

CHAPITRE I

MODELISATIONS DE PLAQUES SANDWICHES

I.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la construction de modélisations de plaques sandwichs, destinées à la résolution de problèmes de mécanique en approximation quasi-statique, et s'appuyant sur la méthode des puissances virtuelles. Celle-ci nous permettra de présenter, dans une première partie, une formulation de la théorie des plaques stratifiées (*Sab 1995a*) dont est issue la théorie classique des plaques sandwichs que nous proposons. Puis, dans une seconde partie, nous développerons de nouveaux modèles de plaques sandwichs, à partir de la modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches (modèle M4) (*Ehrlacher et Naciri 1995a*).

Auparavant, nous proposons d'effectuer une revue bibliographique afin de donner un aperçu des modélisations existantes pour les plaques sandwichs, et de poser le problème à résoudre.

Synthèse bibliographique

L'introduction des composites sandwichs dans la plupart des secteurs d'activités a conduit les chercheurs à développer des théories de plaques sandwichs, dédiées à l'analyse et à la prévision de leur comportement et de leur tenue en service.

Quelques analyses de plaques sandwichs sont basées sur des formulations d'élasticité tridimensionnelle (*Pagano 1969*), (*Pagano 1970*), (*Srinivas et Rao 1970*), (*Srinivas 1973*), mais la majorité des analyses développées sont des études 2D issues des théories de plaques multicouches (elles-mêmes élaborées, pour la plupart, à partir de théories de plaques homogènes).

Notez cependant, que les toutes premières analyses de plaques sandwichs, publiées entre le milieu des années 1940 et la fin des années 60, ont été développées directement à partir d'études de plaques homogènes. Citons Reissner qui a développé des études de plaques sandwichs (*1948*), (*1950*), en utilisant le principe du minimum de l'énergie complémentaire. Il a résolu le problème d'une plaque sandwich à peaux et âme isotropes en supposant que l'âme ne reprend que les contraintes en cisaillement transverse et les peaux uniquement les efforts de membrane. Des chercheurs vont tenter d'améliorer et de généraliser sa théorie sandwich (*Goodier et Neou 1951*), (*Heath 1960*), (*Raville 1955*), (*Allen 1969*). Cheng en 1962 modifie le problème de Reissner pour résoudre des plaques sandwichs à âme orthotrope et à peaux isotropes. Cette étude sera complétée par celle de Liaw et Little (*1967*), et celle de Azar (*1968*). Evoquons également Libove et Batdorf (*1948*) qui traitent le problème de plaques sandwichs anisotropes à peaux minces, à partir de la théorie classique de Love-Kirchhoff qu'ils modifient en introduisant des rigidités de cisaillement, de flexion et de torsion. Ces travaux seront plus tard étendus par ceux de Seide et Stowell (*1949*) et de Robinson (*1955*). Enfin, indiquons que Ericksen et March (*1950*) proposent de résoudre le cas général d'un panneau sandwich non symétrique à peaux épaisses en développant une méthode de Rayleigh-

Ritz qui consiste à écrire les solutions sous forme de séries. Ces analyses sont ainsi généralement complexes et aboutissent à des solutions au prix de l'utilisation de nombreuses hypothèses. Signalons néanmoins, que l'on utilise encore certaines de ces théories pour résoudre des problèmes de poutres sandwichs (*Mukhopadhyay et Sierakowski 1990*), (*Van Voorhees et Green 1992*), (*Mukhopadhyay, Sierakowski et Yu 1994*).

A partir de 1970, une nouvelle méthode d'investigation va être mise en oeuvre pour l'étude des sandwichs, avec le développement des théories de plaques stratifiées dont les premières formulations datent de la fin des années 1950. Les chercheurs vont associer étroitement l'étude des stratifiés à celles des plaques sandwichs, qui ne sont après tout que des stratifiés un peu particuliers.

Jusqu'à présent, la majorité des analyses de plaques stratifiées propose de décrire le multicouche comme un milieu homogène équivalent. Les méthodes employées pour la construction de ces théories s'appuient essentiellement sur l'introduction d'hypothèses initiales de type cinématique. Les premiers développements des stratifiées pour les plaques minces (peu sensibles au cisaillement transverse) sont dus à Ambarsumyan (1958), Lekhnitskii (1968), Reissner et Stavsky (1961), et pour les plaques plus épaisses et sandwichs, par Yang, Norris et Stavsky (1966). Les théories des stratifiés, dites classiques, sont construites à partir d'un schéma de déformation du premier degré, soit de Love-Kirchhoff (Love 1934), (Kirchhoff 1876) pour les plaques minces (Librescu 1975), (Tsai 1988), soit à partir de celles de Reissner-Mindlin (Reissner 1945), (Mindlin 1951) pour des plaques plus épaisses et les plaques sandwichs (Whitney 1972), (Berthelot 1992).

La description de Reissner-Mindlin est toutefois la plus répandue car les stratifiés présentent toujours une sensibilité au cisaillement transverse. Elle postule un champ de déplacement linéaire dans l'épaisseur. Elle induit ainsi une valeur de la contrainte de cisaillement transverse constante dans l'épaisseur du multicouche qui demande l'introduction de facteurs de correction. De nombreuses études ont été réalisées visant à améliorer cette théorie en éliminant les facteurs de correction. Il existe ainsi des analyses plus sophistiquées qui, moyennant l'introduction de nouvelles inconnues, proposent de vérifier les conditions aux limites en définissant des champs cinématiques dans l'épaisseur d'ordre trois (Lo, Christensen et Wu 1977), (Murthy 1981), (Krishna Murty 1988), d'ordre quatre ou supérieur (Librescu et Reddy 1989) ou encore sous la forme d'une répartition sinusoïdale dans l'épaisseur (Touratier 1989), (Ossadzo, Muller et Touratier 1995).

Ces théories ont l'inconvénient de supposer la composante verticale du déplacement constante dans l'épaisseur du sandwich. Les déformations transverses sont ainsi continues aux interfaces et les déformations et les contraintes au niveau des interfaces ne sont pas accessibles. Les théories de plaques équivalentes ne peuvent donc pas décrire et prédire les endommagements dans les stratifiés. Ces constatations ont motivé le développement de théories définissant les champs par couche.

Les premières théories datent des années 1970 (Nelson et Lorch 1974), (Epstein et Glockner 1977), (Macquire, Petitpas et Valentin 1977). La plupart des théories définissent des champs cinématiques par couche (Owen et Li 1987), (Rio 1990), (Di Sciuva et Icardi 1993). Elles se distinguent par le choix de la cinématique employée pour décrire le déplacement de chaque couche. Les choix sont très divers. Ainsi, Garrett et Bailey (1977) ont considéré une cinématique à $2n$ champs scalaires (en notant n le nombre de couches), pour bâtir le modèle du Shear-Lag: les deux composantes de déplacement moyen dans le plan de chaque couche. Pagano et Soni (1983) ont eux, défini une cinématique à $7n$ champs scalaires: trois composantes de déplacement moyen dans chaque couche, plus deux composantes de rotation

normale et enfin le premier et le second moment de la composante normale dans l'épaisseur de chaque couche. (Notez que la signification physique de ces deux derniers paramètres n'est pas aussi évidente que pour les cinq autres).

Le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (modèle M4) du CERAM de l'ENPC entre dans cette catégorie (Ehrlacher et Naciri 1995a). Il est bien adapté à l'étude des endommagements dans les composites et des effets de bords, puisqu'il exhibe les contraintes responsables, au niveau des interfaces entre les couches (Ehrlacher, Naciri, Chabot et Caron 1994). Il a été appliqué à l'étude de la fissuration transverse des matériaux composites (Caron 1993), à l'étude de la rupture des composites unidirectionnels (Foret 1995), et à l'étude du délaminage des multicouches (Ehrlacher, Chabot et Naciri 1994). Des analyses de composites stratifiés en dynamique rapide ont également été effectuées avec le modèle M4 (Smaoui 1996).

Le choix de la cinématique du modèle M4 a fait l'objet de plusieurs études. Le premier choix s'est porté sur une cinématique à $3n$ champs scalaires (trois composantes de déplacement moyen dans chaque couche). Puis une version simplifiée du M4, destinée uniquement à la résolution de problèmes de réponse globale a été développée avec une cinématique à $2n+1$ champs scalaires (deux composantes de déplacement moyen dans le plan dans chaque couche, plus une composante normale identique dans chaque couche). Des cinématiques plus riches sont également à l'étude. Il s'agit de cinématiques à $5n$ champs scalaires (trois composantes de déplacement moyen dans chaque couche, plus deux composantes normales de rotation) et à $7n$ champs scalaires comme pour le modèle de Pagano et Soni (1983), (Carreira 1998), (Chabot 1997). Ces deux dernières cinématiques du modèle M4 se montrent d'une très grande précision pour la description du comportement des stratifiés; notamment pour celle des effets de bord. Cependant le nombre d'inconnues augmente très rapidement avec le nombre de couches, ce qui conduit à des calculs d'une très grande complexité d'autant plus que le nombre de champs scalaires de la cinématique est élevé.

Nous proposons dans ce chapitre, deux types de modélisations de composites sandwichs.

Dans un premier temps nous développerons une théorie « classique », basée sur les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin, qui propose une nouvelle expression du coefficient de rigidité au cisaillement transverse (Sab 1995a). L'intérêt de cette modélisation est qu'elle permet de s'affranchir des facteurs de correction, sans augmenter le nombre d'inconnues cinématiques.

Dans un second temps, nous construirons des modélisations sandwichs multiparticulaires à partir du modèle M4. Ces modélisations ont l'avantage, par rapport aux modélisations classiques, d'être également applicables à des problèmes d'endommagement de plaques sandwichs. La cinématique d'un modèle sandwich multiparticulaire sera cependant particulièrement riche par rapport à une modélisation sandwich classique, au détriment sans doute du caractère opératoire du modèle. Nous montrerons cependant qu'il est possible de construire pour les sandwichs des théories multiparticulaires qui soient opératoires en considérant le sandwich comme un empilement de trois couches ($n=3$). Nous simplifierons autant que possible la cinématique des modèles multiparticulaires sandwichs en envisageant une cinématique à $3n$ champs scalaires, soit à 9 champs scalaires (3×3), puis une seconde cinématique à $2n+1$ champs scalaires, soit à 7 champs scalaires ($2 \times 3 + 1$). Nous appellerons ces modélisations, *modèles triparticulaires* (ou à trois particules), en référence au nombre de couches présentes dans la modélisation.

Position du problème

Dans ce qui suit, nous considérons une plaque sandwich constituée de 2 peaux et d'une âme (figure 1.1).

A cet objet 3D, on associe un repère orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ tel que $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2$ et tel que le plan défini par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ coïncide avec le plan moyen du sandwich.

