

CHAPITRE V

MODELISATION NUMERIQUE DES ANCRAGES

1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous développons les modèles numériques d'ancrages présentés dans le chapitre III, et nous exprimons leurs contributions à la déformation des joints.

L'ancrage actif est représenté par deux noeuds, un noeud à chacune de ses extrémités. Il ne se déforme qu'en traction suivant son axe. Ce modèle ne prend pas en compte l'intersection de l'ancrage avec les blocs qu'il traverse, qui peuvent influencer son comportement. On suppose que l'ancrage agit uniquement sur les blocs où sont fixées ses extrémités.

Par contre l'ancrage passif (ou réparti) agit sur tous les joints qu'il intersecte en supposant que la partie de l'ancrage traversant les blocs ne se déforme pas. L'ancrage est représenté au niveau de chaque joint, qu'il intersecte, par deux noeuds distants d'une longueur L , dite longueur effective.

Le comportement mécanique des ancrages que nous avons adopté est un comportement élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire qui permettra de bien représenter les déformations au-delà du domaine élastique et ne plus se limiter, uniquement, au calcul en élasticité.

2. Modèle mécanique adopté :

La plupart des matériaux composant les ancrages (aciers), présentent des rigidités très fortes, il suffit alors, d'une déformation de quelques pourcents pour dépasser le domaine élastique. Souvent, le dimensionnement se limite à la résistance élastique, mais pour des matériaux ayant un écrouissage positif, prendre la limite élastique comme limite de rupture est trop restrictif, si on sait qu'on peut dépasser cette limite sans pour autant atteindre la rupture. Il faut signaler que la rupture est atteinte parfois, pour une déformation dix fois plus grande que la déformation élastique. Il est alors intéressant de dimensionner les ancrages en plasticité, ce qui peut donner plus de liberté et plus d'économie par rapport à un dimensionnement limité en élasticité.

2.1. Critère de plasticité :

L'élasticité est caractérisée par un domaine, dit domaine d'élasticité, défini dans l'espace des contraintes par une fonction F , dite critère de plasticité. Un état de contrainte caractérisé par un tenseur des contraintes σ est dans le domaine élastique si :

$$F(\sigma, \xi) \leq 0$$

où ξ sont les variables d'écrouissage (dites aussi variables cachées).

Parmi les critères de plasticité on peut citer le critère de Coulomb, le critère de Tresca, le critère de Drucker, le critère de Von Mises, le critère de Griffith, etc...(Lemaître 1985).

Pour la modélisation des ancrages, nous avons choisi le critère de Von Mises, qui pose peu de difficultés sur le plan du calcul numérique tout en modélisant bien le comportement de la plupart des matériaux d'ancrage. Ce critère est défini par la formule suivante (Lemaître 1985) :

$$F(\sigma) = \left[\frac{3}{2} \sigma : \sigma \right]^{1/2} - \sigma_s \quad \dagger$$

où

σ est le tenseur déviatorique des contraintes.

σ_s est le seuil de plasticité en traction simple.

2.2. Loi d'écoulement plastique :

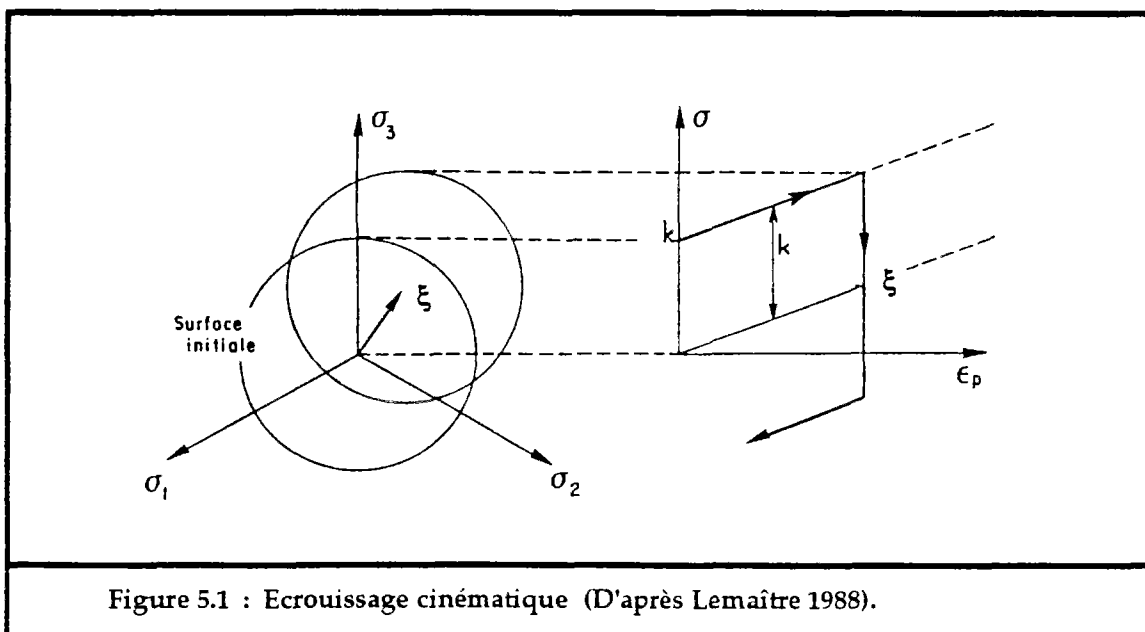
Toute variation de contrainte entraînant un dépassement du critère de plasticité se traduit par un écoulement plastique du matériau de telle sorte que le tenseur des contraintes reste dans la frontière du domaine élastique. Pour caractériser la déformation d'écoulement plastique, il faut alors définir une loi d'écoulement. Cette loi permet de relier les déformations plastiques aux tenseurs des contraintes et variables d'écrouissage.

