $\mathfrak{p}$ dans K_n/k. On pose $\Lambda' := \mathbb{Z}_p\,[[G'_\infty]]$. On fixe une décomposition $G'_\infty = G' \times \Gamma'$, où G' est un groupe fini et Γ' est un groupe topologique isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma'_n := (\Gamma')^{p^n}$.

Lemme 5.2.2.1 *Soit $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Le groupe $\mu_{p^\infty}(K_{\infty,\mathfrak{P}})$ est fini.*

Démonstration. On note k' la complétion de k en $\mathfrak{p}$. Puisque $k' = \mathbb{Q}_p$, il est bien connu que le noyau du symbole local des résidus normiques

$$(\cdot, k'(\mu_{p^\infty})/k') : (k')^\times \to \mathrm{Gal}\,(k'(\mu_{p^\infty})/k')$$

est le groupe $\langle p \rangle$ librement engendré par p (voir par exemple [35, p. 323, Proposition (1.8)]). Supposons $\mu_{p^\infty} \subset K'_\infty$. Alors le noyau du symbole local des résidus normiques

$$(\cdot, K'_\infty/k') : (k')^\times \to \mathrm{Gal}\,(K'_\infty/k')$$

est un sous-groupe de $\langle p \rangle$, d'indice fini car K'_∞/k'_∞ est de degré fini. Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\bar{\mathfrak{p}}$. On note k'' la complétion de k en $\bar{\mathfrak{p}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

[2] L'application $\mathfrak{P} \mapsto (\mathfrak{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une bijection du spectre maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ vers l'ensemble des suites d'idéaux maximaux $\mathfrak{P}_n$ de $\mathcal{O}_{K_n}$ telles que $\mathfrak{P}_{n+1} \cap \mathcal{O}_{K_n} = \mathfrak{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

on désigne par k'_n (resp. k''_n) la complétion de k_n en $\mathfrak{P}$ (resp. $\mathfrak{Q}$). On pose $k'_\infty := \bigcup_{i=0}^{n} k'_n$ et $k''_\infty := \bigcup_{i=0}^{n} k''_n$. L'extension k''_∞/k'' est infinie et non ramifiée. Donc son groupe de Galois est topologiquement engendré par $(p, k''_\infty/k'')$. Puisque k_∞/k est non ramifiée en dehors de $\mathfrak{p}$, on a $(p, k''_\infty/k'')_{|k_\infty} = \left(p^{-1}, k'_\infty/k'\right)_{|k_\infty}$, et on déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(p^n, K'_\infty/k') \neq 1$. Alors $(\cdot, K'_\infty/k')$ est injectif, ce qui est absurde. $\square$

Pour n assez grand on a $\Gamma_n \subseteq G'_\infty$, donc d'après le lemme A.1.5.2 il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Gamma_{n_0} \subseteq \Gamma'. \tag{5.2.2.1}$$

Alors il existe un unique entier relatif $c \geq -n_0$, tel que pour tout idéal maximal $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, et tout entier $n \geq n_0$, on a

$$\Gamma_n = \Gamma'_{n+c}, \qquad K_{n,\mathfrak{P}_n} = K'_{n+c,\mathfrak{P}} \qquad \text{et} \qquad G'_n = G' \times \left(\Gamma'/\Gamma'_{n+c}\right), \tag{5.2.2.2}$$

où $K'_{m,\mathfrak{P}}$ est le sous-corps de $K_{\infty,\mathfrak{P}}$ fixé par Γ'_m, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Lemme 5.2.2.2 *Soient $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{U}'_{n,\mathfrak{P}}$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_{K'_{n,\mathfrak{P}}}$ congrues à 1 modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K'_{n,\mathfrak{P}}}$.*