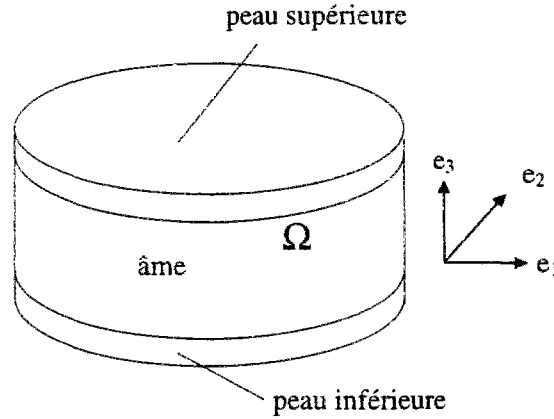


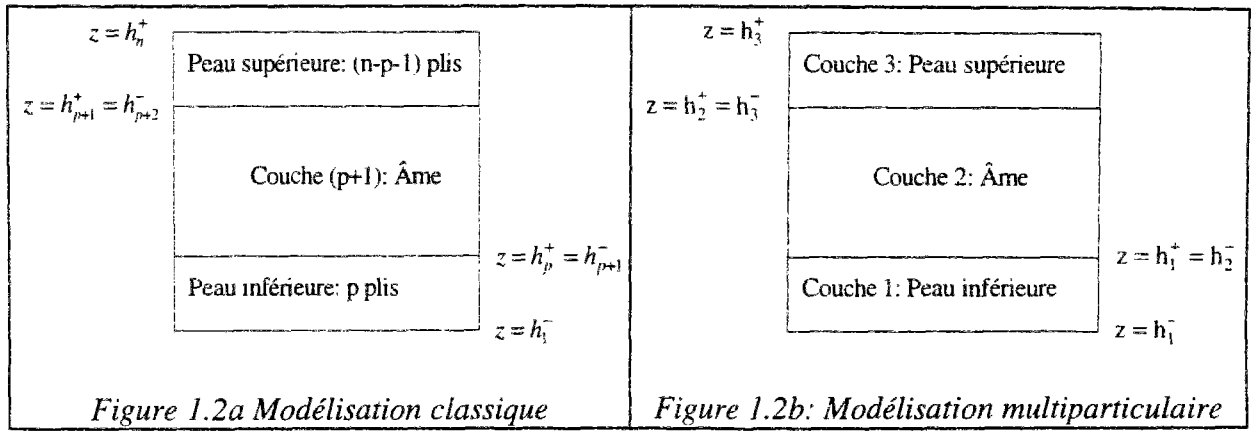
Figure 1.1: Description de l'objet sandwich 3D

La plaque sandwich 3D peut être décrite comme un cylindre ouvert Ω de l'espace \mathbb{R}^3 de base $\omega \subset \mathbb{R}^2$ et de hauteur h .

$$\Omega = \omega \times]h^-, h^+[$$

$$\text{où } h^- = -\frac{h}{2} < 0 \quad h^+ = \frac{h}{2} > 0$$

Nous noterons h_j^+ , h_j^- , et \bar{h}_j la côte supérieure, la côte inférieure, et la côte médiane de la couche j , e^j l'épaisseur de la couche j , tel que $e^j = h_j^+ - h_j^-$. L'épaisseur de l'âme sera désignée par la grandeur d . Nous supposons pour la modélisation classique, que le sandwich est constitué de n couches (p plis pour la peau inférieure numérotés de 1 à p , $(n-p-1)$ plis pour la peau supérieure, numérotés de $p+2$ à n , l'âme est la couche numérotée $p+1$), et pour les modélisations multiparticulaires, de 3 couches en considérant les peaux comme des couches homogènes (cf. figure 1.2a et 1.2b).



Figures 1.2a et 1.2b : Description du sandwich dans l'épaisseur

On introduit ensuite les notations de frontière de Ω .

Le bord de la plaque est noté $\Gamma = \gamma \times]h^-, h^+[$ avec γ la frontière de ω . Les faces inférieure et supérieure du sandwich sont notées $\Gamma^- = \omega \times \{h^-\}$ et $\Gamma^+ = \omega \times \{h^+\}$ respectivement.

Décrivons maintenant les efforts extérieurs qui s'exercent sur l'objet 3D. On distingue:

- les efforts de volume dans Ω : \underline{f}
- les efforts de surface sur Γ : \underline{T}
- les efforts de surface sur Γ^+ : \underline{T}^+
- les efforts de surface sur Γ^- : \underline{T}^-

Nous supposons que la plaque est en équilibre sous l'action de ces efforts extérieurs. Notons $\underline{\underline{\sigma}}$ le champ de contraintes du milieu 3D. Ce champ vérifie alors les équations d'équilibre suivantes:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T} & \text{sur } \Gamma \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^+ & \text{sur } \Gamma^+ \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^- & \text{sur } \Gamma^- \end{cases}$$

L'écriture du principe des puissances virtuelles nous donne de façon équivalente, en notant $PI(\underline{v}^*)$ la puissance virtuelle des efforts intérieurs et $PE(\underline{v}^*)$ la puissance virtuelle des efforts extérieurs,

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &PI(\underline{v}^*) + PE(\underline{v}^*) = 0 \\ &\text{pour tout champ de vitesses virtuelles } \underline{v}^*. \end{aligned}$$

Nous construirons des modèles de plaques sandwichs en utilisant la méthode des puissances virtuelles. Nous choisirons l'espace vectoriel des vitesses virtuelles qui nous permettront de faire travailler les efforts que l'on désire étudier. Nous écrirons l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs à partir de laquelle nous ferons apparaître naturellement les efforts intérieurs généralisés des modèles. De même, nous écrirons l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs pour exhiber les efforts extérieurs généralisés avant d'appliquer le principe des puissances virtuelles.

Nous obtiendrons ainsi les équations d'équilibre reliant les efforts de plaque et les conditions aux limites des différentes modélisations sandwichs. Le comportement sera déterminé en identifiant l'énergie élastique du milieu 3D à celui du milieu 2D.

Nous adopterons l'hypothèse de petites perturbations. La configuration actuelle sera donc confondue avec la configuration de référence. Le mouvement de chacune des particules pourra être décrit par les champs de vitesse virtuelle sur la configuration d'origine.

La pertinence des modélisations sandwichs de Sab et multiparticulaires, développées dans ce chapitre, sera évaluée au chapitre suivant par rapport à la modélisation classique de sandwich de Reissner-Mindlin.

Notations

Dans ce chapitre consacré à la présentation de différentes modélisations de plaques sandwichs, nous utiliserons un certain nombre de notations pour repérer les différentes grandeurs intervenant dans ce travail.

Les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ prendront leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, les indices latins i, j, k, l, m dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Nous noterons les différents champs intervenant dans ce travail de la façon suivante,

\underline{x} désignera un vecteur de l'espace 3D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,

$\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre 2 de l'espace 3D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,

\tilde{x} un vecteur de l'espace 2D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

$\tilde{\underline{\underline{A}}}$ un tenseur d'ordre 2 de l'espace 2D $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

Nous utiliserons les notations symboliques suivantes pour écrire les vecteurs et les tenseurs d'ordre 2 sous forme matricielle.

Soit \underline{x} un vecteur de l'espace 3D de coordonnées (x, y, z) nous noterons,

$$\{\underline{x}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{\underline{x}\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{x}\} \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \{\tilde{x}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$\{\tilde{x}\}$ étant la matrice colonne des coordonnées dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ de \tilde{x} .

Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur symétrique d'ordre 2 de l'espace 3D de coordonnées $(a_{ij})_{i,j=1,3}$ nous noterons les composantes de $\underline{\underline{A}}$ sous la forme matricielle suivante:

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad [\underline{\underline{A}}] = \begin{pmatrix} [\tilde{a}] & \{\tilde{a}_{\alpha 3}\} \\ \{\tilde{a}_{\alpha 3}\} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad [\tilde{a}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\tilde{a}_{\alpha 3}\} = \begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{Bmatrix}$$

$[\underline{\underline{A}}]$ représente ainsi la matrice des composantes de tenseur $\underline{\underline{A}}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$,

$[\tilde{a}]$ la matrice des composantes de tenseur \tilde{a} dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, \tilde{a} étant la restriction du tenseur $\underline{\underline{A}}$ dans le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$\{\tilde{a}_{\alpha 3}\}$ la matrice colonne des composantes a_{13}, a_{23} de $\underline{\underline{A}}$.

I.2 MODELISATION CLASSIQUE DE SANDWICHS

Nous proposons dans cette partie de construire une formulation de la théorie classique des stratifiés fondée sur les hypothèses cinématiques de Reissner-Mindlin que nous appellerons par la suite théorie de Sab (*Sab 1995a*), puis de déduire le modèle de sandwich à partir de cette théorie des stratifiés en effectuant les hypothèses classiques de comportement des peaux et de l'âme de la structure. Nous mettrons en évidence les différences entre la théorie présentée (Théorie de Sab) et la théorie classiquement utilisée pour l'étude des plaques stratifiées et sandwichs (Théorie de Reissner-Mindlin), elle-même basée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin mais dont la démarche de construction diffère de celle de Sab (*cf. Berthelot 1992*).

I.2.1 Modélisation classique des multicouches (modèle de Sab)

Pour bâtir cette théorie, considérons le champ de vitesse virtuelle de Reissner-Mindlin, à cinq champs scalaires, continu sur Ω ,

$$(1.3) \quad \underline{v}^*(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{V}^*(x, y) + z\tilde{\varphi}^*(x, y) \\ W^*(x, y) \end{cases}$$

où $\tilde{V}^* + z\tilde{\varphi}^*$ sont les deux composantes de \underline{v}^* dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, telles que,

$$\tilde{V}^*(x, y) + z\tilde{\varphi}^*(x, y) = \begin{cases} V_1^*(x, y) + z\varphi_1^*(x, y) \\ V_2^*(x, y) + z\varphi_2^*(x, y) \end{cases}$$

et W^* est la composante normale au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

En hypothèse de petites perturbations, le tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$ associé au champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* (1.3) sur le domaine Ω , que nous noterons $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ par la suite, peut s'écrire sous une forme linéaire en z ,

$$(1.4) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^*(x, y, z) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0^*(x, y) + z\underline{\underline{\varepsilon}}_1^*(x, y)$$

où,

$$(1.5) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_0^* \end{bmatrix} & \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{V}W^* + \tilde{\varphi}^*) \right\} \\ \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{V}W^* + \tilde{\varphi}^*) \right\} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1.6) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_1^* = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^* \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_0^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1^*}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^*}{\partial y} + \frac{\partial V_2^*}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^*}{\partial y} + \frac{\partial V_2^*}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_2^*}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} \right) & \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \{\tilde{V}W^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W^*}{\partial x} \\ \frac{\partial W^*}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Pour déterminer les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle classique de sandwich, nous allons écrire le principe des puissances virtuelles pour ce champ de vitesse virtuelle à 5 composantes scalaires, en exprimant dans un premier temps la puissance virtuelle des efforts intérieurs, puis la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

Nous déduirons par la suite, le comportement du modèle de plaque sandwich que nous présentons, en identifiant l'énergie en contraintes 3D avec l'énergie de plaque.

1.2.1.1 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$ de la plaque stratifiée, pour le champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* , est par définition l'opposé de l'intégrale sur Ω du produit doublement contracté entre les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et les taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$.

$$(1.7) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) d\Omega$$

Soit, en utilisant la relation (1.4) et en distinguant les intégrales dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ et dans l'épaisseur,

$$(1.8) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\omega} \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{\underline{\sigma}} \cdot dz \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}_0^* d\omega - \int_{\omega} \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{\underline{\sigma}} \cdot z dz \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}_1^* d\omega$$

Dans cette dernière relation, faisons apparaître les composantes des tenseurs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$, dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, et orthogonaux au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ en introduisant la notation suivante pour les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, similaire à celles du tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$,

$$(1.9) \quad [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} [\tilde{\underline{\sigma}}] & \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} \\ \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

où

$$[\tilde{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \{\tilde{\underline{\sigma}}_{\alpha 3}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

En décomposant la relation (1.8) à l'aide des expressions des champs de déformations (1.5) et (1.6) et des contraintes (1.9), on obtient une nouvelle écriture de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$:

$$(1.10) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\omega} \left[\left(\int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma} dz \right) : \tilde{\varepsilon}_0^* + \left(\int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3} dz \right) \cdot (\tilde{\nabla} W^* + \tilde{\varphi}^*) \right] d\omega - \int_{\omega} \left(\int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma} z dz \right) : \tilde{\varepsilon}_1^* d\omega$$

A partir de cette relation, on fait apparaître les efforts classiques de plaque, en introduisant les notations suivantes,

$$(1.11) \quad \tilde{N}(x, y) = \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}(x, y, z) dz$$

$$(1.12) \quad \tilde{Q}(x, y) = \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, z) dz$$

$$(1.13) \quad \tilde{M}(x, y) = \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\sigma}(x, y, z) \cdot z dz$$

où \tilde{N} est le tenseur des résultantes en membrane,
 \tilde{Q} le vecteur des résultantes en cisaillement,
 \tilde{M} le tenseur des moments de flexion-torsion.