Suivant le type de matériau, on définit un potentiel plastique $P(\sigma)$, par lequel on calcule la déformation plastique :

$$d\epsilon^p = \lambda \cdot \frac{\partial P(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (\lambda \geq 0)$$

Pour des matériaux dits standards, la loi d'écoulement est dite associée et le potentiel plastique $P(\sigma)$ est égal à $F(\sigma)$. Dans ce cas la déformation plastique est normale extérieure à la frontière du domaine élastique. Quand $P(\sigma)$ n'est pas égal à $F(\sigma)$ la loi d'écoulement est dite non associée.

Nous avons choisi, pour modéliser nos ancrages, une loi simple à formuler qui est la loi d'écoulement de Prager. C'est une loi à écrouissage cinématique linéaire, elle correspond à la translation du domaine élastique et la variable d'écrouissage ξ représente sa position actuelle (fig.5.1).



Le critère de plasticité devient alors :

$$F(\sigma, \xi) = \left[\frac{3}{2} (\sigma - \xi)' : (\sigma - \xi)' \right]^{1/2} - \sigma_s$$

La déformation plastique et la variable d'écrouissage, d'après Prager, sont calculées par (Lemaître 1985) :

$$d\epsilon^p = \frac{9}{4 \cdot E_c \cdot \sigma_s^2} \cdot \langle (\sigma - \xi)' : d\sigma \rangle \cdot (\sigma - \xi)' \quad \dagger \quad (5.1)$$

$$d\xi = \frac{2}{3} \cdot E_c \cdot d\epsilon^p \quad (5.2)$$

où E_c est le module d'écrouissage.

Si on désigne par σ_o , ϵ_o , ϵ_o^p et ξ_o les paramètres d'un état plastiquement admissible de l'ancrage, on a alors :

$$F(\sigma_o, \xi_o) \leq 0$$

$$\sigma_o = K \cdot (\epsilon_o - \epsilon_o^p)$$

K est la matrice d'élasticité.

Toute réaction sur l'ancrage se traduit par une variation de déformation de $d\epsilon$ et $d\epsilon^p$, tel que :

$$\sigma = \sigma_o + K \cdot (d\epsilon - d\epsilon^p) \quad (5.3)$$

soit :

$$\sigma = \sigma^* - K \cdot d\epsilon^p$$

$$\sigma^* = \sigma_o + K \cdot d\epsilon$$

†

i. Les crochets $\langle \rangle$ signifient :

$$\langle x \rangle = x \quad \text{si } x > 0$$

$$\langle x \rangle = 0 \quad \text{si } x \leq 0$$

ii. L'opération $(:)$ signifie :

$$A:B = \sum_i \sum_j A_{ij} \cdot B_{ji} \quad (A \text{ et } B \text{ deux matrices})$$

Alors deux cas peuvent se poser :

- si σ^* est dans le domaine élastique de départ, c'est-à-dire si $F(\sigma^*, \xi) \leq 0$, alors la déformation effectuée est une déformation élastique :

$$d\epsilon^p = 0$$

$$d\xi = 0$$

$$\sigma = \sigma^*$$

- si au contraire $F(\sigma^*, \xi) > 0$, alors $d\epsilon^p$ et $d\xi$ sont calculés par les équations (5.1) et (5.2) et σ par l'équation (5.3).

On signale que le calcul de $d\epsilon$ se fait toujours par la loi élastique, si la contrainte obtenue est dans le domaine élastique alors le calcul est correct, sinon il faut effectuer la correction de la contrainte par le calcul de $d\epsilon^p$.

3. Modélisation d'ancrage actif :

L'ancrage actif est assimilé à un élément linéaire à deux noeuds et qui ne se déforme qu'en traction. Nous allons exprimer, en fonction des déplacements des blocs et des déformations de l'ancrage la contribution de celui-ci à la stabilité de l'ensemble des blocs en étude.

