

## **PARTIE B**

# **MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES PLAQUES MULTICOUCHEES IMPACTEES**

### III. SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés au problème de l'impact sur les plaques multicouches. L'intérêt qui s'est porté sur ce thème ces deux dernières décennies, et qui s'est accru encore plus récemment, montre qu'il représente actuellement un sujet de recherche actif, en atteste le nombre important d'articles publiés chaque année.

Nous essayons dans ce chapitre d'effectuer une synthèse des résultats existant dans la littérature.

Les objectifs de ce chapitre peuvent être résumés en trois points:

- d'abord mieux comprendre le phénomène de l'impact sur les plaques multicouches et se familiariser avec les différents concepts s'y référant;
- essayer ensuite de placer notre étude dans un contexte plus général de modèles mathématiques et d'études numériques;
- présenter enfin l'essentiel des résultats que nous avons trouvés dans la littérature et que nous avons jugés utiles pour la suite de notre démarche.

Nous commencerons donc par introduire le phénomène d'impact, en évoquant quelques méthodes de classification des problèmes d'impact à partir des concepts simples de masse et de vitesse du projectile et du concept d'ondes dans la structure.

Le deuxième paragraphe présente dans leur grandes lignes les informations expérimentales utiles pour cette étude ainsi que pour ses perspectives. Certains détails de résultats ne seront évoqués que dans les chapitres réservés à l'évaluation des résultats numériques;

Le troisième paragraphe sera consacré au problème du contact entre la structure et le projectile, et plus particulièrement aux lois qui peuvent modéliser ce contact.

Le quatrième paragraphe présentera enfin les familles de modélisations plus complexes utilisées, que nous avons appelées modèles mathématiques.

Nous pourrons alors situer notre étude dans son contexte général.

Toute cette démarche permettra d'entrevoir le domaine de pertinence et d'efficacité de notre modèle numérique et de préparer le champ à l'évaluation des résultats et la validation de l'étude.

### III.1. INTRODUCTION DU PHENOMENE D'IMPACT SUR PLAQUES MULTICOUCHEES

Par impact, nous faisons référence à l'impact physique, défini comme un événement impliquant la collision de deux objets.

Les impacts sur composites laminés couvrent une gamme d'exemples multiples et variés: cela peut aller des impacts lents tels que la chute d'outils lors des opérations d'élaboration ou d'entretien, jusqu'aux impacts beaucoup plus rapides tels que l'impact d'un caillou, d'un oiseau, ou de la glace sur les lames des turbines d'avions, ou encore le choc des vagues contre les bateaux constitués d'épais laminés en fibres de verre.

A travers cette variété, nous allons ici évoquer deux classifications des impacts: une classique et une plus physique.

La classification classique s'appuie sur les concepts simples de masse et de vitesse du projectile, qui sont généralement des données du problème;

L'autre classification, dite phénoménologique, s'intéresse au phénomène physique d'ondes transitoires, tout en essayant de déterminer le type d'onde dominant la réponse.

#### III.1.1. Classification classique des impacts sur plaques multicouches

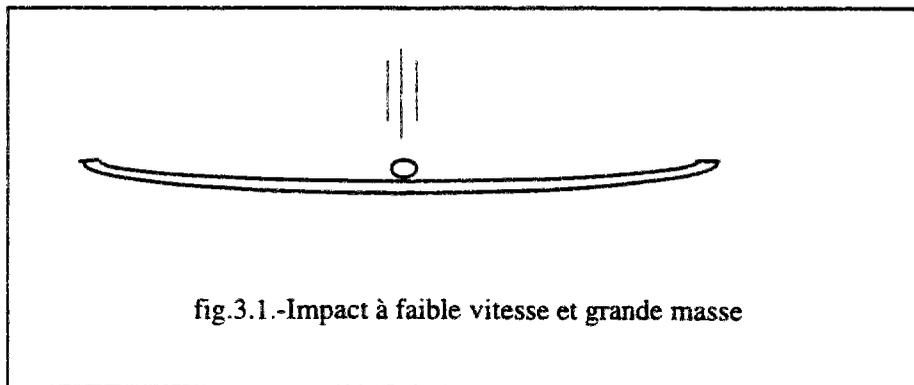
Classiquement, plusieurs façons ont été utilisées pour classifier ces impacts [S.Abrate (1991)].

Quelques auteurs établissent une classification à partir de la seule donnée de la vitesse d'impact. Par référence à la valeur de cette vitesse, ils classent alors les impacts en impacts à '*grande vitesse*' (quelques dizaines de m/s) et impacts à '*faible vitesse*' (quelques m/s), chacune de ces deux classes devant présenter des propriétés caractéristiques qui lui sont propres. Cependant, il a été observé que le choix d'une plaque suffisamment grande ou d'une masse suffisamment petite conduit, avec une vitesse faible, à des propriétés caractéristiques des impacts dits à grande vitesse.

Pour une masse donnée, la description de l'événement impact à partir de la seule énergie d'impact est donc insuffisante. La masse et la vitesse du projectile doivent donc être conçues comme deux paramètres indépendants dont peut dépendre le type d'impact.

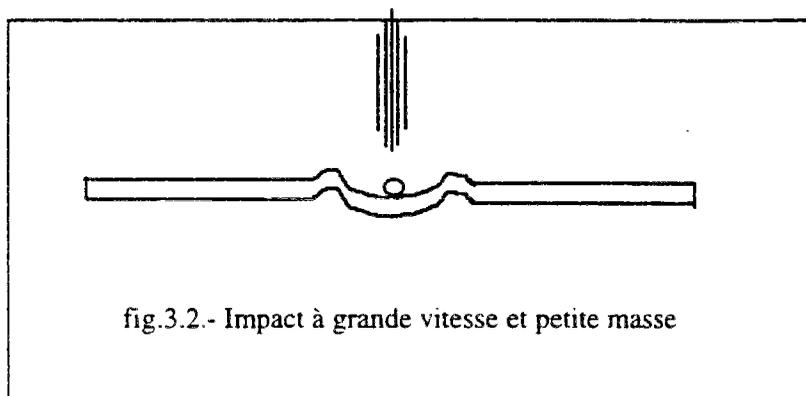
En termes simples, nous pouvons alors diviser les problèmes d'impact en deux classes:

- impacts à faible vitesse et grande masse (chute d'objets par exemple), induisant la déformation de l'ensemble de la structure (fig.3.1).



Cet impact est généralement simulé en laboratoire par la chute libre de poids ou le balancement de pendule (voir III.2.1.);

- impacts à grande vitesse et petite masse (projection de cailloux, petites armes à feu...), induisant des déformations localisées et une énergie dissipée par une petite zone au voisinage du point d'impact (fig.3.2).



Cet impact est généralement simulé par canon à gaz (voir III.2.1.).

En reprenant les termes de choc lent et de choc rapide, certains chercheurs [W.J.Cantwell & J.Morton (1989)] considèrent alors qu'un choc est rapide si la déformation reste confinée dans une zone de faible dimension, les ondes n'atteignant alors pas les bords de la structure avant la fin de l'événement. Il le considère comme lent si par contre, les ondes se réfléchissant, l'ensemble de la structure se déforme.

Il n'en reste pas moins que cette classification présente le défaut de ne pas pouvoir classer les exemples d'impacts intermédiaires, qui sont par ailleurs les plus nombreux.

### III.1.2. Classification phénoménologique des impacts sur plaques multicouches

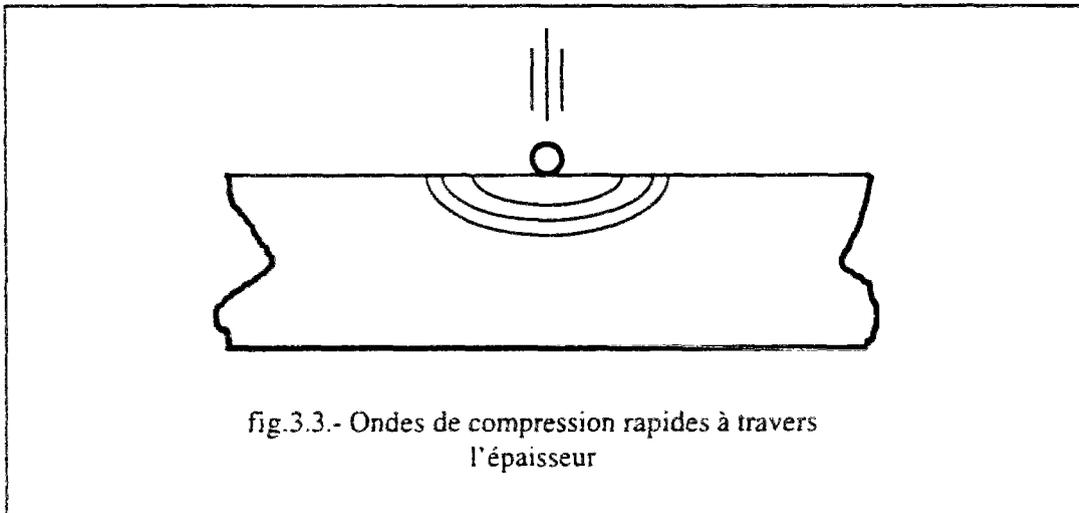
L'analyse de la réponse à l'impact d'un composite laminé peut être faite à partir d'une étude expérimentale ou d'une étude numérique. Pour planifier de telles études, il est important au préalable, de comprendre parfaitement le mécanisme et la dynamique de l'impact, c'est à dire le phénomène impact, et de pouvoir le classifier.

Une façon de comprendre le phénomène est de considérer les différents types d'ondes qui se propagent dans la structure à la suite d'un impact, et d'en déterminer celui qui est dominant.

Nous partirons d'abord du fait que la plupart des cas d'impact sur structures multicouches peuvent être modélisés par l'impact transverse d'un projectile de petite dimension sur une plaque.

Un tel impact donne naissance à trois types d'onde, se propageant à partir du point d'impact [*R.Olsson (1992a)*]:

- des ondes rapides à travers l'épaisseur. Ces ondes de compression se réfléchissent sur la face inférieure de la plaque pour donner naissance à des ondes de traction qui se superposent. En fait, la propagation de ces ondes est sphérique. Les déformations associées sont faibles (fig.3.3).



- des ondes de traction-compression dans le plan, ainsi que des ondes de cisaillement. Ces ondes se réfléchissent sur les bords latéraux de la plaque.

- des ondes de flexion plus lentes, dispersives (à vitesse décroissante). Ces ondes se réfléchissent aussi sur les bords de la plaque et peuvent ainsi engendrer des déformations sur l'ensemble de la plaque (fig.3.4).