Ces efforts de plaque sont définis par unité de largeur.

La relation (1.10) devient,

$$(1.14) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\omega} \left[\tilde{N} : \tilde{\varepsilon}_0^* + \tilde{Q} \cdot (\tilde{\nabla} W^* + \tilde{\varphi}^*) + \tilde{M} : \tilde{\varepsilon}_1^* \right] d\omega$$

Intégrons par parties la relation précédente, pour faire apparaître une expression de $PI(\underline{v}^*)$ qui ne dépend que des composantes du champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* ,

$$(1.15) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & \int_{\omega} \left[\operatorname{div} \tilde{N} \cdot \tilde{V}^* + \operatorname{div} \tilde{Q} \cdot W^* - \tilde{Q} \cdot \tilde{\varphi}^* + \operatorname{div} \tilde{M} \cdot \tilde{\varphi}^* \right] d\omega \\ & - \int_{\gamma} \left[\tilde{N} \cdot \tilde{V}^* \cdot \underline{n} + \tilde{Q} \cdot W^* \cdot \underline{n} + \tilde{M} \cdot \tilde{\varphi}^* \cdot \underline{n} \right] d\gamma \end{aligned}$$

où \underline{n} désigne le vecteur normal au bord γ , tangent à ω .

Nous avons ainsi calculé une expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs en fonction uniquement des composantes du champ de vitesse virtuelle et des efforts intérieurs du modèle, sur ω et son bord γ .

Ecrivons à présent la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

1.2.1.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

La puissance des efforts extérieurs $PE(\underline{v}^*)$ s'écrit classiquement comme la somme de deux termes d'intégrales des efforts de volume et de surface.

$$(1.16) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma^+} \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^* d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^-} \underline{T}^- \cdot \underline{v}^* d\Gamma^-$$

Soit, en distinguant les intégrations dans le plan ω et dans l'épaisseur,

$$(1.17) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left\{ \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{f} \cdot \underline{v}^* dz \right) + \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^*(x, y, h^+) + \underline{T}^- \cdot \underline{v}^*(x, y, h^-) \right\} d\omega + \int_{\gamma} \left(\int_{h^-}^{h^+} \underline{T} \cdot \underline{v}^* dz \right) d\gamma$$

Posons,

$$(1.18) \quad \underline{F} \text{ défini par} \quad \{\underline{F}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{F} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{f} dz + \tilde{T}^+ + \tilde{T}^- \\ \int_{h^-}^{h^+} f_3 dz + T_3^+ + T_3^- \end{Bmatrix}$$

$$(1.19) \quad \tilde{C} \text{ défini par} \quad \{\tilde{C}\} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{f} \cdot z dz + \tilde{T}^+ h^+ + \tilde{T}^- h^- \end{Bmatrix}$$

$$(1.20) \quad \underline{R} \text{ défini par} \quad \{\underline{R}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{R} \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{T} dz \\ \int_{h^-}^{h^+} T_3 dz \end{Bmatrix}$$

$$(1.21) \quad \tilde{H} \text{ défini par} \quad \{\tilde{H}\} = \begin{Bmatrix} \int_{h^-}^{h^+} \tilde{T} \cdot z dz \end{Bmatrix}$$

\underline{F} représente la densité surfacique des efforts extérieurs sur le domaine ω ,

\tilde{C} la densité surfacique des moments extérieurs sur le domaine ω ,

\underline{R} la densité linéique des efforts sur le bord γ du domaine ω ,

\tilde{H} la densité linéique des moments extérieurs sur le bord γ du domaine ω .

La relation (1.17) devient ainsi, en introduisant les relations (1.18) à (1.21),

$$(1.22) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} (\tilde{F} \cdot \tilde{V}^* + F_3 \cdot W^* + \tilde{C} \cdot \tilde{\varphi}^*) d\omega + \int_{\gamma} (\tilde{R} \cdot \tilde{V}^* + R_3 \cdot W^* + \tilde{H} \cdot \tilde{\varphi}^*) d\gamma$$

Cette relation s'exprime uniquement en fonction des composantes du champ de vitesses virtuelles et des efforts extérieurs.

Appliquons maintenant le principe des puissances virtuelles pour relier les efforts intérieurs de la plaque stratifiée, aux efforts extérieurs.

1.2.1.3 Application du principe des puissances virtuelles: Equations d'équilibre et conditions aux limites du modèle classique

L'exploitation de la relation (1.2) valable pour tout champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* nous permet d'écrire les équations d'équilibre qui régissent les efforts intérieurs généralisés $\tilde{\underline{N}}$, $\tilde{\underline{Q}}$ et $\tilde{\underline{M}}$.

En choisissant $\tilde{\varphi}^* = W^* = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\underline{N}} + \tilde{\underline{F}} &= 0 & \text{sur } \omega \\ \tilde{\underline{N}} \cdot \underline{n} &= \tilde{\underline{R}} & \text{sur } \gamma \end{aligned}$$

En choisissant $\tilde{V}^* = \tilde{\varphi}^* = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\underline{Q}} + \underline{F}_3 &= 0 & \text{sur } \omega \\ \tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{n} &= R_3 & \text{sur } \gamma \end{aligned}$$

En choisissant $\tilde{V}^* = W^* = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\underline{M}} + \tilde{\underline{C}} - \tilde{\underline{Q}} &= 0 & \text{sur } \omega \\ \tilde{\underline{M}} \cdot \underline{n} &= \tilde{\underline{H}} & \text{sur } \gamma \end{aligned}$$

En résumé les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle classique de plaque stratifiée sont,

$$(1.23) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\underline{N}} + \tilde{\underline{F}} = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\underline{Q}} + \underline{F}_3 = 0 \\ \operatorname{div} \tilde{\underline{M}} + \tilde{\underline{C}} - \tilde{\underline{Q}} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \omega$$

$$(1.24) \quad \begin{cases} \tilde{\underline{N}} \cdot \underline{n} = \tilde{\underline{R}} \\ \tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{n} = R_3 \\ \tilde{\underline{M}} \cdot \underline{n} = \tilde{\underline{H}} \end{cases} \quad \text{sur } \gamma$$

Les efforts intérieurs généralisés du modèle sont donc les efforts de plaque $\left(\tilde{\tilde{N}}, \tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{Q}} \right)$ que nous noterons dans la suite $\{\underline{\Sigma}\}$. Nous noterons les composantes de $\{\underline{\Sigma}\}$ sous la forme matricielle suivante:

$$(1.25) \quad \{\underline{\Sigma}\} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix}$$

Remarque: Dans la notation de $\{\underline{\Sigma}\}$, nous utilisons ce qui est communément appelé la notation d'ingénieur (*Ehrlacher et Naciri 1995b*). Cette notation utilise les propriétés de symétrie des tenseurs $\tilde{\tilde{N}}$ et $\tilde{\tilde{M}}$.

Les taux de déformations généralisées associés aux efforts généralisés apparaissent comme les opposés des cofacteurs des efforts généralisés dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs (1.14). En hypothèse de petites perturbations, les déformations généralisées sont « naturellement » associées à ces taux de déformations. Nous choisissons d'écrire les déplacements sous la forme suivante,

$$(1.26) \quad \underline{u}(x, y, z) = \tilde{u}_p(x, y, z) + w(x, y) \cdot \underline{e}_3$$

$$\text{avec} \quad \tilde{u}_p(x, y, z) = \tilde{u}(x, y) + z \tilde{\psi}(x, y)$$

$$\text{où} \quad \left\{ \tilde{u}(x, y) \right\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \right\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

u_1, u_2 représentent les composantes membranaires du déplacement $\underline{u}(x, y, z)$,

w la composante transversale de $\underline{u}(x, y, z)$,

ψ_1, ψ_2 les composantes du vecteur des rotations de section dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

Les déformations généralisées sont donc,

$\tilde{\tilde{\epsilon}}_0(\underline{u})$ le tenseur des déformations membranaires,

$\tilde{\tilde{\epsilon}}_1(\underline{u})$ le tenseur des courbures en flexion et en torsion,

$\tilde{\tilde{V}}_w + \tilde{\tilde{\psi}}$ le vecteur des déformations en cisaillement transverse.

dont les composantes sont,

$$\left[\tilde{\tilde{\epsilon}}_0(\underline{u}) \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\left[\tilde{\tilde{\epsilon}}_1(\underline{u}) \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad \left\{ \tilde{\tilde{V}}_w + \tilde{\tilde{\psi}} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{Bmatrix}$$

Nous utiliserons comme pour les efforts généralisés la notation d'ingénieur $\{\underline{E}\}$ suivante pour désigner l'ensemble des déformations généralisées,

$$(1.27) \quad \{\underline{E}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{Bmatrix}$$

Nous venons d'identifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle classique qui relie les efforts intérieurs généralisés aux efforts extérieurs généralisés. Déterminons à présent son comportement. Nous postulons pour cela l'existence d'un tenseur des souplesses d'ordre 4 que nous noterons sous sa forme matricielle en notation d'ingénieur $\underline{\underline{\Lambda}}$ qui relie les efforts généralisés $\{\underline{\Sigma}\}$ aux déformations généralisées $\{\underline{E}\}$ par la relation:

$$\{\underline{E}\} = \underline{\underline{\Lambda}} \{\underline{\Sigma}\}$$

I.2.1.4 Identification du comportement

Pour identifier la matrice de comportement $\underline{\underline{\Lambda}}$ de la plaque multicouche, la démarche employée par Sab consiste dans un premier temps à considérer le problème 3D de la plaque multicouche (1.1) pour laquelle on recherche une famille de chargements extérieurs du milieu tridimensionnel notée $(\underline{f}^d, \underline{T}^d, \underline{T}^{+d}, \underline{T}^{-d})$ qui engendre un champ solution 3D $\underline{\sigma}^{sol}$, et qui génère un champ d'efforts intérieurs généralisés $\underline{\Sigma}^{sol} = (\tilde{N}, \tilde{M}, \tilde{Q})^{sol}$ uniforme dans la plaque. Puis en identifiant l'énergie élastique en contraintes 3D à celle du milieu 2D, on détermine le tenseur des souplesses généralisées $\underline{\underline{\Lambda}}$, tel que,

$$(1.28) \quad W_c(\underline{\sigma}^{sol}) = \int_{\omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^{sol} : \underline{\underline{S}}(x, y, z) : \underline{\sigma}^{sol} d\omega dz \approx \int_{\omega} \frac{1}{2} \underline{\Sigma}^{sol} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\Sigma}^{sol} d\omega$$

avec $\underline{\underline{S}}(x, y, z)$ tenseur des souplesses du milieu 3D

On considère le chargement extérieur $(\underline{f}^d, \underline{T}^d, \underline{T}^{+d}, \underline{T}^{-d})$ suivant, qui vérifie,

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \underline{f}^d &= 0 \\ \underline{T}^+ + \underline{T}^- &= 0 \\ \underline{T}^+ &\text{ est uniforme en } x \text{ et } y \\ \underline{T}^+ \cdot \underline{e}_3 &= 0 \\ \underline{T}^d &\text{ quelconque,} \end{aligned}$$

On cherche $\underline{\sigma}^{sol}$ sous la forme suivante,

$$\underline{\sigma}^{sol} = \underline{\sigma}^{sol}(z)$$

Sab (1995a) a montré que cette famille de chargement était suffisamment riche pour engendrer tous les champs $\underline{\Sigma}^{sol}$ uniformes possibles. Elle permet ainsi d'identifier complètement le tenseur des souplesses généralisées $\underline{\underline{\Lambda}}$.

$$(1.30) \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} \end{bmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{P}} \end{bmatrix}$$

ou de façon équivalente, la matrice des raideurs généralisées $\underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$ vérifiant (1.28) est,

$$(1.31) \quad \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} & 0 \\ \underline{\underline{B}} & \underline{\underline{D}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{P}}^{-1} \end{bmatrix}$$

où $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{P}}^{-1}$ représentent respectivement, le tenseur des rigidités membranaires, le tenseur des rigidités en flexion et torsion, le tenseur des couplages membrane-flexion-torsion et le tenseur des rigidités en cisaillement transverse.