3.1. Déformation et contrainte d'un ancrage actif :

Comme dans le chapitre précédent, nous allons analyser le comportement des ancrages entre deux chargements de forces successifs k et $k+1$. Soit alors, un ancrage dont les deux extrémités A et B, fixées sur les deux blocs B_i et B_j (fig.5.2).

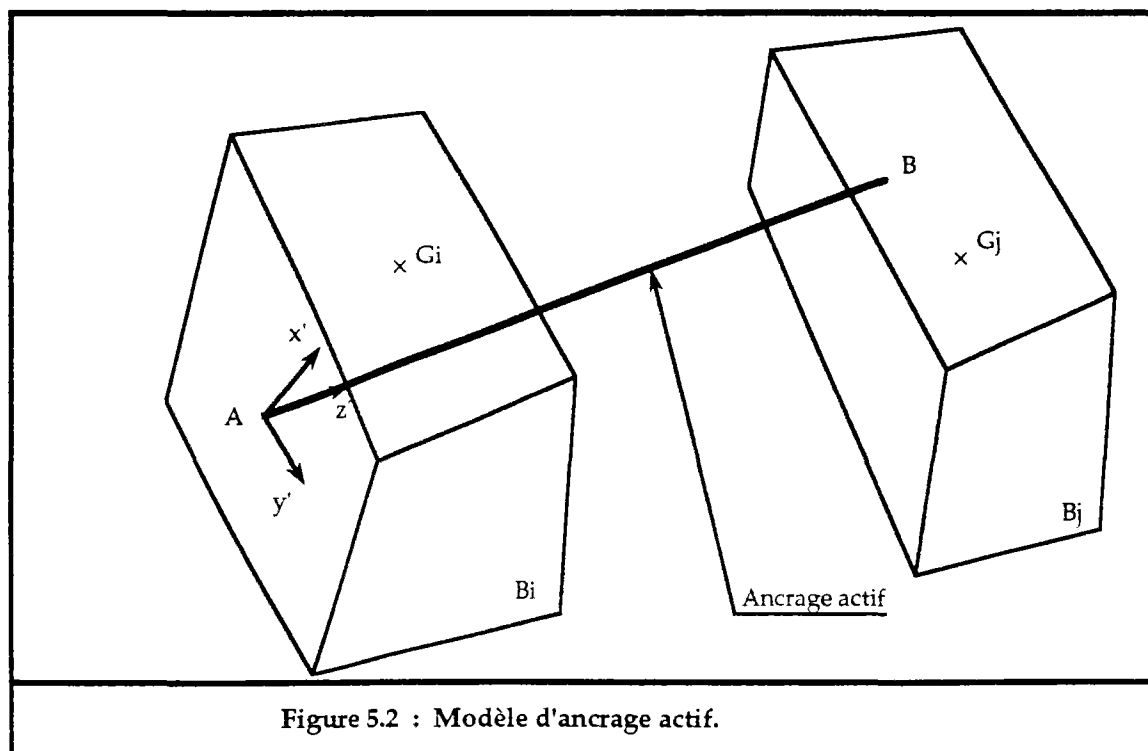


Figure 5.2 : Modèle d'ancrage actif.

On définit dans le repère fixe R(O,X,Y,Z) :

$\delta\vec{u}_A$: variation du vecteur déplacement du noeud A.

$\delta\vec{u}_B$: variation du vecteur déplacement du noeud B.

$\delta\vec{u}_i$: variation du vecteur déplacement du centre de gravité du bloc Bi.

$\delta\vec{u}_j$: variation du vecteur déplacement du centre de gravité du bloc Bj.

$\delta\vec{\omega}_i$: variation du vecteur rotation du bloc Bi.

$\delta\vec{\omega}_j$: variation du vecteur rotation du bloc Bj.

G_i : centre de gravité du bloc Bi.

G_j : centre de gravité du bloc Bj.

D'après l'équation (4.2), on obtient les relations suivantes :

$$\delta\vec{u}_A = \delta\vec{u}_i + \delta\vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{G_i A}$$

$$\delta\vec{u}_B = \delta\vec{u}_j + \delta\vec{\omega}_j \wedge \overrightarrow{G_j B}$$

Le vecteur déplacement du noeud B par rapport au noeud A sera égal à :

$$d\vec{u}_a = \delta\vec{u}_B - \delta\vec{u}_A$$

Soit :

$$d\vec{u}_a = [B_a] \cdot \delta\vec{u}_{ij}$$

avec :

$$[B_a] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta Z_A & \Delta Y_A & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Z_B & -\Delta Y_B \\ 0 & -1 & 0 & \Delta Z_A & 0 & -\Delta X_A & 0 & 1 & 0 & -\Delta Z_B & 0 & \Delta X_B \\ 0 & 0 & -1 & -\Delta Y_A & \Delta X_A & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Y_B & -\Delta X_B & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X_A = X_A - X_{G_i}$$