Le noyau et le conoyau du morphisme canonique $\pi_{n,\mathfrak{P}} : (\mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}})_{\Gamma'_n} \longrightarrow \mathcal{U}'_{n,\mathfrak{P}}$ sont invariants sous l'action de G'_∞, et de rang 1 sur $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\tilde{\mathrm{M}}'_n$ la pro-p-extension abélienne maximale de K'_n et M'_n la pro-p-extension abélienne maximale non ramifiée de K'_n. On pose $\tilde{\mathrm{M}}'_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathrm{M}}'_n$ et $\mathrm{M}'_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{M}'_n$. On remarque que $\mathrm{M}'_\infty = K_{\infty,\mathfrak{P}}L$, où L est l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension non-ramifiée de $k_\mathfrak{p}$. Donc M'_∞ est abélienne sur $k_\mathfrak{p}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la théorie du corps de classes locale nous donne un isomorphisme $\phi_n : \mathcal{U}'_{n,\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_n/\mathrm{M}'_n\right)$ de $\mathbb{Z}_p\left[\mathrm{Gal}\left(K'_{n,\mathfrak{P}}/k_\mathfrak{p}\right)\right]$-modules. Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq m$, on a le diagramme commutatif ci-dessous,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}'_{m,\mathfrak{P}} \arrow[r, "\phi_m"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{m,n}"] & \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_m/\mathrm{M}'_m\right) \arrow[d, "\mathrm{res}_{m,n}"] \\ \mathcal{U}'_{n,\mathfrak{P}} \arrow[r, "\phi_n"] & \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_n/\mathrm{M}'_n\right), \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{N}_{m,n}$ est l'application norme et $\mathrm{res}_{m,n}$ est le morphisme de restriction. Prenant les limites projectives, on obtient un isomorphisme

$$\phi_\infty : \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_\infty/\mathrm{M}'_\infty\right) \tag{5.2.2.3}$$

de Λ'-modules, qui induit pour tout $n \in \mathbb{N}$ un isomorphisme

$$\mathrm{Cok}\left(\pi_{n,\mathfrak{P}}\right) \quad \simeq \quad \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty/\mathrm{M}'_n\right). \tag{5.2.2.4}$$

D'après le corollaire A.1.4.9, le morphisme de restriction $\mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_\infty/K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \to \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_n/K'_{n,\mathfrak{P}}\right)$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_\infty/K_{\infty,\mathfrak{P}}\right)_{\Gamma'_n} \simeq \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_n/K_{\infty,\mathfrak{P}}\right). \tag{5.2.2.5}$$

D'après le lemme 5.2.2.1, et en vertu de [25, Theorem 25 (i)], il existe une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[[\Gamma']]$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[\Gamma']]^d \longrightarrow \mu_{p^\infty}(K_{\infty,\mathfrak{P}}) \longrightarrow 0, \qquad (5.2.2.6)$$

où $d := \#(G')$. Cette suite exacte implique en particulier que

$$\mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right)^{\Gamma'_n} = 0. \qquad (5.2.2.7)$$

Puisque M'_∞ est abélienne sur $k_\mathfrak{p}$, on a

$$\mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right)^{\Gamma'_n} = \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \simeq \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right)_{\Gamma'_n}. \qquad (5.2.2.8)$$

La suite exacte $0 \to \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}} \to \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \to \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \to 0$ nous donne une suite exacte dite des invariants et co-invariants[3]. Compte tenu de (5.2.2.5), (5.2.2.7) et (5.2.2.8), on obtient donc le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \arrow[r] & (\mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}})_{\Gamma'_n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_n / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{U}'_{n,\mathfrak{P}} \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}'_n / K'_{n,\mathfrak{P}}\right) \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_n / K'_{n,\mathfrak{P}}\right) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. De ce diagramme on déduit un isomorphisme de Λ'-modules

$$\mathrm{Ker}\left(\pi_{n,\mathfrak{P}}\right) \quad \simeq \quad \mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / K_{\infty,\mathfrak{P}}\right). \qquad (5.2.2.9)$$

Puisque M'_∞ est abélienne sur $k_\mathfrak{p}$ et que le rang de $\mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}'_\infty / k_\mathfrak{p}\right)$ sur $\mathbb{Z}_p$ est égal à 2, le lemme résulte de (5.2.2.4) et (5.2.2.9). □

Proposition 5.2.2.3 *Le $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module $\mathcal{U}_\infty$ est de type fini et sans torsion. En outre, le $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$-module $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_\infty$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$.*

Démonstration. Le fait que le $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module $\mathcal{U}_\infty$ est de type fini et sans torsion résulte directement de (5.2.2.6) et de (5.2.2.3). Soit $\mathfrak{P}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On considère le morphisme de Λ'-modules

$$\iota : \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathcal{U}_\infty, \quad x_\mathfrak{P} \mapsto (x_\mathfrak{Q})_{\mathfrak{Q}|\mathfrak{p}},$$

où pour tout idéal maximal $\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_{K_\infty}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, $x_\mathfrak{Q} := 1$. Utilisant le fait que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$ est libre sur $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'$, on remarque que ι induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$-modules

$$\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda\right) \otimes_{\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'\right)} \left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}}\right) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_\infty.$$

Il nous suffit donc de montrer que $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}}$ est un $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'$-module isomorphe à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'$.

