

# Modélisation thermomécanique et caractérisation expérimentale du fil AMF

## 2.1 Introduction

L'effet "mémoire de forme" a été découvert par hasard dans les années 1930 par Ölander (Ölander (1932)) dans l'alliage Au-Cd (Or-Cadmium). Ce phénomène physique remarquable a donné son nom à la classe des matériaux à mémoire de forme, et plus particulièrement des alliages à mémoire de forme (AMF). Un tel matériau peut, après chargement mécanique au-delà d'une certaine contrainte seuil, présenter une importante déformation résiduelle (de l'ordre de plusieurs % dans les alliages métalliques), puis retrouver sa configuration initiale (déformation nulle) lors d'un chauffage du matériau. Ainsi, en Figure 2.1.1 un fil AMF a été déformé à température ambiante jusqu'à obtenir la forme de gauche. Ensuite, il a été chauffé et a retrouvé sa forme initiale de fil droit.

Il a ensuite fallu attendre les années 1960 avec la découverte par Buehler et al. (1963) de l'effet mémoire de forme dans l'alliage équiatomique Nickel-Titane pour que des applications commerciales puissent être envisagées (Barbarino et al. (2014)). Différents alliages (Cu-Al-Ni, Cu-Al-Zn, etc...) peuvent présenter l'effet mémoire de forme dans certaines plages de température, mais l'alliage Nickel-Titane est le plus prometteur. En effet, ses propriétés mécaniques sont excellentes, les déformations de l'ordre de 8% restent réversibles et il présente de bonnes propriétés en fatigue.

Cet effet étonnant est dû à un changement de phase solide-solide. Deux phases cristallines peuvent coexister dans les alliages à mémoire de forme. Dans l'arrangement cristallin nommé **martensite**, les atomes de Nickel et Titane forment un réseau monoclinique (Huang et al. (2003)). Un autre arrangement atomique, nommé **austénite**, présente une structure cristalline plus symétrique, avec un arrangement cubique centré. Ces deux structures cristallines sont représentées en Figure 2.1.2. Les grandes déforma-

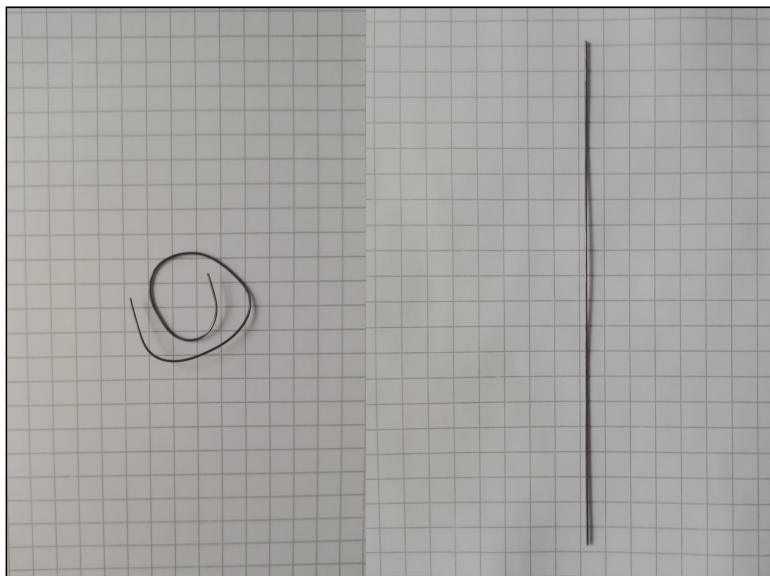


FIGURE 2.1.1 – L’effet mémoire de forme : un fil est déformé( à gauche), puis lors du chauffage il revient à sa forme droite (à droite)

tions réversibles observées dans les AMF sont dues à des distorsions locales, qui sont possibles dans la phase martensite car le réseau monoclinique peut s’orienter dans différentes directions. À l’inverse des déformations plastiques, ces mouvements se font sans déplacement macroscopique des atomes les uns par rapport aux autres, donc sans endommagement du matériau : les distances parcourues par les atomes sont inférieures à la distance interatomique. Lors du chauffage, la phase austénite devient plus stable énergétiquement et l’arrangement cristallin devient à nouveau cubique centré, ce qui donne lieu à l’effet mémoire de forme.

À basse température, un AMF sollicité mécaniquement présente le comportement de réorientation. Il se trouve toujours sous forme de martensite, mais au fur et à mesure de la déformation, la structure cristalline se réoriente grâce à des distorsions pour accommoder la déformation macroscopique. Nous nommons donc ce nouvel état **martensite orientée** dans le modèle. Lors du chauffage, la martensite orientée se transforme en austénite (effet mémoire de forme). Enfin, un refroidissement à contrainte nulle permet à l’AMF de retourner dans l’état martensitique sans déformation macroscopique : nous nommons cet état **martensite autoaccomodée**. Ainsi, en Figure 2.1.1 le fil se trouve dans la phase martensite orientée sur l’image de gauche, et le chauffage-refroidissement fait passer le fil par les phases austénite puis martensite autoaccomodée sur l’image de droite.

À haute température, un AMF présente un comportement superélastique, illustré en Figure 2.1.3 par une courbe expérimentale obtenue au cours de cette thèse. Le ma-

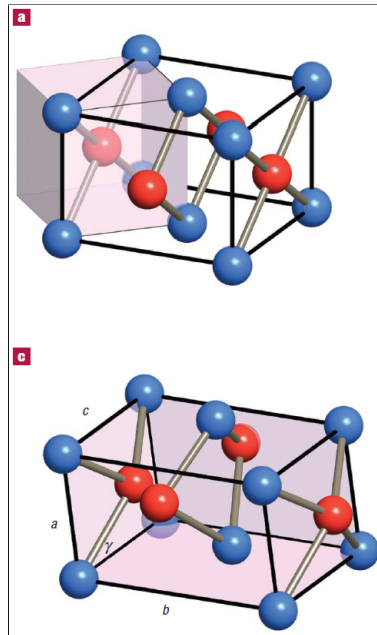


FIGURE 2.1.2 – Structure cristalline de l’austénite (haut) et de la martensite (bas), la martensite consistant en une déformation de la maille représentée en traits noirs (d’après Huang et al. (2003))

tériau se trouve initialement en phase austénite, et lors d’un chargement mécanique, si la contrainte appliquée est suffisamment haute, on observe l’apparition de martensite orientée accompagnée d’une grande déformation. Lorsque le fil est intégralement transformé en martensite orientée, on observe à nouveau un comportement approximativement élastique linéaire. Lors du déchargement, la diminution de la contrainte permet la réapparition de la phase austénite, et le fil retrouve son état initial. Le changement de phase permet donc de faire subir de grandes déformations réversibles (5 % dans le cas présent) au fil.

La maîtrise de ces phénomènes complexes pour des applications en ingénierie nécessite l’élaboration de modèles pertinents et dont l’implémentation numérique soit aisément réalisable.

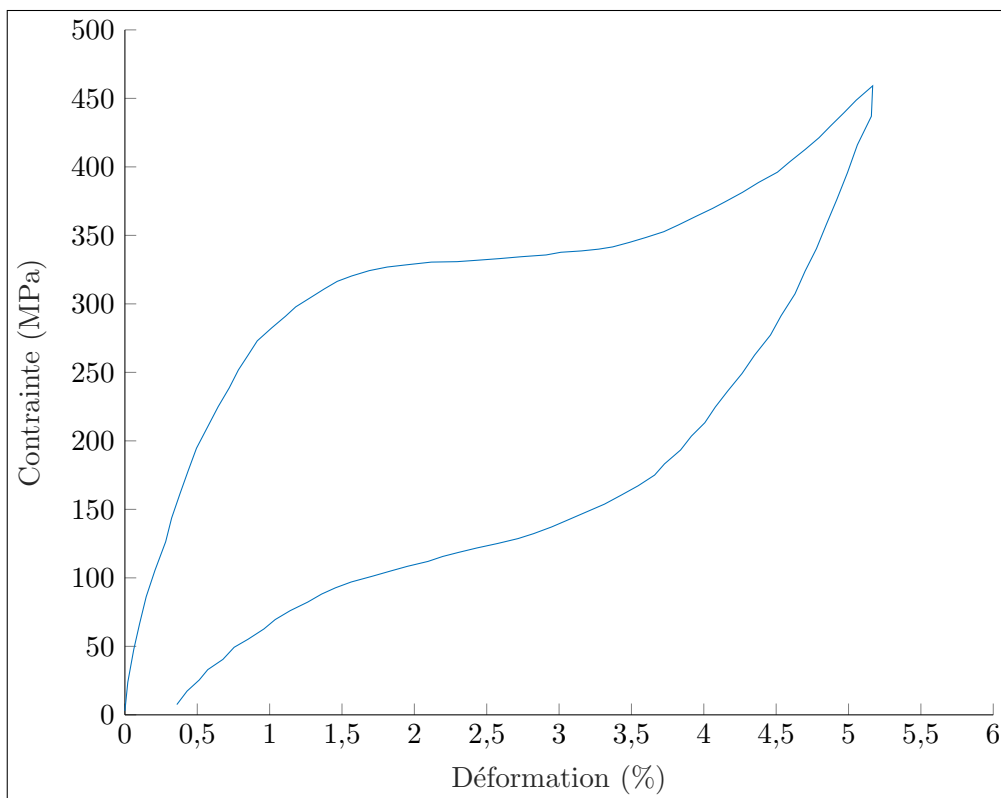


FIGURE 2.1.3 – Essai de traction à 70°C sur fil AMF Nickel-Titane

## 2.2 Modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme

La modélisation du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme constitue un champ de recherche actif. Les modèles existants peuvent être classés dans la catégorie des modèles phénoménologiques, pour lesquels on postule des équations reproduisant le plus fidèlement possible les courbes expérimentales, ou bien dans la catégorie des modèles micromécaniques, qui prennent appui sur la microstructure des AMF pour obtenir les équations de comportement macroscopique. La première catégorie regroupe des modèles unidimensionnels (Auricchio et al. (2009), Brinson (1993), Chang et al. (2006), Falk (1980), Frost et al. (2010), Liang and Rogers (1990), Marfia and Rizzoni (2013)) ainsi que des modèles tridimensionnels (Auricchio et al. (1997), Boyd and Lagoudas (1996), Chemisky et al. (2011), Frémond et al. (1996), Souza et al. (1998), Tanaka et al. (1986)). Enfin, certains modèles sont plus délicats à classer et constituent un intermédiaire entre l'approche phénoménologique et l'approche micromécanique, comme le modèle de Sadjadjpour and Bhattacharya (2007).

Les différents modèles développés au cours de cette recherche appartiennent à la catégorie des modèles micromécaniques, nous pouvons y distinguer les modèles monocristallins et les modèles polycristallins. Ces deux types de modèles seront traités ici.

Dans le cas monocristallin, un seul cristal AMF est modélisé. Il peut contenir une seule ou plusieurs (Peigney et al. (2011), Sagar and Stein (2010)) variantes de martensite et le modèle peut être unidimensionnel (Bernardini and Pence (2002)) ou bien tridimensionnel (Govindjee and Miehe (2001), Stupkiewicz and Petryk (2002)).

Dans le cas polycristallin, le matériau est décrit par une liste de grains accompagnée de certains paramètres tels que l'orientation cristalline du grain. Les grains peuvent présenter une ou plusieurs variantes de martensite et le modèle peut être unidimensionnel (Nae et al. (2003)) ou bien tridimensionnel (Hackl and Heinen (2008), Kelly et al. (2016), Sagar and Stein (2010), Thamburaja and Anand (2001)).

La plupart de ces modèles introduisent une ou plusieurs variables internes permettant de décrire le comportement complexe de l'AMF. Le choix de ces variables ainsi que leur domaine de définition permettent aussi de distinguer les différents modèles.

Dans ce travail, un modèle micromécanique monocristallin est proposé en section 2.3, et un modèle micromécanique polycristallin est proposé en section 2.4. Leur spécificité réside dans leur implémentation numérique robuste, qui sera présentée dans le chapitre 3, ainsi que dans la possibilité de déterminer des solutions analytiques pour des cas de chargement simples, ce qui sera exposé en section 2.5. Ces solutions analytiques permettent d'identifier rapidement les paramètres du modèle à partir d'observations expérimentales. Le modèle monocristallin permet de décrire de façon simplifiée le com-

portement de l'AMF, alors que le modèle polycristallin, plus riche, permet de reproduire relativement fidèlement les courbes expérimentales.

## 2.3 Un modèle unidimensionnel d'alliage à mémoire de forme monocristallin

### 2.3.1 Hypothèses

Le modèle micromécanique développé au cours de cette recherche décrit la réponse thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme unidimensionnel sous la forme d'un fil en traction. Il permet de décrire les phénomènes remarquables que peut présenter un AMF : la superélasticité, la réorientation des variantes de martensite ainsi que l'effet mémoire de forme. La même méthodologie pourrait être appliquée à un modèle tridimensionnel. Plusieurs hypothèses ont été faites pour construire le modèle.

Tout d'abord, nous modélisons un matériau homogène, c'est-à-dire que le comportement est uniforme tout le long du fil. Nous nous plaçons dans le cadre des matériaux standards généralisés introduits dans Halphen (1975), c'est-à-dire que les équations constitutives découlent de l'expression d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation.

Ensuite, de nombreux phénomènes physiques ne seront pas pris en compte dans ce modèle. Ainsi, la dilatation thermique, considérée comme petite par rapport aux déformations de transformation de phase, n'est pas considérée ici. De même, la plasticité, le fluage et la relaxation des contraintes ne seront pas modélisés ici. De plus, nous considérerons que les chargements mécaniques et les variations de température sont quasi-statiques : la température est toujours imposée et les échanges thermiques ne seront pas modélisés. Cette hypothèse est valable pour un fil, dont le diamètre est petit devant la longueur et qui se trouve donc toujours en équilibre thermique avec l'extérieur.

Dans cette partie nous supposons que le matériau étudié est un monocristal, ce que l'on rencontre rarement dans les applications industrielles. Le comportement particulier de l'AMF est obtenu grâce à l'introduction de deux variables internes décrivant la fraction volumique dans l'AMF des phases solides décrites en section 2.1 :

- La fraction volumique de martensite autoaccommodée  $\theta_0$
- La fraction volumique de martensite orientée  $\theta_1$

Par conséquent, la fraction volumique d'austénite est donnée par  $1 - \theta_0 - \theta_1$ . La configuration de référence sera supposée être celle où le matériau n'est soumis à aucune contrainte et se trouve en phase austénite, avec  $\theta_0 = \theta_1 = 0$ . Nous noterons  $\Theta$  le vecteur des fractions volumiques de martensite, avec  $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ .

Les paramètres matériau suivants sont adoptés :

- $\varepsilon^{tr}$  la déformation maximale de transformation de phase, généralement de l'ordre de 5 à 8 %. Elle représente la quantité maximale de déformation non élastique

- réversible que peut subir le matériau lors du changement de phase.
- $E$  le module d'Young, que nous considérerons égal pour l'austénite et la martensite
- $T_0$  une température de référence
- $\lambda$  la chaleur latente
- $G_0$  un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite autoaccommodée
- $G_1$  un paramètre de dissipation correspondant à la transformation de phase austénite - martensite orientée (avec  $G_0 < G_1$ )

Nous noterons par la suite  $\lambda(T) = \lambda \frac{T - T_0}{T_0}$ , où  $T$  est la température actuelle du matériau, pour alléger les notations.

### 2.3.2 Formulation d'un modèle pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF monocristallin

L'énergie libre suivante est utilisée pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF :

$$w(\varepsilon, \Theta, T) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr})^2 + \lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) \quad (2.3.1)$$

Où  $\varepsilon$  est la déformation du fil AMF dans la direction axiale. Le premier terme de cette énergie libre correspond à l'énergie de déformation élastique, et le second terme correspond à la contribution de la chaleur latente. Les contraintes suivantes s'appliquent aux variables internes :

$$\begin{cases} \theta_0 \geq 0 \\ \theta_1 \geq 0 \\ \theta_0 + \theta_1 \leq 1 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Nommons  $\mathcal{T}$  ce domaine d'existence des  $(\theta_0, \theta_1)$  et  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$  sa fonction indicatrice.

Nous postulons le potentiel de dissipation suivant pour décrire le supplément d'énergie à fournir pour l'initiation du changement de phase :

$$\Phi(\dot{\Theta}) = \Phi(\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1) = G_0|\dot{\theta}_0| + G_1|\dot{\theta}_1| \quad (2.3.3)$$

Ce choix est classique, il est par exemple similaire à la fonction adoptée dans Anand and Gurtin (2003), dans Peigney et al. (2011) ou encore dans Bernardini and Pence (2002).

Soit  $\mathbf{A}$  la force d'entraînement thermodynamique :

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial w}{\partial \Theta} \quad (2.3.4)$$

Nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique "non-lisse" (Frémond (2001)) qui permet de prendre en compte les contraintes sur les variables internes. La résolution du problème physique se fait alors grâce à l'équation constitutive suivante, correspondant à la seconde loi de la thermodynamique :

$$\mathbf{A} \in \partial\Phi(\dot{\boldsymbol{\Theta}}) + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Theta}) \quad (2.3.5)$$

où  $\partial$  est le sous-différentiel. C'est un outil mathématique très utilisé dans le domaine de l'optimisation convexe (Rockafellar (1970)), permettant de prolonger la notion de dérivée à des fonctions continues non dérivables en un point. Il est défini ci-dessous :

*Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  mais non dérivable en  $\mathbf{x}_0$ . Soit  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$ . On note  $\partial f(\mathbf{x}_0)$  le sous-différentiel de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$ . Par définition,  $\mathbf{B} \in \partial f(\mathbf{x}_0)$  est équivalent à :*

$$\text{Pour tout } \mathbf{dx} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{B} \cdot \mathbf{dx} \leq f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}_0) \quad (2.3.6)$$

En particulier, pour  $f$  convexe, si  $0 \in \partial f(\mathbf{x}_0)$  alors  $\mathbf{x}_0$  est un minimum global de  $f$ . Toutefois dans les calculs nous adopterons une autre définition du sous-différentiel :

*Un vecteur  $\mathbf{B}$  de l'espace  $\mathbb{R}^2$  appartient à  $\partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\theta_0, \theta_1)$  si et seulement s'il existe  $z \in \mathbb{R}_+$  et  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$  tels que :*

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} - \mathbf{a} \\ z(1 - \theta_0 - \theta_1) = 0 \\ \mathbf{a} \cdot \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Ici, les fonctions  $\Phi$  et  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$  sont convexes et continues sur le domaine étudié, mais non dérivables en certains points. Par exemple, le potentiel de dissipation (2.3.3) n'est pas dérivable en 0. Toutefois, les sous-différentiels de  $\Phi$  et  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$  existent. En Figure 2.3.1 est représenté le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$  du domaine  $\mathcal{T} = \{(\theta_0, \theta_1) \in \mathbb{R}_+^2 : \theta_0 + \theta_1 \leq 1\}$ .