$$\Delta Y_A = Y_A - Y_{G_i}$$

$$\Delta Z_A = Z_A - Z_{G_i}$$

$$\Delta X_B = X_B - X_{G_j}$$

$$\Delta Y_B = Y_B - Y_{G_j}$$

$$\Delta Z_B = Z_B - Z_{G_j}$$

Dans le repère local lié à l'ancrage $R'=(A,X',Y',Z')$, le vecteur variation relatif du noeud B par rapport au noeud A, devient :

$$d\vec{u}'_a = [T_a] \cdot d\vec{u}_a$$

où $[T_a]$ est la matrice de passage du repère R au repère R' :

$$[T_a] = \begin{bmatrix} t_{x1} & t_{y1} & t_{z1} \\ t_{x2} & t_{y2} & t_{z2} \\ t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}$$

avec :

$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ vecteur parallèle à l'ancrage.

$\left. \begin{array}{l} \vec{t}_1 = (t_{x1}, t_{y1}, t_{z1}) \\ \vec{t}_2 = (t_{x2}, t_{y2}, t_{z2}) \end{array} \right\}$ deux vecteurs orthogonaux à $\vec{t}$.

La variation de déformation normale de l'ancrage est alors déterminée par :

$$d\epsilon = \frac{1}{L} \cdot [0,0,1] \cdot d\vec{u}_a$$

$$\text{Soit : } d\epsilon = \frac{1}{L} \cdot [0,0,1] \cdot [T_a] \cdot [B_a] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \quad (5.4)$$

$$L = || \overline{AB} ||$$

L est la distance entre les deux noeuds A et B.

Dans le domaine élastique la contrainte normale selon l'axe de l'ancrage se calcule par :

$$\sigma_n = \sigma_n^o + E \cdot d\epsilon$$

Soit :

$$\sigma_n = \sigma_n^o + \frac{E}{L} \cdot [0,0,1] \cdot [T_a] \cdot [B_a] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \quad (5.5)$$

où E est le module d'Young du matériau de l'ancrage et σ_n^o est la contrainte normale de l'ancrage due au chargement précédent k.

3.2. Matrice de rigidité élémentaire d'ancrage actif :

La contrainte de l'ancrage engendre alors une force de traction, qui est parallèle à l'axe de l'ancrage et qui se calcule par le produit de la contrainte et de la surface de la section droite de l'ancrage.

- dans le repère local R', la force due à l'ancrage se calcule par :

$$\vec{F}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = S \cdot \vec{\sigma}^o + \frac{S \cdot E}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot d\vec{u}_a$$

$$\vec{\sigma}^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_n^o \end{bmatrix}$$

- dans le repère fixe R, cette force devient :

$$\vec{F} = S \cdot [T]^{-1} \cdot \vec{\sigma}^o + \frac{S \cdot E}{L} \cdot [T] \cdot [T_a] \cdot [B_a] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & t_z \end{bmatrix}$$

S est la section droite de l'ancrage.

Cette force est appliquée sur le bloc B_i au point A, et en sens opposé sur le bloc B_j au point B. En ramenant respectivement les points d'application A et B au centre de gravité des blocs correspondants, on obtient :

$$\vec{F}_{ij} = S \cdot [T_{1ij}] \cdot \vec{\sigma}^o + \frac{S \cdot E}{L} [T_{2ij}] \cdot [B_a] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

Le vecteur force F_{ij} contient les deux forces dues à l'ancrage, appliquées sur le bloc B_i et le bloc B_j, avec :

$$[T_{1ij}] = \begin{bmatrix} [T_{1ii}] \\ [T_{1jj}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_{2ij}] = \begin{bmatrix} [T_{2ii}] \\ [T_{2jj}] \end{bmatrix}$$

tel que :

$$[T_{1ii}] = \begin{bmatrix} t_{x1} & t_{x2} & t_x \\ t_{y1} & t_{y2} & t_y \\ t_{z1} & t_{z2} & t_z \\ t_{z1} \cdot \Delta Y_A - t_{y1} \cdot \Delta Z_A & t_{z2} \cdot \Delta Y_A - t_{y2} \cdot \Delta Z_A & t_z \cdot \Delta Y_A - t_y \cdot \Delta Z_A \\ t_{x1} \cdot \Delta Z_A - t_{z1} \cdot \Delta X_A & t_{x2} \cdot \Delta Z_A - t_{z2} \cdot \Delta X_A & t_x \cdot \Delta Z_A - t_z \cdot \Delta X_A \\ t_{y1} \cdot \Delta X_A - t_{x1} \cdot \Delta Y_A & t_{y2} \cdot \Delta X_A - t_{x2} \cdot \Delta Y_A & t_y \cdot \Delta X_A - t_x \cdot \Delta Y_A \end{bmatrix}$$