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{B}}$ s'expriment en fonction du tenseur des rigidités réduites $\underline{\underline{Q}}^j$ de chaque couche ($j = 1, n$), et $\underline{\underline{P}}^{-1}$ en fonction des composantes du tenseur des rigidités complètes C_{44}^j , C_{45}^j , et C_{55}^j dans les axes d'orthotropie de la structure.

Rappelons que les rigidités réduites $\underline{\underline{Q}}$ s'expriment en fonction des constantes de rigidités complètes. Si $\underline{\underline{S}} = (S_{ij})_{i,j=1,6}$ désigne la matrice des souplesses et $\underline{\underline{C}} = (C_{ij})_{i,j=1,6}$ la matrice des raideurs telle que $\underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{S}}$, alors la matrice des rigidités réduites $\underline{\underline{Q}}$ a pour coefficients,

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad \forall i, j = 1, 2, 6$$

Nous avons les relations suivantes pour $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{P}}$,

$$(1.32) \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^n (h_j^+ - h_{j-1}^+) \cdot \underline{\underline{Q}}^j = \sum_{j=1}^n \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j$$

$$(1.33) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^j$$

$$(1.34) \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^j$$

$$(1.35) \quad [\underline{\underline{P}}] = \sum_{j=1}^n \frac{h_j^+ - h_{j-1}^+}{(h^+ - h^-)^2} \begin{bmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{bmatrix}^{-1}$$

La démarche de Sab permet de trouver une nouvelle formulation de la théorie des plaques multicouches de Reissner-Mindlin, avec une modification de l'expression de la matrice de rigidité en cisaillement, que l'on note pour cette théorie P^{-1} .

On obtient les mêmes efforts généralisés, les mêmes déformations généralisées et le même équilibre généralisé que pour le modèle classique des multicouches de Reissner-Mindlin dont la formulation classique est présentée par exemple dans Berthelot (1992). Seule la rigidité en cisaillement présente une expression différente, notée $[\underline{\underline{F}}]$,

$$(1.36) \quad [\underline{\underline{F}}] = k_c \sum_{j=1}^n (h_j^+ - h_{j-1}^+) \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix} = k_c \sum_{j=1}^n e^j \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix}$$

où k_c est un facteur de correction dont la valeur dépend à la fois de l'approche mise en oeuvre pour obtenir la théorie classique des stratifiés de Reissner-Mindlin (équilibre des contraintes 3D, conservation de l'énergie élastique de déformation) et du problème considéré (flexion pure, flexion cylindrique,...). En général, on considère pour les plaques stratifiées, des valeurs du coefficient k_c déterminées dans le cas de plaques constituées d'une couche de matériau homogène: 1, $\frac{2}{3}$, ou $\frac{5}{6}$.

Remarque: Pour une plaque homogène d'épaisseur h , constituée d'un matériau orthotrope, et de constantes de rigidités complètes C_{44} , et C_{55} , on montre que $[\underline{\underline{P}}^{-1}]$ à la même expression que $[\underline{\underline{F}}]$ ($(k_c = 1)$),

$$[\underline{\underline{P}}^{-1}] = h \begin{pmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{pmatrix} = [\underline{\underline{F}}]$$

Dans ce cas, la théorie classique de Sab et de Reissner-Mindlin sont identiques.

La théorie sandwich issue de la théorie classique des stratifiés de Reissner-Mindlin fait également intervenir un facteur de correction dans l'expression de la raideur en cisaillement $[F]$. Cependant la valeur de k_c est généralement prise égale à 1. Celle-ci constitue en effet une excellente approximation de la description dans l'épaisseur du sandwich du cisaillement transverse, qui est essentiellement repris par une seule couche, plus épaisse que les autres: l'âme.

Dans la suite, nous poserons $k_c = 1$.

I.2.2 Application aux sandwiches

Les plaques sandwiches sont des stratifiés particuliers pour lesquelles les peaux sont généralement constituées de plusieurs couches d'un matériau à fortes caractéristiques mécaniques, dont le rôle est de reprendre les efforts de traction et de compression, et l'âme d'une seule couche d'un matériau homogène orthotrope à faibles caractéristiques mécaniques dont le rôle est de maintenir l'écartement des peaux et de reprendre les efforts de cisaillement. Ces différences de propriétés physiques et mécaniques entre les peaux et l'âme vont nous permettre de faire quelques simplifications sur les relations de comportement (1.32) à (1.35). On suppose pour cela que la peau inférieure du sandwich est constituée d'un empilement de p couches numérotées de 1 à p et la peau supérieure d'un empilement de $(n-p-1)$ couches, numérotées de $p+2$ à n . L'âme du sandwich est une couche homogène orthotrope d'épaisseur d numérotée $p+1$ dont les grandeurs seront repérées dans ce qui suit, par l'indice $p+1$.

Introduisons à présent les hypothèses classiques du comportement pour les peaux et l'âme du sandwich, qui permettent d'exprimer très simplement les différentes matrices de rigidité. En premier lieu, on suppose que le coeur, dont le rôle mécanique est essentiellement de reprendre les efforts de cisaillement transverse du sandwich, a un tenseur des rigidités membranaires dont les composantes sont négligeables par rapport à celles des tenseurs de rigidités membranaires des peaux, relativement à leurs épaisseurs, soit,

$$dQ_{lm}^{p+1} \ll \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^n Q_{lm}^j \cdot e^j \quad l, m = 1, 2, 6$$

Les expressions (1.32) à (1.34) des tenseurs de rigidité $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$, et $\underline{\underline{D}}$ s'écrivent avec cette hypothèse,

$$(1.37) \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^n \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j \approx \sum_{j=1}^p \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j + \sum_{j=p+2}^n \underline{\underline{Q}}^j \cdot e^j$$

$$(1.38) \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

$$(1.39) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j + \frac{1}{3} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

De plus, si le sandwich présente un plan de symétrie, les tenseurs des rigidités des peaux obéissent aux relations suivantes,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^p \underline{\underline{Q}}^j . e^j &= \sum_{j=p+2}^n \underline{\underline{Q}}^j . e^j \\ \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j &= - \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{\underline{Q}}^j \\ \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j &= \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j\end{aligned}$$

d'où,

$$(1.40) \quad \underline{\underline{A}} = 2 \sum_{j=1}^p \underline{\underline{Q}}^j . e^j$$

$$(1.41) \quad \underline{\underline{B}} = 0$$

$$(1.42) \quad \underline{\underline{D}} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{\underline{Q}}^j$$

Réécrivons à présent l'expression de $\underline{\underline{P}}$ (1.35), pour les sandwichs en fonction des constantes de souplesses écrites pour une couche de matériau hors de ses axes d'orthotropie,

$$(1.43) \quad [\underline{\underline{P}}] = \sum_{j=1}^p \frac{e^j}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{bmatrix} + \frac{d}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^{p+1} & S_{45}^{p+1} \\ S_{45}^{p+1} & S_{55}^{p+1} \end{bmatrix} + \sum_{j=p+2}^n \frac{e^j}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^j & S_{45}^j \\ S_{45}^j & S_{55}^j \end{bmatrix}$$

avec, $\forall j = 1, n$,

$$S_{44}^j = \frac{1}{G_{23}^j} \cos^2 \theta_j + \frac{1}{G_{13}^j} \sin^2 \theta_j$$

$$S_{45}^j = \left(\frac{1}{G_{13}^j} - \frac{1}{G_{23}^j} \right) \cos \theta_j \sin \theta_j$$

$$S_{55}^j = \frac{1}{G_{13}^j} \cos^2 \theta_j + \frac{1}{G_{23}^j} \sin^2 \theta_j$$

où θ_j est l'angle que fait le repère local d'orthotropie de la couche j avec le repère de la structure $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Pour un sandwich, les modules de cisaillement des couches constituant les peaux sont généralement plus élevés que ceux de l'âme, tandis que les épaisseurs des couches des peaux sont beaucoup plus faibles. On peut donc faire les hypothèses suivantes,

$$(1.44) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^n e^j S_{lm}^j \ll d S_{lm}^{p+1} \quad \forall l, m = 4, 5$$

qui conduisent à une expression de P ne faisant intervenir que les caractéristiques de l'âme et l'épaisseur totale du sandwich,

$$(1.45) \quad [\underline{P}] = \frac{d}{h^2} \begin{bmatrix} S_{44}^{p+1} & S_{45}^{p+1} \\ S_{45}^{p+1} & S_{55}^{p+1} \end{bmatrix}$$

soit,

$$(1.46) \quad [\underline{P}^{-1}] = \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} C_{44}^{p+1} & C_{45}^{p+1} \\ C_{45}^{p+1} & C_{55}^{p+1} \end{bmatrix}$$

où, C_{44}^{p+1} , C_{45}^{p+1} , et C_{55}^{p+1} sont les constantes de rigidité complète de l'âme,

$$(1.47) \quad C_{44}^{p+1} = G_{23}^{p+1} \cos^2 \theta_{p+1} + G_{13}^{p+1} \sin^2 \theta_{p+1}$$

$$(1.48) \quad C_{45}^{p+1} = (G_{13}^{p+1} - G_{23}^{p+1}) \cos \theta_{p+1} \sin \theta_{p+1}$$

$$(1.49) \quad C_{55}^{p+1} = G_{13}^{p+1} \cos^2 \theta_{p+1} + G_{23}^{p+1} \sin^2 \theta_{p+1}$$

Lorsque $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie de l'âme, les relations (1.47) à (1.49) se simplifient,

$$(1.50) \quad C_{44}^{p+1} = G_{23}^{p+1}$$

$$(1.51) \quad C_{45}^{p+1} = 0$$

$$(1.52) \quad C_{55}^{p+1} = G_{13}^{p+1}$$

La relation (1.46) s'écrit dans ce cas,

$$(1.53) \quad [\underline{P}^{-1}] = \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} G_{23}^{p+1} & 0 \\ 0 & G_{13}^{p+1} \end{bmatrix}$$

Dans le cas de la théorie classique des plaques multicouches de Reissner-Mindlin (*Berthelot 1992*), la rigidité en cisaillement s'écrit,

$$(1.54) \quad [\underline{F}] = \sum_{j=1}^p e^j \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} C_{44}^{p+1} & C_{45}^{p+1} \\ C_{45}^{p+1} & C_{55}^{p+1} \end{pmatrix} + \sum_{j=p+2}^n e^j \begin{pmatrix} C_{44}^j & C_{45}^j \\ C_{45}^j & C_{55}^j \end{pmatrix}$$

Pour cette théorie, on suppose que la rigidité en cisaillement transverse d'un sandwich ne s'exprime qu'en fonction des grandeurs de l'âme, en posant,

$$(1.55) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^n e^j C_{lm}^j \ll d C_{lm}^{p+1} \quad \forall l, m = 4, 5$$

La matrice des rigidités en cisaillement F s'écrit avec cette hypothèse (1.55), en supposant que $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie,

$$(1.56) \quad [\underline{F}] = d \begin{bmatrix} G_{23}^{p+1} & 0 \\ 0 & G_{13}^{p+1} \end{bmatrix}$$

Les relations (1.53) et (1.56) montrent donc que les deux formulations de la théorie classique de sandwich diffèrent par l'écriture du coefficient de rigidité en cisaillement.