On vérifie facilement qu'à l'intérieur du domaine  $\mathcal{T}(\theta_0, \theta_1)$  le sous-différentiel de la fonction indicatrice est le vecteur nul. De plus, sur les arêtes du triangle représenté en Figure 2.3.1 les vecteurs appartenant au sous-différentiel sont normaux aux frontières du domaine. Enfin, sur les sommets du domaine  $\mathcal{T}(\theta_0, \theta_1)$  le sous-différentiel regroupe une infinité de directions matérialisées par le secteur angulaire vert.

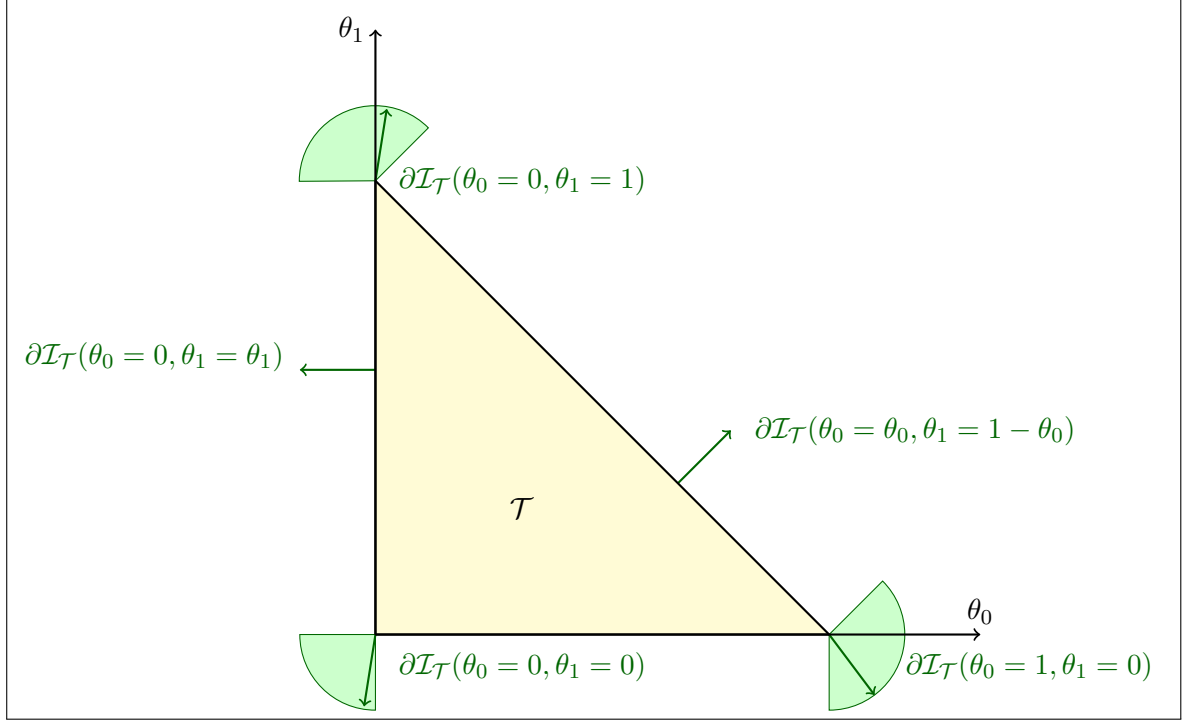


FIGURE 2.3.1 – Sous-différentiel de la fonction indicatrice  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\theta_0, \theta_1)$

### 2.3.3 Minimisation de l'énergie incrémentale

Montrons à présent que la résolution de ce problème revient à minimiser une énergie incrémentale. L'équation (2.3.5) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^r \text{ avec } \mathbf{A}^d \in \partial\Phi(\dot{\boldsymbol{\Theta}}) \text{ et } \mathbf{A}^r \in \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Theta}) \quad (2.3.8)$$

En pratique, une discrétisation temporelle est nécessaire. Soient  $\theta_0^0$  et  $\theta_1^0$  les fractions volumiques actuelles de  $\theta_0$  et  $\theta_1$  respectivement, soit  $\delta t$  le pas de temps. Résoudre le problème (2.3.8) consiste à trouver les nouvelles fractions volumiques  $\theta_0$  et  $\theta_1$  suite à l'application d'un incrément de déformation, de température, ou de la combinaison des deux, en un intervalle de temps  $\delta t$ , et cela en connaissant l'état physique actuel du matériau, donné par  $\theta_0^0$  et  $\theta_1^0$ . Soit  $\boldsymbol{\Theta}^0$  le vecteur des deux fractions volumiques  $\theta_0^0$  et  $\theta_1^0$ . Nous pouvons donc réécrire l'équation (2.3.8) à l'aide d'un schéma d'Euler implicite :

$$0 = -\mathbf{A} + \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^r \text{ avec } \mathbf{A}^d \in \partial\Phi\left(\frac{\boldsymbol{\Theta} - \boldsymbol{\Theta}^0}{\delta t}\right) \text{ et } \mathbf{A}^r \in \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Theta}) \quad (2.3.9)$$

A partir de cette équation, il est possible de montrer que la solution est un minimum global. Pour cela, introduisons les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  définies par :

$$\psi_1 = \delta t \Phi \left( \frac{\Theta - \Theta^0}{\delta t} \right) \quad (2.3.10)$$

$$\psi_2 = \psi_1 + \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\Theta) \quad (2.3.11)$$

Nous cherchons à exprimer le problème 2.3.9 à l'aide de  $\psi_2$ . Une fonction est semi-continue inférieurement en  $x_0$  si, quand  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $f(x)$  est proche de  $f(x_0)$  ou bien supérieure à  $f(x_0)$ .  $\Phi$  est une fonction continue, donc à fortiori elle est semi-continue inférieurement. On vérifie facilement par définition de la fonction indicatrice, que  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$  est semi-continue inférieurement. Elles sont toutes deux des fonctions propres convexes, c'est-à-dire qu'elles ne valent jamais  $-\infty$  et ne sont pas partout égales à  $+\infty$ . Donc  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des fonction convexes, propres, semi-continues inférieurement. Cela permet d'écrire (Peigney et al. (2011)) :

$$\partial\psi_2 = \partial\psi_1 + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\Theta) = \partial\Phi \left( \frac{\Theta - \Theta^0}{\delta t} \right) + \partial\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\Theta) \quad (2.3.12)$$

Donc le problème (2.3.9) se réécrit :

$$\mathbf{0} \in \partial(w + \psi_2) \quad (2.3.13)$$

La solution  $\Theta$  est donc un minimum global pour  $w + \psi_2$ , c'est-à-dire que :

$$\Theta = \underset{\Theta \in \mathcal{T}}{\operatorname{Argmin}} \left( \delta t \Phi \left( \frac{\Theta - \Theta^0}{\delta t} \right) + w(\Theta) + \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\Theta) \right) \quad (2.3.14)$$

La condition  $\Theta \in \mathcal{T}$  permet de retirer l'expression  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$  :

$$\Theta = \underset{\Theta \in \mathcal{T}}{\operatorname{Argmin}} \left( \delta t \Phi \left( \frac{\Theta - \Theta^0}{\delta t} \right) + w(\Theta) \right) \quad (2.3.15)$$

Notons que l'expression adoptée pour le potentiel de dissipation  $\Phi$  décrit une évolution indépendante de la vitesse de chargement, ce qu'on retrouve dans la simplification par  $\delta t$  rendue possible dans l'équation (2.3.15). La résolution du problème est équivalente en pratique à la minimisation de la fonction suivante, formée à partir de l'énergie libre et du potentiel de dissipation :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \left( \frac{1}{2} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr})^2 + \lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) + G_0 |\theta_0 - \theta_0^0| + G_1 |\theta_1 - \theta_1^0| \right) \quad (2.3.16)$$

Pour un incrément de déformation ou de température donné, la solution  $\Theta$  permet ensuite de calculer la contrainte actualisée :

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = E \left( \varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr} \right) \quad (2.3.17)$$

### 2.3.4 Détermination des températures de changement de phase à contrainte nulle

Le modèle monocristallin permet de déterminer les températures de changement de phase à contrainte nulle (austénite vers martensite autoaccommodée, ou inversement) en fonction des paramètres du modèle. Cette expression peut ensuite être comparée aux résultats d'un essai de calorimétrie. Pour un fil avec  $\sigma = 0$ , le problème (2.3.16) devient :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \left( \lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) + G_0|\theta_0 - \theta_0^0| + G_1|\theta_1 - \theta_1^0| \right) \quad (2.3.18)$$

Cette expression permet de remarquer que pour une température  $T$  suffisamment élevée,  $\theta_0 = \theta_1 = 0$ . Etudions à présent l'effet d'un refroidissement. Initialement les variables internes  $\theta_0$  et  $\theta_1$  sont nulles et ne peuvent qu'augmenter, donc on cherche :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} (\lambda(T)(\theta_0 + \theta_1) + G_0\theta_0 + G_1\theta_1) \quad (2.3.19)$$

On remarque donc que comme  $G_0 < G_1$ , on aura apparition de  $\theta_0$  lorsque la quantité  $\lambda(T) + G_0$  devient négative, c'est-à-dire pour :

$$T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda} \quad (2.3.20)$$

De la même façon on peut montrer que lors d'un chauffage à partir d'une température suffisamment basse, la température de formation d'austénite est :

$$T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda} \quad (2.3.21)$$

### 2.3.5 Equations constitutives de l'AMF monocristallin à haute température

Pour des chargements simples, il est aussi possible de résoudre analytiquement (2.3.16) pour déterminer le comportement mécanique de l'AMF monocristallin. Calculons les courbes contraintes-déformations en traction à température constante, tout d'abord dans le cas de la haute température. Soit  $\mathbf{A}$  la force thermodynamique associée aux variables internes  $(\theta_0, \theta_1)$  :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial \theta_0} \\ -\frac{\partial w}{\partial \theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(T) \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

Revenons à l'équation (2.3.9) et réécrivons  $\mathbf{A}^d$  sous la forme :

$$\mathbf{A}^d = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \partial \Phi(\frac{\theta_0 - \theta_0^0}{\delta t}) \\ \partial \Phi(\frac{\theta_1 - \theta_1^0}{\delta t}) \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

$\mathbf{A}^d$  s'interprète comme une force dissipative et  $\mathbf{A}^r$  comme une force de réaction thermodynamique aux contraintes sur les variables internes (Frémond (2001)). Par définition du sous-différentiel, le vecteur  $\mathbf{A}^d$  est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \phi_i \in [-G_i; G_i] & \text{si } \theta_i = \theta_i^0 \text{ avec } i = 0 \text{ ou } 1 \\ \phi_i = G_i \operatorname{sgn}(\theta_i - \theta_i^0) & \text{si } \theta_i \neq \theta_i^0 \text{ avec } i = 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad (2.3.24)$$

On déduit donc de (2.3.9) et (2.3.7) les équations d'évolution où  $\Phi_i$  vérifie (2.3.24) :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z - a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = z - a_1 + \phi_1 \end{cases} \quad (2.3.25)$$

Nous nous plaçons ici dans le cas où la température imposée est haute : d'après la section 2.3.4, le fil se trouve à une température  $T > T^A$  avec  $\theta_0 = \theta_1 = 0$  donc la définition (2.3.7) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & \text{d'où } a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = 0 & \text{d'où } a_1 \geq 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 1 & \text{d'où } z = 0 \end{cases} \quad (2.3.26)$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) = -a_1 + \phi_1 \end{cases} \quad (2.3.27)$$

A l'instant initial où  $\varepsilon = 0$ , on a  $\theta_0 = \theta_0^0 = 0$  et  $\theta_1 = \theta_1^0 = 0$  donc  $\phi_0 \in [-G_0; G_0]$  et  $\phi_1 \in [-G_1; G_1]$  d'après (2.3.24). Comme  $T$  est grand, on peut choisir :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda(T) \\ a_1 = \lambda(T) \\ \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = 0 \end{cases} \quad (2.3.28)$$

Au début du chargement, on choisit  $a_1 = \lambda(T) - \varepsilon^{tr} E\varepsilon$ . Cette quantité reste positive donc le raisonnement reste le même et la solution du problème est  $\theta_0 = \theta_1 = 0$ . Lorsque le chargement se poursuit,  $\lambda(T) - \varepsilon^{tr} E\varepsilon$  devient négatif et on peut alors choisir :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda(T) \\ a_1 = 0 \\ \phi_0 = 0 \\ \phi_1 = \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) \end{cases} \quad (2.3.29)$$

La solution du problème reste alors toujours  $\theta_0 = \theta_1 = 0$  jusqu'à ce que l'on atteigne une déformation  $\varepsilon^{seuil}$  pour laquelle  $\phi_1 = \varepsilon^{tr} E\varepsilon - \lambda(T) = G_1$ . D'après l'équation (2.3.24) le chargement ne peut pas se poursuivre avec  $\theta_1 = 0$ . Pour désigner une situation de ce type par la suite, nous écrirons à présent que la deuxième équation dans (2.3.27) "sature".

Ici, il y a donc initiation du changement de phase austénite-martensite orientée, avec apparition de  $\theta_1$ . Comme illustré en Figure 2.3.2, le changement de phase débute donc pour :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda(T) + G_1}{E\varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\lambda(T) + G_1}{\varepsilon^{tr}}} \quad (2.3.30)$$

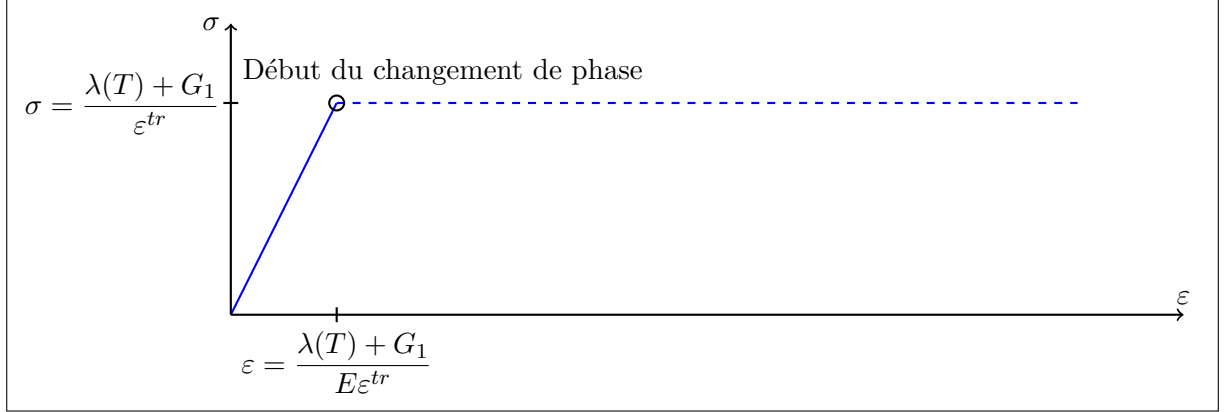


FIGURE 2.3.2 – Début du changement de phase lors d'un chargement en traction à haute température

On a ensuite, à  $\sigma$  constant, augmentation de  $\theta_1$  :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 \neq 0 & a_1 = 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 \neq 0 & z = 0 \end{cases} \quad (2.3.31)$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = G_1 \end{cases} \quad (2.3.32)$$

Cette évolution est possible jusqu'à  $\theta_1 = 1$ , où l'on a :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda(T) + G_1}{E\varepsilon^{tr}} + \varepsilon^{tr} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\lambda(T) + G_1}{\varepsilon^{tr}}} \quad (2.3.33)$$

Pour cet état, nous avons :

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 & a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = 1 & a_1 = 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 0 & z \geq 0 \end{cases} \quad (2.3.34)$$

Si l'augmentation de  $\varepsilon$  se poursuit, les équations constitutives deviennent donc :

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z - a_0 + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E(\varepsilon - \theta_1 \varepsilon^{tr}) - \lambda(T) = z + G_1 \end{cases} \quad (2.3.35)$$

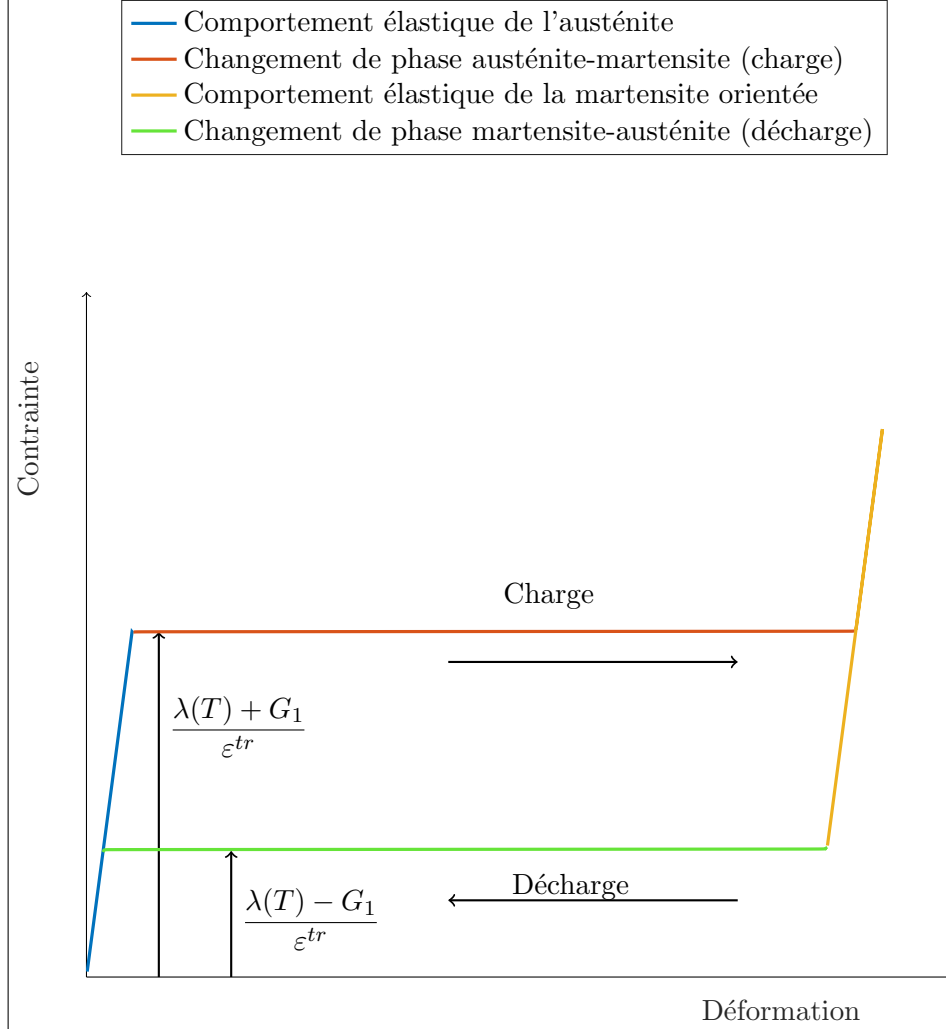


FIGURE 2.3.3 – Comportement mécanique analytique de l'AMF monocristallin à haute température (équations (2.3.30) et (2.3.33)) : la *superélasticité*

L'évolution est à nouveau élastique car on peut choisir  $z$  aussi grand qu'il le faut dans la seconde équation. De la même façon, il est possible de montrer que la décharge est élastique dans un premier temps, et que lorsque la contrainte  $\sigma = \frac{\lambda(T) - G_1}{\varepsilon^{tr}}$  est atteinte, le changement de phase inverse se produit. Les courbes contraintes-déformations obtenues avec ce modèle sont donc linéaires par morceaux. En Figure 2.3.3 est représenté le comportement à haute température (comportement superélastique). La portion de la courbe à contrainte constante représente le changement de phase, on l'appelle *plateau de*

*changement de phase.* La longueur de ce plateau selon l'axe des abscisses correspond au paramètre  $\varepsilon^{tr}$ . La hauteur de ce plateau correspond à la contrainte de changement de phase : à haute température, elle vaut  $\frac{\lambda(T) + G_1}{\varepsilon^{tr}}$  lors de la charge, et  $\frac{\lambda(T) - G_1}{\varepsilon^{tr}}$  pour le changement de phase inverse. On retrouve donc dans le modèle la forte dépendance en température du comportement mécanique des AMF.