$$[T_{1jj}] = \begin{bmatrix} t_{x1} & t_{x2} & t_x \\ t_{y1} & t_{y2} & t_y \\ t_{z1} & t_{z2} & t_z \\ t_{z1} \cdot \Delta Y_B - t_{y1} \cdot \Delta Z_B & t_{z2} \cdot \Delta Y_B - t_{y2} \cdot \Delta Z_B & t_z \cdot \Delta Y_B - t_y \cdot \Delta Z_B \\ t_{x1} \cdot \Delta Z_B - t_{z1} \cdot \Delta X_B & t_{x2} \cdot \Delta Z_B - t_{z2} \cdot \Delta X_B & t_x \cdot \Delta Z_B - t_z \cdot \Delta X_B \\ t_{y1} \cdot \Delta X_B - t_{x1} \cdot \Delta Y_B & t_{y2} \cdot \Delta X_B - t_{x2} \cdot \Delta Y_B & t_y \cdot \Delta X_B - t_x \cdot \Delta Y_B \end{bmatrix}$$

$$[T_{2ii}] = \begin{bmatrix} t_x^2 & t_y t_x & t_z t_x \\ t_x t_y & t_y^2 & t_z t_y \\ t_x t_z & t_y t_z & t_z^2 \\ t_x \cdot (t_z \Delta Y_A - t_y \Delta Z_A) & t_y \cdot (t_z \Delta Y_A - t_y \Delta Z_A) & t_z \cdot (t_z \Delta Y_A - t_y \Delta Z_A) \\ t_x \cdot (t_x \Delta Z_A - t_z \Delta X_A) & t_y \cdot (t_x \Delta Z_A - t_z \Delta X_A) & t_z \cdot (t_x \Delta Z_A - t_z \Delta X_A) \\ t_x \cdot (t_y \Delta X_A - t_x \Delta Y_A) & t_y \cdot (t_y \Delta X_A - t_x \Delta Y_A) & t_z \cdot (t_y \Delta X_A - t_x \Delta Y_A) \end{bmatrix}$$

$$[T_{2ij}] = \begin{bmatrix} t_x^2 & t_y t_x & t_z t_x \\ t_x t_y & t_y^2 & t_z t_y \\ t_x t_z & t_y t_z & t_z^2 \\ t_x \cdot (t_z \Delta Y_B - t_y \Delta Z_B) & t_y \cdot (t_z \Delta Y_B - t_y \Delta Z_B) & t_z \cdot (t_z \Delta Y_B - t_y \Delta Z_B) \\ t_x \cdot (t_x \Delta Z_B - t_z \Delta X_B) & t_y \cdot (t_x \Delta Z_B - t_z \Delta X_B) & t_z \cdot (t_x \Delta Z_B - t_z \Delta X_B) \\ t_x \cdot (t_y \Delta X_B - t_x \Delta Y_B) & t_y \cdot (t_y \Delta X_B - t_x \Delta Y_B) & t_z \cdot (t_y \Delta X_B - t_x \Delta Y_B) \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\vec{F}_{ij} = [f_a^o] + [K_{aij}] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

avec :

$$[K_{aij}] = \frac{S \cdot E}{L} \cdot [T_{2ij}] \cdot [B]$$

$$[f_a^o] = S \cdot [T_{1ij}] \cdot \vec{\theta}^o$$

$[K_{aij}]$: matrice de rigidité élémentaire de l'ancrage, liant les blocs B_i et B_j .

$[f_a^o]$: vecteur force de contrainte de l'incrément de charge précédente.

Ces deux matrices doivent être incorporées aux matrices de rigidité et de force globales dans $[K_G]$ et $[F_0]$ (cf § IV.4.3).

On peut résoudre le problème quand l'ancrage entre en déformation plastique en gardant les mêmes expressions ci-dessus (cf. §.5)

4. Modélisation d'ancrage passif :

Un ancrage passif est sollicité principalement au niveau des joints qui l'intersectent. A chaque intersection avec un joint, l'ancrage est simulé par deux noeuds de distance L (L est la longueur effectivement déformable de l'ancrage au niveau des joints, voir §.III.3). L'ancrage n'est sollicité au niveau du joint que si celui-ci se déforme. On suppose que les déformations de l'ancrage au niveau des joints sont indépendantes, ce qui veut dire aussi, que l'ancrage n'est pas sollicité dans la partie située dans les blocs.