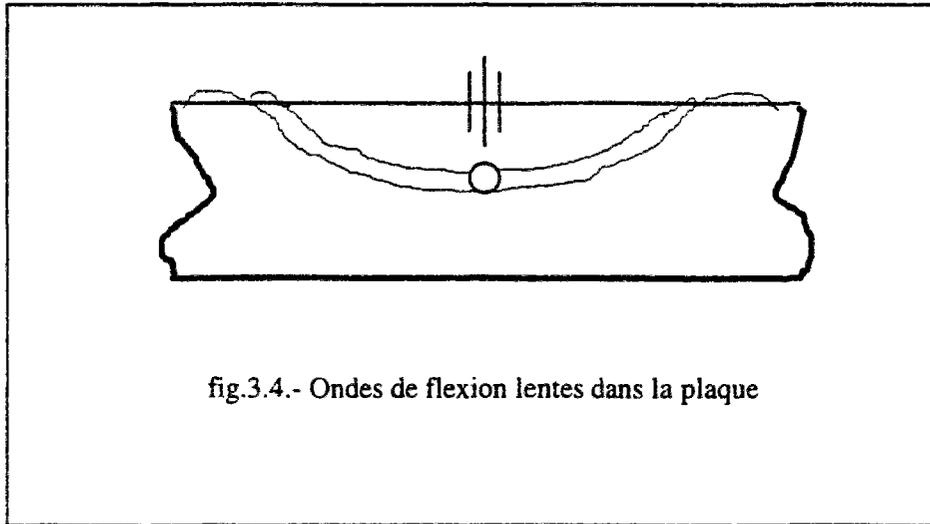


fig.3.4.- Ondes de flexion lentes dans la plaque

A partir de cette description, on se base sur un principe fondamental dû à Rayleigh pour classer les impacts en fonction de la durée du contact.

Ce principe stipule qu'un phénomène d'ondes transitoires peut être négligé dès lors que le temps d'application de la charge (correspondant à la durée de contact), est grand devant le temps nécessaire à l'onde pour se réfléchir.

Grâce à ce principe, nous pouvons établir la classification suivante [R.Olsson (1992a), S.Abrate (1991,1994)]:

Si le temps d'application de la charge, ou encore la durée de contact, sont très courts, plus exactement inférieurs à la durée  $t_z$  de parcours de l'épaisseur, ce sont les ondes à travers cette épaisseur qui gouverneront la réponse de la plaque. Les ondes n'atteignant pas la face inférieure, le problème est celui d'ondes se propageant à travers l'épaisseur. La plaque est alors assimilée à un semi-espace infini, ne fléchissant pas.

Si le phénomène d'ondes transitoires dans le projectile, appelé phénomène de 'ringing', ne peut être négligé (cas d'un projectile cylindrique long par exemple), une analyse 3D est nécessaire pour en tenir compte.

En pratique, les ondes à travers l'épaisseur sont généralement négligeables, sauf dans le cas où le rapport de l'épaisseur par la largeur est relativement élevé, ou dans le cas de chocs à très grande vitesse (s'accompagnant de faible inflexion), appelés 'chocs ballistiques', qui nécessitent eux une analyse tridimensionnelle.

Si la durée de contact est plus longue de façon à pouvoir négliger ce premier phénomène d'ondes se propageant à travers l'épaisseur, il faut considérer les ondes dans le plan de la plaque. Ces ondes gouverneront la réponse de la plaque tant que la durée de contact n'est pas suffisamment longue pour qu'elles atteignent les bords de la plaque.

Un modèle de plaque infinie est alors applicable et des approches analytiques simplifiées sont possibles. Celle de *Olsson (1992b)* par exemple, décrit le problème à l'aide d'une équation différentielle non linéaire à un seul paramètre (cf.III.4.3.c).

Pour des durées d'impact proches de la période fondamentale de vibration, il y a réflexion de l'onde de flexion (fig.3.5). Plusieurs modes doivent dans ce cas être inclus dans une étude analytique, qui devient alors inextricable [*R.Olsson (1992a)*].

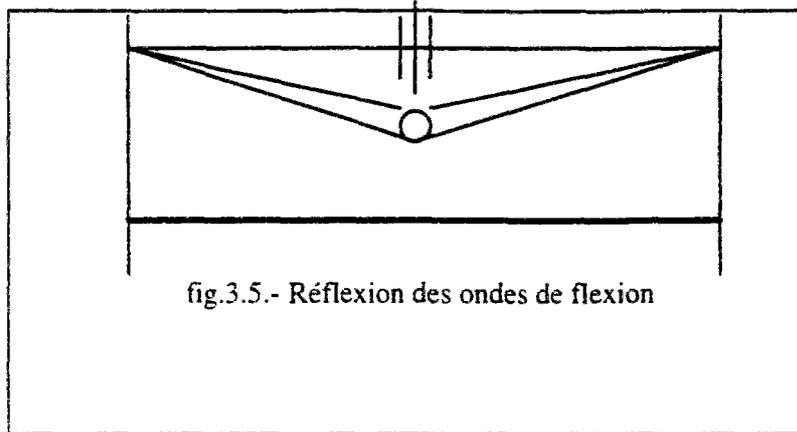


fig.3.5.- Réflexion des ondes de flexion

Si la durée de contact est supérieure à la demi-période du plus petit mode de vibration, la réponse sera gouvernée par les conditions aux limites imposées aux bords, ou encore par le mode fondamental de vibration de la plaque. Des modèles de type masse-ressort à 1 ou 2 ddl peuvent alors être adoptés dans des cas simplifiés (cf.III.4.1.).

Enfin, si la durée de contact est largement supérieure à la plus grande période de vibration (environ 5 fois supérieure), la réponse peut être supposée quasi-statique. La force de contact et la réponse de la plaque sont alors en phase. Des modèles basés sur des bilans énergétiques (égalité entre énergie cinétique et énergie de déformation) peuvent être alors utilisés (cf.III.4.1.).

Pour résumer, nous pouvons dire qu'en pratique, et dans la plupart des cas rencontrés, la réponse à l'impact peut être classée en deux grandes catégories:

- une première catégorie où la réponse est contrôlée par les ondes (ondes de flexion essentiellement);
- une deuxième catégorie où la réponse est contrôlée par les conditions aux limites.

L'approche analytique est fondamentalement différente pour ces deux cas [*R.Olsson (1992a)*].

Le cas d'impact usuellement rencontré est une combinaison de ces deux effets, avec influence à la fois des ondes et des conditions aux limites. Une étude numérique est alors généralement nécessaire.

### III.1.3. Conclusion

La plupart des impacts sur structures multicouches peuvent être modélisés par l'impact d'un projectile sur une plaque encastree ou simplement appuyée.

En considérant la masse et la vitesse du projectile comme deux paramètres indépendants, les classifications classiques parviennent à distinguer une classe de chocs lents et une classe de chocs rapides. Cependant, ces deux classes ne couvrent pas l'ensemble des types d'impact que l'on peut rencontrer.

La classification phénoménologique permet d'affirmer que les chocs dits lents correspondent à des impacts de longue durée (par rapport à  $t_z$ ). Des modèles de type masse-ressort peuvent alors être adoptés.

Les chocs rapides quant à eux ne peuvent apparemment pas être considérés comme appartenant à une même classe. On peut en effet distinguer les impacts rapides, dont la réponse est dominée par les conditions aux limites ou les ondes dans la plaque (essentiellement les ondes de flexion), et les chocs très rapides pour lesquels les ondes dans le projectile doivent être pris en compte.

Il n'en reste pas moins que le cas général et usuel reste difficile à classer. Une étude numérique est alors généralement nécessaire pour déterminer la réponse de la structure.

## III.2. INFORMATIONS EXPERIMENTALES SUR L'IMPACT DES PLAQUES MULTICOUCHES

Dans ce paragraphe, nous présentons les machines et les techniques expérimentales les plus utilisées dans les tests d'impact sur plaques multicouches, ainsi que les types d'empilement les plus utilisés. Cela permettra entre autres, de mieux concevoir à la fin de ce travail, les suites que l'on peut lui donner en terme d'études expérimentales.

Nous allons ensuite évoquer quelques résultats expérimentaux permettant de mieux cerner le phénomène de l'impact sur les plaques multicouches. Quelques détails de résultats expérimentaux seront évoqués, si besoin est, lors de l'évaluation des résultats numériques.

### III.2.1. Les machines et les techniques expérimentales utilisées

Comme nous l'avons vu, les types d'impact que l'on peut rencontrer en pratique sont variés. Pour simuler ces impacts en laboratoire, différentes machines et techniques sont utilisées. Nous en citons les plus connues [*W.J.Cantwell & J.Morton (1991), P.Hamelin (1990)*].

#### a) Pendule de Charpy

Conçu à l'origine pour des métaux, il a été utilisé dans les premières études menées sur les composites. L'essai de Charpy est utilisé dans une gamme de vitesse allant de 1.5 à 2m/s et des énergies allant jusqu'à 15 joules.

L'échantillon est une poutre épaisse et courte avec une entaille au milieu. Placé verticalement, il est impacté par un pendule en balancement.

Bien que facile à mettre en oeuvre, cet essai présente beaucoup d'inconvénients; le principal concerne la méconnaissance du trajet exact de chargement, à cause de la méconnaissance de la vitesse du projectile pendant le chargement.

L'essai ne permet pas l'accès à la force réellement appliquée lors de l'impact. Son utilisation se trouve limitée par la forme de l'échantillon, qui ne correspond pas à celle des constituants typiquement utilisés par l'ingénieur. De plus, l'essai étant destructif, il induit à faible vitesse, des modes de rupture que l'on n'observe pas nécessairement en pratique.

En fait, ce test sert uniquement à classer l'impact et à déterminer, en première approximation, la résistance du matériau.

#### b) Test d'Izod

Il ressemble au test précédent. La poutre échantillon est de même placée verticalement en console. Elle est impactée cette fois-ci au niveau de son bord libre.

#### c) Chute de poids (test de Gardner...)

Un poids tombant d'une hauteur prédéterminée, vient percuter la plaque placée horizontalement. Ce test présente les mêmes inconvénients que les tests précédents, mais offre la possibilité de choisir librement la géométrie de la plaque et du projectile (cylindre, sphère...).

L'essai à poids tombant permet d'atteindre des vitesses de l'ordre de 5m/s avec des énergies variant entre 3 et 35 joules.

#### d) Test à la machine hydraulique

Les machines hydrauliques n'ont été utilisées que récemment. Ces tests sont plus coûteux, mais ils permettent de tester des géométries variables (double poutre console...), dans un large intervalle de taux de déformation. Le test permet de

mesurer l'évolution des déformations et d'évaluer les propriétés du matériau, comme sa résistance à la compression, son module d'élasticité... en fonction du taux de déformation, sans y adjoindre l'effet dû au contact du corps en chute (puisque'il n'y a pas de contact direct).

L'analyse des résultats permet de renseigner sur le seuil d'endommagement et le type de comportement. Mais le principal avantage demeure de pouvoir établir des lois de comportement caractérisant mécaniquement le matériau.

#### e) Test aux barres de Hopkinson

Comme pour le test à la machine hydraulique, ce test permet de déterminer la variation des propriétés du matériau en fonction du taux de déformation.

L'échantillon est placé entre deux barres, l'une en amont et l'autre en aval. L'onde est envoyée dans la première barre et l'information est récupérée au bout de la deuxième barre, après que l'onde ait traversé le spécimen.

Plusieurs types de tests existent (traction, compression, cisaillement, poinçonnement). L'essai en traction est destructif. On peut trouver des détails sur les procédures de l'essai dans la littérature [*J.Harding (1989)*].

#### f) Test au canon à gaz

Ce test est typique des chocs rapides. La vitesse d'impact peut y atteindre 300m/s.

Le gaz (nitrogène) est retenu dans une cellule, par un diaphragme en plastique au bout du canon. Grâce à un signal électrique, le diaphragme est ouvert, et un projectile guidé est projeté sur l'échantillon.

Le test n'est généralement pas complètement destructif, mais donne souvent lieu à un endommagement à grande échelle, avec possibilité de perforation.