### 2.3.6 Equations constitutives de l'AMF monocristallin à basse température

Plaçons-nous à présent dans le cas où la température imposée est basse : d'après la section 2.3.4, le fil se trouve à une température  $T < T^B$  avec  $\theta_0 = 1$  et  $\theta_1 = 0$  donc la définition (2.3.7) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 & \text{d'où } a_0 = 0 \\ \theta_1 = 0 & \text{d'où } a_1 \geq 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 0 & \text{d'où } z \geq 0 \end{cases} \quad (2.3.36)$$

D'où

$$\begin{cases} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \varepsilon^{tr} E \varepsilon - \lambda(T) = z - a_1 + \phi_1 \end{cases} \quad (2.3.37)$$

De façon similaire au calcul détaillé en section 2.3.5, on trouve au début du changement de phase de martensite vers martensite orientée :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{G_0 + G_1}{E \varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}} \quad \text{pour tout } T < T^B} \quad (2.3.38)$$

On a ensuite, à  $\sigma$  constant,  $\theta_0$  diminue et  $\theta_1$  augmente. En Figure 2.3.4 est représenté le comportement à basse température, connu sous le nom de *réorientation* de martensite. Lors de la décharge, il n'y a pas de changement de phase inverse : la martensite orientée est stable à cette température même en l'absence de contrainte, on observe donc une importante déformation résiduelle, qui vaut ici  $\varepsilon = \varepsilon^{tr}$ . On remarque que contrairement à la situation à haute température, ici le comportement ne dépend pas de la température.

### 2.3.7 Equations constitutives de l'AMF monocristallin aux températures intermédiaires

Traisons à présent le cas de la traction isotherme menée à une température  $T$  telle que  $T^B \leq T \leq T^A$ . Dans cette situation, la seule donnée de la température ambiante ne permet pas de connaître l'état initial de l'AMF : il faut connaître l'histoire du chargement pour calculer les valeurs initiales de  $\theta_0$  et  $\theta_1$ . Par exemple, si l'état initial est caractérisé par  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = 0$ , on retrouve le comportement à haute température décrit en section 2.3.5. Si l'état initial est caractérisé par  $\theta_0 = 1$  et  $\theta_1 = 0$ , on retrouve le comportement à basse température décrit en section 2.3.6.

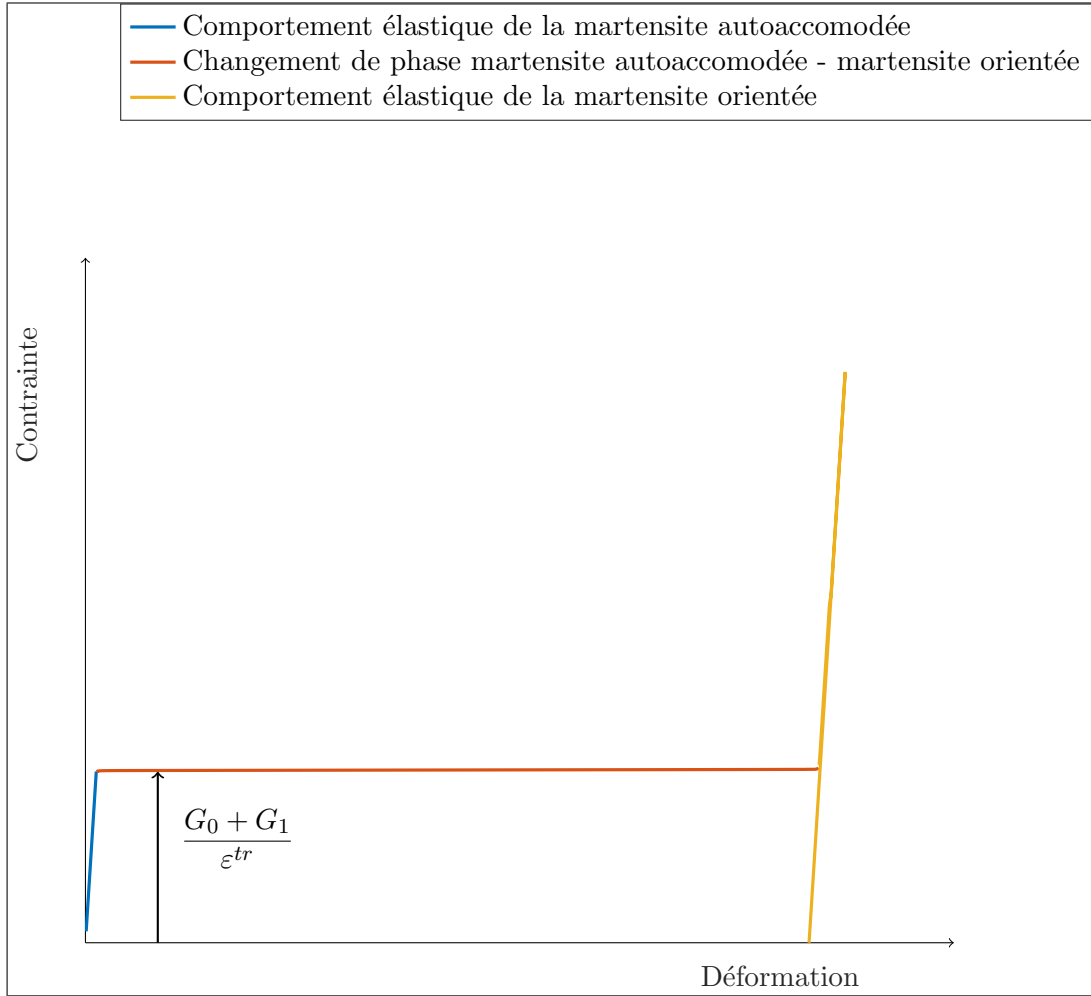


FIGURE 2.3.4 – Comportement mécanique analytique de l’AMF monocristallin à basse température (équation (2.3.38)) : la *réorientation*

### 2.3.8 Effet mémoire de forme pour l’AMF monocristallin

Vérifions à présent que le modèle est capable de décrire l’effet mémoire de forme, qui est mis à profit en pratique dans les actionneurs AMF. Fixons une température initiale  $T$  telle que  $T < T^B$  donc  $\lambda(T) < G_0$ . Le fil est préalablement étiré à cette température, et de la martensite orientée est formée. On a donc d’après la section 2.3.6, en notant  $\theta_1^{init}$  la fraction volumique de martensite orientée présente en fin d’étirement, l’état initial suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = \frac{G_0 + G_1}{E\varepsilon^{tr}} + \theta_1^{init} \varepsilon^{tr} & \\ \sigma = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}} & \\ \theta_0 = 1 - \theta_1^{init} & \text{d'où } a_0 = 0 \\ \theta_1 = \theta_1^{init} & \text{d'où } a_1 = 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 0 & \text{d'où } z \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.3.39)$$

Nous supposons par la suite que  $\sigma = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}}$  est imposée. Nous avons donc les équations d'évolution suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda(T) = z + \phi_0 \\ \sigma\varepsilon^{tr} - \lambda(T) = z + \phi_1 \end{array} \right. \quad (2.3.40)$$

On peut choisir  $-\lambda(T) = z - G_0$ , et l'évolution est possible jusqu'à  $\lambda(T) = G_0$ . Pour  $T > T^B$ , la première équation sature et on a disparition de  $\theta_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_0 = 0 & \text{d'où } a_0 \geq 0 \\ \theta_1 = \theta_1^{init} & \text{d'où } a_1 = 0 \\ 1 - \theta_0 - \theta_1 = 1 - \theta_1^{init} & \text{d'où } z = 0 \end{array} \right. \quad (2.3.41)$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda(T) = -a_0 + \phi_0 \\ \sigma\varepsilon^{tr} - \lambda(T) = \phi_1 \end{array} \right. \quad (2.3.42)$$

La deuxième équation sature pour  $\sigma\varepsilon^{tr} - \lambda(T) = G_1$  : on a alors disparition de  $\theta_1$  et l'AMF se raccourcit par rapport à l'état initial, on obtient :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{G_0 + G_1}{E\varepsilon^{tr}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{G_0 + G_1}{\varepsilon^{tr}}} \quad (2.3.43)$$

Ce raccourcissement constitue l'effet mémoire de forme, que ce modèle est donc capable de décrire.

### 2.3.9 Conclusion

En conclusion, ce modèle monocristallin permet de décrire de façon simplifiée les phénomènes thermomécaniques remarquables que l'on peut observer chez les AMF (réorientation, superélasticité et effet mémoire de forme). Les équations peuvent être résolues rapidement de façon analytique, même dans certains cas de couplage avec une structure, ce qui sera présenté dans le chapitre 3.

## 2.4 Un modèle unidimensionnel d'alliage à mémoire de forme polycristallin

Le modèle détaillé en section 2.3 permet de décrire de façon très simplifiée le comportement d'un fil AMF. Toutefois, les courbes expérimentales ne sont pas linéaires par morceaux. En adoptant un modèle polycristallin, il sera possible de décrire une courbe contraintes-déformations non linéaire pendant le changement de phase. Ainsi, on observe souvent un écrouissage non linéaire en fin de transformation de phase (voir Figure 2.1.3 en introduction). Nous allons donc construire la version polycristalline du modèle précédent. Ce modèle polycristallin permet de prendre en compte la texture tridimensionnelle du fil AMF dans le calcul de la réponse axiale du matériau. Cette texture peut être décrite par différentes orientations cristallines, ce qui signifie que chaque grains du polycristal est orienté dans une certaine direction par rapport à l'axe du fil. La déformation de transformation de phase de chaque grain se fait donc aussi dans une certaine direction par rapport à l'axe du fil.

### 2.4.1 Hypothèses

On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas d'énergie d'interaction entre les différents grains. Nous supposons ici que chaque grain, lorsqu'il est soumis à un incrément de chargement (mécanique ou thermique) suffisant pour déclencher le changement de phase, se déforme dans la direction de la variante de martensite la mieux orientée par rapport à l'axe du fil (Nae et al. (2003)). Cette déformation est ensuite projetée sur l'axe du fil et représente la déformation de transformation de phase. Chaque orientation cristalline est désignée par l'abscisse  $s \in [0, 1]$  et est caractérisée par :

- Sa déformation maximale de transformation de phase  $\varepsilon^{tr}(s)$
- La fraction volumique totale  $C(s)$  de grains présentant cette déformation maximale de transformation de phase  $\varepsilon^{tr}(s)$

La distribution  $C(s)$  doit vérifier  $\int_0^1 C(s)ds = 1$ . Remarquons qu'il est possible d'ordonner les orientations cristallines de façon à ce que  $\varepsilon^{tr}(s)$  soit une fonction décroissante de  $s$ , avec  $\varepsilon_{max}^{tr} = \varepsilon^{tr}(0)$  et  $\varepsilon_{min}^{tr} = \varepsilon^{tr}(1)$ . Ce choix se révèlera judicieux pour les calculs en section 2.5. Pour chaque orientation cristalline  $s$ , une valeur de  $\varepsilon^{tr}(s)$  petite signifie que les grains sont orientés de façon défavorable au regard de la transformation de phase dans l'axe du fil. Au contraire, une valeur de  $\varepsilon^{tr}(s)$  grande signifie que la transformation de phase se produira de façon privilégiée dans ces grains, capables de se déformer dans une direction proche de celle du fil. Chaque orientation cristalline  $s$  est aussi associée aux deux variables internes :

- Sa fraction volumique de martensite autoaccommodée  $\theta_0(s)$
- Sa fraction volumique de martensite orientée  $\theta_1(s)$

On notera  $\Theta(s) = \begin{pmatrix} \theta_0(s) \\ \theta_1(s) \end{pmatrix}$  le vecteur des fractions volumiques de martensite pour l'orientation  $s$ . De façon similaire aux conditions (2.3.2) on a ici la condition :

$$\Theta(s) \in \mathcal{T}(s) \iff \begin{cases} \theta_0(s) \geq 0 \\ \theta_1(s) \geq 0 \\ \theta_0(s) + \theta_1(s) \leq C(s) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où  $\mathcal{T}(s)$  est le domaine d'existence de  $(\theta_0(s), \theta_1(s))$ . De plus, les cinq paramètres matériau définis dans le modèle monocristallin sont à nouveau adoptés ici, ils sont égaux pour tous les grains. Nous noterons toujours  $\lambda(T) = \lambda \frac{T - T_0}{T_0}$ , où  $T$  est la température actuelle du matériau, pour alléger les notations.

#### 2.4.2 Formulation d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation pour décrire le comportement thermomécanique de l'AMF polycristallin

L'énergie libre du polycristal s'écrit de façon similaire à l'expression (2.3.1) :

$$w(\varepsilon, \Theta, T) = \frac{1}{2} E \left( \varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + \lambda(T) \int_0^1 (\theta_0(s) + \theta_1(s)) ds \quad (2.4.2)$$

Avec  $0 \leq s \leq 1$ . Dans ce modèle, la texture polycristalline du fil est donc décrite par les distributions  $\varepsilon^{tr}(s)$  et  $C(s)$ . Le potentiel de dissipation suivant est adopté :

$$\Phi(\dot{\Theta}) = \int_0^1 G_0 |\dot{\theta}_0(s)| + G_1 |\dot{\theta}_1(s)| ds \quad (2.4.3)$$

La résolution du problème incrémental se fait donc, de façon similaire à (2.3.16) par la minimisation suivante :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} w(\varepsilon, \Theta, T) + \int_0^1 G_0 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| + G_1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds \quad (2.4.4)$$

Une fois les valeurs des variables internes obtenues, la contrainte est calculée comme suit :

$$\sigma = E \left( \varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right) \quad (2.4.5)$$

La résolution de ce problème n'est pas évidente, mais nous allons voir en section 2.5 que pour des chargements simples il est possible de trouver des solutions analytiques.

### 2.4.3 Détermination des températures de changement de phase à contrainte nulle

De façon similaire au calcul fait en section 2.3.4, nous pouvons retrouver les températures de transition de phase à contrainte nulle. Posons le problème :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \left( \lambda(T) \int_0^1 (\theta_0(s) + \theta_1(s)) + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds \right) \quad (2.4.6)$$

Pour une température  $T$  suffisamment élevée,  $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$  pour tout  $s$ . Etudions à présent l'effet d'un refroidissement. Initialement les variables internes  $\theta_0$  et  $\theta_1$  sont nulles et ne peuvent qu'augmenter, donc on cherche :

$$\inf_{\Theta \in \mathcal{T}} \left( \lambda(T) \int_0^1 (\theta_0(s) + \theta_1(s)) + G_0 \int_0^1 \theta_0(s) ds + G_1 \int_0^1 \theta_1(s) ds \right) \quad (2.4.7)$$

On remarque donc que comme  $G_0 < G_1$ , pour tout  $s$  on aura apparition de  $\theta_0(s)$  lorsque  $\lambda(T) + G_0$  devient négatif, c'est-à-dire :

$$T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda} \quad (2.4.8)$$

De la même façon on peut montrer que lors d'un chauffage à partir d'une température suffisamment basse, la température de formation d'austénite est :

$$T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda} \quad (2.4.9)$$

Les températures de transformation de phase à contrainte nulle sont donc identiques dans le modèle monocristallin et dans le modèle polycristallin.

Pour conclure, ce modèle est construit de façon similaire au modèle monocristallin, mais au lieu de contenir des variables internes  $\theta_0$  et  $\theta_1$  ainsi qu'un paramètre  $\varepsilon^{tr}$  sous forme de scalaires, il est caractérisé par des fonctions  $\theta_0(s)$  et  $\theta_1(s)$  décrivant son état, et deux fonctions  $\varepsilon^{tr}(s)$  et  $C(s)$  décrivant la texture.

## 2.5 Solutions analytiques pour le modèle polycristallin soumis à des chargements simples

Dans cette section, nous allons établir des solutions analytiques au problème du comportement de l'AMF polycristallin, correspondant à l'équation (2.4.4). Ce problème peut être résolu pour des trajets de chargement mécanique à température constante, dans les Sections 2.5.1 à 2.5.3. Il peut aussi être résolu pour un chargement thermique à contrainte constante, en Section 2.5.4.

### 2.5.1 Cas non-dissipatif à haute température

Tout d'abord, étudions le cas de la dissipation nulle à haute température en choisissant  $G_0 = G_1 = 0$  et  $T > T_0$ . Le problème (2.4.4) devient alors :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + \lambda(T) \int_0^1 \theta_0(s) + \theta_1(s) ds \quad (2.5.1)$$

On remarque que pour tout  $\Theta$  tel que  $\theta_0(s) > 0$ ,  $w(\varepsilon, \theta_0, \theta_1, T) > w(\varepsilon, 0, \theta_1, T)$  donc le problème devient :

$$\inf_{0 \leq \theta_1(s) \leq C(s)} w(\varepsilon, 0, \theta_1, T) \quad (2.5.2)$$

Ecrivons les conditions locales d'optimalité dans (2.5.2) :

$$-\sigma \varepsilon^{tr}(s) + \lambda(T) \begin{cases} = 0 & \text{si } \theta_1(s) \in ]0, C(s)[ \\ \geq 0 & \text{si } \theta_1(s) = 0 \\ \leq 0 & \text{si } \theta_1(s) = C(s) \end{cases} \quad (2.5.3)$$

On constate que si

$$\lambda(T) > \sigma \varepsilon^{tr}(s) \text{ pour tout } s \in [0, 1] \quad (2.5.4)$$

alors  $\theta_1(s) = 0$  pour tout  $s$ , c'est-à-dire que le matériau est purement austénitique. De même, si

$$\lambda(T) < \sigma \varepsilon^{tr}(s) \text{ pour tout } s \in [0, 1] \quad (2.5.5)$$

alors  $\theta_1(s) = C(s)$  pour tout  $s$ , c'est-à-dire que le matériau est purement martensitique.