[3] Voir la proposition A.1.3.3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit G'_n le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans K_n/k, et soit $\widehat{\mathfrak{P}}_n$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{K_{n,\mathfrak{P}_n}}$. Il est bien connu que pour $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le logarithme p-adique définit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p[G'_n]$-modules de $1+\widehat{\mathfrak{P}}_n^m$ vers $\widehat{\mathfrak{P}}_n^m$. Tensorisant cet isomorphisme par $\mathbb{Q}_p$ au-dessus de $\mathbb{Z}_p$, on voit que

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{n,\mathfrak{P}} \quad \simeq \quad K_{n,\mathfrak{P}_n} \quad \simeq \quad \mathbb{Q}_p[G'_n], \tag{5.2.2.10}$$

le dernier isomorphisme provenant du théorème de la base normale (en tenant compte du fait que $k_\mathfrak{p} = \mathbb{Q}_p$).

Soit χ un $\mathbb{C}_p$-caractère irréductible de G'. Soit ψ l'unique $\mathbb{Q}_p$-caractère irréductible de G' tel que $\chi|\psi$. Il suffit de prouver que $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}}\right)$ est libre sur [4]

$$e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'\right) \quad \simeq \quad \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\chi)[[\Gamma']],$$

de rang 1. D'après le corollaire A.3.2.2, on sait que $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'\right)$ est principal. Puisque $\mathcal{U}_\infty$ est sans torsion sur $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}}\right)$ est sans torsion sur $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma']]$. Du lemme A.3.5.1 on déduit que $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}}\right)$ est un $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'\right)$-module sans torsion et de type fini, donc libre. Soit r_ψ son rang. Il ne reste à prouver que $r_\psi = 1$. On choisit un entier $n \geq n_0$, voir (5.2.2.1). Alors

$$e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \left((\mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}})_{\Gamma_n}\right)\right) \quad \simeq \quad e_\psi\left(\mathbb{Q}_p[G'_n]\right)^{r_\psi}. \tag{5.2.2.11}$$

D'après (5.2.2.2) et le lemme 5.2.2.2, le noyau et le conoyau du morphisme canonique $(\mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}})_{\Gamma_n} \to \mathcal{U}_{n,\mathfrak{P}}$ sont des $\mathbb{Z}_p$-modules de rang 1, et invariants sous l'action de G'_∞. On en déduit que

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}\left(e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \left((\mathcal{U}_{\infty,\mathfrak{P}})_{\Gamma_n}\right)\right)\right) \quad = \quad \dim_{\mathbb{Q}_p}\left(e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{n,\mathfrak{P}}\right)\right). \tag{5.2.2.12}$$

Or $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_{n,\mathfrak{P}}\right) \simeq e_\psi\left(\mathbb{Q}_p[G'_n]\right)$ d'après (5.2.2.10). On en déduit $r_\psi = 1$ par (5.2.2.12) et (5.2.2.11). □

5.3 Unités globales

5.3.1 Définitions, notations.

Définition 5.3.1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{E}_n := \mathbb{Z}_p \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{O}_{K_n}^\times$. On définit ensuite*

$$\mathcal{E}_\infty \quad := \quad \varprojlim_n \mathcal{E}_n,$$

la limite projective étant par rapport aux normes.

Remarque 5.3.1.2 *D'après le théorème de Dirichlet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n$ est de rang $[K_n : k] - 1$ sur $\mathbb{Z}_p$.*

[4] L'isomorphisme $e_\psi\left(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda'\right) \simeq \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(\chi)[[\Gamma']]$ résulte de la proposition A.2.2.5.

5.3.2 Unités de Minkowski.

Proposition et définition 5.3.2.1 *Soit L/k une extension abélienne. Il existe une unité $\varepsilon \in \mathcal{O}_L^\times$ telle que le sous-$\mathbb{Z}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right]$-module de $\mathcal{O}_L^\times$ engendré par ε est d'indice fini. Une telle unité est appelée une unité de Minkowski.*

Démonstration. Puisque l'image de $\mathcal{O}_L^\times$ par ℓ_L est un réseau de $\mathbb{R}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right](1-e_1)$ de rang $[L:k]-1$ (sous-section 2.3.1), on a un isomorphisme

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times \simeq \mathbb{R}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right](1-e_1) \simeq \prod_{\phi \neq 1} \mathbb{R}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right] e_\phi, \qquad (5.3.2.1)$$

le produit étant sur tous les caractères rationnels non triviaux de $\mathrm{Gal}\left(L/k\right)$. Puisque pour un tel caractère ϕ, on a $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times\right)_\phi = \left(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times\right)_\phi$, on déduit de (5.3.2.1) un isomorphisme