Remarque: L'hypothèse (1.55) n'est pas évidente a priori. Considérons par exemple un sandwich de trois couches, dont les peaux ne sont constituées que d'un seul pli homogène. Alors, nous avons les relations suivantes,

$$\begin{aligned} G_{\alpha 3}^j &> G_{\alpha 3}^2 & j = 1, 3 \\ e^j &< d \end{aligned}$$

A titre d'illustration, on suppose que les peaux sont identiques, d'épaisseur e et constituées d'un matériau carbone/époxyde de constante de raideur en cisaillement $G_{13}^{1,3} = 5000$ MPA et d'une âme en nid d'abeille aluminium de raideur $G_{13}^2 = 350$ MPA. La base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie pour les peaux et l'âme. Supposons $d = 10e$. Dans ce cas, la relation (1.55) n'est pas vérifiée (alors que la relation 1.44 l'est).

Pour finir, faisons une synthèse des caractéristiques et des grandeurs du modèle de sandwich issu de la théorie de Sab.

Les efforts intérieurs généralisés du modèle sont les efforts de plaque classique,

$$\{\underline{\Sigma}\} = \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix}$$

Les déformations généralisées associées sont,

$$\{\underline{E}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \end{Bmatrix}$$

Les relations entre les efforts intérieurs du milieu 3D et les efforts intérieurs généralisés du modèle sont donnés par (1.11) (1.12) et (1.13). Les relations entre les efforts extérieurs du milieu 3D et les efforts extérieurs généralisés du modèle sont donnés par (1.18), (1.19), (1.20) et (1.21). L'équilibre généralisé est donné par les relations (1.23) et (1.24).

La loi de comportement s'écrit pour une plaque sandwich,

$$\{\underline{\Sigma}\} = \begin{pmatrix} [\underline{A}] & [\underline{B}] & 0 \\ [\underline{B}] & [\underline{D}] & 0 \\ 0 & 0 & [\underline{P}^{-1}] \end{pmatrix} \{\underline{E}\}$$

avec,

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sum_{j=1}^p \underline{Q}^j \cdot e^j + \sum_{j=p+2}^n \underline{Q}^j \cdot e^j \\ \underline{B} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{Q}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^2 - (h_{j-1}^+)^2 \right) \underline{Q}^j \\ \underline{D} &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{Q}^j + \frac{1}{3} \sum_{j=p+2}^n \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{Q}^j \\ [\underline{P}^{-1}] &= \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} C_{44}^{p+1} & C_{45}^{p+1} \\ C_{45}^{p+1} & C_{55}^{p+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et dans le cas particulier où $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ est un repère d'orthotropie de l'âme,

$$[\underline{P}^{-1}] = \frac{h^2}{d} \begin{bmatrix} G_{23}^{p+1} & 0 \\ 0 & G_{13}^{p+1} \end{bmatrix}$$

Si le sandwich présente une symétrie par rapport à son plan médian,

$$\underline{A} = 2 \sum_{j=1}^{n_p} \underline{Q}^j \cdot e^j \quad \underline{B} = 0 \quad \underline{D} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n_p} \left((h_j^+)^3 - (h_{j-1}^+)^3 \right) \underline{Q}^j$$

I.2.3 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie la théorie de plaque sandwich issue de la théorie des multicouches de Sab. Nous avons montré qu'elle diffèrait de la théorie classique des sandwichs par l'écriture de la matrice de rigidité en cisaillement.

Pour la théorie de Sab, cette matrice notée $[\underline{P}^{-1}]$ ne nécessite pas l'introduction de facteurs de correction. L'expression de $[\underline{P}^{-1}]$ a donc l'avantage sur la théorie classique de Reissner d'être unique et indépendant du problème considéré. Nous montrerons au chapitre suivant, la pertinence de la théorie sandwich de Sab vis à vis de la théorie sandwich classique de Reissner-Mindlin, pour des problèmes de dimensionnement en raideur de plaque sandwich.

I.3 MODELES SANDWICHS MULTIPARTICULAIRES

Dans cette partie, on considère que l'objet 3D Ω peut-être discrétisé en trois sous-domaines 3D ouverts Ω_j représentant chacun la peau inférieure, l'âme, et la peau supérieure ($j = \{1,2,3\}$), contrairement à la théorie classique où la discrétisation était également effectuée dans les peaux.

Nous choisissons de définir un champ de vitesses virtuelles \underline{v}^{j*} par couche, continu dans l'épaisseur de chacune des couches ($j = \{1,2,3\}$).

Le choix du champ de vitesses virtuelles \underline{v}^{j*} nous permettra de construire une modélisation à trois particules (ou triparticulaire) à $3n$ champs scalaires (n est le nombre de couches), que nous appellerons *modèle triparticulaire complet*. Nous montrerons que ce modèle présente un caractère opératoire limité. Nous proposerons donc une modélisation triparticulaire plus simple à $2n+1$ champs scalaires que nous appellerons *modèle triparticulaire simplifié*.

I.3.1 Le modèle triparticulaire complet

Intéressons-nous en premier lieu à la détermination des équations d'équilibre et de la loi de comportement du modèle triparticulaire complet.

Nous choisissons de considérer les champs de vitesses virtuelles indépendants de z par morceaux. L'espace des mouvements virtuels \underline{v}^* s'écrit sous la forme,

$$(1.57) \quad \underline{v}^*(x, y, z) = \left\{ \underline{v}^{j*}(x, y) \text{ sur } \Omega_j, j = 1,2,3 \right\}, \quad \Omega_j = \omega \times]h_j^+ - h_j^-[$$

tel que,

$$(1.58) \quad \underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^{j*}(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1,2,3\}$$

où \tilde{V}^{j*} désigne les deux composantes de \underline{v}^* dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$$\tilde{V}^{j*}(x, y) = \begin{cases} V_1^{j*}(x, y) \\ V_2^{j*}(x, y) \end{cases}$$

W^{j*} est la composante normale au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

On choisit donc de développer un modèle à partir d'un champ de vitesse virtuelle à 9 champs scalaires (3 champs \times 3 couches).

Le tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$ associés au champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* , est l'ensemble des tenseurs des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^{j*}(\underline{v}^*)$ définis sur les sous-domaines ouverts Ω_j .

$$(1.59) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) = \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}}^{j*}(\underline{v}^*) \text{ sur } \Omega_j, j = 1, 2, 3 \right\}$$

tel que,

$$(1.60) \quad [\underline{\underline{\varepsilon}}^{j*}] = \begin{pmatrix} [\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0^{j*}] & \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\nabla} W^{j*} \right\} \\ \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\nabla} W^{j*} \right\} & 0 \end{pmatrix}$$

avec,

$$[\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}_0^{j*}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1^{j*}}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^{j*}}{\partial y} + \frac{\partial V_2^{j*}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1^{j*}}{\partial y} + \frac{\partial V_2^{j*}}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_2^{j*}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \tilde{\nabla} W^{j*} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W^{j*}}{\partial x} \\ \frac{\partial W^{j*}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ecrivons comme dans la partie précédente les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle multiparticulaire en exprimant d'abord la puissance virtuelle des efforts intérieurs puis celle des efforts extérieurs.

1.3.1.1 Ecriture des équations d'équilibre et des conditions aux limites

1.3.1.1a Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$ s'écrit (au sens des distributions),

$$(1.61) \quad PI(\underline{v}^*) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*) d\Omega$$

Réécrivons la puissance virtuelle des efforts intérieurs en décomposant le domaine Ω en sous-domaines Ω_j ($j = \{1, 2, 3\}$).

Les champs de vitesse virtuelle \underline{v}^{j*} n'étant définis que sur les ouverts Ω_j , le champ de vitesses virtuelles \underline{v}^* est discontinu entre les couches au niveau des interfaces. Par conséquent,

les champs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, comme les champs des taux de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^*)$, associés au champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* sont discontinus entre les couches. Pour prendre en compte ces discontinuités dans $PI(\underline{v}^*)$, on introduit des sauts de discontinuités dans l'expression (1.61). On obtient ainsi,

$$(1.62) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_j} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}^{j*}) d\Omega_j \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \underline{\underline{\sigma}}(x, y, h_j^+) \cdot \underline{e}_3 (\underline{v}^{j+1*}(x, y) - \underline{v}^{j*}(x, y)) d\omega \end{aligned}$$

Comme dans la première partie, introduisons la notation suivante pour le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$,

$$(1.63) \quad [\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)] = \begin{pmatrix} [\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}] & \{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{\alpha 3}\} \\ \{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{\alpha 3}\} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad [\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \{\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}_{\alpha 3}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{13}^j \\ \sigma_{23}^j \end{pmatrix}$$

On obtient une nouvelle écriture de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $PI(\underline{v}^*)$,

$$(1.64) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \int_{h_j^-}^{h_j^+} (\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}^{j*} + \underline{\tilde{\sigma}}_{\alpha 3} : \underline{\tilde{W}}^{j*}) dz d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\underline{\tilde{\sigma}}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \cdot (\underline{\tilde{V}}^{j+1*}(x, y) - \underline{\tilde{V}}^{j*}(x, y)) \right. \\ & \left. + \sigma_{33}(x, y, h_j^+) \cdot (W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y)) \right) d\omega \end{aligned}$$

Pour identifier les efforts intérieurs du modèle triparticulaire complet, introduisons les notations suivantes,

$$(1.65) \quad \underline{\underline{\tilde{N}}}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(x, y, z) dz \quad \forall j = 1, n \quad .$$

$$(1.66) \quad \underline{\tilde{Q}}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \underline{\tilde{\sigma}}_{\alpha 3}(x, y, z) dz \quad \forall j = 1, n$$

$$(1.67) \quad \underline{\tilde{\tau}}^{j, j+1}(x, y) = \underline{\tilde{\sigma}}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \quad \forall j = 1, n-1$$

$$(1.68) \quad v^{j, j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) \quad \forall j = 1, n-1$$

On met en évidence le tenseur des efforts intérieurs résultants en membrane de la couche j , \tilde{N}^j , ainsi que le vecteur des efforts intérieurs résultants de cisaillement transverse de la couche j , \tilde{Q}^j . Ces efforts sont définis dans la théorie classique sur toute l'épaisseur de la plaque alors qu'ici ils sont définis par couche.

En plus de ces résultantes d'efforts, nous avons introduit deux notations d'efforts supplémentaires $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et $\mathbf{v}^{j,j+1}$ qui représentent les composantes du vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$ aux interfaces, entre les couches j et $j+1$.

Nous appellerons $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ *le vecteur des efforts de cisaillement d'interface*, et $\mathbf{v}^{j,j+1}$ *le vecteur des efforts d'arrachement d'interface*. C'est ce dernier effort qui est à l'origine de l'apparition de phénomènes de délaminage dans les stratifiés.