Comme mentionné en section 2.4.1,  $\varepsilon^{tr}(s)$  est une fonction décroissante de  $s$ . Les conditions (2.5.4) et (2.5.5) se simplifient donc en :

$$\begin{cases} \text{Pour } \lambda(T) \geq \sigma \varepsilon_{max}^{tr} & , \text{ le matériau est en phase austénite pure} \\ \text{Pour } \lambda(T) \leq \sigma \varepsilon_{min}^{tr} & , \text{ le matériau est en phase martensite pure} \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Étudions à présent le cas intermédiaire où  $\lambda(T)/\varepsilon_{max}^{tr} < \sigma < \lambda(T)/\varepsilon_{min}^{tr}$ . Dans ce cas, les conditions d'optimalité (2.5.3) donnent :

$$\theta_1(s) = \begin{cases} C(s) & \text{pour } s \leq s^*, \\ 0 & \text{pour } s > s^* \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Où  $s^*$  est donné par la relation  $-\sigma\varepsilon^{tr}(s^*) + \lambda(T) = 0$ , c'est-à-dire :

$$\lambda(T) = E\varepsilon^{tr}(s^*) \left( \varepsilon - \int_0^{s^*} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds \right) \quad (2.5.8)$$

Nous pouvons à présent déterminer l'allure de la courbe contraintes-déformations. Le choix classique est de la paramétrer par  $\varepsilon$  et d'utiliser les relations (2.5.8) puis (2.4.5) pour obtenir la courbe. Cependant, ce calcul est complexe, et il est plus judicieux dans le cas présent de paramétrer la courbe par  $\sigma$ . En effet, à condition de choisir une fonction  $\varepsilon^{tr}(s)$  strictement décroissante, la courbe contraintes-déformations est strictement croissante. Notons  $f$  la fonction inverse de  $\varepsilon^{tr}$ . On peut réécrire l'équation (2.5.8) :

$$s^* = f \left( \frac{\lambda(T)}{\sigma} \right) \quad (2.5.9)$$

On a ainsi :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{s^*} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds \quad (2.5.10)$$

Dans l'intégrale ci-dessus, effectuons le changement de variables  $s = f(x)$  :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\lambda(T)/\sigma} f'(x)C(f(x))xdx \quad (2.5.11)$$

Cette équation est valide pour  $\frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{min}^{tr}}$  et permet d'obtenir la courbe contraintes-déformations pendant le changement de phase. Les autres portions de la courbe sont des droites représentant une évolution élastique. Les équations décrivant la courbe contraintes-déformations sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{max}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\frac{\lambda(T)}{\sigma}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{min}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\varepsilon_{min}^{tr}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{min}^{tr}} \leq \sigma \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Les fonctions  $\varepsilon^{tr}(s)$  et  $C(s)$  constituent la principale particularité de ce modèle, le choix de ces fonctions permettant d'adapter l'allure des courbes pendant le changement de phase. Ainsi, en Figure 2.5.1 sont tracées trois courbes contraintes-déformations avec  $C(s) = 1$  et avec trois fonctions  $\varepsilon^{tr}(s)$  différentes, listées dans la Table 2.1. Ces trois

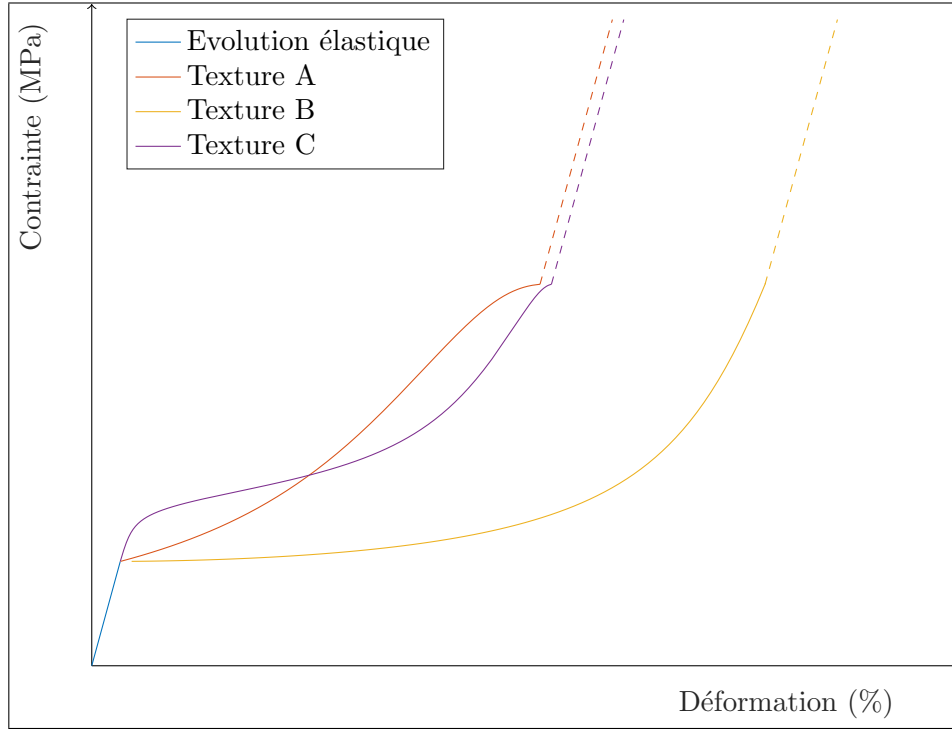


FIGURE 2.5.1 – L’allure du comportement mécanique de l’AMF polycristallin sans dissipation à haute température est déterminée par le choix de la texture dans les équations (2.5.12)

fonctions sont strictement décroissantes entre  $\varepsilon_{max}^{tr}$  et  $\varepsilon_{min}^{tr}$ . La texture C est celle qui a été adoptée ultérieurement en section 2.8.2. Ensuite, une fois la contrainte seuil  $\frac{\lambda(T)}{\varepsilon_{max}^{tr}}$  atteinte, les courbes contraintes-déformations présentent des évolutions différentes. On remarque que suivant le choix de la texture, la courbe peut présenter des changements brusques de pente comme dans le modèle monocristallin, ou bien elle peut être arrondie. L’évolution élastique pour les petites déformations est la même pour les trois courbes. A la fin du changement de phase, la poursuite du chargement se fait de façon élastique : cette partie est représentée par des traits en pointillés pour les trois textures choisies. Sur ces courbes, la phase de décharge est confondue avec la phase de charge car nous considérons ici le modèle sans dissipation. L’allure des trois fonctions  $\varepsilon^{tr}(s)$  est représentée en Figure 2.5.2. Les paramètres  $\varepsilon_{min}^{tr} = 0,03$  et  $\varepsilon_{max}^{tr} = 0,11$  ont été adoptés ici.

## 2.5.2 Cas dissipatif à haute température

Nous prenons à présent  $G_0 > 0, G_1 > 0$  et  $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$  initialement pour tout  $s$ . Une déformation croissante  $\varepsilon(t)$  est appliquée, le matériau étant maintenu à une température fixe  $T$  élevée, vérifiant  $\lambda(T) > G_1$ . Le problème à résoudre est :

TABLE 2.1 – Choix de fonctions texture

|   | Fonction texture $\varepsilon^{tr}(s)$                                                                                                                                                                                                            |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A | $(\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr})(1 - s)^3 + \varepsilon_{min}^{tr}$                                                                                                                                                             |
| B | $(\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr})\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \varepsilon_{min}^{tr}$                                                                                                                                      |
| C | $(\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr})\left(\frac{1 - \tanh(\beta(\tan(\pi(s^\gamma - \frac{1}{2}))))}{2}\right) + \varepsilon_{min}^{tr}$ avec $\beta = \gamma = 0,3$                                                                |
|   | Fonction inverse $f(x)$                                                                                                                                                                                                                           |
| A | $1 - \left(\frac{x - \varepsilon_{min}^{tr}}{\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}}\right)^{\frac{1}{3}}$                                                                                                                               |
| B | $\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{x - \varepsilon_{min}^{tr}}{\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}}\right)$                                                                                                                             |
| C | $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\beta}\operatorname{atanh}\left(1 - 2\left(\frac{x - \varepsilon_{min}^{tr}}{\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}}\right)\right)\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$ |

$$\inf_{\Theta} w(\varepsilon(t), \Theta, T) + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds \quad (2.5.13)$$

Pour un état initialement austénitique avec chargement monotone, la variable interne  $\theta_1$  ne peut qu'augmenter. De plus, les termes  $\theta_0^0$  et  $\theta_1^0$  étant constants pour un état donné, de la même façon qu'en 2.5.2 le problème de minimisation devient :

$$\inf_{0 \leq \theta_1(s) \leq C(s)} w(\varepsilon(t), 0, \theta_1, T) + G_1 \int_0^1 \theta_1(s) ds \quad (2.5.14)$$

On peut résoudre la phase de charge en remplaçant  $\lambda(T)$  par  $\lambda(T) + G_1$  dans les expressions de la section 2.5.1, ainsi que la phase de décharge en remplaçant  $\lambda(T)$  par  $\lambda(T) - G_1$ . Nous obtenons pour la charge :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{min}^{tr}}^{\frac{\lambda(T)+G_1}{\sigma}} f'(x)C(f(x))x dx & \text{pour } \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\varepsilon_{min}^{tr}} f'(x)C(f(x))x dx & \text{pour } \frac{\lambda(T)+G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \leq \sigma \end{array} \right. \quad (2.5.15)$$

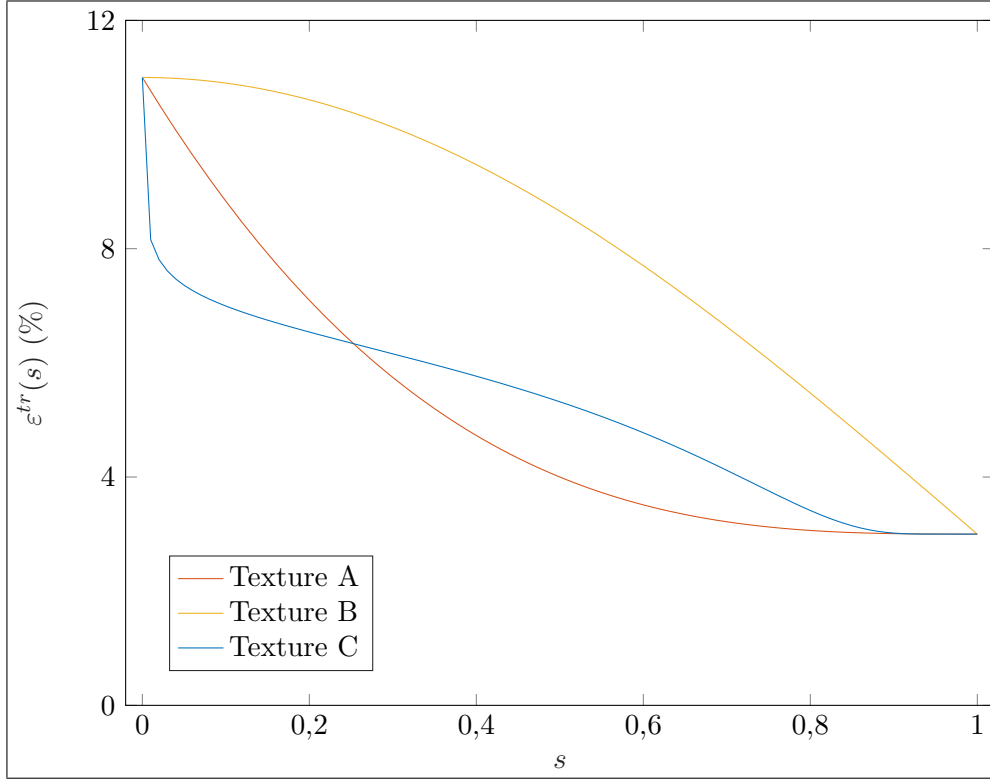


FIGURE 2.5.2 – Allure des fonctions texture  $\varepsilon^{tr}(s)$

Et nous obtenons pour la décharge :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{min}^{tr}}^{\frac{\lambda(T)-G_1}{\sigma}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\varepsilon_{min}^{tr}} f'(x)C(f(x))xdx & \text{pour } \frac{\lambda(T)-G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \leq \sigma \end{array} \right. \quad (2.5.16)$$

Ces équations permettent de tracer les courbes contraintes-déformations à haute température. Ainsi, en Figure 2.5.3 la fonction texture C de la section 2.5.1 a été choisie et nous observons une courbe non linéaire durant le changement de phase. On peut distinguer un plateau de changement de phase et un raidissement du matériau en fin de changement de phase. Toutefois, sur cette simulation le changement de phase n'est jamais total. En effet, si  $\varepsilon_{min}^{tr}$  est très petit, la contrainte  $\sigma = \frac{\lambda(T) + G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}}$  est très grande.

Dans la réalité, au sein du polycristal certaines orientations cristallines sont disposées de telle façon qu'une transformation de phase est très difficile à initier, c'est-à-dire qu'une contrainte très importante est nécessaire. On retrouve ainsi avec ce modèle ce qu'on

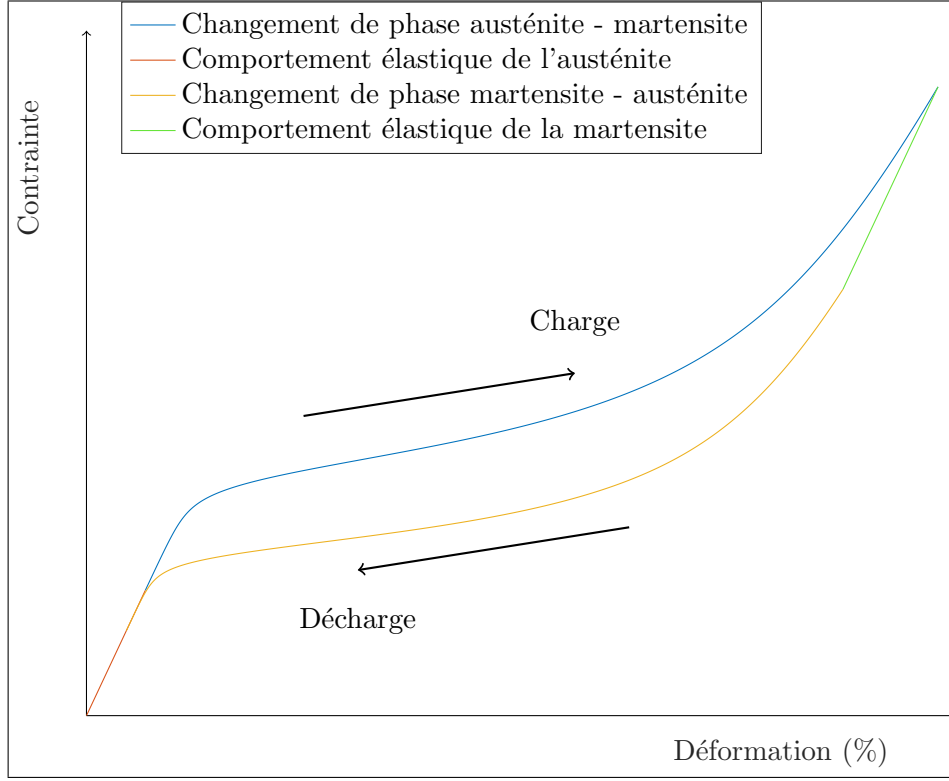


FIGURE 2.5.3 – Comportement mécanique de l'AMF polycristallin à haute température avec la texture C, donné par les équations (2.5.15) et (2.5.16)

observe expérimentalement, à savoir que même lorsque le changement de phase semble terminé, la pente de la courbe n'est pas la même en charge et en décharge (voir Figure 2.1.3). Ici, un incrément positif de déformation en fin de chargement provoque tout de même une légère transformation de phase, alors qu'un petit incrément négatif de déformation dans ce domaine conduit à une évolution élastique. Ce phénomène n'était pas modélisable avec le modèle monocristallin.

### 2.5.3 Cas dissipatif à basse température

Etablissons à présent les équations de la courbe de comportement pour l'AMF polycristallin à basse température ( $\lambda(T) < G_0$ ). Initialement,  $\theta_0(s) = 1$  et  $\theta_1(s) = 0$  pour tout  $s$ . Une déformation croissante  $\varepsilon(t)$  est appliquée,  $\theta_0(s)$  ne peut que diminuer et  $\theta_1(s)$  ne peut qu'augmenter donc le problème à résoudre est :

$$\Theta(s) \inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + (\lambda(T) - G_0) \int_0^1 \theta_0(s) ds + (\lambda(T) + G_1) \int_0^1 \theta_1(s) ds \quad (2.5.17)$$

Dans cette expression on remarque que comme  $\lambda(T) - G_0 < 0$ ,  $\theta_0(s)$  prend toujours la valeur maximale, c'est-à-dire  $\theta_0(s) = 1 - \theta_1(s)$ . Comme le terme  $\lambda(T)$  est constant dans cette minimisation, on obtient alors :

$$\inf_{\Theta(s) \in \mathcal{T}(s)} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon - \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \right)^2 + (G_0 + G_1) \int_0^1 \theta_1(s) ds \quad (2.5.18)$$

On trouve donc, en remplaçant  $\lambda(T) + G_1$  par  $G_0 + G_1$  dans le problème en section 2.5.2, les équations suivantes en charge pour la courbe contraintes-déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } 0 \leq \sigma \leq \frac{G_0+G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{min}^{tr}}^{\frac{\lambda(T)+G_1}{\sigma}} f'(x) C(f(x)) x dx & \text{pour } \frac{G_0+G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{G_0+G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\varepsilon_{min}^{tr}} f'(x) C(f(x)) x dx & \text{pour } \frac{G_0+G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \leq \sigma \end{cases} \quad (2.5.19)$$

Pour ce qui est de la décharge, par un raisonnement similaire et en remplaçant  $G_0+G_1$  par  $-G_0 - G_1$  on obtient une décharge élastique :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_{\varepsilon_{max}^{tr}}^{\varepsilon_{min}^{tr}} f'(x) C(f(x)) x dx \quad \text{pour } \sigma \geq 0 \quad (2.5.20)$$

Ainsi, contrairement à la situation haute température, la courbe est la même pour toute température  $T$  telle que  $\lambda(T) < G_0$ .