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times \simeq \mathbb{Q}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right](1-e_1) \simeq \prod_{\phi \neq 1} \mathbb{Q}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right] e_\phi. \qquad (5.3.2.2)$$

En particulier $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times$ est un $\mathbb{Q}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right]$-module monogène : soit α un $\mathbb{Q}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right]$-générateur de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que α^m appartient à l'image de $\mathcal{O}_L^\times$ dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times$. Il suffit alors de prendre pour unité de Minkowski un antécédent ε de α^m dans $\mathcal{O}_L^\times$. □

Remarque 5.3.2.2 *Soient L/k une extension abélienne, ε une unité de Minkowski, et $\left(\alpha_g\right)_{g \in \mathrm{Gal}(L/k)} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{Gal}(L/k)}$ une famille telle que $\prod_{g \in \mathrm{Gal}(L/k)} \varepsilon^{\alpha_g g}$ est une racine de l'unité. Alors pour tout $(g,h) \in \mathrm{Gal}\left(L/k\right)^2$, $\alpha_g = \alpha_h$.*

Démonstration. Puisque le sous-$\mathbb{Z}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right]$-module de $\mathcal{O}_{K_n}^\times$ engendré par ε est d'indice fini, $1 \otimes \varepsilon$ engendre le $\mathbb{Q}\left[\mathrm{Gal}\left(L/k\right)\right]$-module $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_L^\times$. De (5.3.2.2) on déduit que $\sum_{g \in \mathrm{Gal}(L/k)} \alpha_g g$ est invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}\left(L/k\right)$. □

5.3.3 Un analogue de la conjecture de Leopoldt.

On note $\log_p : \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p$ le logarithme d'Iwasawa. On rappelle que

$$\mathrm{Ker}\left(\log_p\right) \quad = \quad \left\{x \in \mathbb{C}_p^\times / \exists\,(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, x^m = p^n\right\}. \qquad (5.3.3.1)$$

On réfère le lecteur à [24, p. 40].

Théorème 5.3.3.1 *(Brumer, [11]) Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des éléments non nuls de $\mathbb{C}_p$, et soit $\log_p : \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p$ le logarithme d'Iwasawa. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *La famille $\left(\log_p\left(\alpha_i\right)\right)_{i=1}^n$ est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante.*
- *La famille $\left(\log_p\left(\alpha_i\right)\right)_{i=1}^n$ est $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-linéairement indépendante, où $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ est la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}_p$.*

Lemme 5.3.3.2 *([34], (10.3.15) Lemma]) Soit $\mathcal{G}$ un groupe fini et $f : \mathcal{G} \to \mathbb{C}_p$ une application. Alors*

$$\mathrm{rg}\left(f\left(\sigma^{-1}\tau\right)\right)_{(\sigma,\tau)\in\mathcal{G}^2} = \#\left\{\chi \in \mathrm{Hom}_{Gr}\left(\mathcal{G}, \mathbb{C}_p^\times\right) / \sum_{\sigma\in\mathcal{G}} \chi(\sigma) f(\sigma) \neq 0\right\},$$

où $\mathrm{rg}\left(f\left(\sigma^{-1}\tau\right)\right)_{(\sigma,\tau)\in\mathcal{G}^2}$ désigne le rang de la matrice $\left(f\left(\sigma^{-1}\tau\right)\right)_{(\sigma,\tau)\in\mathcal{G}^2}$, et où l'ensemble $\mathrm{Hom}_{Gr}\left(\mathcal{G}, \mathbb{C}_p^\times\right)$ est l'ensemble des morphismes de groupes de $\mathcal{G}$ vers $\mathbb{C}_p^\times$.

Théorème 5.3.3.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, le morphisme canonique $\mathcal{E}_n \to \mathcal{U}_n$ est injectif.*