Vous noterez que le vecteur contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3$ se doit d'être continu dans l'épaisseur aux interfaces, même si le tenseur des contraintes \mathbf{y} est discontinu. A l'interface $j/j+1$ nous avons donc aussi les relations suivantes:

$$(1.69) \quad \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) = \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) = \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_{j+1}^-)$$

$$(1.70) \quad \mathbf{v}^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{j+1}^-)$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs peut s'écrire,

$$(1.71) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\underline{e}}_0^{j*} + \tilde{Q}^j : \tilde{\mathbf{V}} W^{j*} \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) \right. \\ & \left. + \mathbf{v}^{j,j+1} \cdot \left(W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y) \right) \right) d\omega \end{aligned}$$

Intégrons par parties la relation précédente, pour faire apparaître une expression de $PI(\underline{v}^*)$ qui ne dépend que des composantes du champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* ,

$$(1.72) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\text{div} \tilde{N}^j \cdot \tilde{V}^{j*} + \text{div} \tilde{Q}^j \cdot W^{j*} \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) \right. \\ & \left. + \mathbf{v}^{j,j+1} \cdot \left(W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y) \right) \right) d\omega \\ & - \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma} \left(\tilde{N}^j \cdot \tilde{V}^{j*} \cdot \underline{n} + \tilde{Q}^j \cdot W^{j*} \cdot \underline{n} \right) d\gamma \end{aligned}$$

où \underline{n} désigne le vecteur normal au bord γ , tangent à ω .

Cette expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs va nous permettre de déterminer les équations d'équilibres et les conditions aux limites, via le principe des puissances virtuelles.

Déterminons auparavant l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

1.3.1.1b Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Comme nous l'avons vu au paragraphe (1.2.1.2), la puissance des efforts extérieurs $PE(\underline{v}^*)$ s'écrit,

$$(1.73) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{T} \cdot \underline{v}^* d\Gamma + \int_{\Gamma^+} \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^* d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^-} \underline{T}^- \cdot \underline{v}^* d\Gamma^-$$

Soit, en décomposant sur les trois couches:

$$(1.74) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\int_{h_j^-}^{h_j^+} \underline{f}^j \cdot \underline{v}^{j*} dz \right) + \underline{T}^+ \cdot \underline{v}^{3*} + \underline{T}^- \cdot \underline{v}^{1*} \right) d\Omega + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \left(\int_{h_j^-}^{h_j^+} \underline{T}^j \cdot \underline{v}^{j*} dz \right) d\gamma$$

En posant,

$$(1.75) \quad \underline{F}^j = \begin{pmatrix} \tilde{F}^j \\ F_3^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{f}^j dz \\ \int_{h_j^-}^{h_j^+} f_3^j dz \end{pmatrix} \quad (1.76) \quad \underline{R}^j = \begin{pmatrix} \tilde{R}^j \\ R_3^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{T}^j dz \\ \int_{h_j^-}^{h_j^+} T_3^j dz \end{pmatrix}$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit alors,

$$(1.77) \quad PE(\underline{v}^*) = \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\tilde{F}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + F_3^j \cdot W^{j*} \right) + \tilde{T}^+ \cdot \tilde{v}^{3*} + \tilde{T}^- \cdot \tilde{v}^{1*} + T_3^+ \cdot W^{3*} + T_3^- \cdot W^{1*} \right) d\omega \\ + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \left(\tilde{R}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + R_3^j \cdot W^{j*} \right) d\gamma$$

Relions à présent ces efforts extérieurs aux efforts intérieurs du modèle triparticulaire complet.

1.3.1.1c Application du principe des puissances virtuelles: Relations d'équilibre et conditions aux limites du modèle triparticulaire complet

La relation (1.2) valable pour tout champ de vitesse virtuelle \underline{v}^* nous permet d'écrire les équations qui régissent les efforts intérieurs généralisés du modèle triparticulaire complet \tilde{N}^j , \tilde{Q}^j , $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, $\underline{v}^{j,j+1}$.

Les relations d'équilibre s'obtiennent à partir des relations (1.70) et (1.75) en choisissant des champs de vitesse particuliers.

$$\text{Si } \tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{div} \tilde{N}^1 + \tilde{\tau}^{1,2} - \tilde{\tau}^{0,1} + \tilde{F}^1 &= 0 & \text{sur } \omega \\ \text{avec } \tilde{\tau}^{0,1} &= -\tilde{T}^- \end{aligned}$$

$$\tilde{N}^1 \cdot \underline{n} = \tilde{R}^1 \quad \text{sur } \gamma$$

$$\text{Si } \tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$$

$$\text{div} \tilde{N}^2 + \tilde{\tau}^{1,2} - \tilde{\tau}^{2,3} + \tilde{F}^2 = 0 \quad \text{sur } \omega$$

$$\tilde{N}^2 \cdot \underline{n} = \tilde{R}^2 \quad \text{sur } \gamma$$

$$\text{Si } \tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = W^* = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{div} \tilde{N}^3 + \tilde{\tau}^{3,4} - \tilde{\tau}^{2,3} + \tilde{F}^3 &= 0 & \text{sur } \omega \\ \text{avec } \tilde{\tau}^{3,4} &= \tilde{T}^+ \end{aligned}$$

$$\tilde{N}^3 \cdot \underline{n} = \tilde{R}^3 \quad \text{sur } \gamma$$

$$\text{Si } \tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = 0,$$

$$\begin{aligned} \forall j = 1,2,3 \quad \text{div} \tilde{Q}^j + \underline{v}^{j,j+1} - \underline{v}^{j-1,j} + F_3^j &= 0 & \text{sur } \omega \\ \text{avec } \underline{v}^{0,1} &= -T_3^- \quad \underline{v}^{3,4} = T_3^+ \end{aligned}$$

$$\forall j = 1,2,3 \quad \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = R_3^j \quad \text{sur } \gamma$$

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire complet peuvent donc s'écrire sous la forme:

$$(1.78) \quad \text{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

$$(1.79) \quad \text{div} \tilde{Q}^j + \underline{v}^{j,j+1} - \underline{v}^{j-1,j} + F_3^j = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

$$\begin{aligned} \text{en posant } \tilde{\tau}^{0,1} &= -\tilde{T}^- & \tilde{\tau}^{3,4} &= \tilde{T}^+ \\ \underline{v}^{0,1} &= -T_3^- & \underline{v}^{3,4} &= T_3^+ \end{aligned}$$

Les conditions aux limites du modèle triparticulaire complet peuvent s'écrire:

$$(1.80) \quad \tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$(1.81) \quad \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = R_3^j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

Les relations d'équilibres et les conditions aux limites, ainsi obtenues, s'expriment en fonction de résultantes d'efforts par couche \tilde{N}^j et \tilde{Q}^j , et en fonction d'efforts d'interfaces $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et $\nu^{j,j+1}$. \tilde{N}^j et \tilde{Q}^j sont des efforts de plaque classiques bien que définis ici sur chaque couche de matériau. Par contre $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et $\nu^{j,j+1}$ sont des efforts inédits pour des modèles de plaque.

Vous noterez que les équations (1.78) et (1.79) correspondent exactement à l'intégration des équations d'équilibre 3D dans l'épaisseur de la plaque.

Intéressons-nous maintenant à la méthode que nous allons mettre en oeuvre pour déterminer le comportement associé à cette modélisation.

Nous allons adopter une démarche un peu différente de celle que Sab a utilisé pour résoudre le problème du multicouche.

Nous allons d'abord rechercher une forme approchée des champs de contrainte solutions du problème 3D en fonction des efforts intérieurs généralisés, solutions du problème multiparticulaire. Les relations (1.65) à (1.68) sont en effet insuffisantes pour déterminer complètement le tenseur des contraintes 3D en fonction des efforts généralisés. Nous allons donc effectuer un changement d'échelle entre les milieux 3D et multiparticulaire, en intégrant les équations d'équilibre (1.1) du problème tridimensionnel.

Nous allons approcher dans un premier temps le champ de contraintes 3D régnant dans le sandwich par le champ $\underline{\sigma}^{ap}$ vérifiant l'équilibre en moyenne sur chacune des couches. Nous verrons que nous pourrions simplifier l'écriture des efforts généralisés.

La seconde étape de la démarche consistera à identifier l'énergie élastique du milieu 3D approchée avec celle du milieu 2D. Le développement de ces deux étapes de résolution font l'objet des deux paragraphes qui suivent.

Notez qu'une autre démarche, utilisant l'approche mixte d'Hellinger-Reissner, a été mise en oeuvre pour déterminer le comportement du milieu multiparticulaire (Chabot 1997).

1.3.1.2 Changement d'échelle avec le milieu 3D

Approchons le champ de contraintes membranaires 3D, par un champ de contraintes approchées $\tilde{\sigma}^{ap}$ constant dans l'épaisseur de chaque couche j , tel que,

$$(1.82) \quad \tilde{\sigma}^{ap}(x, y, z) = \frac{1}{e^j} \tilde{N}^j(x, y) \quad \forall z \in]h_j^-, h_j^+[$$

où e^j désigne l'épaisseur de la couche j , $e^j = h_j^+ - h_j^-$

Cette approximation du champ de contraintes membranaires est la plus simple que l'on puisse faire. Nous devons rechercher une forme approchée du champ de contraintes $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$ du milieu 3D, telle que,

$$\tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) = \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) \quad \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, h_j^-) = \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)$$

Or compte tenu de la relation (1.82) les termes $\sigma_{\alpha 3,3}$ sont constants dans l'épaisseur, ce qui nous conduit, à considérer une forme du champ approché $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$ affine en z , par couche vérifiant,

$$(1.83) \quad \tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}(x, y, z) = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

où \bar{h}_j est la côte médiane de la couche j

De plus, nous avons défini les efforts de cisaillement \tilde{Q}^j , classiquement, comme l'intégrale des contraintes de cisaillement $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$ (relation 1.66). Nous pouvons donc en déduire une relation entre les efforts classiques \tilde{Q}^j et les efforts d'interface $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

$$(1.84) \quad \tilde{Q}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, z) dz = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j$$

Considérons à présent la dernière relation d'équilibre du milieu 3D et du milieu triparticulaire complet.

L'intégration des deux premiers termes $\sigma_{13,1}$ et $\sigma_{23,2}$ correspond bien à la divergence de \tilde{Q}^j . Puisque nous avons une forme linéaire en z des champs de contraintes de cisaillement transverse $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}$, la forme approchée des champs σ_{33} est cette fois un polynôme de degré 2 en z et doit vérifier les relations de définition de $v^{j,j+1}$ (1.68) et (1.70),

$$\sigma_{33}(x, y, h_j^+) = v^{j,j+1}(x, y) \quad \sigma_{33}(x, y, h_j^-) = v^{j-1,j}(x, y)$$

Nous souhaitons proposer une forme approchée des contraintes σ_{33} ne faisant intervenir que les efforts intérieurs généralisés et vérifiant l'équilibre 3D. Une forme possible est,

$$(1.85) \quad \sigma_{33}^{ap} = \frac{v^{j,j+1} + v^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (v^{j,j+1} - v^{j-1,j}) - \frac{1}{2e^j} (z - h_j^+) (z - h_j^-) \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

Rappelons que le champ de contrainte $\tilde{\sigma}^{ap}$ est discontinu dans l'épaisseur aux interfaces, tandis que les champs de contraintes $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}$ et σ_{33}^{ap} sont continus.