## 2.5.4 Chargement thermique à contrainte constante

Etudions à présent un cycle de chargement thermique à contrainte constante  $\sigma$ . Les conditions aux limites du problème sont à présent formulées en force, donc le potentiel à minimiser est le suivant :

$$w(\varepsilon(t), \Theta, T) + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds - \sigma \varepsilon \quad (2.5.21)$$

Par définition,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \quad (2.5.22)$$

Donc en remplaçant dans l'expression 2.5.21, le problème de minimisation s'écrit :

$$\inf_{\varepsilon, \Theta} \frac{-\sigma^2}{2E} + \lambda(T) \int_0^1 \theta_0(s) + \theta_1(s) ds + G_0 \int_0^1 |\theta_0(s) - \theta_0^0(s)| ds + G_1 \int_0^1 |\theta_1(s) - \theta_1^0(s)| ds - \sigma \int_0^1 \theta_1(s) \varepsilon^{tr}(s) ds \quad (2.5.23)$$

Partons d'un état initialement austénitique, à une température  $\tilde{T}$  haute :  $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$  pour tout  $s$ . Appliquons alors la contrainte  $\sigma$ . On distingue trois cas :

**Cas A :**  $\sigma < \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon_{max}^{tr}}$

Avec cette condition, on a à fortiori  $\sigma < \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}}$  donc d'après (2.5.15) nous obtenons l'état  $\theta_0(s) = \theta_1(s) = 0$  pour tout  $s$ . Le cycle thermique débute par un refroidissement. Les deux variables internes  $\theta_0(s)$  et  $\theta_1(s)$  ne peuvent qu'augmenter donc le problème de minimisation (2.5.23) avec  $\sigma$  constant devient :

$$\inf_{\Theta} \int_0^1 (\lambda(T) + G_0) \theta_0(s) ds + \int_0^1 (\lambda(T) + G_1 - \sigma \varepsilon^{tr}(s)) \theta_1(s) ds \quad (2.5.24)$$

On remarque que pour tout  $s$  et pour tout  $T$ ,  $\lambda(T) + G_0 < \lambda(T) + G_1 - \sigma \varepsilon^{tr}(s)$ . Par conséquent, la martensite autoaccommodée  $\theta_0$  est plus stable sous cette contrainte que la martensite orientée  $\theta_1$  :

$$\begin{cases} \theta_0(s) = 0 \\ \theta_1(s) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } s, \text{ si } T \geq T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda} \quad (2.5.25)$$

$$\begin{cases} \theta_0(s) = C(s) \\ \theta_1(s) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } s, \text{ si } T < T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda}$$

On n'observe pas de déformation macroscopique en dehors de la déformation élastique causée par l'application de la contrainte  $\sigma$ , et lors du chauffage le comportement est similaire, avec une température seuil  $T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda}$  : on retrouve le comportement de l'AMF à contrainte nulle, détaillé en section 2.4.2.

**Cas B :**  $\frac{G_1 - G_0}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon_{min}^{tr}}$

D'après (2.5.15) nous obtenons l'état suivant à l'issue de l'application de la contrainte  $\sigma$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas B.1 : } \begin{cases} \theta_0(s) = 0 \\ \theta_1(s) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } s, \text{ si } \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \\ \text{Cas B.2 : } \begin{cases} \theta_0(s) = 0 & \text{pour tout } s \\ \theta_1(s) = C(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq f\left(\frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\sigma}\right) \\ \theta_1(s) = 0 & \text{pour } f\left(\frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\sigma}\right) \leq s \leq 1 \end{cases} \quad \text{si } \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \end{array} \right. \quad (2.5.26)$$

Remarquons que suivant la fonction texture  $\varepsilon^{tr}(s)$ , le cas B.2 peut ne pas exister. Dans le cas B.1, de même qu'en A on cherche pour le refroidissement :

$$\inf_{\Theta} \int_0^1 (\lambda(T) + G_0) \theta_0(s) ds + \int_0^1 (\lambda(T) + G_1 - \sigma \varepsilon^{tr}(s)) \theta_1(s) ds \quad (2.5.27)$$

Donc rien ne se passe lors du refroidissement jusqu'à  $T = T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon_{max}^{tr} - G_1)}{\lambda}$ . Soit  $s^* = f(\frac{G_1 - G_0}{\sigma})$ , on a alors :

$$\begin{cases} \lambda(T) + G_0 \geq \lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s) & \text{pour } s \leq s^* \\ \lambda(T) + G_0 < \lambda(T) + G_1 - \sigma\varepsilon^{tr}(s) & \text{pour } s > s^* \end{cases} \quad (2.5.28)$$

A partir de cette température  $T$  on a donc apparition de  $\theta_1$  pour les orientations les plus favorables, en commençant par  $\varepsilon_{max}^{tr}$  et jusqu'à  $\varepsilon^{tr}(s^*)$ . Cette évolution s'accompagne d'un allongement de l'AMF. Ensuite, à partir de  $T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda}$  on a apparition de  $\theta_0$  pour toutes les orientations  $s > s^*$ . Dans cette deuxième partie du changement de phase, on n'observe pas de changement macroscopique dans l'AMF. Ce seuil  $s^*$  dépend de la texture  $\varepsilon^{tr}(s)$ . Par exemple, lorsqu'il vaut  $s^* = 1$  on a transformation intégrale en  $\theta_1$ .

Le cas B.2 est similaire mais il n'y a pas d'évolution élastique (Apparition de  $\theta_0$  sans déformation macroscopique) : on a directement apparition de  $\theta_1$  pour les orientations les plus favorables, en commençant par  $s = f(\frac{\lambda(T) + G_1}{\sigma})$ . Pour les deux cas, les équations des courbes déformation-température lors du refroidissement sont donc :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon_{max}^{tr} - G_1)}{\lambda} \quad (\text{dans le cas B.1}) \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f(\frac{\lambda(T) + G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T^A < T < T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon_{max}^{tr} - G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f(\frac{G_1 - G_0}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T \leq T^A \end{cases} \quad (2.5.29)$$

De la même façon, lors du chauffage à partir de  $T \leq T^A$  on a d'abord disparition de  $\theta_0$  pour  $T^B = T_0 + \frac{T_0 G_0}{\lambda}$  puis disparition de  $\theta_1$  à partir de  $\lambda(T) = G_1 + \sigma\varepsilon^{tr}(s^*)$ , soit  $T = T_0 + \frac{T_0(2G_1 - G_0)}{\lambda}$ . On peut alors montrer que les équations des courbes déformation-température sont :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f(\frac{G_1 - G_0}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T \leq T_0 + \frac{T_0(2G_1 - G_0)}{\lambda} \quad (\text{évolution élastique}) \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f(\frac{\lambda(T) - G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds & \text{pour } T_0 + \frac{T_0(2G_1 - G_0)}{\lambda} < T < T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon_{max}^{tr} + G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0 + \frac{T_0(\sigma\varepsilon_{max}^{tr} + G_1)}{\lambda} \end{cases} \quad (2.5.30)$$

**Cas C :**  $\frac{G_1 - G_0}{\varepsilon_{min}^{tr}} < \sigma$

D'après (2.5.15) nous obtenons l'état suivant à l'issue de l'application de la contrainte  $\sigma$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Cas C.1 : } \left\{ \begin{array}{l} \theta_0(s) = 0 \\ \theta_1(s) = 0 \end{array} \right. & \text{pour tout } s, \text{ si } \frac{G_1 - G_0}{\varepsilon_{min}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \\ \\ \text{Cas C.2 : } \left\{ \begin{array}{ll} \theta_0(s) = 0 & \text{pour tout } s \\ \theta_1(s) = C(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq f\left(\frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\sigma}\right) \\ \theta_1(s) = 0 & \text{pour } f\left(\frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\sigma}\right) \leq s \leq 1 \end{array} \right. & \text{si } \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \leq \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{min}^{tr}} \\ \\ \text{Cas C.3 : } \left\{ \begin{array}{l} \theta_0(s) = 0 \\ \theta_1(s) = C(s) \end{array} \right. & \text{pour tout } s, \text{ si } \frac{\lambda(\tilde{T}) + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}} \leq \sigma \end{array} \right. \quad (2.5.31)$$

Suivant la fonction  $\varepsilon^{tr}(s)$  adoptée, les situations C.1 et C.2 peuvent être impossibles. On cherche pour le refroidissement :

$$\inf_{\Theta} \int_0^1 (\lambda(T) + G_0) \theta_0(s) ds + \int_0^1 (\lambda(T) + G_1 - \sigma \varepsilon^{tr}(s)) \theta_1(s) ds \quad (2.5.32)$$

Pour les trois cas, on remarque que pour tout  $s$ ,  $\lambda(T) + G_0 > \lambda(T) + G_1 - \sigma \varepsilon^{tr}(s)$  donc il n'y a jamais apparition de  $\theta_0$ . On a apparition de  $\theta_1$  à partir de  $T = T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{max}^{tr} - G_1)}{\lambda}$ . Les équations des courbes déformation-température lors du refroidissement sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{max}^{tr} - G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f\left(\frac{\lambda(T) + G_1}{\sigma}\right)} C(s) \varepsilon^{tr}(s) ds & \text{pour } T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{min}^{tr} - G_1)}{\lambda} < T < T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{max}^{tr} - G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^1 C(s) \varepsilon^{tr}(s) ds & \text{pour } T \leq T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{min}^{tr} - G_1)}{\lambda} \end{array} \right. \quad (2.5.33)$$

Pour les courbes de chauffage, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^1 C(s) \varepsilon^{tr}(s) ds & \text{pour } T \leq T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{min}^{tr} + G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f\left(\frac{\lambda(T) - G_1}{\sigma}\right)} C(s) \varepsilon^{tr}(s) ds & \text{pour } T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{min}^{tr} + G_1)}{\lambda} < T < T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{max}^{tr} + G_1)}{\lambda} \\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} & \text{pour } T \geq T_0 + \frac{T_0(\sigma \varepsilon_{max}^{tr} + G_1)}{\lambda} \end{array} \right. \quad (2.5.34)$$

En Figure 2.5.4, trois cycles thermiques correspondant aux cas A, B et C sont présentés. Le cas A correspond à une contrainte imposée trop basse : La déformation

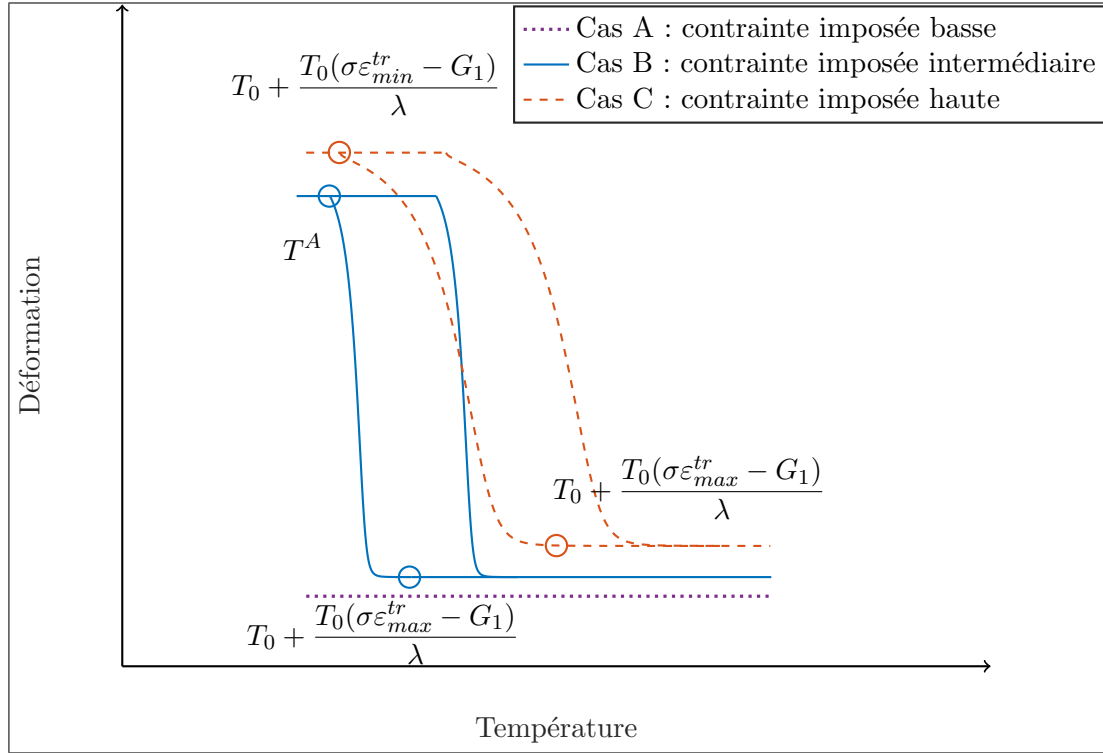


FIGURE 2.5.4 – Cycles thermiques à contrainte constante - trois cas distincts

correspond à la déformation élastique de l'AMF, mais aucun changement de phase n'a lieu et la déformation reste constante au cours du cycle thermique. Le cas B correspond à une contrainte intermédiaire, permettant de réaliser un cycle thermique où le fil s'étire lors du refroidissement jusqu'à la température  $T^A$ , puis raccourcit lors du chauffage. Dans le cas C, la contrainte appliquée est supérieure. La déformation atteinte à basse température est supérieure, et les températures de début et fin de transformation de phase sont décalées : un refroidissement moins important suffit à déclencher l'apparition de martensite.

Pour simplifier l'identification des paramètres du modèle, calculons la différence de température entre la courbe de chauffage et la courbe de refroidissement, à déformation  $\varepsilon$  fixée. Pour ceci, plaçons-nous dans la portion de la courbe correspondant au changement de phase, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sigma}{E} < \varepsilon < \frac{\sigma}{E} + \int_0^{f(\frac{G_1 - G_0}{\sigma})} C(s) \varepsilon^{tr}(s) ds & \text{dans le cas B} \\ \frac{\sigma}{E} < \varepsilon < \frac{\sigma}{E} + \int_0^1 C(s) \varepsilon^{tr}(s) ds & \text{dans le cas C} \end{array} \right. \quad (2.5.35)$$

Donc à  $\varepsilon$  fixé, nommons  $T_1$  la température sur la courbe de chauffe et  $T_2$  la température sur la courbe de refroidissement. On résout l'équation :

$$\int_0^{f(\frac{\lambda(T_1)-G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds = \int_0^{f(\frac{\lambda(T_2)+G_1}{\sigma})} C(s)\varepsilon^{tr}(s)ds \quad (2.5.36)$$

Comme la fonction  $\varepsilon^{tr}(s)$  est strictement décroissante, on en déduit :

$$\lambda(T_2) + G_1 = \lambda(T_1) - G_1 \quad (2.5.37)$$

Donc la différence de température entre les deux courbes vaut :

$$\Delta T = \frac{2G_1 T_0}{\lambda} \quad (2.5.38)$$

Cette relation permet d'identifier facilement le paramètre  $G_1$  à partir des courbes de chauffe à contrainte fixée, les paramètres  $T_0$  et  $\lambda$  étant identifiables par l'essai de calorimétrie.

## 2.6 Identification des paramètres par calorimétrie

La caractérisation d'un AMF commence généralement par l'essai de calorimétrie (Differential Scanning Calorimetry, DSC) où l'on fait varier la température d'un échantillon libre de contraintes pour provoquer des changements de phase. Il permet d'obtenir les valeurs des températures de changement de phase ainsi que les chaleurs latentes, avec lesquelles l'identification de certains paramètres du modèle est possible. Un petit échantillon du matériau est chauffé ou refroidi, et les flux de chaleur absorbés ou libérés par l'échantillon sont mesurés de façon précise. Dans cet essai où le matériau est libre de contraintes, les caractéristiques mécaniques n'interviennent pas, et le protocole expérimental est donc moins sujet à discussion que dans le cas d'essais de traction, où de nombreux paramètres d'essai ont une influence sur les résultats. Toutefois, il y a certaines précautions à prendre lors l'interprétation des résultats de cet essai (Shaw et al. (2008), Duerig and Bhattacharya (2015), Duerig et al. (2017)). Ainsi, il existe en réalité une troisième phase qui peut coexister avec l'austénite et la martensite dans certains AMF, notamment dans l'alliage Nickel-Titane, on la nomme *R-phase* pour son réseau cristallin rhomboédrique. La phase martensite est généralement plus stable que la R-phase aux basses températures, mais il arrive que la barrière d'énergie à franchir pour former la martensite soit plus importante que celle menant à la formation de R-phase, d'où l'existence de R-phase dans certaines plages de température (Duerig and Bhattacharya (2015)). Nous avons fait le choix de ne pas inclure cette phase dans le modèle, ce qui sera justifié ci-après.

### 2.6.1 Protocole expérimental

Un échantillon de fil vierge en alliage Nickel-Titane (55,3 % de Ni en masse, 44,4 % de Ti en masse, soit 50,4 % atomique de Ni et 49,6 % atomique de Ti) fourni par Memry Corp. (USA), recuit et redressé, de diamètre 0,5 mm et de masse 7,9 mg, a été testé. L'appareil est le DSC 250 (marque TA Instruments) avec flux d'azote inerte. Le protocole expérimental est le suivant : le fil est tout d'abord amené à haute température pour garantir qu'il se trouve dans un état austénitique. Ensuite, deux cycles refroidissement-chauffage sont réalisés (voir Table 2.2 ). La vitesse d'essai est de 10 °C par minute.