Des développements récents ont permis de mesurer la variation de la force et du déplacement durant le test.

### **III.2.2. Les structures étudiées**

Les plaques sont généralement carrées, de petite dimension (de l'ordre de 150mm), souvent encastrées ou sur appuis simples, l'encastrement parfait restant difficile à reproduire en pratique.

Les structures, généralement des plaques ou des poutres, sont constituées de drapages croisés (succession de plis à 0° et 90°) ou quasi-isotropes (assemblage de couches à 0°, 90°, 45° et -45°).

### III.3.2. Quelques observations expérimentales sur l'impact des plaques multicouches

En dépit du nombre croissant de travaux menés sur les impacts sur multicouches, les résultats expérimentaux restent peu nombreux.

Vu la rareté de tests standards ou normalisés, les conditions d'impact sont très variées. De plus, la plupart des tests réalisés le sont avec des machines conçues pour des besoins particuliers, et dans l'objectif de tester des structures de géométrie bien définie.

Tout cela fait que la comparaison directe de résultats publiés est difficile.

Notons aussi que la plupart des travaux expérimentaux ne font pas la distinction lors de la planification de l'étude, entre réponse contrôlée par les ondes et réponse contrôlée par les conditions aux limites [R.Olsson (1992a)].

Les points d'intérêt des études expérimentales sont variés. Nous allons nous limiter ici aux points les plus utiles pour la suite de ce travail. Nous parlerons de la réponse globale, de la propagation des ondes et de certains aspects de l'endommagement.

#### a) Détermination expérimentale de la réponse globale

Par réponse globale nous entendons la réponse se rattachant au centre de la plaque et au centre de gravité du projectile. Il s'agit des déplacements et vitesses de ces deux points ainsi que de la force de contact qui les relie. A l'opposé, la réponse locale fait référence au champ de contrainte local au niveau de la zone de contact.

Notons que peu de travaux expérimentaux fournissent la flèche au centre de la plaque, et que des difficultés techniques accompagnent généralement les essais de mesure de la force de contact entre le projectile et la plaque.

#### b) Etudes expérimentales sur la propagation d'ondes

Plusieurs travaux se sont intéressés à la propagation des ondes dans les plaques multicouches impactées. La diversité et la dispersion des résultats expérimentaux nous ont conduit à insister essentiellement sur les travaux de l'équipe de l'université de Floride et ses nombreux travaux [R.L.Sierakowski & col. (1976), C.A.Ross & col. (1976), L.E.Malvern & col. (1977,1979), N.Takeda (1980), N.Takeda & col. (1980, 1981.a-b, 1982)]. Ces travaux présentent une certaine cohérence et permettent de se faire des idées claires sur le phénomène.

Les plus récents de ces travaux ont été menés avec des canons à gaz. Les matériaux en verre-epoxy semi-transparents permettent des observations directes à l'intérieur de la structure.

Il ressort de ces travaux l'existence de plusieurs types d'ondes qui parcourent la plaque. La plus dominante est une onde de flexion à faible vitesse et grande amplitude. Elle se propage à partir de la zone de contact dans différentes directions et avec différentes vitesses. Son amplitude diminue au cours de la propagation. Sa vitesse est plus grande dans la direction du module le plus élevé.

Des résultats similaires ont été obtenus par *Daniel et col. (1979)* avec des plaques en bore-epoxy et en carbone-epoxy.

Ces observations sont compatibles avec la classification phénoménologique de *Olsson (III.1.2.)*. Elles s'expliquent en effet par la gamme de vitesses relativement élevées (quelques dizaines de m/s) avec lesquelles sont menées ces expériences. Ce niveau de vitesse place ces tests plutôt dans la gamme des impacts dont la réponse est gouvernée par les ondes de flexion.

### c) Etude des endommagements causés par l'impact

Pour observer l'endommagement de la structure multicouche impactée, plusieurs techniques ont été utilisées: observations microscopiques, thermographie, ultrasonique, vibrothermographie...

L'utilisation des techniques ultrasoniques est actuellement largement répandue, et les récents développements dans ce domaine permettent d'obtenir des cartes de délaminage précises pour chaque interface.

Des observations directes (durant l'impact) ont été possibles pour certains types de matériaux (semi-transparents par exemple).

Trois formes d'endommagement ont lieu: rupture de fibres, fissuration et délaminage. Les auteurs qui se sont intéressés à l'endommagement s'accordent à dire que le délaminage en est la forme principale (du point de vue absorption d'énergie).

Le délaminage est précédé par l'apparition de fissures. Un seuil d'endommagement existe, en dessous duquel les fissures apparaissent certes, mais pas le délaminage. Les fissures peuvent être transverses ou le long des fibres et peuvent ne pas se développer identiquement le long des couches.

Dépassé un certain seuil d'endommagement, le délaminage apparaît aux interfaces où l'orientation des fibres change. Il peut être caractérisé par son lieu d'apparition, sa propagation, et son étendue (surface délaminée).

L'initiation a généralement lieu au niveau de la zone de contact. Beaucoup de chercheurs ont affirmé que ce sont les contraintes transverses et normales à l'interface qui régissent cette initiation [*S.P.Joshi & col. (1985)*, *C.A.Ross & col. (1985)*, *F.K.Chang (1990)*, *S.Abrate (1991,1994)*...]. D'où l'importance de la réponse locale (champ de contrainte au voisinage de la zone de contact) pour étudier l'initiation du délaminage.

Pour la propagation, nous devons distinguer entre la propagation à travers l'épaisseur et celle dans le plan de l'interface.

La propagation à travers l'épaisseur explique des observations expérimentales qui ont relevé moins de délaminage à l'interface supérieure qu'à l'interface inférieure de la plaque. Cette différence de comportement des deux interfaces est en effet attribuée au mécanisme séquentiel de propagation du délaminage par bandes à partir de la face supérieure impactée [*N.Takeda & col. (1981b)*]. Cet aspect séquentiel du délaminage a déjà été mis en évidence par *Cristescu et col. (1975)*, sur un empilement de couches à 0° et 90°, puis observé par *Takeda et col. (1981b)*; le délaminage commence quand une bande de largeur D (diamètre du projectile), est poussée par le projectile vers l'intérieur de la plaque. Cette bande génératrice (*generator trip*) charge ensuite transversalement le deuxième pli, initiant la formation d'une surface de délaminage entre ces deux plis. Une deuxième bande génératrice plus large et perpendiculaire à la première se forme ensuite dans le deuxième pli. Poussée à travers l'épaisseur, elle initie la formation d'une deuxième surface de délaminage entre le deuxième et le troisième pli. Le processus peut être ainsi répété. La surface délaminée augmente d'une interface à l'autre, et on se retrouve avec plus de délaminage vers le bas de la plaque. Le délaminage continue à se propager ainsi par bande génératrice jusqu'à ce que l'énergie disponible devienne insuffisante pour soutenir cette propagation.

Quant à la propagation dans la surface délaminée, il ressort aussi des travaux expérimentaux de *Takeda & col. (1980, 1981a, 1982)* qu'elle est reliée à la propagation des ondes de flexion.

Il a été en effet observé que le délaminage se propage à une certaine vitesse initiale, laquelle vitesse diminue pendant l'impact pour se stabiliser à une valeur correspondant à peu près à la vitesse de propagation de l'onde de flexion dominante. Les résultats ont aussi montré que la vitesse de propagation du délaminage est peu affectée par cette vitesse et par la masse du projectile.

Les fissures précédant le délaminage se forment également lors de la propagation des ondes de flexion, ce qui laisse entrevoir une certaine interaction fissuration-délaminage.

La conclusion qui se dégage de ces travaux et de ces constatations est que l'onde de flexion peut être le facteur le plus important générant le délaminage, et que sa propagation est en relation étroite avec la propagation du délaminage. Ces deux dernières constatations soutiennent d'ailleurs l'hypothèse émise par *Takeda et col.*, selon laquelle la bande génératrice n'est pas en relation directe avec la propagation du délaminage, mais est plutôt initiatrice du délaminage.

Pour la surface délaminée, une étude expérimentale menée par *Liu (1988)* montre que son étendue dans une interface augmente avec la différence d'orientation des plis la définissant. C'est en fait la différence de comportement des deux plis qui rend l'interface fragile vis à vis du délaminage. Ceci explique d'ailleurs pourquoi les interfaces entre les plis de même orientation ne subissent pas de délaminage.

Par ailleurs, la surface délaminée a une étendue proportionnelle à la réponse globale en flèche et en pression de contact [N.Takeda et col. (1980)]. La réponse globale constitue dans ce sens un moyen de mesure de l'étendue de la surface délaminée.

Enfin, peu de travaux [H.T.Wu & G.S.Springer (1988)] ont essayé de définir ou de vérifier un critère de délaminage en dynamique.

### III.3. LES LOIS DE CONTACT

Nous nous intéressons ici aux lois qui régissent le contact entre la plaque et le projectile.

La force de contact ainsi que sa distribution sur la surface de contact sont à priori des inconnues du problème, et font partie de la solution à déterminer.

Nous parlerons donc d'abord de la possibilité de dérivation analytique de la relation traduisant le contact.

Nous présenterons ensuite les lois de contact expérimentales de Yang et Sun (1982). Ces lois ont été utilisées dans de nombreuses études récentes.

La considération de la force de contact comme inconnue complique la résolution du problème. Pour simplifier, certains auteurs se sont alors donnés la variation de la force de contact dans le temps ainsi que la distribution de la pression sur la surface de contact. Nous réservons un paragraphe à ces approches simplifiées.

Nous verrons enfin au dernier paragraphe, que la définition précise de la loi de contact n'a pas la même importance, suivant que l'on s'intéresse à la réponse globale ou à la réponse locale de la plaque et que l'on peut se contenter d'une force de contact introduite comme donnée pour le calcul de la réponse globale.

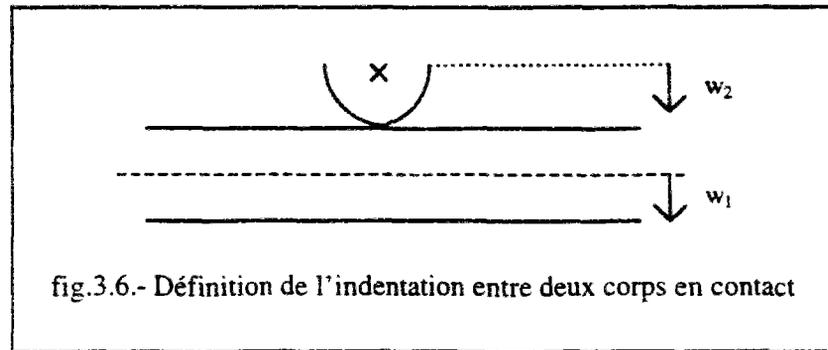
#### III.3.1. Dérivation analytique de la loi de contact

L'obtention d'une loi de contact expérimentale nécessitant beaucoup de temps et de moyens, des efforts ont été développés pour pouvoir disposer d'une relation analytique traduisant le contact entre un projectile et une plaque multicouche.

La plupart des études ont essayé d'exprimer cette loi à l'aide d'une relation entre la force de contact  $F$  et l'indentation  $\alpha$ , appelée loi d'indentation.