4.1 Déformation et contrainte d'ancrage passif :

Soit alors, un joint ij formé par les blocs B_i et B_j , et traversé par un ancrage passif. Et soient A et B les noeuds représentant l'ancrage au niveau de ce joint (fig.5.3) :

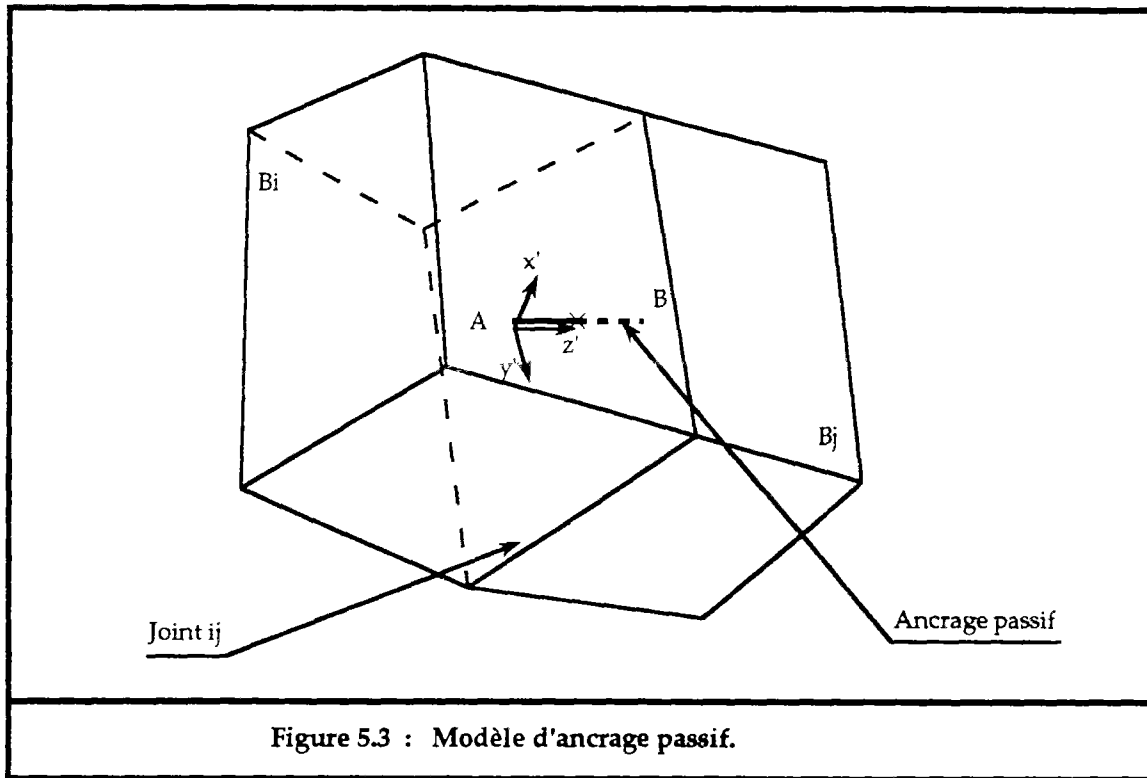


Figure 5.3 : Modèle d'ancrage passif.

Dans le repère $R'=(A,x',y',z')$ lié à l'ancrage, on désigne par :

- $\dot{du}_x$: la variation de déplacement tangentiel du noeud B par rapport au noeud A, suivant l'axe $\vec{x}'$.
- $\dot{du}_y$: la variation de déplacement tangentiel du noeud B par rapport au noeud A, suivant l'axe $\vec{y}'$.
- $\dot{du}_z$: la variation de déplacement normal du noeud B par rapport au noeud A, suivant l'axe $\vec{z}'$.
- $\dot{d\omega}_x$: la variation de l'angle de flexion du noeud B par rapport au noeud A autour de l'axe $\vec{x}'$.
- $\dot{d\omega}_y$: la variation de l'angle de flexion du noeud B par rapport au noeud A autour de l'axe $\vec{y}'$.
- $\dot{d\omega}_z$: la variation de l'angle de torsion du noeud B par rapport au noeud A autour de l'axe $\vec{z}'$.

D'après l'étude menée dans le chapitre III, les déformations en flexion sont négligées, on ne traite que la torsion de l'ancrage. Ainsi on définit les vecteurs variation de déplacement et de contrainte du noeud B par rapport au noeud A :

- $d\vec{u}_p = [\dot{du}_x, \dot{du}_y, \dot{du}_z, \dot{d\omega}]$ vecteur variation de déplacement.
- $d\vec{\sigma} = [d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\sigma_c]$ vecteur variation de contrainte.

En élasticité linéaire ces deux vecteurs sont liés comme suit :

$$\begin{aligned}d\sigma_x &= \frac{G \cdot d\dot{u}_x}{L} \\d\sigma_y &= \frac{G \cdot d\dot{u}_y}{L} \\d\sigma_z &= \frac{E \cdot d\dot{u}_z}{L} \\d\sigma_c &= \frac{G \cdot I_o \cdot d\dot{\omega}}{L}\end{aligned}$$

avec :

E : module de Young .

G : module cisaillement. $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

ν : coefficient de Poisson.

I_o : moment d'inertie de l'ancrage par rapport à l'axe $\vec{Z}$.