Réécrivons à présent les équations d'équilibre et les conditions aux limites des modèles à trois particules en remplaçant les résultantes par couches \tilde{Q}^j par les efforts d'interfaces $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ via la relation (1.84) dans les expressions (1.79) et (1.81),

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle triparticulaire complet s'écrivent,

Sur le domaine plan ω , $\forall j = 1, 3$,

$$(1.86) \quad \text{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0$$

$$(1.87) \quad \text{div} \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + v^{j,j+1} - v^{j-1,j} + F_3^j = 0$$

Sur la frontière γ de ω , $\forall j = 1, 3$,

$$(1.88) \quad \tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j$$

$$(1.89) \quad \frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = R_3^j$$

Notez que les équations (1.89) supposent qu'il existe une relation supplémentaire entre les efforts extérieurs.

Les équations (1.86) à (1.89) montrent que les efforts intérieurs généralisés du modèle se réduisent à:

- la résultante des efforts membranaires par couche \tilde{N}^j , $j = 1, 3$
- les efforts de cisaillement d'interface tangent $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, $j = 1, 2$
- les efforts d'arrachement d'interface $v^{j,j+1}$, $j = 1, 2$

Pour clore cette partie, déterminons les déformations généralisées du modèle triparticulaire complet en identifiant les taux de déformations à partir de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (1.71), en remplaçant \tilde{Q}^j par son expression en fonction des efforts $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, à l'aide de la relation (1.84),

$$(1.90) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\epsilon}_0^{j*} + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j \cdot \tilde{\nabla} W^{j*} \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) \right. \\ & \left. + v^{j,j+1} \cdot \left(W^{j+1*}(x, y) - W^{j*}(x, y) \right) \right) d\omega \end{aligned}$$

Les déformations généralisées apparaissent comme les cofacteurs des contraintes généralisées dans l'écriture de la puissance virtuelle des efforts intérieurs quand le champ de vitesse virtuelle est pris égal au champ de déplacement.

Le champ de déplacement s'écrit sous la forme,

$$(1.91) \quad \underline{u}(x, y, z) = \tilde{U}(x, y, z) + W(x, y, z)\underline{e}_3$$

En notant les composantes moyennes du champ de déplacement par les relations suivantes,

$$(1.92) \quad \begin{cases} \tilde{u}^j(x, y) = \frac{1}{e^j} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{U}(x, y, z) dz \\ w^j(x, y) = \frac{1}{e^j} \int_{h_j^-}^{h_j^+} W(x, y, z) dz \end{cases}$$

la puissance des efforts intérieurs pour le champ de déplacement \underline{u} s'écrit,

$$(1.93) \quad \begin{aligned} PI(\underline{u}) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j) + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j \cdot \tilde{\nabla} w^j \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \left(\tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot (\tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j) \right. \\ & \left. + v^{j,j+1} \cdot (w^{j+1} - w^j) \right) d\omega \end{aligned}$$

Nous pouvons alors identifier les déformations généralisées suivantes (cf. tableau 1.1),

- Les déformations généralisées $\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j)$, associées au tenseur des contraintes membranaires dans chaque couche j , que nous appellerons *tenseur des déformations membranaires par couche*,
- Les déformations généralisées $\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j + \frac{e^j}{2} \tilde{\nabla} w^j + \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\nabla} w^{j+1}$, associées aux efforts de cisaillement d'interface, que nous appellerons *discontinuité tangente d'interface*,
- Les déformations généralisées $D_3^{j,j+1} = w^{j+1} - w^j$, associées aux efforts d'arrachement d'interface, que nous appellerons *discontinuité normale d'interface*.

Contraintes généralisées	Déformations généralisées associées
Résultante d'efforts membranaires par couche j : \tilde{N}^j	$\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j)$
Effort de cisaillement à l'interface $j/j+1$: $\tilde{\tau}^{j,j+1}$	$\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j + \frac{e^j}{2} \tilde{\nabla} w^j + \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\nabla} w^{j+1}$
Effort d'arrachement à l'interface $j/j+1$: $v^{j,j+1}$	$D_3^{j,j+1} = w^{j+1} - w^j$

Tableau 1.1: Contraintes et déformations généralisées
du modèle triparticulaire complet

Recherchons à présent le comportement du modèle en reliant les efforts généralisés aux déformations généralisées.

1.3.1.3 Identification du comportement du modèle triparticulaire complet

Pour écrire la loi de comportement du modèle triparticulaire complet, écrivons l'énergie complémentaire du milieu tridimensionnel que l'on identifie à celle du milieu multiparticulaire en utilisant les champs approchés 3D.

$$(1.94) \quad W_c(3D) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \approx \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{ap} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}^{ap} d\Omega \approx W_c(Tri)$$

Faisons apparaître les différentes composantes du champ de contraintes approchées dans (1.94),

$$(1.95) \quad W_c(Tri) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\int_{\omega} (\sigma_{\alpha\beta}^{ap} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \sigma_{\gamma\delta}^{ap} + 2\sigma_{\alpha\beta}^{ap} S_{\alpha\beta 33}^i \sigma_{33}^{ap} + \sigma_{33}^{ap} S_{3333}^i \sigma_{33}^{ap} + 4\sigma_{\alpha 3}^{ap} S_{\alpha 3 \beta 3}^i \sigma_{\beta 3}^{ap}) d\omega \right] dz \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \{1, 2\}$$

Exprimons l'énergie complémentaire en fonction des efforts généralisés triparticulaires à l'aide des relations (1.82) (1.83) et (1.85), qui expriment les champs $\underline{\underline{\sigma}}^{ap}$ en fonction des efforts généralisés du modèle.

Pour ce faire, on utilise une hypothèse simplificatrice. On suppose que le terme en $\text{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j})$ de σ_{33} (relation 1.85) apporte une contribution énergétique très faible par rapport aux autres termes de σ_{33} . Par conséquent, on néglige dans les calculs de l'énergie, les termes faisant intervenir $\text{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j})$. La relation (1.95) devient,

$$(1.96) \quad W_c(Tri) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{e^j} N_{\alpha\beta}^j S_{\alpha\beta\gamma\delta}^j N_{\gamma\delta}^j + S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j (v^{j-1,j} + v^{j,j+1}) + \frac{e^j}{3} S_{3333}^j \left((v^{j,j+1})^2 + (v^{j-1,j})^2 + v^{j,j+1} \cdot v^{j-1,j} \right) + \frac{2e^j}{3} S_{\alpha 3 \beta 3}^j \left[2\tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j,j+1} + 2\tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j-1,j} + \tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j,j+1} + \tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j-1,j} \right] \right] d\omega \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \{1, 2\}$$

On peut alors en déduire le comportement suivant,

$$\forall j = 1, 3, \quad (1.97) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j (v^{j-1,j} + v^{j,j+1})$$

$$\forall j = 1, 2, \quad (1.98) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} [e^j S_{\alpha 3 \beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{j+1}] \tau_{\beta}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3 \beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$$

$$(1.99) \quad D_3^{j,j+1} = \frac{1}{3} [e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}] v^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \cdot v^{j+1,j+2} + \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \cdot v^{j-1,j}$$

$$+ \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^{j+1} N_{\alpha\beta}^{j+1} + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta 33}^j N_{\alpha\beta}^j$$

Au regard des expressions (1.97) à (1.99), il apparaît que le modèle à trois particules que nous venons de développer, présente un comportement complexe malgré l'hypothèse d'absence de termes en $\text{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j})$. Il existe en effet, de nombreux couplages entre les efforts, au niveau des interfaces et des couches.

Ce modèle n'est donc pas très opératoire sous cette forme. On peut toutefois introduire une nouvelle hypothèse simplificatrice pour améliorer son caractère opératoire. Ainsi, en négligeant les composantes du tenseur des souplesses $S_{\alpha\beta 33}^j$, les relations (1.97) à (1.99) peuvent s'écrire,

$$(1.100) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$$

$$(1.101) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} [e^j S_{\alpha 3 \beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{j+1}] \tau_{\beta}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3 \beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$$

$$(1.102) \quad D_3^{j,j+1} = \frac{1}{3} [e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}] v^{j,j+1} + \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \cdot v^{j+1,j+2} + \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \cdot v^{j-1,j}$$

On peut ainsi obtenir un modèle beaucoup plus opératoire, au prix cependant d'un certain nombre d'hypothèses.

Il est possible d'imaginer un modèle plus simple, en introduisant une hypothèse au niveau de la cinématique du modèle.

L'examen des expressions (1.97) à (1.99) montre que la complexité du modèle tient pour l'essentiel à la présence d'efforts d'arrachement d'interface $v^{j,j+1}$. Au paragraphe suivant nous développerons une formulation simplifiée du modèle triparticulaire complet en supposant que,

$$W^{1*} = W^{2*} = W^{3*}$$

qui permet de faire disparaître ces efforts $v^{j,j+1}$ du modèle.

I.3.2 Le modèle triparticulaire simplifié

Dans cette partie, nous présentons le développement du modèle triparticulaire simplifié. Nous introduisons pour cela, une condition de liaison cinématique entre les couches dans la direction e_3 . Les composantes du champ de vitesses virtuelles normales au plan vérifient ainsi,

$$(1.103) \quad W^{1*} = W^{2*} = W^{3*} = W^*$$

La cinématique du milieu triparticulaire simplifié s'écrit,

$$(1.104) \quad \underline{v}^j(x, y) = \tilde{V}^j(x, y) + W^*(x, y) e_3 \quad j = \{1, 2, 3\}$$

On obtient ainsi un champ de vitesses virtuelles à 7 champs scalaires pour le modèle simplifié à trois particules.

En utilisant une nouvelle fois la méthode du principe des puissances virtuelles, on se propose dans le paragraphe suivant, de déterminer les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié, en exprimant la puissance virtuelle des efforts intérieurs et celle des efforts extérieurs.

Puis, en approchant les contraintes 3D à l'aide des efforts généralisés et en identifiant l'énergie élastique en contraintes 3D avec celle du milieu triparticulaire simplifié, nous en déduirons la loi de comportement du modèle, exactement comme pour le modèle complet.

1.3.2.1 Ecriture des équations d'équilibre et des conditions aux limites

1.3.2.1a Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs (1.71) devient pour le modèle triparticulaire simplifié,

$$(1.105) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\epsilon}_0^{j*} + \tilde{Q}^j : \tilde{\nabla} W^* \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) d\omega \end{aligned}$$

1.3.2.1b Puissance virtuelle des efforts extérieurs

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs est identique (relation 1.77),

$$\begin{aligned} PE(\underline{v}^*) = & \int_{\omega} \left(\sum_{j=1}^3 \left(\tilde{F}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + F_3^j \cdot W^{j*} \right) + \tilde{T}^+ \cdot \tilde{v}^{3*} + \tilde{T}^- \cdot \tilde{v}^{1*} + T_3^+ \cdot W^{3*} + T_3^- \cdot W^{1*} \right) d\omega \\ & + \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \left(\tilde{R}^j \cdot \tilde{v}^{j*} + R_3^j \cdot W^{j*} \right) d\gamma \end{aligned}$$

1.3.2.1c Application du principe des puissances virtuelles: Relations d'équilibre et conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié

Cherchons les relations d'équilibre du modèle triparticulaire simplifié qui régissent les efforts intérieurs généralisées \tilde{N}^j , \tilde{Q}^j , $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

Pour le modèle triparticulaire simplifié, les équations d'équilibre et les conditions aux limites se déduisent des expressions des puissances virtuelles des efforts intérieurs (1.105) et des puissances virtuelles des efforts extérieurs (1.77).

Les choix $\tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$, $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{3*} = W^* = 0$, et $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = W^* = 0$ conduisent aux mêmes équations d'équilibre reliant \tilde{N}^j et $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ et aux mêmes conditions aux limites en \tilde{N}^j , que le modèle non simplifié.