L'indentation  $\alpha$  (parfois notée  $\delta$ ), est le rapprochement entre deux points à contrainte nulle appartenant aux deux corps en contact (fig.3.6):

$$\alpha = w_2 - w_1$$



Quelques travaux [*D.S.Cairns & P.A.Lagace (1987)*, *E.Wu & col. (1994a)*] ont essayé d'obtenir directement des expressions analytiques traduisant cette relation d'indentation; les résultats obtenus n'étaient pas toujours satisfaisants.

Malgré ces efforts, il reste pratiquement admis que la dérivation directe d'une telle relation analytique serait assez exceptionnelle. La plupart des travaux [*H.Y.T.Wu & col. (1989)*, *B.R.Petersen (1985)*, *H.Aggour & C.T.Sun (1988)*, *J.K.Chen & C.T.Sun (1985c)*] utilisent plutôt la loi de Hertz ou une de ses extensions pour traduire le contact.

Etablie à l'origine pour traduire le contact entre deux sphères élastiques isotropes, la loi de Hertz s'exprime par:

$$F = k_c \cdot \alpha^{3/2} \quad (3.1)$$

Beaucoup de chercheurs [*W.E.Goldsmith (1960)*, *J.R.Willis (1966)*, *L.B.Greszczuk (1982)*...] ont par la suite essayé, en modifiant cette expression, de la généraliser aux structures non isotopes. Dans un paragraphe que nous avons laissé en annexe III, nous évoquons quelques uns de ces travaux et les expressions qui s'en sont dégagées.

Il n'en reste pas moins qu'actuellement, on ne dispose pas d'une relation analytique traduisant le contact entre un projectile isotrope et une plaque multicouche.

*Yang et Sun (1982)* figurent alors parmi ceux qui, en s'inspirant de la loi de Hertz et de ses développements, ont essayé d'établir expérimentalement cette loi de contact.

### VI.3.2. Dérivation expérimentale de la loi de contact: Les lois de Yang et Sun

Nous utiliserons largement ces lois dans notre code de calcul.

Ces lois s'inspirent de la loi de Hertz et de ses développements (cf.annexeIII). Elles ont été confirmées par les travaux de *Tan et Sun (1985)*.

Une particularité ces travaux est d'adopter des expressions de lois de contact différentes en phase de chargement (lorsque  $F$  est croissante), en phase de décharge (lorsque  $F$  est décroissante) et éventuellement en phase de rechargement (lors d'un deuxième contact).

Pour la phase de chargement, la loi de contact s'écrit:

$$F = k_c \cdot \alpha^{3/2} \quad (3.2)$$

avec

$$k_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{R^{1/2}}{\frac{(1-\nu_s^2)}{E_s} + \frac{1}{E_y}} \quad (3.3)$$

$R$ : la courbure relative définie en fonction des deux rayons par  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ;

$E_s, \nu_s$ : module d'Young et coefficient de Poisson du projectile;

$E_y$ : le module transverse de la couche supérieure de la plaque.

La loi de Yang et Sun a été établie à partir de tests menés sur des poutres en graphite/epoxy, encastées, constituées essentiellement d'empilements [0/45/0/-45/0]<sub>2s</sub>. Le coefficient de rigidité de contact a été alors déterminé par interpolation à partir de la méthode des moindres carrés.

Cette loi de Hertz modifiée n'est valable que pendant la phase de chargement, c'est à dire jusqu'au moment où la force de contact  $F$  atteint son maximum.

Pendant la phase de décharge, des indentations permanentes apparaissent, et la loi de contact en puissance  $3/2$  n'est plus valable. Ceci a conduit *Yang et Sun (1982)* à adopter l'expression générale proposée par *Crook (1952)*:

$$F = F_m \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q$$

$F_m$  et  $\alpha_m$  étant la force et l'indentation maximales atteintes pendant le chargement;  $\alpha_0$  l'indentation permanente après décharge.

$\alpha_0$  et  $q$  sont difficiles à mesurer. Ils ont été déterminés par la méthode des moindres carrés.  $q=2.5$  semble être une valeur appropriée, mais le coefficient  $\alpha_0$  déterminé avec cette méthode ne correspond pas à la vraie indentation permanente.  $\alpha_0$  dépend en effet du chemin de décharge. Cela signifie que plusieurs tests sont nécessaires, et que la relation liant  $F_m$  à  $\alpha_0$  doit être déterminée.

Pour simplifier l'étude en décharge, l'hypothèse que le rapport  $S=F_m/(\alpha-\alpha_0)^{5/2}$  restait constant pour les différents chemins de décharge a été émise.

En introduisant la constante  $\alpha_{cr}=k_c/S$  ne dépendant que du matériau et de l'impacteur, et en écrivant que  $F_m=k_c.\alpha_m^{3/2}$ , on a:

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = 1 - \left(\frac{\alpha_{cr}}{\alpha_m}\right)^{2/5}$$

avec la condition:

$$\alpha_0=0 \text{ si } \alpha_m < \alpha_{cr} .$$

$\alpha_{cr}$  apparaît alors comme une donnée associée à l'indentation, à partir de laquelle on peut déterminer  $\alpha_0$ .

Pour déterminer  $\alpha_{cr}$ , Yang et Sun ont joint les points de chaque courbe de décharge, par une courbe telle que l'énergie de dissipation correspondant au cycle charge/décharge corresponde à celle obtenue expérimentalement. Les résultats obtenus alors sont satisfaisants.

Il est à noter qu'une faible variation dans la valeur de  $\alpha_{cr}$  n'a pas d'effet appréciable sur la courbe de décharge.

La valeur de  $\alpha_{cr}$  semble être indépendante de la taille de l'impacteur; un seul test en décharge suffit donc pour la déterminer.

En résumé, la loi en décharge s'écrivait:

$$F = F_m \left( \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right)^q \tag{3.4}$$

$F_m$  et  $\alpha_m$  étant la force et l'indentation maximales atteintes pendant la charge;  $\alpha_0$  désignant l'indentation permanente après décharge donnée par:

$$\alpha_0 = S.(\alpha_m - \alpha_{cr}) \quad \text{si } \alpha_m \geq \alpha_{cr}$$

avec

$$S = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^{5/2}}$$

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{si } \alpha_m \leq \alpha_{cr}$$

$\alpha_{cr}$  désigne l'indentation critique;  
 S est une constante expérimentale;  
 q est une constante évaluée à environ 2.5.

$\alpha_{cr}$  et S sont des constantes déterminées expérimentalement.

Quelques difficultés techniques ont accompagné la détermination de ces lois par Yang et Sun. Ceci a conduit *Tan et Sun (1985)* à utiliser un transformateur différentiel pour améliorer la précision des résultats. Les résultats obtenus avec l'empilement  $[0/45/0/-45/0]_{2s}$  ont été comparés à ceux issus de tests expérimentaux d'impact (vitesse inférieure à 4m/s), ainsi qu'à des résultats issus d'un calcul numérique basé sur la théorie des laminés de *Whitney et Pagano (1970)* et utilisant des éléments finis développés par *S.H. Yang (1981)*. Un bon accord a été trouvé pour les déformations. Le coefficient  $k_c$  a pu être déterminé expérimentalement (pour ce niveau de vitesse).

Enfin, lorsque l'impact se traduit par plusieurs phases de contact entre la plaque et le projectile, une phase de recharge peut exister. D'après les travaux de *Yang et Sun (1982)*, la loi en puissance 3/2 semble convenir:

$$F = k_1(\alpha - \alpha_0)^{3/2}.$$

Lorsque le niveau de charge n'est pas élevé, la courbe de recharge reprend là où s'est arrêté la courbe de charge. Dans ce cas, on peut déterminer le nouveau coefficient de contact  $k_1 = F_m / (\alpha_m - \alpha_0)^{3/2}$ , sans besoin d'aller opérer de nouveaux tests en décharge.

La loi de contact en décharge s'exprime finalement par:

$$F = k_1 \cdot (\alpha - \alpha_0)^{3/2} \quad (3.5)$$

avec

$$k_1 = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_0)^{3/2}}$$

Pour les faibles niveaux de charge,  $k_1$  est pratiquement égal à la rigidité de contact en charge  $k_c$ .

Les travaux de Yang et Sun fournissent ainsi des expressions de la loi d'indentation pendant les phases de chargement, de décharge et de rechargement. Certaines des constantes intervenant dans ces expressions doivent cependant être redéterminées à chaque fois que l'on change de structure.

### III.3.3. Possibilité de l'introduction de la force de contact comme donnée du problème

Trois problèmes sont sous-jacents à la définition du contact;

- l'évolution dans le temps de la force de contact;
- la forme variable dans le temps de la zone de contact;
- et enfin la répartition de cette force sur la zone de contact.

Plusieurs études ont essayé de se définir à priori la force de contact. Nous en évoquons trois;

● L'étude de *Ramkumar et Chen (1983)* se distingue par l'hypothèse d'une surface de contact variable dans le temps. Ils ont imposé à chaque instant  $t$  une distribution de pression uniforme de la forme:

$$\sigma_z(x,y,h/2,t) = -\left(\frac{C_1 \cdot t}{4(at/c)^2}\right) \cdot XYT$$

avec	$X(x,t)=1$	si $ x  < at/c$
	0	sinon
	$Y(x,t)=1$	si $ y  < at/c$
	0	sinon
	$T(t)=1$	si $t < c$
	0	sinon

$C_1$  désignant le taux de charge,  $h$  l'épaisseur totale et  $2a$  la longueur de la base de la surface de contact à  $t=c$ , instant auquel l'endommagement s'initie.

Avec une telle répartition, l'analyse développée restait valable jusqu'à  $t=c$ , et servait à prédire le début de l'endommagement.

● *J.D.Lee et H.Liebowitz (1984)*, dans une analyse éléments finis 3D, ont supposé la pression de contact uniformément répartie sur la zone de contact, avec une évolution en triangle dans le temps:

$$f(t) = \begin{cases} p_0 \frac{2t}{\tau} & \text{si } t \leq \frac{\tau}{2} \\ 2p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & \text{si } \frac{\tau}{2} \leq t \leq \tau \end{cases}$$

$\tau$  étant la période de contact que l'on prend égale à  $0.5 \cdot T$ .

avec  $T = \frac{L}{c}$  et  $c = \left(\frac{E_t}{\rho}\right)^{1/2}$  vitesse de l'onde longitudinale.

● *Ross et col. (1985)*, également dans une étude éléments finis 3D, ont supposé la force de contact ponctuelle. Son évolution dans le temps était supposée linéaire (triangulaire) pendant la durée  $\Delta t$  du contact.

A travers ces études, nous voyons que plusieurs répartitions ont été imaginées. L'introduction de la force de contact comme donnée permet alors de calculer efficacement la réponse globale de la plaque (flèche au centre par exemple). Il n'en reste pas moins que le champ de contrainte au niveau local, c'est à dire au niveau de la zone de contact, ne peut être calculé avec précision C'est ce que nous voyons au prochain paragraphe.