Soit sous forme matricielle :

$$d\vec{\sigma} = \frac{1}{L} \cdot [K] \cdot d\vec{u}_p'$$

avec :

$$[K] = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \cdot I_o \end{bmatrix}$$

Dans le repère fixe R(O,X,Y,Z), on peut exprimer le vecteur variation de déplacement du noeud B par rapport au noeud A en fonction des déplacements des noeuds A et B, on obtient :

$$d\vec{u}_p' = [T_p] \cdot [d\vec{u}_p]$$

avec :

$$[T_p] = \begin{bmatrix} t_{x1} & t_{y1} & t_{z1} & 0 & 0 & 0 \\ t_{x2} & t_{y2} & t_{z2} & 0 & 0 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}$$

$\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ vecteur parallèle à l'ancrage.

$\left. \begin{aligned} \vec{t}_1 &= (t_{x1}, t_{y1}, t_{z1}) \\ \vec{t}_2 &= (t_{x2}, t_{y2}, t_{z2}) \end{aligned} \right\}$ deux vecteurs orthogonaux à $\vec{t}$.

Le vecteur $d\vec{u}_p$ est égal à :

$$d\vec{u}_p = d\vec{u}_B - d\vec{u}_A$$

où :

$$d\vec{u}_A = [\delta u_{xA}, \delta u_{yA}, \delta u_{zA}, \delta \omega_i, \delta \omega_i, \delta \omega_i]$$

$$d\vec{u}_B = [\delta u_{xB}, \delta u_{yB}, \delta u_{zB}, \delta \omega_j, \delta \omega_j, \delta \omega_j]$$

En utilisant l'équation (4.2), on peut exprimer le vecteur $d\vec{u}_p$ en fonction des déplacements des centres de gravité des blocs B_i et B_j :

$$d\vec{u}_p = [B_p] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

avec:

$$[B_p] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta Z_A & \Delta Y_A & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta Z_B & -\Delta Y_B \\ 0 & -1 & 0 & \Delta Z_A & 0 & -\Delta X_A & 0 & 1 & 0 & -\Delta Z_B & 0 & \Delta X_B \\ 0 & 0 & -1 & -\Delta Y_A & \Delta X_A & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Y_B & -\Delta X_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X_A = X_A - X_{Gi}$$

$$\Delta Y_A = Y_A - Y_{Gi}$$

$$\Delta Z_A = Z_A - Z_{Gi}$$

$$\Delta X_B = X_B - X_{Gj}$$

$$\Delta Y_B = Y_B - Y_{Gj}$$

$$\Delta Z_B = Z_B - Z_{Gj}$$

(X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi}) : coordonnées du centre de gravité du bloc B_i dans le repère fixe $R(O, X, Y, Z)$.

(X_{Gj}, Y_{Gj}, Z_{Gj}) : coordonnées du centre de gravité du bloc B_j dans le repère fixe.

(X_A, Y_A, Z_A) : coordonnées du noeud A dans le repère fixe.

(X_B, Y_B, Z_B) : coordonnées du noeud B dans le repère fixe.

On aura enfin les relations suivantes :

$$d\vec{u}'_p = [T_p] \cdot [B_p] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \quad (5.6)$$

$$d\vec{\theta} = \frac{1}{L} \cdot [K] \cdot [T_p] \cdot [B_p] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \quad (5.7)$$

$$\vec{\theta}_p = \vec{\theta}_p^o + d\vec{\theta}$$

4.2. Energie potentielle et matrice de rigidité élémentaire :

L'ancrage passif contribue, par sa déformation, aux variations de déplacement de l'ensemble des blocs d'un système étudié. L'énergie potentielle apportée par l'ancrage à ce système est égale à :

$$E_p = \frac{S}{2} \cdot d\vec{u}_p^t \cdot d\vec{\sigma}$$

où

$$d\vec{\sigma} = \frac{1}{L} \cdot [K] \cdot d\vec{u}_p'$$

S est la section droite de l'ancrage.

En fonction des équations (5.6) et (5.7), on obtient :

$$E_p = \frac{S}{2 \cdot L} \cdot d\vec{u}_p^t \cdot [K] \cdot d\vec{u}_p'$$

ou bien :

$$E_p = \frac{S}{2 \cdot L} \cdot \delta \vec{u}_{ij}^t \cdot [B_p]^t [T_p]^t [K] \cdot [T_p] \cdot [B_p] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

soit :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \delta \vec{u}_{ij}^t \cdot [k_{pij}] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

avec :

$$[k_{pij}] = \frac{S}{L} [B_p]^t [T_p]^t [K] \cdot [T_p] \cdot [B_p]$$

$[k_{pij}]$: est la matrice de rigidité élémentaire de l'ancrage.

Le travail de la contrainte initiale (l'incrément précédente) est égal à :

$$E_{\sigma^o} = S \cdot d\vec{u}_p^t \cdot \vec{\sigma}_p^o$$

soit :

$$E_{\sigma^o} = S \cdot \delta \vec{u}_{ij}^t \cdot [B_p]^t [T_p]^t \cdot \vec{\sigma}_p^o$$

ou bien :

$$E_{\sigma^o} = \delta \vec{u}_{ij}^t \cdot [f_p^o]$$

avec :

$$[f_p^o] = S \cdot [B_p]^t [T_p]^t \cdot \vec{\sigma}_p^o$$

$[f_p^o]$: est la force élémentaire de la contrainte due à l'incrément de force précédente.