Démonstration. La démonstration qui suit est inspirée de la preuve de la conjecture de Leopoldt de [34, (10.3.16) Theorem]. Elle repose sur le théorème 5.3.3.1 dû à Brumer. Rappelons qu'on identifie $\mathcal{U}_n$ au sous-groupe de $\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{K_n,\mathfrak{P}}^\times$ formé des unités semi-locales principales. Soit ε une unité de Minkowski, telle que pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}_{K_n}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, ε est congrue à 1 modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{K_n,\mathfrak{P}}$ de $\mathcal{O}_{K_n,\mathfrak{P}}$. Un tel choix est toujours possible, quitte à élever une unité de Minkowski arbitrairement choisie à la puissance m, avec $m \in \mathbb{N}$ qui annule tous les $\left(\mathcal{O}_{K_n,\mathfrak{P}}/\mathfrak{m}_{K_n,\mathfrak{P}}\right)^\times$ où $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{K_n}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. Cette précaution nous assure que l'image de ε dans $\mathcal{U}_n$ est $(\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)$. On note $\tilde{\mathcal{E}}_n$ le sous $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module de $\mathcal{E}_n$ engendré par ε. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathcal{E}_n \to \mathcal{U}_n$ n'est pas injectif. La $\mathbb{Z}_p$-torsion de $\mathcal{E}_n$ s'identifie à $\mu_{p^\infty}(K_n)$, qui s'injecte dans $\mathcal{U}_n$. Donc l'image $\mathrm{Im}(\mathcal{E}_n)$ de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{U}_n$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de rang inférieur où égal à $[K_n : k] - 2$. Il en va *a fortiori* de même pour l'image de $\tilde{\mathcal{E}}_n$,

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_p}\left(\mathrm{Im}\left(\tilde{\mathcal{E}}_n\right)\right) \quad \leq \quad [K_n : k] - 2. \tag{5.3.3.2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal de $\mathcal{O}_{K_n}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$. On fixe un plongement $K_{n,\mathfrak{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$. On pose

$$\ell : \mathcal{U}_n \longrightarrow \mathbb{C}_p[G_n], \quad (u_\mathfrak{P})_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \longmapsto \sum_{g\in G_n} \log_p\left(g^{-1}\left(u_{g(\mathfrak{Q})}\right)\right) g.$$

On remarque que ℓ est $\mathbb{Z}_p[G_n]$-linéaire. De (5.3.3.2) on déduit que le $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel engendré par $\ell\left(\mathrm{Im}\left(\tilde{\mathcal{E}}_n\right)\right)$ est de dimension inférieure ou égale à $[K_n : k] - 2$. Autrement dit, le rang de la matrice $\left(\log_p\left(g^{-1}h(\varepsilon)\right)\right)_{(g,h)\in G_n^2}$ est inférieur ou égal à $[K_n : k] - 2$. Du lemme 5.3.3.2, on en déduit qu'il existe un $\mathbb{C}_p$-caractère irréductible et non trivial χ de G_n tel que

$$\sum_{g\in G_n} \chi(g) \log_p(g(\varepsilon)) = 0. \tag{5.3.3.3}$$

Puisque $\mathrm{N}_{K_n/k}(\varepsilon)$ est une racine de l'unité, on déduit de (5.3.3.1) et (5.3.3.3) que

$$\sum_{g\in G_n^*} (1 - \chi(g)) \log_p(g(\varepsilon)) = 0, \tag{5.3.3.4}$$

où $G_n^* := G_n \setminus \{\mathrm{Id}_{K_n}\}$. Donc la famille $\left(\log_p(g(\varepsilon))\right)_{g\in G_n^*}$ n'est pas $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$-linéairement indépendante, $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ étant la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}_p$. Du théorème de Brumer nous déduisons donc que la famille $\left(\log_p\left(g\left(\varepsilon\right)\right)\right)_{g\in G_n^*}$ n'est pas $\mathbb{Q}$-linéairement indépendante : il existe une famille $\left(\alpha_g\right)_{g\in G_n^*} \in \mathbb{Z}^{G_n^*}$, non identiquement nulle, telle que

$$\log_p\left(\prod_{g\in G_n^*} \varepsilon^{\alpha_g g}\right) = \sum_{g\in G_n^*} \alpha_g \log_p\left(g\left(\varepsilon\right)\right) = 0. \tag{5.3.3.5}$$

De (5.3.3.1) il résulte que $\prod_{g\in G_n^*} \varepsilon^{\alpha_g g}$ est une racine de l'unité. De la remarque 5.3.2.2, on déduit $\alpha_g = 0$ pour tout $g \in G_n^*$, ce qui est contradictoire. Donc $\mathcal{E}_n \to \mathcal{U}_n$ est injectif.

Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et les injections $\mathcal{E}_n \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ sont compatibles avec les normes, donc en passant à la limite projective on obtient aussi une injection $\mathcal{E}_\infty \hookrightarrow \mathcal{U}_\infty$. □

Corollaire 5.3.3.4 *Soit $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. On note $\tilde{\mathrm{M}}_n$ la pro-p-extension abélienne de K_n maximale non ramifiée en dehors des places au-dessus de $\mathfrak{p}$, et M_n la pro-p-extension abélienne de K_n non ramifiée maximale. On pose $\mathrm{B}_n := \mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}_n/K_n\right)$ et on identifie A_n à $\mathrm{Gal}\left(\mathrm{M}_n/K_n\right)$ par la théorie du corps de classes. Alors on a la suite exacte suivante,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{U}_n \longrightarrow \mathrm{B}_n \longrightarrow \mathrm{A}_n \longrightarrow 0, \tag{5.3.3.6}$$

où $\mathrm{B}_n \to \mathrm{A}_n$ est le morphisme de restriction, et $\mathcal{U}_n \to \mathrm{B}_n$ est le morphisme issu de la théorie du corps de classes.

En particulier si $n < \infty$, alors le $\mathbb{Z}_p$-rang de B_n est 1.

Démonstration. Supposons d'abord $n < \infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit L_m la p-extension maximale de K_n incluse dans le corps de classes de rayons de K_n modulo $\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n}$. Alors $\tilde{\mathrm{M}}_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} L_m$. On note $\mathcal{F}$ le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de K_n, et pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}_m$ le sous-groupe de $\mathcal{F}$ formé des idéaux principaux engendrés par un élément $x \in K_n^\times$ congru à 1 modulo $\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n}$. La théorie du corps de classes nous donne le diagramme commutatif ci-dessous, à lignes exactes,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{P}_0/\mathcal{P}_m\right) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{F}/\mathcal{P}_m\right) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{F}/\mathcal{P}_0\right) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(L_m/L_0\right) \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(L_m/K_n\right) \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(L_0/K_n\right) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{5.3.3.7}$$

D'autre part pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a la suite exacte

$$\mathcal{E}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n}\right)^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{P}_0/\mathcal{P}_m\right) \longrightarrow 0. \tag{5.3.3.8}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'après le théorème des restes chinois on a un isomorphisme naturel

$$\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n}\right)^\times \simeq \bigoplus_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{O}_{K_{n,\mathfrak{q}}}/\mathfrak{q}^{em}\mathcal{O}_{K_{n,\mathfrak{q}}}\right)^\times,$$

où la somme est sur tous les idéaux maximaux $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{O}_{K_n}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, et où e est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ dans K_n/k. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a donc un morphisme naturel surjectif $\mathcal{U}_n \to \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n}\right)^\times$. Passant à la limite, on en déduit un morphisme

$\mathcal{U}_n \to \varprojlim_m \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n})^\times$, qui est aussi surjectif par compacité de $\mathcal{U}_n$. Il est clair que le noyau de ce morphisme est nul, donc

$$\mathcal{U}_n \simeq \varprojlim_m \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{p}^m\mathcal{O}_{K_n})^\times \quad \text{puis} \quad \varprojlim_m \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{P}_0/\mathcal{P}_m) \simeq \mathcal{U}_n/\mathcal{E}_n,$$

en utilisant (5.3.3.8). Par passage aux limites projectives (par rapport à la variable m), on déduit alors de (5.3.3.7) la suite exacte (5.3.3.6), l'exactitude en $\mathcal{E}_n$ en vertu du théorème 5.3.3.3. De plus les $\mathbb{Z}_p$-rangs de $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{U}_n$ sont respectivement $[K_n : k]-1$ et $[K_n : k]$, donc le $\mathbb{Z}_p$-rang de B_n est 1.

Lorsque $n = \infty$, on obtient la suite exacte (5.3.3.6) par passage aux limites projectives, compte tenu du fait que tous les Λ-modules considérés sont compacts. □

Remarque 5.3.3.5 *D'après [25, Theorem 4], B_∞ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. D'après [43, Proposition 20, p. 45], il résulte du théorème 5.3.3.3 que B_∞ est de torsion sur $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$.*

Proposition 5.3.3.6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\mathrm{B}_\infty)^{\Gamma_n} = 0$.*

Démonstration. D'après le corollaire A.1.4.9, $(\mathrm{B}_\infty)_{\Gamma_n}$ s'identifie à $\mathrm{Gal}\left(\tilde{\mathrm{M}}_n/K_\infty\right)$, d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathrm{B}_\infty)_{\Gamma_n} \longrightarrow \mathrm{B}_n \longrightarrow \Gamma_n \longrightarrow 0. \tag{5.3.3.9}$$

D'après le corollaire 5.3.3.4, B_n est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, et son $\mathbb{Z}_p$-rang est 1. De la suite exacte (5.3.3.9), on déduit alors que $(\mathrm{B}_\infty)_{\Gamma_n}$ est fini. Donc $(\mathrm{B}_\infty)^{\Gamma_n}$ est fini, d'après la proposition A.1.3.4. Or d'après [18, fin de la section 4], B_∞ ne contient pas de sous-$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules finis non nuls. □

5.4 Unités de Stark.

5.4.1 Unités semi-locales modulo unités de Stark.

Définition 5.4.1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{St}_n := \mathrm{St}_{K_n}$ et $\mathcal{S}t_n := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{St}_n$. On définit ensuite*

$$\mathcal{S}t_\infty \quad := \quad \varprojlim_n \mathcal{S}t_n,$$

la limite projective étant prise par rapport aux normes.