TABLE 2.2 – Protocole expérimental

|                                               |
|-----------------------------------------------|
| Début d'essai à 20 °C                         |
| Rampe jusqu'à 250 °C (état initial austénite) |
| Rampe jusqu'à -90 °C                          |
| Rampe jusqu'à 250 °C                          |
| Rampe jusqu'à -90 °C                          |
| Rampe jusqu'à 250 °C                          |

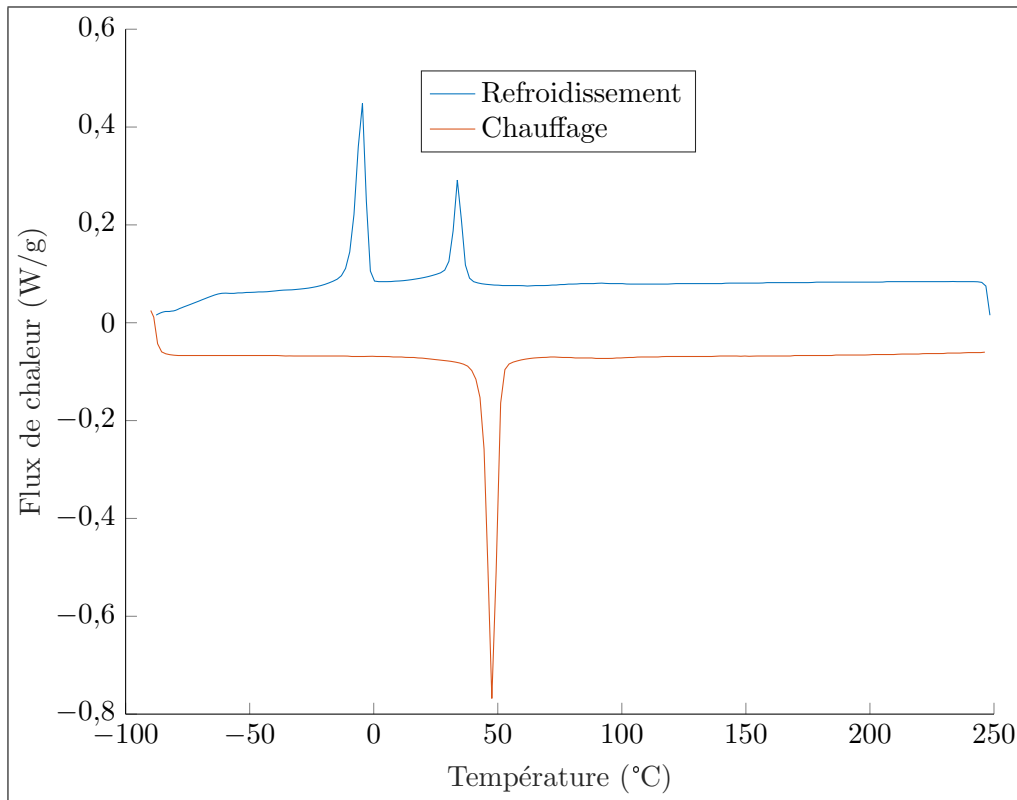


FIGURE 2.6.1 – Essai de calorimétrie

### 2.6.2 Grandeurs mesurées

Sur la figure 2.6.1 on peut observer que les courbes des deux cycles sont confondues. Lors du refroidissement (courbe bleue), un premier pic est observé aux alentours de 40 °C, correspondant à la transformation Austénite - R-phase. Un second pic, plus important, correspond à la transformation R-phase - Martensite. Il est important de refroidir le matériau suffisamment pour pouvoir observer les deux pics. En effet, l'absence de deuxième pic au refroidissement pourrait conduire à la conclusion de l'absence de R-phase, alors que la martensite aurait été masquée par la présence de R-phase à des températures intermédiaires (Duerig and Bhattacharya (2015)). Lors du chauffage (courbe rouge), un seul pic correspondant à la transformation Martensite - Austénite est observé, et deux situations sont possibles. La première interprétation est qu'il n'y a pas d'apparition de R-phase lors du chauffage, car la barrière cinétique à la formation d'austénite est franchie avant que la R-phase puisse apparaître. La deuxième interprétation possible est qu'il y a un pic de formation de R-phase confondu avec le pic de formation d'austénite : la R-phase n'existe que sur une plage de températures négligeable et se transforme immédiatement en austénite (Shaw et al. (2008)). Dans les deux cas, nous pouvons supposer que la R-phase n'existe pas lors du chauffage. Nous faisons aussi le choix d'ignorer la

présence de R-phase lors du refroidissement. En effet, elle a tendance à laisser place à la martensite lorsque le fil est soumis à une contrainte (Duerig et al. (2017)). Par la suite le fil AMF sera presque exclusivement étudié sous contrainte de traction, sauf au début du chargement mécanique. Pour cette raison, les essais mécaniques débuteront toujours sur un fil préalablement chauffé à 100 °C puis refroidi à -20 °C avant d'être porté à la température de l'essai, pour garantir que le fil se trouve initialement en phase martensite. Ainsi, les essais de chargement mécanique débutent toujours avec un fil AMF se trouvant en phase martensite autoaccommodée ou bien austénite.

Ici, le pic observé lors du chauffage est plus important que le pic de formation de martensite observé lors du refroidissement : Il correspond donc probablement à la disparition de la martensite ainsi qu'à la formation et disparition de la R-phase, les deux phénomènes étant confondus. Les valeurs mesurées sont reproduites en Table 2.3 :

TABLE 2.3 – Valeurs mesurées par calorimétrie

| Pic                     | Température | Enthalpie |
|-------------------------|-------------|-----------|
| formation de martensite | -4,6 °C     | 11,5 J/g  |
| formation d'austénite   | 48,1 °C     | 22,9 J/g  |

Cette mesure expérimentale est proche de la température donnée par le fabricant ( $A_f = 53$  °C), bien que celui-ci effectue la mesure sur l'alliage avant le processus de traitement thermique. Lors de ce processus, l'alliage est recuit et redressé, ce qui peut modifier les températures de changement de phase. Les mesures d'enthalpie sont cohérentes avec la littérature : par exemple dans Shaw et al. (2008) la chaleur latente de formation d'austénite vaut 19,7 J/g pour un fil désigné comme *shape memory*, c'est-à-dire qu'à température ambiante il se trouve en phase martensitique ou bien R-phase, comme le fil AMF étudié ici.

### 2.6.3 Exploitation des données

En section 2.3.4 nous avons calculé les températures de changement de phase données par le modèle monocristallin, et en section 2.4.3 celles données par le modèle polycristallin (équations (2.3.20) et (2.4.8)). Elles ont la même expression et font intervenir les mêmes paramètres, donc l'identification faite ici est valable pour les deux modèles. On observe que ces deux températures se trouvent à égale distance de  $T_0$  : par conséquent, le paramètre  $T_0$  du modèle correspond à la moyenne des deux températures de transformation et est facilement identifiable à l'aide de l'essai :  $T_0 = 294,9$  °K soit  $T_0 = 21,8$  °C

Le paramètre  $\lambda$  du modèle correspond à l'enthalpie volumique de transformation de phase. Nous choisissons de la mesurer expérimentalement à l'aide du pic de formation de martensite autoaccommodée lors du refroidissement, pour éviter la confusion avec

la formation de R-phase. L'essai de calorimétrie nous donne l'enthalpie massique de transformation de phase. En adoptant une densité de  $\rho = 6,45 \text{ mg/mm}^3$  pour le Nickel-Titane (Churchill et al. (2010)) on obtient  $\lambda = 11,5 \times 6,45.10^{-3} = 7,42.10^{-2} \text{ J.mm}^{-3} = 74,2 \text{ MPa}$

Comme démontré en section 2.4.2, ces deux paramètres sont valides à la fois pour le modèle monocristallin et pour le modèle polycristallin. En conclusion :

$$T_0 = 294,9 \text{ °K} \quad (2.6.1)$$

$$\lambda = 74,2 \text{ MPa} \quad (2.6.2)$$

## 2.7 Dispositif expérimental de traction sur fil AMF

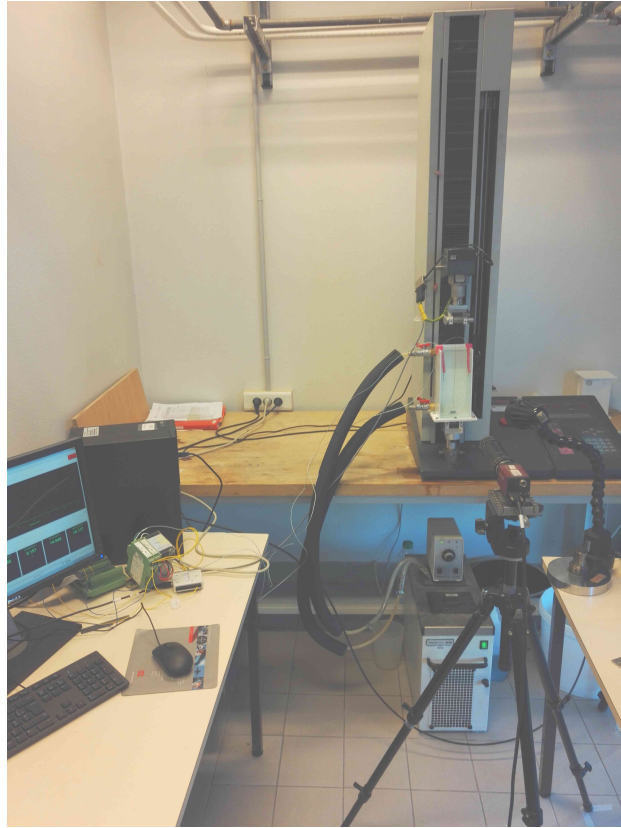


FIGURE 2.7.1 – Dispositif expérimental pour essais de traction sur fil AMF - vue d'ensemble

La réalisation d'essais mécaniques sur des fils AMF est délicate, car de nombreux paramètres d'essai comme la température ou la vitesse de chargement peuvent avoir une grande influence sur les résultats. Un dispositif expérimental adapté, photographié en Figure 2.7.1, a donc été mis au point au cours de la thèse. Il permet de réaliser des essais de traction sur un fil AMF dans l'eau, avec mesure des déformations par analyse d'images. Au centre du dispositif, une boîte en PMMA accueillant l'eau pour la régulation de température est fixée en partie basse par une pièce adaptée aux mors cylindriques de la machine, cette pièce permettant aussi le serrage du fil AMF. En partie haute, la boîte est ouverte et le fil AMF est pris dans des mors cylindriques fixés à la cellule de force d'une capacité de 100N. La machine de traction utilisée est une ADAMEL DY31. Un programme sous environnement MATLAB a été développé au laboratoire pour acquérir simultanément les valeurs mesurées par la cellule de force, la température d'essai ainsi que les images du fil. Nous détaillerons en section 2.7.1 le contrôle de la température d'essai, avant de justifier la vitesse de chargement en section 2.7.2, puis nous exposerons

la technique de mesure de la déformation du fil AMF en section 2.7.3.

### 2.7.1 Contrôle de la température

Pour réaliser des essais de traction sur fil AMF, il est crucial de garantir une température réellement constante. En effet, le changement de phase intervenant lors du chargement mécanique est exothermique (Churchill et al. (2010)). Lors d'un essai mécanique à basse température, la transformation de martensite autoaccommodée en martensite orientée (de  $\theta_0$  vers  $\theta_1$  dans le modèle) s'accompagne d'une production de chaleur. Lors d'un essai à haute température, la transformation d'austénite en martensite orientée, s'accompagne aussi d'une production de chaleur. Dans le premier cas, la décharge ne présente pas de changement de phase, mais dans le second cas, le changement de phase inverse lors de la décharge est endothermique. Pour contrôler précisément la température, le choix a donc été fait de réaliser les essais dans l'eau. Cet environnement favorisant les échanges thermiques, nous pouvons considérer que la température de l'eau est aussi celle du fil AMF. Un appareil de régulation thermique maintient l'eau à la température souhaitée et la fait circuler à travers la boîte en PMMA. L'eau entre dans la boîte par le bas, et en sort par débordement pour retourner dans l'appareil de régulation thermique. Enfin, deux thermocouples plongés dans l'eau permettent de mesurer la température de l'eau. Cette circulation d'eau est schématisée en Figure 2.7.2.

### 2.7.2 Vitesse de chargement

Plus la transformation de phase de l'AMF est rapide, plus la chaleur latente liée au changement de phase est libérée rapidement (Churchill et al. (2010)). Dans la littérature, une vitesse de chargement globale de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  en déformation est généralement conseillée (Kim and Daly (2013)) pour ne pas provoquer de changements de température dans le fil. Dans Churchill et al. (2010) il est observé que les variations de température du fil lors de l'essai deviennent négligeables pour une vitesse de chargement de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  dans l'air. Compte tenu des échanges thermiques facilités dans l'eau, il paraît raisonnable de réaliser les essais de traction à une vitesse de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . La traverse de la machine de traction se déplaçant à une vitesse de 1,8 mm/min pour une longueur de fil de 300 mm, la vitesse de chargement globale en déformation vaut  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , toutefois la vitesse de chargement observée localement sur le fil pourra être légèrement différente, du fait de l'hétérogénéité des déformations entre la portion du fil immergée dans l'eau et la portion exposée à l'air libre.

### 2.7.3 Mesure de la déformation du fil AMF par corrélation d'images

Lors d'essais de traction sur un fil AMF, il faut porter une attention particulière à la mesure de la déformation. En effet, lors des changements de phase, la déformation peut dans certains cas être inhomogène, suite à une localisation de la transformation (Shaw and Kyriakides (1995), Shaw and Kyriakides (1997)). Or le modèle de proposé ici est un

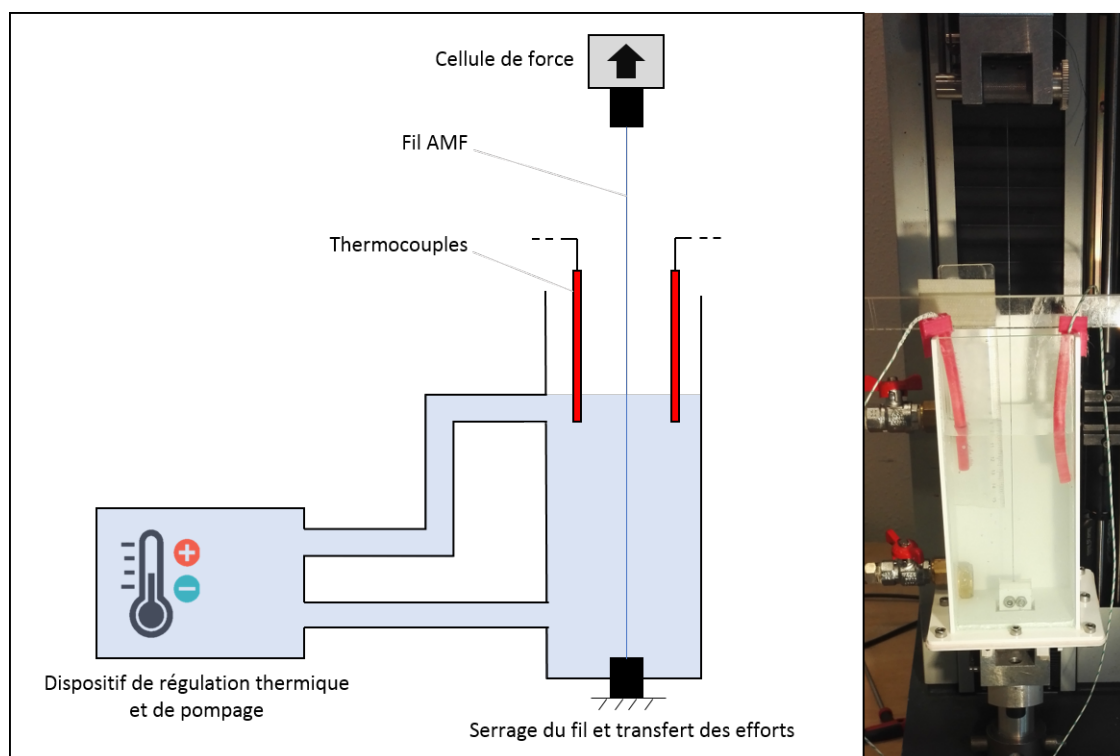


FIGURE 2.7.2 – Dispositif expérimental pour essais de traction sur fil AMF - Détail

modèle de comportement homogène : comme le soulignent Sittner et al. (2005), il serait erroné de mesurer une déformation uniquement de façon locale.

Pour éviter cet écueil, la technique de la corrélation d'images (Digital Image Correlation) est utilisée ici. Une paroi du dispositif expérimental est constituée d'une vitre en PMMA transparent, de façon à pouvoir acquérir les déformations par analyse d'images au moyen d'une caméra. Une caméra de la marque Allied Vision Technologies (modèle Pike F421B) enregistre à intervalles réguliers une photographie du fil préalablement recouvert d'un mouchetis de peinture blanche et noire (Reedlunn et al. (2013)). Le logiciel commercial GOM Correlate est ensuite utilisé pour mesurer dans les images *déformées* les déplacements d'une grille de points par rapport à une image *de référence*, ce qui permet ensuite d'en déduire les déformations. Pour identifier deux mêmes points entre l'image de référence et l'image déformée, on définit autour de chaque point une "facette" carrée d'une dizaine de pixels de côté, on parle de *point à facette*. Le fil AMF, dans les images expérimentales, a une largeur d'une vingtaine de pixels. Les gradients de nuances de gris permettent d'identifier les facettes grâce à un algorithme d'optimisation. Deux choix sont possibles pour l'image de référence. Dans la méthode itérative, les déplacements sont toujours mesurés par rapport à l'image précédente, ce qui facilite la reconnaissance des facettes par l'algorithme, moins distordues d'une image à l'autre,

mais l'inconvénient est l'accumulation des erreurs au cours de l'essai. A l'inverse, dans la méthode adoptée par la suite, les déplacements des centres des facettes sont toujours mesurés par rapport à la première image de l'essai : il y a une seule *image de référence*. On choisit ici la première image pour laquelle la valeur de force mesurée dépasse 1 N. Ainsi, le fil est suffisamment droit pour définir une zone de mesure de la déformation sur l'image de référence, nommée *région d'intérêt*. Le choix de l'image de référence à 1 N permet de diminuer l'accumulation des erreurs de mesure par rapport à la méthode itérative, mais la corrélation d'images est plus difficile : pour chaque essai, différentes tailles de facettes et différents intervalles pour la grille de points seront testés, et la configuration donnant les meilleurs résultats sera adoptée. Il est alors possible de définir des extensomètres virtuels, ou bien une zone d'analyse sur laquelle différents champs (déplacements, déformations, etc...) peuvent être calculés à l'aide des déplacements de la grille de points.

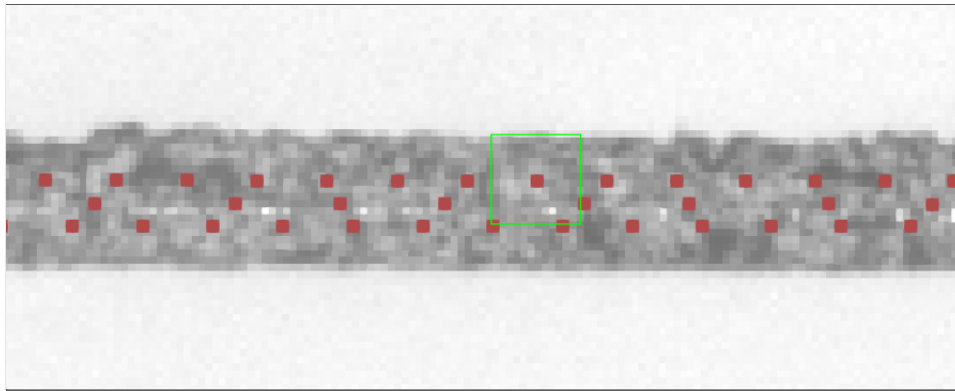


FIGURE 2.7.3 – Fil AMF avec mouquetis en nuances de gris, et grille de points à facette suivis pendant l'essai

Dans notre cas, une région d'intérêt est définie sur une portion de fil mesurant quelques centimètres de longueur. En Figure 2.7.3 les points à facette sont mis en évidence sur le fil avec son mouquetis en nuances de gris, ces points étant répartis sur la région d'intérêt avec un espacement de 10 pixels. L'un d'eux est entouré de sa facette carrée de 13 pixels de côté. Une fois l'analyse des images terminée, le logiciel GOM permet d'obtenir le champ de déplacements au cours du temps. Ces données permettent de calculer différentes grandeurs comme par exemple l'écart-type ou la moyenne du champ de déformations suivant l'axe du fil. Lors du premier essai sur le fil AMF vierge, une déformation localisée est souvent identifiée grâce à la fonction écart-type. Comme nous verrons en section 2.8, il faudra donc réaliser plusieurs essais et choisir un essai pour lequel la déformation du fil est homogène.

#### 2.7.4 Estimation de l'incertitude de la mesure de déformation

La technique de la corrélation d'images présente l'avantage de ne pas être sensible à la température de l'essai et elle permet de mesurer de grandes déformations, ce qui la rend intéressante pour la réalisation d'essais en température sur des AMF. Mais dans le domaine des petites déformations élastiques, il est nécessaire d'estimer les incertitudes liées à l'utilisation de cette méthode. Il y a deux sources d'incertitude dans la mesure des déformations du fil AMF. La première réside dans le dispositif expérimental d'acquisition des images, c'est l'erreur extrinsèque (Carrier (2013)). Ainsi, l'utilisation de la caméra génère du bruit sur les images, et l'échantillon de fil peut subir des déplacements hors-plan menant à de fausses mesures de déplacements. La deuxième réside dans l'algorithme de corrélation d'images employé ainsi que la qualité du mouchetis, c'est l'erreur intrinsèque.