Les matrices $[k_{pij}]$ et $[f_p^o]$ devront être assemblées avec les matrices élémentaires des joints, dans les matrices globales $[K_G]$ et $[F_0]$.

5. Modélisation en plasticité des ancrages – Processus itératif :

Dans le domaine élastique, contrainte et déformation sont liées par une relation linéaire (cas d'élasticité linéaire). Quand l'ancrage est sollicité de telle sorte qu'il développe des déformations plastiques, la contrainte qui en résulte ne doit pas dépasser le domaine d'élasticité qui est défini par la condition $F(\sigma, \xi) \leq 0$. Les déformations plastiques sont calculées par les lois d'écoulement plastique.

Si on désigne par $d\epsilon^e$ la déformation élastique et $d\epsilon^p$ la déformation plastique, on a la relation suivante :

$$\sigma = K \cdot (d\epsilon - d\epsilon^p) + \sigma^0$$

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$$

Cette relation peut être exprimée de la façon suivante :

$$\sigma = K \cdot d\epsilon + \sigma^*$$

$$\sigma^* = \sigma^0 - K \cdot d\epsilon^p$$

Si on peut déterminer les déformations plastiques des ancrages $d\epsilon^p$, on peut alors calculer les déplacements des blocs et les déformations totales de des ancrages en résolvant uniquement le problème de manière élastique, comme c'est indiqué aux paragraphes précédents, en remplaçant les contraintes initiales σ^0 par les contraintes σ^* .

Le problème est alors de déterminer les déformations plastiques. Il sera résolu par un processus itératif qui consiste à les initialiser à zéro, et à chaque itération, les calculer par les lois d'écoulement plastique, puis résoudre le problème comme en élasticité en remplaçant σ^0 par σ^* . Ceci doit être poursuivi jusqu'à la convergence où les déformations plastiques calculées entre deux itérations successives ne soient pas très différentes.

Processus itératif :

Ce processus est appelé, en parallèle avec celui cité au chapitre IV (§ 5.2), pour chaque incrément de force. Il consiste à déterminer l'état de contraintes et de déformations des ancrages (s'ils sont sollicités au-delà du domaine élastique) qui soit plastiquement admissible et tel que l'énergie potentielle totale soit minimale (Tijani 1985).

Au début du processus itératif les déformations plastiques de^p sont initialisées à zéro. Et entre deux itérations successives l et $l+1$, on procède ainsi :

1 - Calcul de la matrice de rigidité et de force globales :

$$[KG] = \text{Assemblage} \{ [K_{eij}], [K_{a ij}], [K_{p ij}] \}$$

$$[Fo] = \text{Assemblage} \{ [f_{ij}^o], [f_a^o], [f_p^o] \}$$

2 - Résolution du système (S) et calcul des déplacements des blocs.

3 - Pour chaque ancrage :

3.1 - Calcul des contraintes et des déformations par les équations (5.4), (5.5) pour les ancrages actifs et (5.6), (5.7) pour les ancrages passifs.

3.2 - Test du critère de plasticité :

→ si $F(\sigma, \xi) \leq 0$ les résultats sont corrects, la déformation est alors élastique. Passer à l'ancrage suivant.

→ sinon, l'ancrage se déforme en plasticité, On corrige alors la contrainte par l'équation (5.3), soit :

$$\sigma = \sigma_o + K \cdot (de - de_1^p)$$

de_1^p est l'estimation de la déformation plastique à l'itération précédente.

- la nouvelle déformation plastique et la variable d'écrouissage sont calculées par :

$$de_{1+1}^p = \frac{9}{4 \cdot E_c \cdot \sigma_s^2} \cdot \langle (\sigma - \xi') : d\sigma \rangle \cdot (\sigma - \xi')$$

$$d\xi_{1+1} = \frac{2}{3} \cdot E_c \cdot de_{1+1}^p$$

- la nouvelle contrainte initiale devient :

$$\sigma^* = \sigma^o - K \cdot de_{1+1}^p$$

3.3 - Retour en 1, jusqu'à la convergence du processus.

Le critère de convergence doit porter sur les contraintes parce que parfois, il y a convergence des déformations sans que les contraintes vérifient les équations d'équilibre (Tijani 1985). Le processus itératif s'arrête donc, quand en tout ancrage, l'état de contrainte ne s'écarte pas trop du domaine d'élasticité selon une précision fournie à l'avance.

Ce processus et celui cité au chapitre IV (§ IV.5.2) pour les joints devront converger tous les deux pour passer à l'incrémentation suivante des forces.