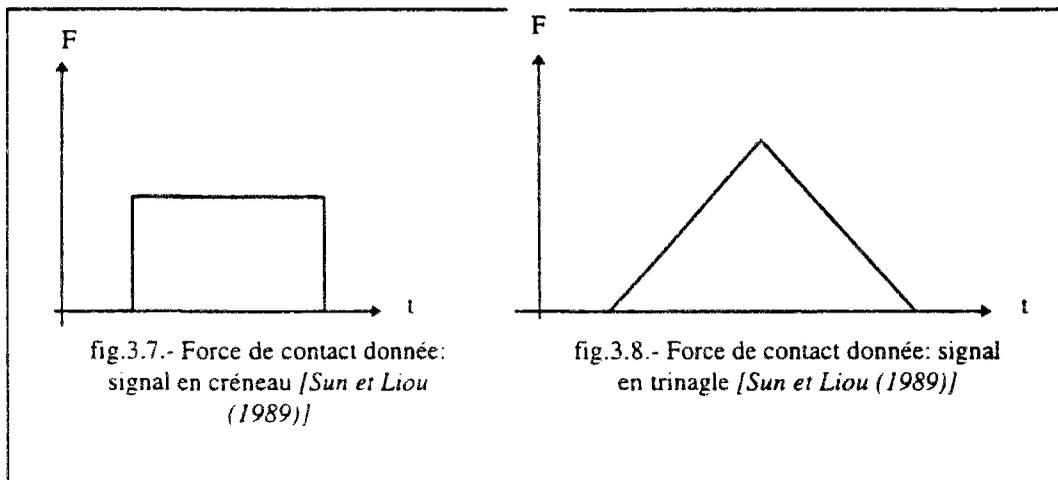
### III.3.4. Influence sur la réponse d'une définition précise de la loi de contact

Le but de ce paragraphe est de constater la différence d'importance d'une définition précise de la loi de contact, suivant que l'on s'intéresse au calcul de la réponse globale ou à celui de la réponse locale de la structure.

Pour ce faire, nous partons de l'étude éléments finis comparative menée par *C.T.Sun et W.J.Liou (1989)*.

Pour convertir la vitesse (ou encore la quantité de mouvement) en forces nodales (forces appliquées aux noeuds de la surface de contact), ils ont utilisé deux méthodes:

- une première s'appuie sur l'égalité entre l'impulsion et la quantité de mouvement transmise:  $F.t=M.V$ . La force 'F' peut avoir deux répartitions dans le temps; répartition uniforme (fig.3.7.) ou répartition en triangle (fig.3.8.).



- la deuxième méthode, plus précise, s'appuie sur la loi de Hertz et fait intervenir l'indentation de la surface de la plaque par le projectile. La force de contact y est considérée comme une inconnue du problème.

L'étude de *Sun et Liou* a montré que pour ces deux méthodes, la réponse globale de la plaque (flèche au centre) est pratiquement la même. Toutefois, le champ de contrainte, et essentiellement les contraintes interlaminaires, sont affectées par la distribution de la force de contact.

*Qian et Swanson (1990)* ont montré qu'en fait, plus la plaque est rigide, plus la rigidité de contact est importante dans la réponse.

Récemment, certains travaux [*E.R.Green (1991.a-b)*], en imaginant des projectiles de forme particulière permettant une répartition linéique de la force de contact ont trouvé que la réponse globale dépend peu de la forme de l'impulsion (variation dans le temps).

Tous ces résultats montrent que la définition précise de la loi de contact a peu d'effet sur la réponse globale. Elle peut par contre affecter sévèrement le champ de contraintes local. Elle est donc d'une grande importance si l'on veut étudier l'endommagement de la plaque. La loi d'indentation de type Hertz semble dans ce cas plus indiquée qu'une distribution de force donnée.

Toutefois la théorie de Hertz reste une bonne approximation pour l'impact des plaques, tant que l'indentation reste faible devant l'épaisseur et les dimensions de la surface de contact. Lorsque les indentations deviennent grandes, l'endommagement peut avoir lieu, le ressort d'indentation devenant plus raide, la loi en  $3/2$  doit alors être abandonnée [R.Olsson (1992a), E.Wu & K.Shyu (1993)].

### III.4. LES MODELES MATHEMATiques UTILISES

Nous abordons maintenant des modèles plus complexes. Le problème est toujours celui d'une plaque multicouche impactée par un projectile. Plusieurs modèles mathématiques ont été utilisés dans l'objectif de calculer la réponse globale et de la réponse locale (champ de contrainte local) de la plaque.

Nous allons évoquer ici quelques familles de modèles utilisés, en nous contentant des plus importants d'entre eux. L'objectif de ce paragraphe est de pouvoir distinguer le contexte dans lequel se place notre modélisation mathématique, et de préparer le champ aux comparaisons entre les résultats donnés par notre modèle et ceux donnés par d'autres études.

Nous évoquerons les familles de modèles en allant des plus simples au plus complexes.

Nous parlerons d'abord des modèles de type masse-ressort et des bilans énergétiques, puis de l'approche simplifiée par propagation d'onde.

Nous parlerons ensuite des approches analytiques avec des modèles de type poutre ou plaque en partant du cas isotrope et en essayant de généraliser au cas anisotrope.

Dans la dernière famille de modèles, nous réunirons les approches par modes propres et ceux par éléments finis. C'est dans cette dernière famille que l'on peut classer une grande partie des travaux numériques récents, et aussi probablement notre étude numérique.

#### III.4.1. Les modèles simples de type masse-ressort

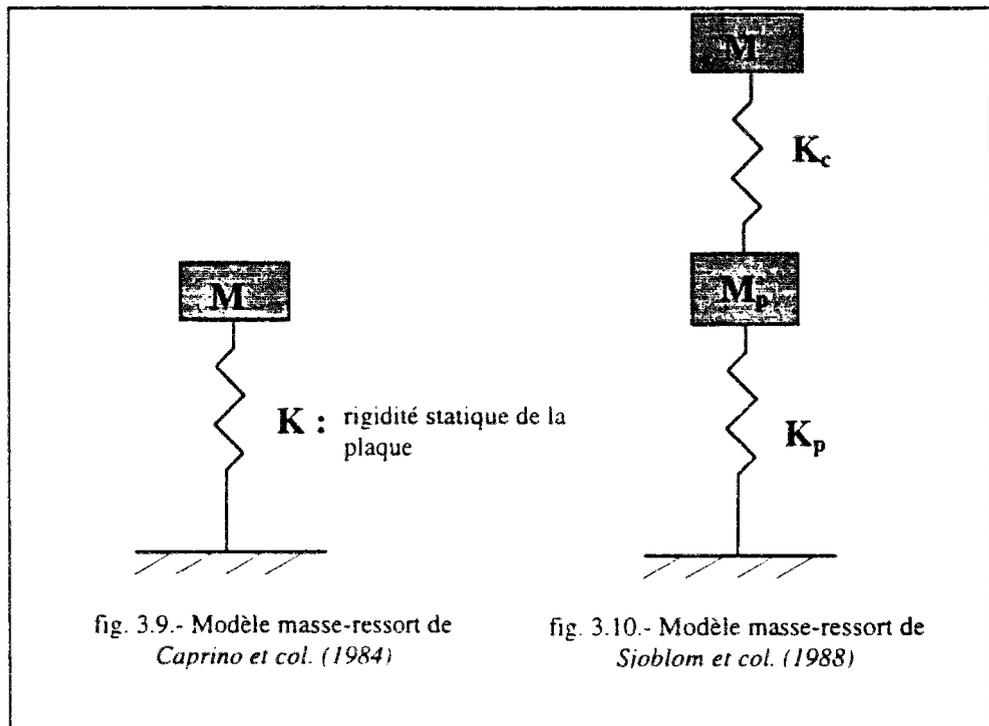
Lorsque la vitesse d'impact est faible et que la durée du contact est longue, des modèles analytiques peuvent représenter le problème par un assemblage de masses et de ressorts, réalisant ainsi un système discret avec seulement quelques degrés de liberté.

Ces modèles sont simples à utiliser, mais ne fournissent que des informations globales sur la réponse. Ils ne permettent pas de calculer le champ de contrainte local.

Plusieurs modèles ont été imaginés. Le nombre de ressorts dépend des effets dont on veut tenir compte (effet de contact, effet de flexion, effet de cisaillement...). Nous allons évoquer quelques uns de ces modèles, en allant des plus simples au plus complexes.

- *Caprino et col. (1984)* ont utilisé un modèle de type masse-ressort à un seul degré de liberté (fig.3.9.), pour modéliser l'impact d'une grande masse en chute libre sur une plaque de faible masse et de petites dimensions.

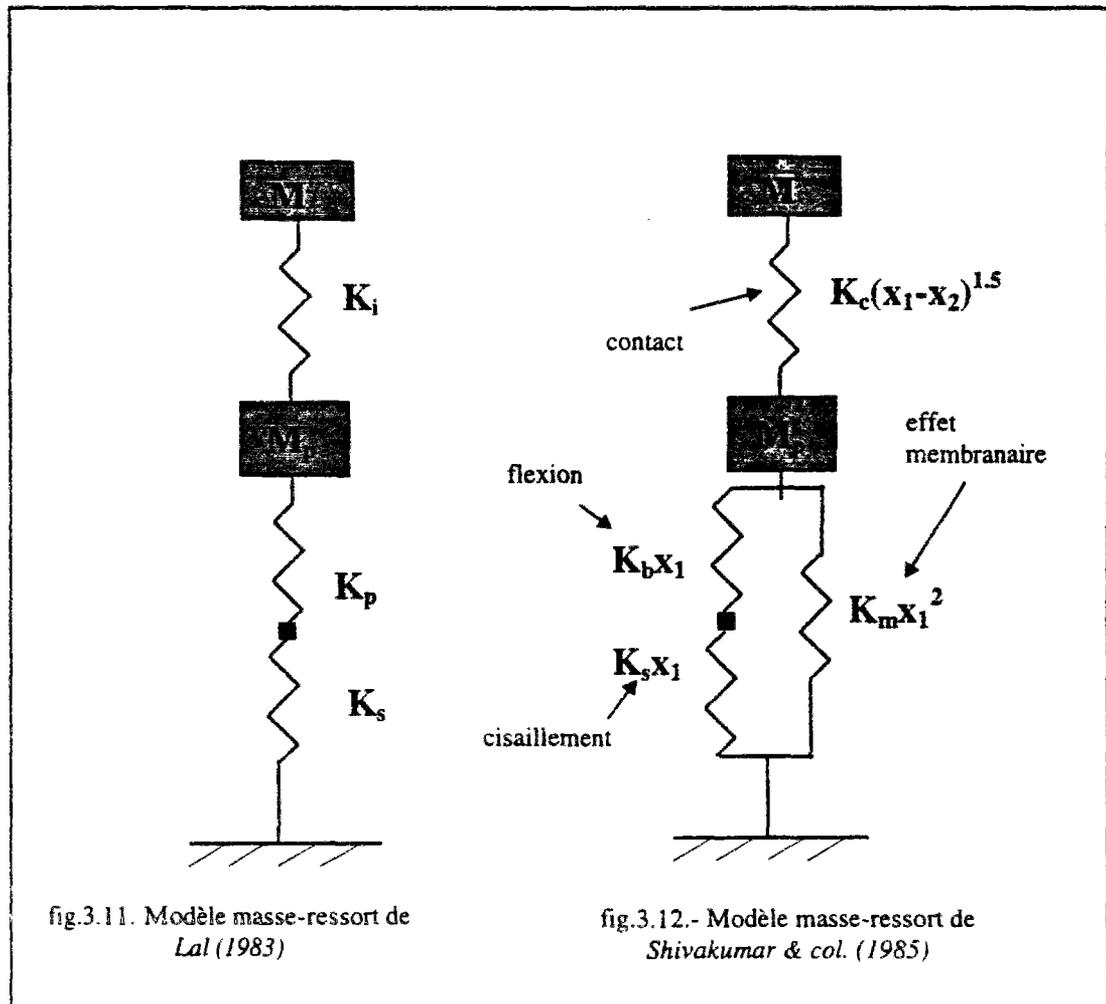
La durée du contact est dans ce cas très longue et la réponse est quasi-statique. Un très bon accord a été trouvé avec les résultats expérimentaux.