Par contre, en choisissant $\tilde{v}^{1*} = \tilde{v}^{2*} = \tilde{v}^{3*} = 0$ on obtient des équations simplifiées de (1.79) et (1.81),

$$(1.106) \quad \sum_{j=1}^3 \operatorname{div} Q^j + \sum_{j=1}^3 F_3^j = 0 \quad \text{sur } \omega$$

$$(1.107) \quad \sum_{j=1}^3 \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j \quad \text{sur } \gamma$$

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire simplifié sont,

$$(1.108) \quad \operatorname{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$$

en posant $\tilde{\tau}^{0,1} = -\tilde{T}^- \quad \tilde{\tau}^{3,4} = \tilde{T}^+$

$$(1.109) \quad \sum_{j=1}^3 (\operatorname{div} \tilde{Q}^j + F_3^j) = 0$$

Les conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié sont,

$$(1.110) \quad \tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$(1.111) \quad \sum_{j=1}^3 \tilde{Q}^j \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j$$

I.3.2.2 Changement d'échelle avec le milieu 3D

Les champs 3D approchés, recherchés dans le cadre d'une modélisation triparticulaire simplifiée, sont déterminés de la même façon que pour le milieu triparticulaire complet.

Nous effectuons la même hypothèse (1.82) sur la forme des champs de contrainte $\tilde{\sigma}^{ap}$, que pour le modèle complet. La relation (1.83) relative aux contraintes $\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}$ reste valable pour le modèle simplifié.

$$\tilde{\sigma}^{ap}(x, y, z) = \frac{1}{e^j} \tilde{N}^j(x, y) \quad \forall z \in]h_j^-, h_j^+[$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha 3}^{ap}(x, y, z) = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j^-, h_j^+]$$

Notez qu'ici nous ne nous intéressons pas au champ de contraintes σ_{33} dans la mesure où il n'intervient pas dans l'équilibre et que nous allons négliger sa contribution dans l'énergie élastique complémentaire lors de l'identification du comportement.

La relation (1.84) reliant \tilde{Q}^j à $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ est inchangée.

$$\tilde{Q}^j(x, y) = \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{\sigma}_{\alpha 3}(x, y, z) dz = \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j$$

On peut donc réécrire les relations (1.108) à (1.111) en introduisant cette dernière relation.

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites du modèle triparticulaire simplifié sont,

Relations d'équilibre,	
(1.112)	$div \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$
(1.113)	$\sum_{j=1}^3 \left\{ div \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + F_3^j \right\} = 0$
Conditions aux limites,	
(1.114)	$\tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j \quad \forall j = 1, 2, 3$
(1.115)	$\sum_{j=1}^3 \frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j$

Identifions à présent les déformations généralisées du modèle triparticulaire simplifié à partir de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (1.105), en remplaçant \tilde{Q}^j par son expression en fonction des efforts $\tilde{\tau}^{j,j+1}$, à l'aide de la relation (1.84),

$$(1.116) \quad \begin{aligned} PI(\underline{v}^*) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\epsilon}_0^{j*} + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j : \tilde{\nabla} W^* \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot \left(\tilde{V}^{j+1*}(x, y) - \tilde{V}^{j*}(x, y) \right) d\omega \end{aligned}$$

En considérant la forme des champs de déplacement (1.91), et en considérant les composantes moyennes du champ de déplacement (1.92) suivantes,

$$(1.117) \quad \begin{cases} \tilde{u}^j(x, y) = \frac{1}{e^j} \int_{h_j^-}^{h_j^+} \tilde{U}(x, y, z) dz \\ w(x, y) = \frac{1}{h^+ - h^-} \int_{h_j^-}^{h_j^+} W(x, y, z) dz \end{cases},$$

on peut écrire la puissance des efforts intérieurs pour le champ de déplacement \underline{u} ,

$$(1.118) \quad \begin{aligned} PI(\underline{u}) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\omega} \left(\tilde{N}^j : \tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j) + \frac{\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}}{2} e^j \cdot \tilde{\nabla} w \right) d\omega \\ & - \int_{\omega} \sum_{j=1}^2 \tilde{\tau}^{j,j+1} \cdot (\tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j) d\omega \end{aligned}$$

Nous pouvons alors identifier les déformations généralisées suivantes (cf. tableau 1.2),

Contraintes généralisées	Déformations généralisées associées
Résultante d'efforts membranaires par couche j : \tilde{N}^j	Déformation membranaire de la couche j , $\tilde{\varepsilon}^j(\tilde{u}^j)$
Effort de cisaillement à l'interface $j/j+1$: $\tilde{\tau}^{j,j+1}$	Discontinuité tangente d'interface $j/j+1$, $\tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{u}^{j+1} - \tilde{u}^j + \frac{e^j + e^{j+1}}{2} \tilde{\nabla} w$

Tableau 1.2: Contraintes et déformations généralisées
du modèle triparticulaire simplifié

1.3.2.3 Comportement du modèle triparticulaire simplifié

Déterminons à présent le comportement du modèle triparticulaire simplifié qui permet de relier les efforts généralisés aux déformations généralisées du modèle.

En supposant que la contribution énergétique de la contrainte σ_{33} est négligeable, les calculs des termes de l'énergie complémentaire (1.95) pour le modèle triparticulaire simplifié donne une expression de W_c en fonction des efforts membranaires \tilde{N}^j , et des efforts de cisaillement d'interfaces $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

$$(1.119) \quad \begin{aligned} W_c(Tris) = & \frac{1}{2} \int_{\omega} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{e^j} N_{\beta\alpha}^j S_{\alpha\beta\gamma\delta}^j N_{\delta\gamma}^j + \frac{2e^j}{3} S_{\alpha 3 \beta 3}^j \left[2\tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j,j+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j-1,j} + \tau_{\alpha}^{j-1,j} \tau_{\beta}^{j,j+1} + \tau_{\alpha}^{j,j+1} \tau_{\beta}^{j-1,j} \right] \right] d\omega \\ & \alpha, \beta, \gamma, \delta = \{1, 2\}, \end{aligned}$$

On en déduit le comportement du modèle simplifié,

$$(1.120) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$$

$$(1.121) \quad D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} \left[e^j S_{\alpha 3 \beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{j+1} \right] \tau_{\beta}^{j,j+1} + \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3 \beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$$

Les relations de comportement du modèle triparticulaire simplifié se réduisent ainsi aux deux expressions (1.120) et (1.121) donnant les déformations $\tilde{\varepsilon}^j$ et $\tilde{D}^{j,j+1}$ en fonction de \tilde{N}^j et $\tilde{\tau}^{j,j+1}$.

Le couplage entre les efforts d'interface subsiste pour des couches successives. Par contre les couplages entre les efforts membranaires et les efforts d'interface ont disparu. En outre, comme prévu, la relation (1.99) du modèle triparticulaire complet n'existe plus.

On aboutit ainsi directement aux expressions du comportement du modèle triparticulaire complet (1.100) et (1.101), sans qu'il y ait eu besoin de formuler pour le modèle simplifié d'autres hypothèses sur le comportement de la plaque sandwich que la condition cinématique initiale (1.103).

I.3.3 Conclusion

Nous avons mis au point dans cette partie I.3, deux modélisations triparticulaires dédiées à l'étude du comportement des structures sandwichs en matériaux classiques: le modèle triparticulaire complet, le modèle triparticulaire simplifié.

Faisons une synthèse de ces modèles en rappelant les équations d'équilibres, les conditions aux limites et la loi de comportement pour chacun d'entre eux.

☛ Modèle triparticulaire complet

<i>Relations d'équilibre et conditions aux limites</i>	<i>Loi de comportement</i>
$\text{div} \tilde{N}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0$ $\text{div} \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + v^{j,j+1} - v^{j-1,j} + F_3^j = 0$ $\tilde{N}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j$ $\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = R_3^j$	$\varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$ $D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} [e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1}] \tau_{\beta}^{j,j+1}$ $+ \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$ $D_3^{j,j+1} = \frac{1}{3} [e^j S_{3333}^j + e^{j+1} S_{3333}^{j+1}] v^{j,j+1}$ $+ \frac{1}{6} e^{j+1} S_{3333}^{j+1} \cdot v^{j+1,j+2} + \frac{1}{6} e^j S_{3333}^j \cdot v^{j-1,j}$

☛ Modèle tripartculaire simplifié

Relations d'équilibre et conditions aux limites	Loi de comportement
$\operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^j + \tilde{\tau}^{j,j+1} - \tilde{\tau}^{j-1,j} + \tilde{F}^j = 0$ $\sum_{j=1}^3 \left\{ \operatorname{div} \left(\frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \right) + F_3^j \right\} = 0$ $\tilde{\tilde{N}}^j \cdot \underline{n} = \tilde{R}^j$ $\sum_{j=1}^3 \frac{e^j}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1} + \tilde{\tau}^{j-1,j}) \cdot \underline{n} = \sum_{j=1}^3 R_3^j$	$\varepsilon_{\alpha\beta}^j = \frac{1}{e^j} S_{\alpha\beta\delta\gamma}^j N_{\delta\gamma}^j$ $D_{\alpha}^{j,j+1} = \frac{4}{3} \left[e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j + e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \right] \tau_{\beta}^{j,j+1}$ $+ \frac{2}{3} e^{j+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{j+1} \cdot \tau_{\beta}^{j+1,j+2} + \frac{2}{3} e^j S_{\alpha 3\beta 3}^j \cdot \tau_{\beta}^{j-1,j}$

On aurait pu développer des modélisations multiparticulaires encore plus simples en considérant par exemple, les formes de champ de vitesse virtuelle suivantes,

—Un champ de vitesse virtuelle à 7 paramètres, en supposant que l'âme ne reprend pas les déformations membranaires,

$$\underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^{j*}(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^{2*}(x, y) = W^{2*}$$

—Un champ de vitesse virtuelle à 6 paramètres, en écrivant le champ de déplacement de l'âme comme une moyenne des déplacements dans les peaux,

$$\underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^{j*}(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^{2*}(x, y) = \frac{1}{2} \tilde{V}^{1*}(x, y) + \frac{1}{2} \tilde{V}^{3*}(x, y)$$

$$+ \frac{1}{2} W^{1*}(x, y) \underline{e}_3 + \frac{1}{2} W^{3*}(x, y) \underline{e}_3$$

—Un champ de vitesse virtuelle à 5 paramètres, en supposant que l'âme ne reprend pas les déformations membranaires et qu'il existe une liaison entre les composantes verticales du champ de vitesse virtuelle,

$$\underline{v}^{j*}(x, y) = \tilde{V}^{j*}(x, y) + W^*(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\}$$

$$\underline{v}^{2*}(x, y) = W^{2*}$$

En construisant un modèle multiparticulaire à partir de ce dernier champ de vitesse virtuelle, on retrouve pratiquement le modèle classique de Reissner-Mindlin. Le modèle multiparticulaire a l'avantage sur le modèle de Reissner, de prendre en compte les énergies de cisaillement dans les peaux.

—Un champ de vitesse virtuelle à 3 paramètres en écrivant le champ de déplacement de l'âme comme une moyenne des déplacements dans les peaux et en supposant une liaison entre les composantes verticales du champ de vitesse virtuelle,

$$\begin{aligned}\underline{v}^j(x, y) &= \tilde{V}^j(x, y) + W^*(x, y) \underline{e}_3 \quad j = \{1, 3\} \\ \underline{v}^2(x, y) &= \frac{1}{2} \tilde{V}^1(x, y) + \frac{1}{2} \tilde{V}^3(x, y) + W^*(x, y) \underline{e}_3\end{aligned}$$