Nous adaptons ici la méthode de la déformation virtuelle employée dans Sutton et al. (2008) pour estimer l'erreur commise dans la mesure de la déformation globale du fil. Soit  $D$  la distance entre la lentille de la caméra et le fil AMF préalablement tendu, la mise au point étant effectuée pour cette distance  $D$ . Six images sont prises dans cette configuration, la première étant l'image de référence pour les mesures suivantes. La caméra est ensuite approchée du fil d'une valeur  $\delta d$  selon l'axe perpendiculaire au plan de l'image à l'aide d'une platine micrométrique, le fil ne subissant pas de changement. Six images sont prises pour chaque configuration, avec  $\delta d$  variant de  $200\ \mu\text{m}$  à  $1000\ \mu\text{m}$  : on connaît donc la déformation apparente théorique sur l'image, qui est de  $\delta d/D$  d'après Sutton et al. (2008). La déformation apparente mesurée est obtenue avec le logiciel GOM Correlate en calculant la moyenne de la déformation axiale du fil sur une zone de quelques centimètres de fil, par rapport à l'image de référence. En Figure 2.7.4 on peut lire la comparaison entre les valeurs théoriques (traits noirs horizontaux) et les 6 valeurs mesurées pour chaque  $\delta d$ . On observe du bruit de mesure car les 6 images prises avec une position identique donnent des déformations apparentes variables. On peut conclure que l'erreur absolue, somme de l'erreur de mesure intrinsèque et de l'erreur de mesure extrinsèque, est de l'ordre de 0,02 % dans le domaine des petites déformations. Il est difficile de faire une estimation de l'erreur pour des déformations plus grandes (supérieures à 1 %) avec cette méthode, car les images ne seraient plus nettes pour  $\delta d$  grand. Toutefois, comme l'erreur est faible dans le domaine des petites déformations, nous supposons qu'elle l'est aussi dans la plage des déformations mesurées sur les AMF. Notons que l'estimation de l'erreur obtenue ici est valable pour une déformation homogène du fil et non pour le calcul d'une déformation locale, car les mesures utilisées sont des moyennes de déformation sur la zone d'intérêt.

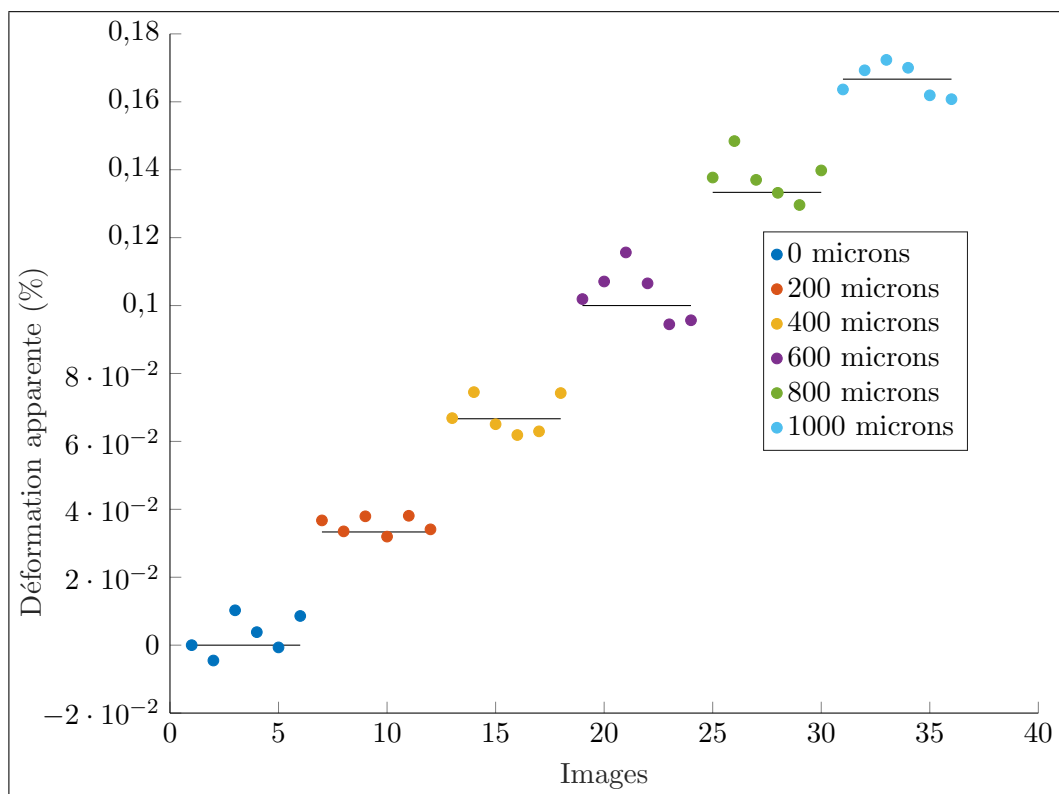


FIGURE 2.7.4 – Estimation de l’erreur de mesure par corrélation d’images pour différentes déformations apparentes réalisées en déplaçant la caméra avec une platine micrométrique

## 2.8 Essais de traction à température contrôlée et identification des paramètres

Plusieurs essais de traction isotherme à température ambiante (25 °C) ont été menés sur un même fil Nickel-Titane. L'objectif de ces essais est d'observer le comportement de réorientation à basse température de l'AMF : en effet, à température ambiante le matériau étudié présente un comportement basse température à condition de l'avoir préalablement refroidi au-dessous de la température seuil  $T^A = T_0 - \frac{T_0 G_0}{\lambda}$ , d'après les conclusions de l'essai de calorimétrie en section 2.6. Chaque essai est mené sur le fil ayant préalablement été porté à 100 °C dans une étuve puis à -20 °C dans un congélateur, de façon à mener l'essai sur un fil initialement en phase martensite autoaccommodée, avec une déformation de transformation de phase nulle. D'après l'essai de calorimétrie en section 2.6, si le fil n'est pas suffisamment refroidi entre deux essais, il se trouvera sous forme de R-phase, or cette phase n'est pas modélisée dans ce travail.

### 2.8.1 Reproductibilité de l'essai de traction isotherme

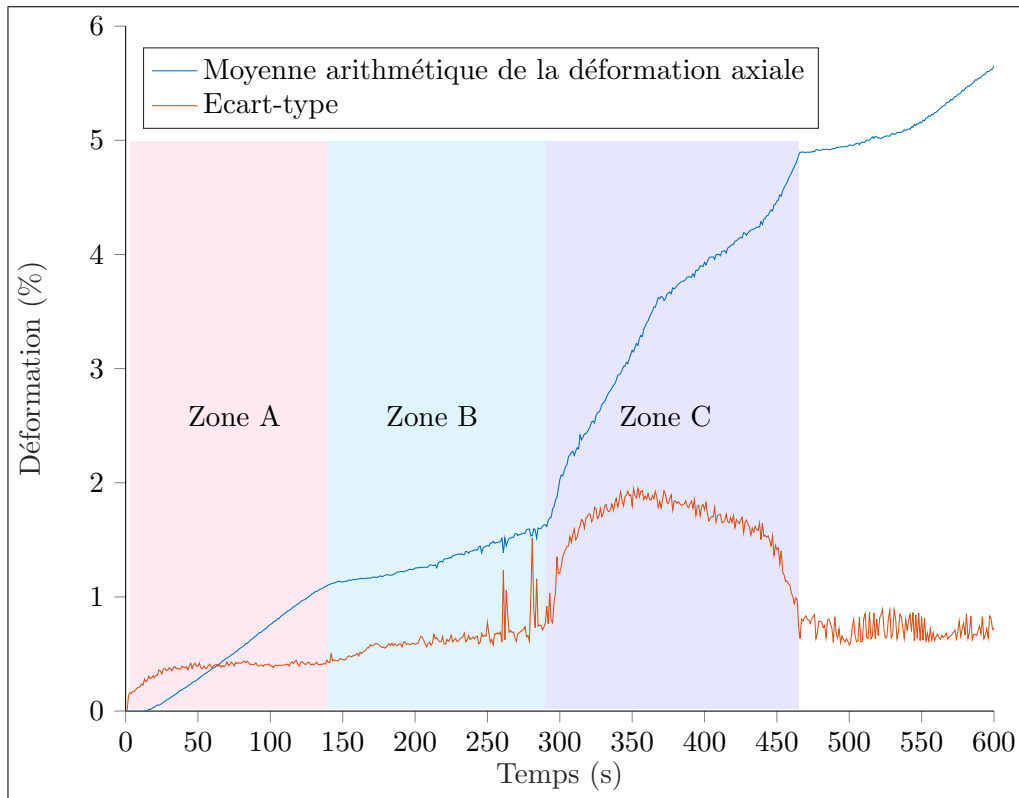


FIGURE 2.8.1 – Déformation localisée sur le fil vierge

Comme mentionné en section 2.7.3, les premiers essais réalisés sur un fil vierge ne

présentent généralement pas une déformation homogène. Ainsi, la Figure 2.8.1 représente la moyenne du champ de déformations suivant l'axe du fil ainsi que l'écart-type de cette donnée, obtenus à l'aide du logiciel GOM Correlate. Uniquement la charge a été représentée, car la reconnaissance des images était moins bonne durant la phase de décharge. Dans la zone A, la déformation augmente de façon homogène : cela correspond à la partie élastique du comportement du fil. Ensuite, dans la zone B la déformation n'augmente que faiblement : cela correspond probablement au début de la transformation de phase dans une zone non observée du fil (en dehors du champ de la caméra). Enfin, dans la zone C la transformation de phase se produit dans la zone du fil observée : on constate une forte croissance de la déformation avec une brusque augmentation de l'écart-type, signe que la déformation n'est plus homogène. Cette localisation semble disparaître au bout d'un certain nombre de cycles de chargement. En effet, sur la Figure 2.8.2, correspondant au quatrième essai réalisé sur le même fil, on constate que le champ de déformation est homogène tout au long de l'essai, y compris lors du changement de phase. Ici, la charge et la décharge sont représentées. Ce résultat est ensuite reproductible sur plusieurs essais. Ainsi, en Figure 2.8.3 les essais A, B et C ont été réalisés sur le même fil AMF. Parmi eux, c'est l'essai B qui sera utilisé pour l'identification des paramètres du modèle.

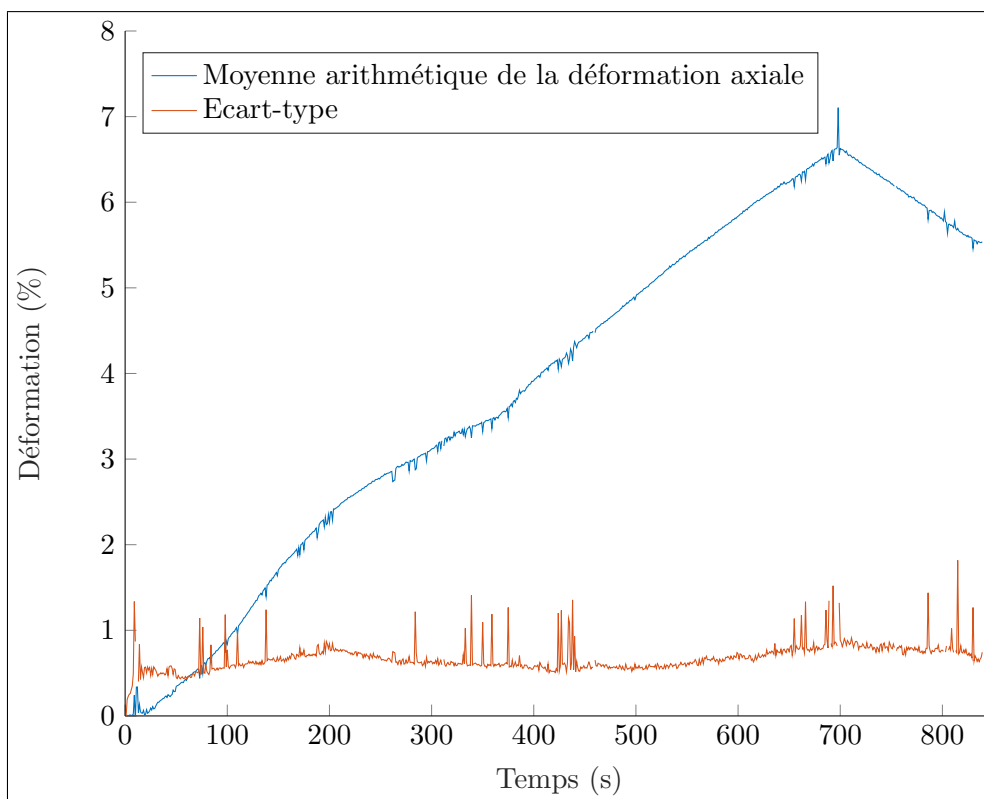


FIGURE 2.8.2 – Déformation homogène du fil AMF lors du quatrième cycle

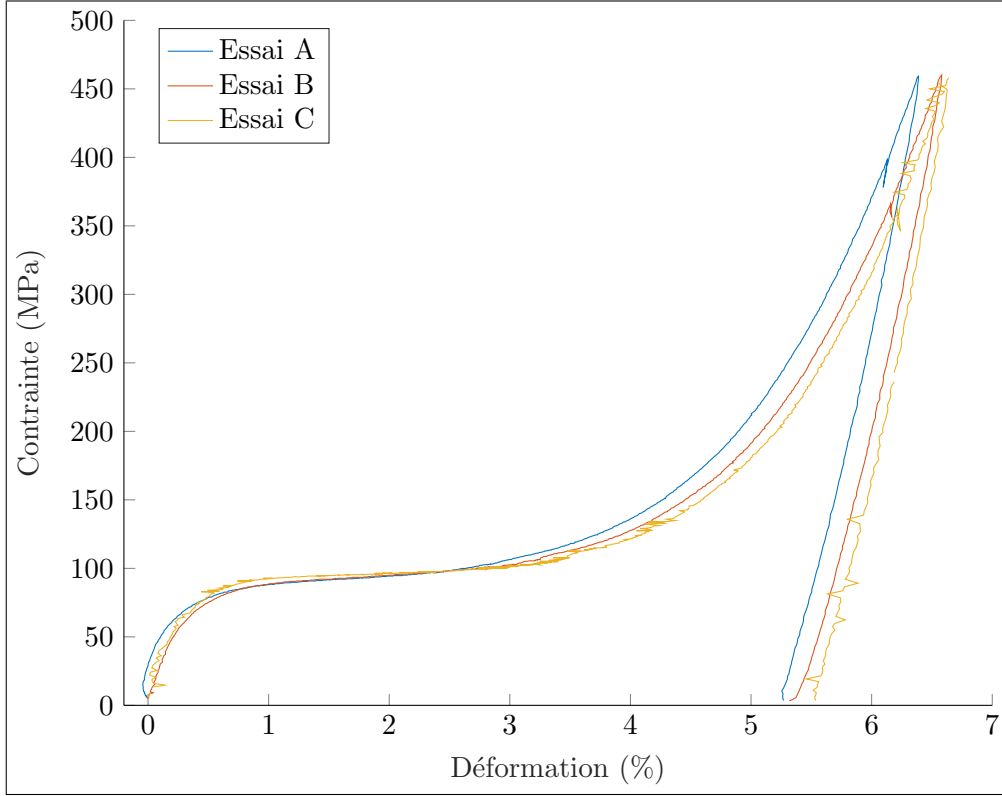


FIGURE 2.8.3 – Reproductibilité des essais de traction sur fil AMF

## 2.8.2 Identification des paramètres du modèle

A l'aide de l'essai de calorimétrie décrit en section 2.6, de l'essai de traction isotherme présenté ci-dessus, et de l'essai de cycle thermique à contrainte constante présenté en section 2.9 il est possible de déterminer l'ensemble des paramètres du matériau dans le modèle. Pour cela, il reste à postuler une fonction texture  $\varepsilon^{tr}(s)$ , introduite pour le modèle polycristallin en section 2.4. Les fils Nickel-Titane semblent généralement posséder une texture orientée (Thamburaja and Anand (2001), Laplanche et al. (2017), Bhattacharya (2003)), c'est-à-dire que les grains dans le polycristal ne sont pas orientés de façon aléatoire par rapport à l'axe du fil. On parle souvent de *texture de fibre*. Nous cherchons donc  $\varepsilon^{tr}(s)$  sous la forme d'une fonction strictement décroissante de  $s$ , définie entre 0 et 1, qui possède un plateau horizontal dans la zone centrale, correspondant à une orientation majoritaire dans le polycristal. Nous adoptons l'expression suivante pour la fonction texture :

$$\varepsilon^{tr}(s) = (\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}) \left( \frac{1 - \tanh(\beta(\tan(\pi(s^\gamma - \frac{1}{2}))))}{2} \right) + \varepsilon_{min}^{tr} \quad (2.8.1)$$

où  $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^2$ . Cette fonction présente l'avantage d'être inversible, et les paramètres

$\beta$  et  $\gamma$  permettent de maîtriser la forme de la courbe pendant le changement de phase. La fonction inverse de  $\varepsilon^{tr}(s)$  est :

$$f(x) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{1}{\beta} \operatorname{atanh} \left( 1 - 2 \left( \frac{x - \varepsilon_{min}^{tr}}{\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}} \right) \right) \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.8.2)$$

Le calcul des solutions analytiques nécessite l'expression de la dérivée de  $f$ . Pour cela, nous posons l'expression suivante :

$$H(x) = \operatorname{atanh} \left( 1 - 2 \left( \frac{x - \varepsilon_{min}^{tr}}{\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}} \right) \right) \quad (2.8.3)$$

Nous avons alors :

$$f'(x) = \frac{\beta}{2\gamma\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{H(x)}{\beta} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma} - 1} \frac{1}{(\varepsilon_{min}^{tr} - x)(\beta^2 + H(x)^2)} \frac{1}{1 - \left( \frac{x - \varepsilon_{min}^{tr}}{\varepsilon_{max}^{tr} - \varepsilon_{min}^{tr}} \right)} \quad (2.8.4)$$

Le paramètre  $\varepsilon_{max}^{tr}$  correspond à la plus grande déformation de transformation de phase réalisable pour un grain orienté de façon optimale par rapport à l'axe du fil. D'après le modèle, les grains *favorablement orientés*, c'est-à-dire ceux qui subissent la plus grande déformation dans l'axe du fil lors du changement de phase, sont aussi les premiers à subir le changement de phase lors du chargement mécanique. En effet on observe dans les équations (2.5.19) que la contrainte de début de changement de phase dépend de  $\varepsilon_{max}^{tr}$  alors que la contrainte de fin de changement de phase dépend de  $\varepsilon_{min}^{tr}$ . Les grains présentant une faible déformation de changement de phase seront les derniers à entamer leur transformation de phase.