- *Sjoblom et col. (1988)* ont suggéré un modèle à deux ddl (deux masses) et deux ressorts (fig.3.10.).

Le coefficient  $k_p$  désigne la rigidité de la plaque. La rigidité de contact est représentée par un ressort non-linéaire  $k_c$ .

- Avec deux ddl également, *Lal (1983)* a présenté un modèle à trois ressorts  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_s$  représentant respectivement la rigidité de flexion et d'effet membranaire, la rigidité de contact de type Hertz, et la rigidité de cisaillement (fig.3.11.).



Les modèles simples de type masse-ressort peuvent ainsi être utilisés. Par intégration des équations de mouvement obtenues, les variations dans le temps de la force de contact et des déplacements peuvent être déterminées.

Dans le cas d'une réponse quasi-statique, les déplacements du projectile et de la plaque sont en phase. Ils atteignent leur maximum en même temps. Dans ce cas, il est possible de déterminer directement la durée de contact ainsi que le maximum de la force de contact, en écrivant un bilan énergétique traduisant l'égalité entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation.

Quand la force de contact atteint son maximum, l'énergie cinétique du projectile est nulle. L'énergie cinétique initiale aura alors été utilisée pour déformer globalement la plaque et pour y produire localement des déformations liées directement au contact.

Les deux énergies correspondant à ces deux déformations peuvent être exprimées en fonction du maximum de force de contact, qui peut lui même être relié à la vitesse initiale du projectile par l'écriture d'un bilan énergétique.

C'est ainsi que plusieurs modèles à bilans énergétiques ont été utilisés [K.N.Shivakumar & col. (1985), A.P.Christoforou & col. (1991), T.A.Guy & col. (1992), C.B.Prasad & col. (1993)...].

Le modèle énergétique le plus complet a été présenté par *Shivakumar et col. (1985)*, pour l'étude de l'impact sur plaques multicouches circulaires. Il a utilisé pour cela un modèle à deux ddl et quatre ressorts, tenant compte ainsi des effets de flexion, de cisaillement, de contact, et de l'effet membranaire (lié aux déformations membranaires) (fig.3.12.).  $M_p$  désigne la masse effective de la plaque (égale au quart de sa masse totale). Le terme membranaire non linéaire peut être négligé tant que les déplacements ne sont pas importants. Pour des déplacements de faible amplitude,  $k_m$  peut être supposé nul.

Le modèle proposé par *Bucinell et col. (1991)* se rapproche du modèle de Shivakumar. La rigidité de contact non linéaire est remplacée par un ressort linéaire équivalent. Avec ce modèle, ils ont pu établir que lorsque la réponse est quasi-statique, la vitesse d'impact affecte uniquement l'amplitude de la réponse, alors que la durée de contact reste constante. Nous verrons au paragraphe (VI.1.1.), que même en isotropie cette conclusion manque de précision.

### III.4.2. Les approches par propagation d'ondes

Nous avons classé ces approches dans la gamme des modèles simples.

Les vibrations transverses produites par l'impact d'une plaque multicouche, peuvent être étudiées en terme de mouvement d'onde de flexion.

Les ondes de flexion constituent le meilleur moyen pour pouvoir interpréter le mouvement transitoire de la plaque. Nous verrons néanmoins qu'elles restent difficiles à analyser du fait qu'elles se propagent tout en changeant de vitesse et de forme.

Partons du milieu isotrope élastique infini. Seuls deux types d'ondes se propagent:

- une onde de dilatation avec une célérité  $\sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$  ;

- une onde à volume constant dite onde de cisaillement. Sa célérité est  $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$  .

Dans un milieu plaque (non infini), des ondes de flexion naissent. Elles sont plus lentes et engendrent des contraintes plus élevées que dans le cas d'ondes de dilatation ou de cisaillement [B.S.Kim & F.C.Moon (1979)].

Par leur simplicité relative, les théories de poutre constituent un moyen d'investigation du problème des ondes dans une plaque. En effet, les poutres

n'étant que des plaques élancées, les ondes y sont similaires à celles dans les plaques.

Dans une poutre mince, les ondes de dilatation sont gouvernées par l'équation:

$$E \cdot u_{,xx} = \rho \cdot u_{,tt}$$

ce qui décrit deux ondes se propageant à directions opposées, avec une forme constante et une célérité  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Dans le cadre de la théorie d'Euler-Bernouilli, les ondes de flexion dans une poutre sont gouvernées par une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre:

$$w_{,tt} = -\frac{EI}{\rho A} \cdot w_{,xxxx}$$

Cette équation n'admet pas de solution d'onde se propageant à forme et à vitesse constantes.

Pour une plaque, deux ondes élastiques existent: une longitudinale et une de flexion.

L'onde longitudinale est similaire à l'onde de dilatation que nous avons évoquée pour les poutres. Si la plaque est isotrope élastique infinie et mince, la vitesse de cette onde est  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ . Cette vitesse diffère de celle dans une poutre uniquement par le facteur  $1-\nu^2$ .

Pour une plaque multicouche, l'onde de flexion est généralement prédominante, mais d'autres ondes se propagent également, ce qui rend l'étude difficile.

Cela explique peut être pourquoi les études expérimentales sont peu nombreuses [*N.Takeda & col. (1981a)*, *P.C.Chou & col. (1975)*, *I.M.Daniel & col. (1976, 1979)*]. Malgré cela, et comme mentionné par *Takeda et col. (1980)*, de nombreuses analyses théoriques de la propagation d'ondes ont été entreprises pour étudier un composite laminé impacté transversalement [*T.S.Chow (1971)*, *C.T.Sun & col. (1974)*, *F.C.Moon (1972, 1973.a-b-c)*, *B.S.Kim & col. (1977, 1979)*, *J.T.Kubo & col. (1975)*, *R. Olsson (1994)*...].

La théorie de plaque laminée [*P.C.Yang & col. (1966)*], associée à l'introduction des déformations de cisaillement transverse et des inerties de rotation proposée par *J.M.Witney et N.J.Pagano (1970)*, a été utilisée pour résoudre quelques cas de conditions aux limites.

En comparant les résultats théoriques à des résultats de mesures expérimentales, *Chou et Rodini (1975)* ont démontré la fiabilité de cette théorie des plaques laminées pour étudier les problèmes de propagation d'ondes.

Les résultats donnés par cette théorie dans le cas d'un seul pli ont été comparés par *Sun et Lai (1974)* à une solution 2D élastique orthotrope. Pour les deux approches, ils ont utilisé la transformation de Laplace dans le temps, et celle de Fourier dans l'espace. Le bon accord trouvé alors entre les résultats des deux approches a indiqué que cette théorie de plaque de *P.C.Yang & col. (1966)* est suffisante pour l'étude des ondes dans les problèmes d'impact.

*Moon (1972)* a utilisé une version modifiée de la théorie de plaque de Mindlin, pour étudier les ondes de contraintes dans un seul pli orthotrope. La forme des fronts d'onde ainsi que la vitesse des ondes longitudinale et de flexion ont été ainsi déterminées pour un certain nombre de plis.

Après cette étude par front d'ondes, *Moon (1973.a-c)* a utilisé la théorie de plaque de Mindlin pour effectuer des calculs d'ondes dans les plaques anisotropes, soumises à une force transverse concentrée. La transformation de Laplace dans le temps, et la double transformation de Fourier dans l'espace ont été utilisées. La pression de contact avait une évolution sinusoïdale dans le temps.

A partir d'une étude 2D, basée sur la théorie des modules effectifs et la théorie de plaque de Mindlin, *Moon (1973.b-c)* a mis en évidence l'existence de 5 ondes de contraintes; deux de contraintes planes et trois de flexion. Ces ondes ont été observées expérimentalement par *Daniel et col. (1979)*.

Avec la même approche, *Kim et Moon (1979)* ont modélisé chaque pli comme une plaque de Mindlin. La distribution de la pression de contact prenait l'expression :

$$q = - p_0/4 \cdot [1 - \cos(2\pi t/t_0)] \cdot [1 + \cos(\pi x/a)]$$

Grâce à la transformation de Laplace dans le temps et celle de Fourier dans l'espace, ils ont pu ainsi étudier la propagation des ondes à travers l'épaisseur du laminé.

*Kubo et Nelson (1975)* ont présenté une étude analytique en contraintes planes. La technique qu'ils ont utilisée fournissait des informations sur les longueurs des ondes longues et courtes, à la fois en basse et haute fréquence.

L'ensemble de ces études par propagation d'ondes fournit des informations quant aux ondes se propageant dans la plaque impactée. Mais le caractère simplifié de ces études et les difficultés qui se rattachent à la non constance de la vitesse des ondes et de leur forme, font que ces informations restent imprécises. De plus, ces approches ne tenant pas compte de l'effet du contact, sont incapables de calculer la réponse locale.

### III.4.3. Modèles analytiques de type poutre ou plaque

Dans l'idéal, on aimerait pouvoir disposer d'une démarche pour déterminer une solution analytique simple du problème d'une structure composite multicouche soumise à l'impact.

Nous allons d'abord voir qu'une telle démarche existe (pour des conditions aux limites simples) dans le cas des poutres et des plaques isotropes. Elle permet de calculer la réponse globale de la structure.

Nous parlerons ensuite de certaines études qui ont essayé d'étendre cette démarche au cas anisotrope.

#### a) Cas des poutres isotropes

L'approche de base de l'impact d'une sphère élastique isotrope sur une poutre élastique homogène isotrope est due à *Timoshenko (1913)*. Son extension aux poutres composites a été entreprise par *McQuillen et col. (1976)*. Cette approche a été présentée en détail par *Goldsmith (1960)*:

L'équation du mouvement de la sphère de masse  $m_2$  s'écrit:

$$m_2 \cdot w_{2,tt} + F(t) = 0$$

Par double intégration cela donne:

$$w_2(t) = V_0 \cdot t - \frac{1}{m_2} \int_0^t \int_0^\tau F(\tau) d\tau d\tau$$

( $V_0$  étant la vitesse initiale du projectile)

L'inflexion  $w_1$  de la poutre est régie par l'équation d'Euler-Bernouilli

$$E \cdot I \cdot w_{1,xxxx} + \rho \cdot A \cdot w_{1,tt} = F(t) \cdot \delta(x-c)$$

où  $x=c$  désigne le point de contact

$F(t)$  la force de contact entre la sphère et la poutre appliquée en  $x=c$

$I$  le moment d'inertie

$A$  l'aire de la section de la poutre

$\delta$  la fonction Dirac ( $\delta(0) = 1$  et  $\delta(u) = 0$  si  $u \neq 0$ )

A partir de la procédure d'analyse modale (cf. III.4.4.), on peut déterminer les modes propres normaux  $\phi_i$  de la poutre, ainsi que ses pulsations propres  $\omega_i$ . Ceci permet d'écrire pour une longueur  $L$  de poutre:

$$w_1(c,t) = \frac{1}{\rho \cdot A} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{[\Phi_i(c)]^2}{\omega_i \int_0^L \Phi_i^2 dx} \right) \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_i(t-\tau) \cdot d\tau$$

Le contact de type Hertz est régie par l'équation  $F=k_c.(w_2-w_1)^{3/2}$ . En y remplaçant  $w_1$  et  $w_2$  par leurs expressions précédentes, on obtient alors une équation intégrale définissant la force de contact  $F$ .