Proposition 5.4.1.2 *(A. Jilali et H. Oukhaba, [26, Proposition 2.1 et Theorem 3.2]) Le $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module $\mathcal{S}t_\infty$ est de type fini, sans torsion, et de rang $[K_0 : k]$.*

Corollaire 5.4.1.3 *Les $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $\mathcal{U}_\infty/\mathcal{S}t_\infty$, $\mathcal{E}_\infty/\mathcal{S}t_\infty$ et $\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty$ sont de torsion et de type fini.*

Démonstration. D'après la proposition 5.2.2.3, on sait que $\mathcal{U}_\infty$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ et de rang $[K_0 : k]$. D'après le théorème 5.3.3.3, $\mathcal{S}t_\infty$ s'injecte dans $\mathcal{U}_\infty$. De la proposition 5.4.1.2 on déduit que $\mathcal{U}_\infty/\mathcal{S}t_\infty$ est de torsion et de type fini. Puisque $\mathcal{E}_\infty/\mathcal{S}t_\infty$ s'injecte dans $\mathcal{U}_\infty/\mathcal{S}t_\infty$ et que $\mathcal{U}_\infty/\mathcal{E}_\infty$ est un quotient de $\mathcal{U}_\infty/\mathcal{S}t_\infty$, le corollaire s'ensuit. □

5.4.2 Comparaison avec le module d'unités elliptiques de de Shalit.

On fixe $\mathfrak{f}$ un idéal non nul de $\mathcal{O}_k$, premier à $\mathfrak{p}$, et on note $\mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$ l'ensemble des idéaux non nuls $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{O}_k$ qui divisent $\mathfrak{f}$. Pour tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$, on pose $K_{\mathfrak{g},\infty} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_{\mathfrak{g}\mathfrak{p}^n}$, et on note $\mathcal{U}_{\mathfrak{g},\infty}$, $\mathcal{E}_{\mathfrak{g},\infty}$, $\mathcal{S}t_{\mathfrak{g},\infty}$, *etc*, les différents objets attachés à $K_{\mathfrak{g},\infty}$. On fixe une décomposition

$$G_{\mathfrak{f},\infty} \quad := \quad G_{\mathfrak{f}} \times \Gamma_{\mathfrak{f}},$$

où $G_{\mathfrak{f}}$ est le sous-groupe de torsion de $G_{\mathfrak{f},\infty}$ et $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ est un groupe topologique isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Pour tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$, on a $G_{\mathfrak{g},\infty} := G_{\mathfrak{g}} \times \Gamma_{\mathfrak{g}}$, où $G_{\mathfrak{g}}$ est le sous-groupe de torsion de $G_{\mathfrak{g},\infty}$ et $\Gamma_{\mathfrak{g}} \simeq \mathbb{Z}_p$ est l'image de $\Gamma_{\mathfrak{f}}$ par le morphisme de restriction.

D'après le lemme A.1.5.2, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leq n_0 + c$ et $K_{\mathfrak{g},n} = \mathrm{H}_{\mathfrak{g}\mathfrak{p}^{n+c}}$ pour tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$ et tout entier naturel $n \geq n_0$.

Pour tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$ et tout $n \geq n_0$, notons $\mathcal{P}_{\mathfrak{g},n}$ le sous-groupe de $K_{\mathfrak{g},n}^{\times}$ engendré par $\mu(K_{\mathfrak{g},n})$ et par les éléments de la forme $\psi\left(1; \mathfrak{g}\mathfrak{p}^{n+c}, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{g}\mathfrak{p}^{n+c}\right)$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de $\mathcal{O}_k$ premier à $6\mathfrak{g}\mathfrak{p}$. On pose $C_{\mathfrak{g},n} := \mathcal{P}_{\mathfrak{g},n} \cap \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{g},n}}^{\times}$, puis

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{g}} \quad := \quad \varprojlim_n \left(\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} C_{\mathfrak{g},n}\right),$$

ce qui coïncide avec la définition donnée en [12, III, 1.4, p. 101]. Le module d'unités elliptiques utilisé par E. de Shalit dans [12] pour $K_{\mathfrak{f},\infty}$ est

$$\mathcal{C}(\mathfrak{f}) \quad := \quad \prod_{\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}} \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}.$$

Proposition 5.4.2.1 *On a* $\mathcal{S}t_{\mathfrak{f},\infty} = \mathcal{C}(\mathfrak{f})$.