La théorie cristallographique de la transformation martensitique permet de calculer cette déformation maximale, elle vaut 13,1% pour l'alliage Nickel-Titane de composition 49,8% de Ni d'après Matsumoto et al. (1987). Nous adoptons donc  $\varepsilon_{max}^{tr} = 0,131$ . Or d'après les équations (2.5.19) la contrainte de début de changement de phase vaut  $\frac{G_0 + G_1}{\varepsilon_{max}^{tr}}$ . En détectant la contrainte correspondant à une fin de linéarité de la courbe contraintes-déformations, il est donc possible de déterminer  $G_0 + G_1$ .

L'essai de traction B, mené à 25 °C, est représenté en Figure 2.8.4. On peut lire sur la courbe expérimentale une fin de domaine élastique pour  $\sigma^{lin} = 50$  MPa. Nous avons donc :

$$G_0 + G_1 = \sigma^{lin} \varepsilon_{max}^{tr} = 6,5 \text{ MPa} \quad (2.8.5)$$

A présent,  $E$  est identifié à l'aide de la pente en début d'essai, dans la zone  $\sigma < \sigma^{lin}$ . Enfin, les paramètres restants  $\varepsilon_{min}^{tr}$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont identifiés par essai-erreur à l'aide des

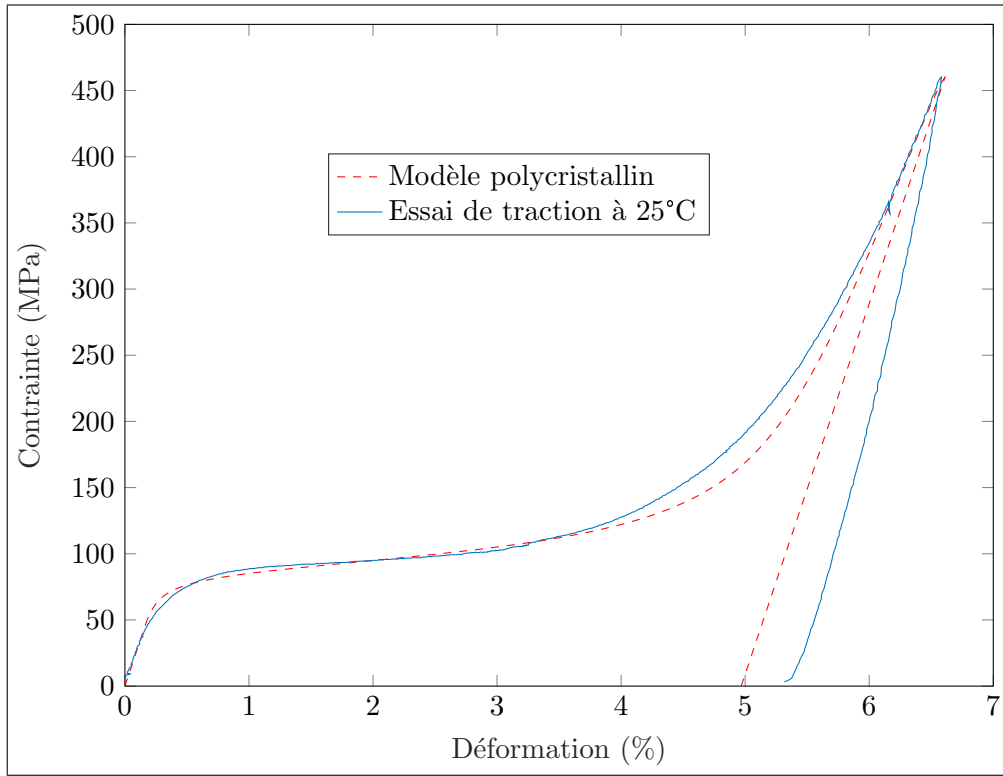


FIGURE 2.8.4 – Identification des paramètres du modèle polycristallin - Traction à 25 °C

courbes numériques analytiques du polycristal. La courbe contraintes-déformations du modèle polycristallin, obtenue après identification des paramètres, est représentée en Figure 2.8.4. Les paramètres matériau obtenus pour ce fil Nickel-Titane sont listés en Table 2.4 pour le modèle polycristallin.

TABLE 2.4 – Identification des paramètres du polycristal

|                          |       |     |
|--------------------------|-------|-----|
| $E$                      | 28000 | MPa |
| $\lambda$                | 74,2  | MPa |
| $T_0$                    | 294,9 | °K  |
| $\varepsilon_{min}^{tr}$ | 0,014 |     |
| $\varepsilon_{max}^{tr}$ | 0,131 |     |
| $\beta$                  | 0,25  |     |
| $\gamma$                 | 0,35  |     |
| $G_0 + G_1$              | 6,5   | MPa |

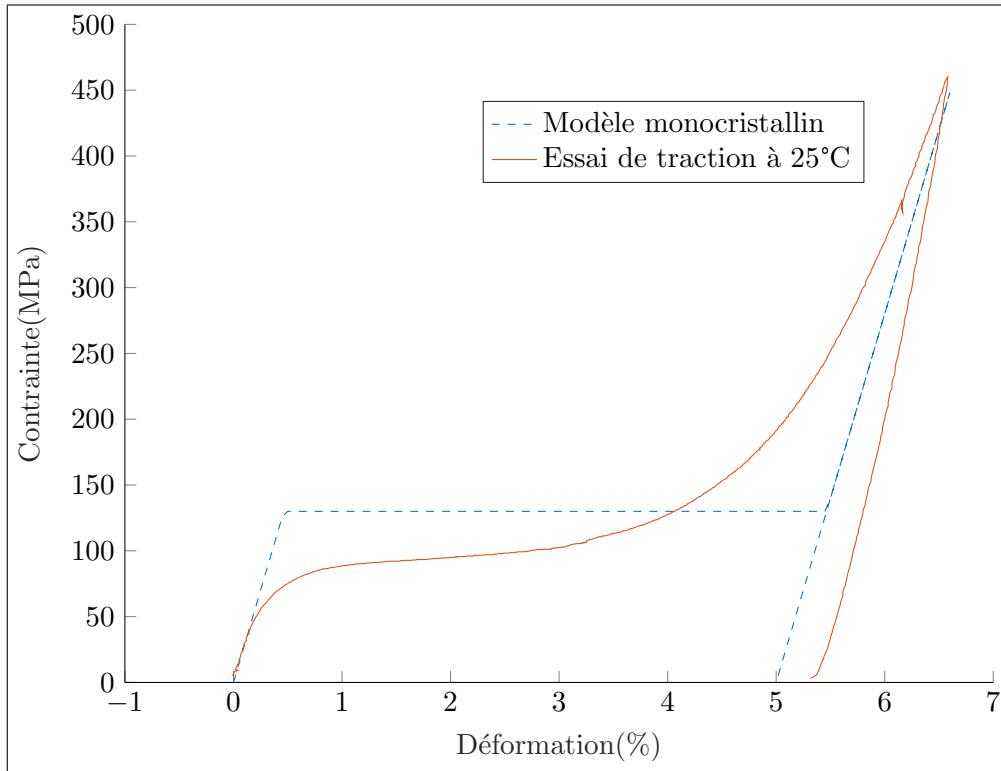


FIGURE 2.8.5 – Identification des paramètres du modèle monocristallin - Traction à 25 °C

De même, il est possible d'identifier les paramètres du modèle monocristallin en traçant la courbe analytique à l'aide des équations (2.3.38). En adoptant les mêmes valeurs pour  $E$ ,  $\lambda$ ,  $T_0$  et  $G_0 + G_1$  il reste à identifier  $\varepsilon_{max}^{tr}$ . On donne à ce paramètre la valeur 5% : c'est l'ordre de grandeur de la déformation de transformation de phase que l'on observe en pratique dans un fil AMF. En Figure 2.8.5 sont représentées la courbe expérimentale et la courbe correspondant au modèle monocristallin. Les paramètres du modèle monocristallin sont listés en Table 2.5.

TABLE 2.5 – Identification des paramètres du monocristal

|                          |       |     |
|--------------------------|-------|-----|
| $E$                      | 28000 | MPa |
| $\lambda$                | 74,2  | MPa |
| $T_0$                    | 294,9 | °K  |
| $\varepsilon_{max}^{tr}$ | 0,05  |     |
| $G_0 + G_1$              | 6,5   | MPa |

Ces valeurs sont comparables avec les valeurs que l'on peut trouver dans la littérature, par exemple dans Chang et al. (2006) où le module d'Young de la martensite vaut 32,75 GPa.

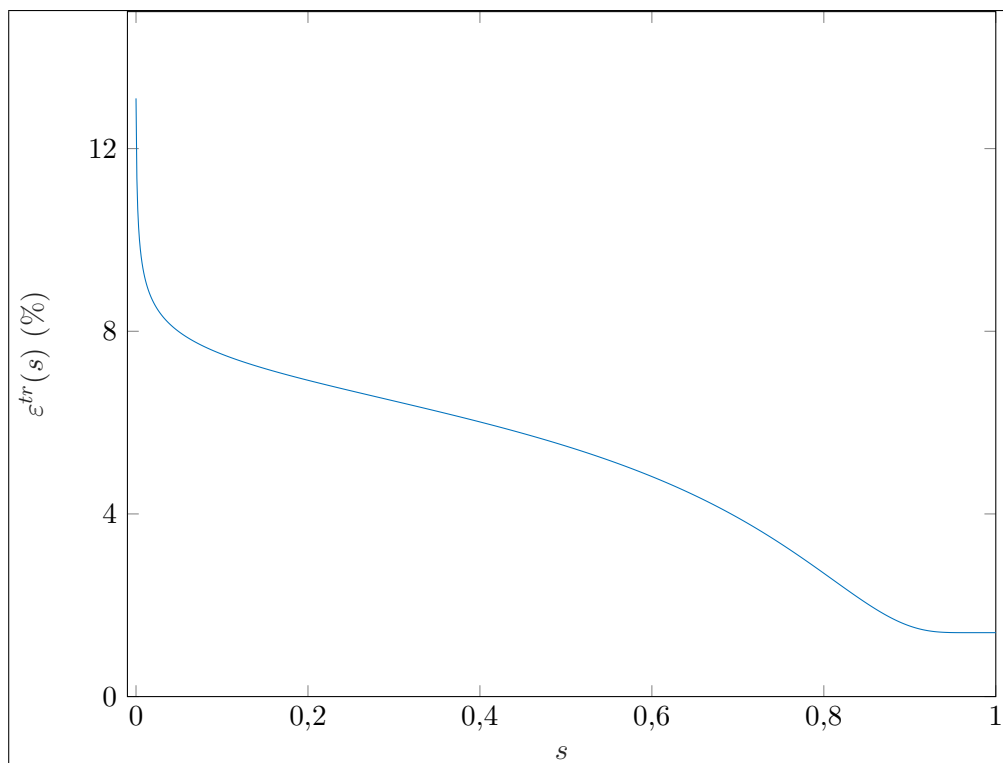


FIGURE 2.8.6 – Déformations de transformation de phase  $\varepsilon^{tr}(s)$

En Figure 2.8.6 la distribution des déformations de transformation de phase  $\varepsilon^{tr}(s)$  est représentée. Cette fonction détermine l'allure de la courbe contraintes-déformations lors du changement de phase. Une majorité de ces déformations est comprise entre 4 et 7 %. Ceci pourrait être une manifestation de la texture du fil, qui contiendrait des orientations privilégiées. Ainsi, la courbe contraintes-déformations présente un plateau de transformation de phase, correspondant à la transformation de ces grains majoritaires, et la fin de la courbe qui présente un écrouissage apparent correspond à la transformation des grains orientés moins favorablement (Kelly et al. (2016)). Ces derniers correspondent aux valeurs  $\varepsilon^{tr}(s)$  petites, donc aux abscisses  $s$  proches de 1. Enfin, l'arrondi au début de la courbe, juste après la fin de la portion élastique pour  $\sigma = \sigma^{lin}$ , correspond aux abscisses  $s$  proches de 0, donc aux grains très favorablement orientés par rapport à l'axe du fil.

## 2.9 Courbes déformation-température

Dans la section précédente nous avons déterminé la somme des paramètres  $G_0 + G_1$ . Pour déterminer la valeur de  $G_1$  et ainsi terminer l'identification des paramètres du modèle, un autre essai réalisable est le chargement thermique à contrainte constante, où l'on observe l'effet mémoire de forme qui sera mis à profit dans les actionneurs. Pour obtenir cette courbe, un fil AMF est tout d'abord chargé mécaniquement dans l'eau préalablement portée à haute température (85 °C), jusqu'à une contrainte de traction  $\sigma$ . Ensuite, cette contrainte est maintenue constante à l'aide d'un contrôleur PID inclus dans le logiciel TestWorks utilisé pour contrôler la presse électromécanique. On soumet alors le fil à des chargements thermiques (refroidissement puis chauffage) en contrôlant la température de l'eau dans le dispositif expérimental. On peut ainsi parcourir une plage de températures allant d'environ 10 à 90 °C. A noter que cet essai est généralement réalisé au moyen d'une presse hydraulique, qui permet de contrôler directement la force appliquée sur l'échantillon. Une telle machine n'était pas disponible au laboratoire, et la méthode décrite ci-dessus n'est pas la plus appropriée pour réaliser ce type d'essai. Ainsi, Bil et al. (2013) décrit les difficultés à contrôler la réponse d'un fil AMF à l'aide d'un contrôleur PID classique.

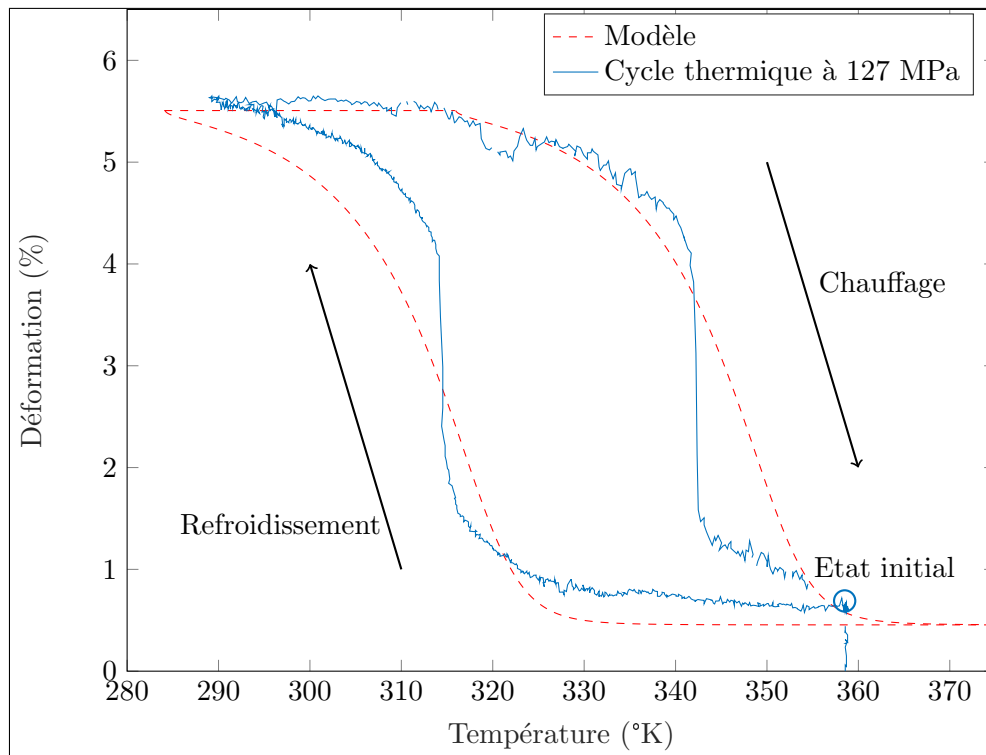


FIGURE 2.9.1 – Cycle thermique à 25N

En Figure 2.9.1 sont représentés les résultats de l'essai réalisé à une contrainte constante de 127 MPa (la force exercée par la machine est de 25 N). Avec cette courbe expérimentale, nous pouvons déterminer le paramètre  $G_1$  du modèle en mesurant la différence de température  $\Delta T$  entre les deux changements de phase, à l'aide de l'équation (2.5.38). On mesure ici  $\Delta T = 27,8$  °K donc grâce aux paramètres identifiés par calorimétrie, nous avons  $G_1 = 3,5$  MPa. Par conséquent, d'après la section 2.8.2 on a :

- $G_0 = 3,0$  MPa
- $G_1 = 3,5$  MPa

On trouve bien  $G_0 < G_1$ , comme le modèle le requiert. Il reste à vérifier avec ces paramètres qu'à la température de 25 °C on a bien  $\lambda(T) < G_0$ , ce qui permet de tracer la courbe du modèle analytique polycristallin en section 2.8.2 à l'aide des équations (2.5.19). Or  $\lambda(T) = 0,82$  MPa donc l'inégalité est bien vérifiée.

Tous les paramètres du modèle polycristallin sont donc à présent identifiés, et il est possible de tracer la courbe analytique du comportement de l'AMF à contrainte constante, à l'aide des équations (2.5.33) et (2.5.34). Cette courbe est représentée en Figure 2.9.1. On observe que dans les zones de changement de phase, contrairement à la courbe donnée par le modèle, la déformation mesurée expérimentalement varie de façon importante sur un petit intervalle de températures. En dehors de ces zones, une bonne concordance est obtenue entre le modèle et l'expérience. Cette courbe témoigne de l'hystérésis du comportement thermomécanique de l'AMF, c'est-à-dire que la température du changement de phase austénite-martensite n'est pas la même que la température du changement de phase inverse, elles sont éloignées de 27.8 °C. Cette hystérésis est plus ou moins étendue dans les alliages à mémoire de forme, mais elle est toujours présente dans l'alliage Nickel-Titane (Mohd Jani et al. (2014)).

## 2.10 Modélisation du fil AMF - Conclusion du chapitre

Deux modèles de comportement pour un fil AMF ont été présentés au cours de ce chapitre. Un modèle monocristallin décrit de façon simplifiée le comportement d'un AMF, les courbes obtenues étant linéaires par morceaux. Un modèle polycristallin, plus proche de la réalité micromécanique du matériau, permet d'obtenir une meilleure concordance entre les courbes expérimentales et théoriques. Trois types d'essais ont été menés : l'essai de calorimétrie, l'essai de traction isotherme et l'essai de chargement thermique à contrainte imposée. Ils permettent d'identifier l'ensemble des paramètres des deux modèles. La caractérisation du matériau AMF est ainsi complète, elle sera utilisée dans les chapitres 3 et 4 pour valider le modèle.

L'obtention des courbes théoriques de comportement thermomécanique est aisée dans le cas du modèle monocristallin. Pour le modèle polycristallin, elle est plus complexe,

mais elle est aussi possible sans recourir à la simulation numérique. Toutefois, pour simuler le comportement d'un fil AMF polycristallin couplé à une structure en tant qu'actionneur, la simulation numérique devient nécessaire, et sera décrite dans le chapitre 3.