Cette équation peut être résolue numériquement. La résolution n'est cependant effectivement possible que pour certains types de conditions aux limites (appuis simples).

### b) Cas des plaques isotropes

Cette approche de Timoshenko a été étendue par *Karas (1939)* au cas d'une plaque isotrope rectangulaire simplement appuyée.

Le déplacement  $w_1$  de la plaque au point  $(x_0, y_0)$  d'application de la charge est alors donné par:

$$w_1(t) = \frac{1}{2b\rho} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_{ij}^2}{\omega_{ij} \int_S \Phi_{ij}^2 dx dy_0} \int_0^t F(\tau) \cdot \sin \omega_{ik} (t - \tau) \cdot d\tau$$

où  $\Phi_{ij}$  et  $\omega_{ij}$  désignent respectivement les modes propres normaux et les pulsations propres de la plaque.

Nous aurons l'occasion d'utiliser cette expression lors de la validation du code éléments finis au chapitre V.

### c) Cas des plaques multicouches

Pour étendre ces approches au cas de l'impact des composites laminés, plusieurs difficultés existent:

- *Whitney et Pagano (1970)* ont montré que l'influence des déformations de cisaillement dans les composites laminés peut être importante. Les modèles Love-Kirchhoff, ne tenant pas compte des déformations de cisaillement, présentent une rigidité non réaliste. Dans les problèmes d'impact, où la charge est essentiellement ponctuelle, ces erreurs peuvent être sévères;

- un couplage existe entre le cisaillement et la flexion:

- le couplage flexion-torsion au niveau du comportement, fait qu'une simple superposition des modes orthogonaux n'est pas valide.

Une théorie de plaque due à *Whitney et Pagano (1970)* tient compte des déformations de cisaillement. Les normales aux surfaces moyennes sont supposées rester droites et pouvoir tourner indépendamment du déplacement transverse de la plaque. Cette théorie a été utilisée par bon nombre d'auteurs [*C.T.Sun & Chattopadhyay (1975)*, *Y.Qian & S.R.Swanston (1990)*, *P.C.Chou & col. (1975)*...];

*Sun et Chattopadhyay (1975)* l'ont utilisée pour étendre l'approche à l'analyse des plaques composites laminées simplement appuyées et soumises à des contraintes initiales.

Le cas d'une charge répartie sur une petite surface a été étudié par *Dobyns et Porter (1981)*.

*Qian et Swanson (1990)* ont utilisé la même approche pour étudier une plaque laminée rectangulaire encadrée le long de ses quatre bords. Dans ce cas, les modes propres peuvent être obtenus avec exactitude à partir d'une analyse de type Rayleigh-Ritz. Un excellent accord a été enregistré avec des résultats expérimentaux.

Notons enfin qu'en négligeant certains des aspects du problème, des approches analytiques simplifiées peuvent être entreprises dans le cas anisotrope.

C'est ainsi qu'*Olsson (1992b)* a essayé de proposer une solution analytique simple pour la première phase de l'impact, avant que les ondes de flexion ne se réfléchissent. L'étude était basée sur la théorie de plaque de Kirchoff. En négligeant le cisaillement et en supposant que les indentations restent beaucoup plus petites que les dimensions de la zone de contact et l'épaisseur de la plaque, il a essayé de généraliser aux plaques composites l'approche de *Zener (1941)*, utilisée à l'origine pour des plaques isotropes à cisaillement négligeable. Le modèle masse-ressort correspondant était alors [*R.Olsson (1992a)*]:

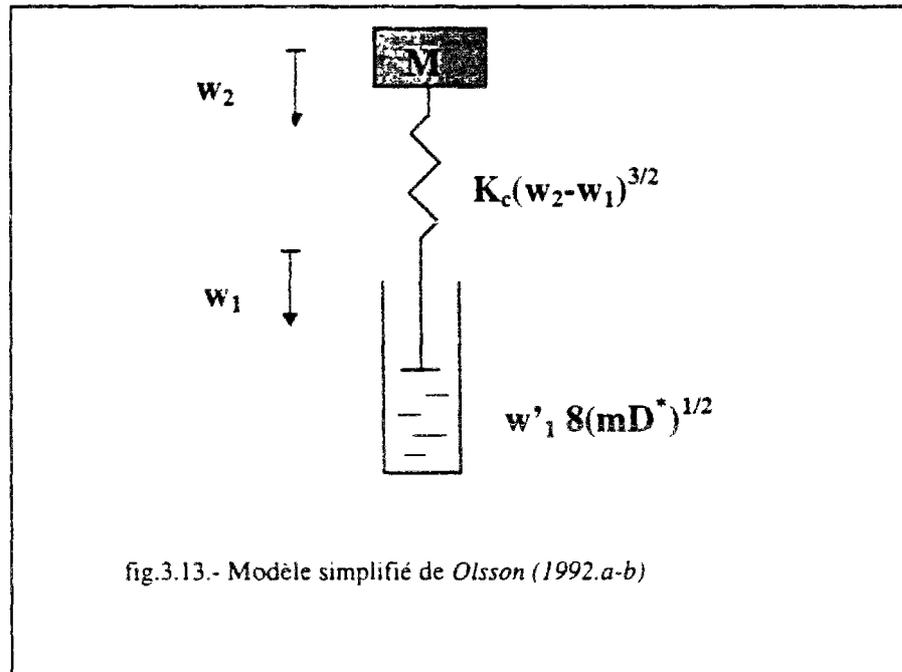


fig.3.13.- Modèle simplifié de *Olsson (1992.a-b)*

avec  $D^*$  la rigidité en flexion effective de la plaque reliée aux coefficients de la matrice de rigidité.

Le problème était alors régi par une équation différentielle non-linéaire à un paramètre  $\lambda$  (paramètre d'inélasticité) [R.Olsson (1992b)]. Des vérifications expérimentales de cette approche menées sur des empilements [45/0/-45]<sub>ns</sub> montrent un bon accord [R.Olsson (1990,1991b)].

#### d) Conclusion

De telles approches analytiques, bien que restreintes à des cas assez particuliers, peuvent apporter des renseignements utiles sur le phénomène d'impact et améliorer la compréhension des facteurs qui affectent la réponse. Elles peuvent être utiles pour la planification d'une étude expérimentale ou numérique. Mais pour résoudre les cas usuels de problèmes d'impact sur plaques ou poutres composites, les difficultés énumérées ci-dessus limitent l'utilisation de solutions analytiques. Il est alors nécessaire de définir des modèles mathématiques tenant compte de ces phénomènes. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### **III.4.4. Les modèles numériques d'élasticité 2D et 3D**

Lorsque la vitesse d'impact est élevée ou lorsque l'on a besoin de connaître de façon précise le champ de contrainte au voisinage de la zone de contact, les modèles de poutre et de plaque deviennent insuffisants. Des modèles élastiques bidimensionnels et tridimensionnels peuvent alors être utilisés.

Les techniques employées sont variées: la méthode de transformation intégrale [M.R.Karim (1991)], la technique des multiplicateurs de Lagrange [A.E.Bogdanovich (1991)]..., mais la majeure partie des travaux utilisent la technique des éléments finis [J.D.Lee & col. (1984), B.V.Sankar & C.T.Sun (1985), J.K.Chen & C.T.Sun (1985.a-b), B.R.Petersen (1985), C.A.Ross & col. (1985), W.E.Bachrach & col. (1988), H.Aggour & C.T.Sun (1988), C.T.Sun & W.J.Liou (1989), H.Y.T.Wu & F.K.Chang (1989..)].

La décomposition de la structure en éléments finis conduit, via une formulation variationnelle, à une équation globale du problème du type  $M\ddot{U}+KU=F$  (cf.I.3.2).

Cette équation représente un système d'équations linéaires du second ordre à coefficients constants. Elle peut en principe être résolue par les méthodes standards de résolution de tels systèmes. Cependant, dans les cas usuels de calcul éléments finis de structures composites soumises à l'impact, la taille d'un tel système peut atteindre quelques centaines, voir quelques milliers de ddl. Ce qui limite les moyens de résolution efficace d'un tel système à seulement quelques méthodes. Suivant la méthode de résolution utilisée, nous pouvons classer ces modélisations éléments finis en deux groupes: celles utilisant une méthode d'intégration directe et celles utilisant une méthode d'intégration *indirecte* [K.J.Bathe & E.L.Wilson (1976)].

#### a) Les modélisations à méthode directe

Elles subdivisent l'intervalle d'étude en pas de temps  $\Delta t$  et se ramènent de la résolution d'un système non stationnaire, à celle d'un système stationnaire dans chaque intervalle de temps.

L'équation  $M\dot{U}+KU=F$  est écrite en des points discrets de l'intervalle d'étude, en considérant l'accélération comme un effort d'inertie. Les dérivées  $\dot{U}$  et  $\ddot{U}$  sont approximés à l'aide de schémas de type différences finis.

Ces schémas sont nombreux, mais pour des raisons d'efficacité et de précision, seuls quelques uns sont utilisés en pratique (différences centrales, Newmark...).

### b) Les modélisations à méthode indirecte

Grâce à un changement de base de la forme  $U=P.X$ , on transforme d'abord l'équation  $M\dot{U}+KU=F$  avant de l'intégrer.

Ceci revient, par un choix judicieux de la matrice P, à effectuer une décomposition modale  $U(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i y_i(t)$  et à se ramener à la résolution d'un système d'équations découplées à un seul ddl:

$$\ddot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \phi_i \cdot F(t) \quad \text{pour } i=1 \dots N \text{ (nombre total de ddl)}$$

$\Phi_i$  et  $\omega_i$  désignent respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres du système, vérifiant  $K\Phi_i = \omega_i^2 M\Phi_i$ . Les valeurs des coefficients  $\Phi_i$  dépendent des conditions aux limites imposées.

Les équations découplées peuvent ensuite être résolues par une des méthodes numériques tel que l'intégrale de Duhamel ou encore l'un des schémas d'intégration numérique directe (Newmark, différences centrales...).

Plusieurs travaux ont ainsi utilisé cette méthode indirecte pour effectuer une approche par modes propres du problème d'impact. Nous en citons quelques uns au prochain paragraphe.

Bien qu'apparaissant différentes, les méthodes directes et indirectes peuvent être considérées comme équivalentes: si l'on adopte le même schéma d'intégration numérique pour les deux méthodes, le résultat sera identique, obtenu avec la même précision et entaché des mêmes erreurs numériques. En fait, le choix entre les deux méthodes est essentiellement guidé par des considérations d'efficacité numérique [K.J. Bathe & E.L. Wilson (1976)].

Lorsque le nombre N de ddl à prendre en compte est élevé, on peut procéder à une troncature, en éliminant les modes dont la contribution est négligeable (cf. V.1.2).

### c) Les approches par modes propres

Ces approches peuvent ou non utiliser la technique des éléments finis.