Démonstration. Pour tout idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_k$, notons $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_k$ qui divisent $\mathfrak{m}$. Il est clair que pour tout $n \geq n_0$ et tout $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$, $\mathcal{P}_{\mathfrak{g},n} \subseteq \mathcal{P}_{K_{\mathfrak{f},n}}$. Il en résulte directement l'inclusion $\mathcal{C}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathcal{S}t_{\mathfrak{f},\infty}$. D'après la remarque 2.2.4.2 et (2.2.4.1), $\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n}$ est engendré en tant que groupe par :

- les racines de l'unités $\zeta \in \mu(K_{\mathfrak{f},n})$,
- toutes les normes $\beta_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}} := \mathrm{N}_{\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n+c}}}\left(\psi\left(1; \mathfrak{m}, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{m}\right)\right)$, où $\mathfrak{m} \notin \{(0), (1)\}$ est un idéal de $\mathcal{O}_k$ vérifiant $w_{\mathfrak{m}} = 1$ et $2 \leq \#(\mathrm{supp}(\mathfrak{m}))$, et $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de $\mathcal{O}_k$ premier à $6\mathfrak{m}$.
- toutes les normes $\beta_{\mathfrak{m},\mathfrak{a},a,\sigma} := \mathrm{N}_{\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}/\mathrm{H}_{\mathfrak{m}} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n+c}}}\left(\prod_{t \in T} \psi\left(1; \mathfrak{m}, \mathfrak{a}_t^{-1}\mathfrak{m}\right)^{a_t \sigma_t}\right)$, où l'idéal $\mathfrak{m} \notin \{(0), (1)\}$ de $\mathcal{O}_k$ vérifie $w_{\mathfrak{m}} = 1$ et $\#(\mathrm{supp}(\mathfrak{m})) = 1$, $\mathfrak{a} := (\mathfrak{a}_t)_{t \in T}$ est une famille finie d'idéaux non nuls de $\mathcal{O}_k$ premiers à $6\mathfrak{m}$, $\sigma := (\sigma_t)_{t \in T} \in \mathrm{Gal}(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}/k)^T$, et $a := (a_t)_{t \in T} \in \mathbb{Z}^T$ vérifie $\sum_{t \in T} a_t\left(\mathrm{N}(\mathfrak{a}_t) - 1\right) = 0$.

Si $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n+c}$ divise $\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}$, les normes $\beta_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}}$ (ou $\beta_{\mathfrak{m},\mathfrak{a},a,\sigma}$ selon le cas) appartiennent à l'intersection $\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}$. Sinon, il existe $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$ et $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq m \geq n_0$ tel que $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n+c} = \mathfrak{g}\mathfrak{p}^{m+c}$. Dans ce cas, de (2.2.4.2), on déduit que les normes $\beta_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}}$ (ou $\beta_{\mathfrak{m},\mathfrak{a},a,\sigma}$ selon le cas) appartiennent à $C_{\mathfrak{g},n}$.

Alors le groupe $\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n}$ est engendré par $\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}$, et par les $C_{\mathfrak{g},n}$, où $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{\mathfrak{f}}$. D'après la proposition A.1.1.2, il nous suffit ensuite de prouver que

$$\varprojlim_n \left(\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}\right)\right) = 0, \tag{5.4.2.1}$$

où la limite projective est prise par rapport aux restrictions des normes

$$\mathrm{N}_{\mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{m+c}},\mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n+c}}} : \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{St}_{\mathfrak{f},m} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}\right) \to \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}\right),$$

où $m \geq n \geq n_0$. Un élément de $\varprojlim_n \left(\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathrm{St}_{\mathfrak{f},n} \cap \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}\right)\right)$ s'identifie à une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ dans $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}$ telle que pour tout $m \geq n \geq n_0$, $p^{m-n}x_m = x_n$. Une telle suite est nécessairement nulle, car $\bigcap_{n=0}^{\infty} \left(p^n \left(\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}^{n_0+c}}\right)\right) = \{0\}$. Il en résulte (5.4.2.1), ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$