- *Sun et Chattopadhyay (1975)* ont étudié une plaque [0/90/0] simplement appuyée en imposant des contraintes initiales.

En suivant la démarche proposée par *Timoshenko (1913)*, ils ont d'abord calculé les fréquences propres de la structure à partir des équations de plaque développées par *Whitney et Pagano (1970)*, dans lesquelles ils ont introduit l'hypothèse de contraintes initiales.

La contribution des rotations d'inertie a été négligée. Pour le contact, ils ont supposé une loi de type Hertz. La force de contact était donnée par une équation intégrale non-linéaire, résolue numériquement en subdivisant l'intervalle d'étude en petits pas de temps.

Des courbes d'évolution de la force de contact et des contraintes ont été tracées. Pour obtenir une convergence satisfaisante, beaucoup de modes propres ont dû être intégrés.

- A partir de la théorie de Reissner-Mindlin incluant le cisaillement, *Cairns et Lagace (1989)* ont utilisé la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz pour la discrétisation dans l'espace. Ils ont alors étudié une plaque [0/90/0/90/0]<sub>s</sub> simplement appuyée.

Les équations résultantes ont été intégrées dans le temps à l'aide de la méthode de Newmark. Le contact était supposé de type Hertz.

La non prise en compte des déformations permanentes en décharge a engendré une surestimation de la force de contact lors du second contact.

- *Qian et Swanson (1990)* ont comparé la précision de deux techniques utilisant les modes propres:

- la première technique utilise une approche analytique basée sur la transformation de Laplace. Au moyen d'expansions en double série de Fourier, elle commence par exprimer les déplacements et les rotations d'une plaque en appuis simples, en fonction des variables d'espace. Les expressions obtenues sont ensuite introduites dans les équations différentielles du problème, qui se traduit alors par une équation différentielle ordinaire du second ordre en temps, la variable étant l'inflexion.

Le contact est linéarisé, en supposant l'existence d'un ressort linéaire entre le projectile et le centre de la plaque. La surface de contact est supposée constante.

La transformée de Laplace de la force de contact présente une expression dont les pôles  $\omega_j$  (racines du dénominateur de la transformée de Laplace de  $F$ ) sont les fréquences de la réponse:  $F(t) = \sum_j F_j \cdot \sin \omega_j t$ .

Le déplacement de la plaque peut ensuite être obtenu à partir de la force de contact.

La méthode peut offrir des solutions exactes, mais est restreinte à des conditions aux limites en appuis simples.

- la deuxième technique repose sur une approche de type Rayleigh-Ritz. Elle se base sur l'hypothèse que le déplacement de la plaque peut être représenté par une série de produits de 'fonctions poutre' et de 'modes normaux' (qui sont les solutions du problème de vibrations propres de poutres sous des conditions aux limites appropriées). La méthode est générale du point de vue des conditions aux limites.

Les énergies cinétique et potentielle sont alors calculées à partir des équations de la plaque et introduites dans l'équation du mouvement de Lagrange. La résolution dans le temps se fait ensuite par intégration numérique de type Newmark.

A cause du contact non linéaire, les calculs sont effectués en deux temps, afin d'augmenter la précision. Dans un premier temps, on suppose la force ponctuelle. La force déterminée est ensuite répartie, dans un deuxième temps, sur une aire carrée, avec indentation. Une nouvelle résolution est ensuite effectuée.

Pour les deux techniques, une loi d'indentation de type Hertz a été utilisée avec un coefficient de rigidité de contact  $k=8.394 \cdot 10^8 \text{ N/m}^{3/2}$ .

Des comparaisons entre les deux méthodes ont été réalisées sur un empilement [0/90/0/90/0], pour des épaisseurs totales  $h$ ,  $2h$  et  $4h$  de la plaque.

Les résultats obtenus ont aussi été comparés à des solutions éléments finis et à des résultats expérimentaux.

La comparaison a montré la nécessité, pour chacune des deux méthodes, d'intégrer un grand nombre de modes, afin d'obtenir la convergence. Il faut environ  $100 \cdot 100$  modes pour des conditions aux limites en appuis simples.

L'étude a aussi montré que la surface de contact est d'une importance capitale quant à la précision de la solution. Elle a cependant indiqué que, sous certaines conditions, définir dans le détail le contact non linéaire, ne donne pas un effet marquant dans la réponse globale de la structure.

Pour des cas plus complexes (vitesse plus grande), d'autres méthodes sont utilisées. La réponse dans ce cas peut être très localisée. L'analyse modale, incluant alors trop de modes, peut s'avérer difficile, et une approche par propagation d'onde peut même devenir plus efficace.

#### d) Le calcul éléments finis par intégration directe

Les travaux sont très nombreux. Nous allons citer ceux qui nous ont été les plus utiles dans les choix que nous avons fait. Nous préparons ainsi le terrain aux comparaisons des résultats ultérieurement (chap.VII).

*\* Analyses éléments finis 2D*

Les modélisations éléments finis basées sur l'élasticité 2D sont nombreuses [B.V.Sankar & C.T.Sun (1985), J.K.Chen & C.T.Sun (1985.a-b-c), H.Aggour & C.T.Sun (1988), H.J.Lin & col. (1990.a-b), D.A.Trowbridge & col. (1991)...].

- A base d'éléments rectangulaires à 4 noeuds et 4 ddl par noeud, Sankar et Sun (1985) ont développé un algorithme numérique pour poutres, en supposant le contact purement élastique.

- Chen et Sun (1985.a-b) ont étudié la réponse à l'impact de laminés, à partir d'un modèle d'éléments finis à 9 noeuds. L'étude était basée sur la théorie de plaque de Mindlin, sur les hypothèses de grandes déformations de Von Karman et sur les lois de contact de Yang et Sun.

- Chen et Sun (1985c) ont utilisé la théorie de Mindlin avec flexion et cisaillement transverse, et développé un modèle d'éléments finis quadrilatéraux à 9 noeuds. Ils ont alors calculé la force de contact, l'inflexion et les déformations d'une plaque soumise à un champ de contraintes initial. L'intégration numérique a été effectuée à l'aide du schéma de Newmark.

- Aggour et Sun (1988) ont utilisé la théorie de Yang-Norris-Stavsky (théorie de cisaillement au premier ordre), avec déformations de cisaillement et rotations d'inertie, pour développer une méthode à éléments finis quadrilatéraux à 8 noeuds et 3 ddl par noeud ( $w, \psi_x, \psi_y$ ). L'empilement étudié était un [0/90/0]. 13 éléments ont suffi pour mailler le quart de la plaque. La force de contact a été calculée à chaque pas de temps, et répartie uniformément, selon la loi de Hertz (en puissance 3/2) sans tenir compte des déformations permanentes. L'intégration numérique a été effectuée par la méthode de Newmark, avec un pas de temps  $\Delta t=5\mu s$ .

*\* Analyses éléments finis 3D*

Elles sont moins nombreuses que les modélisations éléments finis basées sur l'élasticité 2D. Elles ont pour la plupart essayé de calculer les contraintes transverses au niveau de la zone de contact [J.D.Lee & col. (1984), B.R.Petersen (1985), C.T.Sun & W.J.Liou (1989), S.R.Finn & G.S.Springer (1993), W.Shen & col. (1992)...]. Certains [W.E.Bachrach & col. (1988)] ont essayé de calculer la réponse de structures coques.

- Lee et Liebowitz (1984) ont utilisé des éléments finis 3D à 8 noeuds pour étudier un empilement [0/90] constituant une plaque encastree. Un total de 2500 éléments était nécessaire. La pression de contact était supposée donnée (cf.III.3.1.).

● *Ross et col. (1985)* ont utilisé une méthode éléments finis 3D classique. Avec des éléments à 8 noeuds et 3 ddl par noeud, ils ont étudié un empilement [0<sub>5</sub>/90<sub>5</sub>/0<sub>5</sub>]. A raison de trois mailles dans l'épaisseur, le maillage est simple et les mailles ont des surfaces variant dans un rapport de 1 à 4.

La force de contact est supposée ponctuelle. Le quart de sa valeur est appliqué au noeud d'impact. Sa répartition dans le temps est supposée linéaire (triangulaire) (cf.III.3.1.).

Les valeurs des contraintes sont calculées au centre de chaque élément et aux centres de ses différentes facettes. Sur chacune des deux interfaces 0/90, les contraintes interlaminaires sont obtenues par une moyenne entre les valeurs aux centres de la facette inférieure de l'élément supérieure et de la facette supérieure de l'élément inférieur.

Des courbes ont été tracées pour traduire la variation dans le temps de  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$ , en différents points le long des axes de symétrie. Une courbe a été tracée pour la variation le long de l'axe X de  $\tau_{xz}$  à l'interface supérieure. Cependant les résultats ne fournissent que des moyennes dans l'épaisseur des contraintes transverses.

● Avec un modèle à éléments cubiques à 9 noeuds, *Wu et Chang (1989)* ont pu mener une analyse 3D. Ils ont déterminé les contraintes hors plan à travers l'épaisseur, dans l'optique d'étudier et prédire l'endommagement. Ils ont utilisé la loi de contact de *Tan et Sun (1985)*, et pour chaque pas de temps, la force de contact a été déterminée par un calcul itératif (méthode de Newton-Raphson). Pour améliorer la précision et minimiser le temps de calcul, des modes dits incompatibles ont été introduits.

● *Sun et Liou (1989)* ont proposé une méthode éléments finis 3D hybride, à formulation en contraintes, pour calculer la réponse à l'impact d'un projectile en métal sur une plaque composite. L'étude se proposait de calculer les contraintes interlaminaires.

### III.5. CONCLUSION

Les études que nous avons présentées sont analytiques, expérimentales ou numériques.

Les études analytiques introduisent des hypothèses simplificatrices en négligeant certains des phénomènes présents. Ces approches renseignent sur le phénomène d'impact et améliorent ainsi la compréhension de son mécanisme. Ceci est important pour la planification d'une étude expérimentale ou numérique. Elles permettent aussi de quantifier l'effet sur la réponse de certains des paramètres (masse, vitesse, dimensions, conditions aux limites...).

Pour les études expérimentales, nous insistons sur le manque de résultats disponibles. La rareté des tests standards fait que les résultats existant dans la littérature sont difficilement comparables.

Pour les impacts lents ou quasi-statiques, les modèles analytiques peuvent être assez efficaces. Nous avons même rapporté la possibilité, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, d'adopter un modèle analytique dans le cas où la réponse est gouvernée par les ondes de flexion.

Pour les cas pratiques usuels, les études sont plutôt numériques:

Les calculs par modes propres perdent de leur efficacité dès qu'il devient nécessaire d'intégrer un grand nombre de modes dans le calcul de la réponse, cas par exemple des impacts relativement rapides.

L'alternative consiste en un calcul direct par éléments finis. Là encore des théories de plaque sont souvent utilisées. Mais, bien que simples à mettre en oeuvre, elles ne calculent généralement pas correctement les contraintes de cisaillement transverse, importantes pour l'étude du délaminage et de l'endommagement.

Enfin, les études utilisant les éléments finis et s'appuyant sur l'élasticité tridimensionnelle sont très coûteuses, et par conséquent limitées au point de vue nombre de couches et type d'empilement. Cela explique un peu leur nombre réduit.

A travers cette analyse, nous pensons que le modèle à éléments finis que nous développons est plutôt destiné à traiter ce type d'impact, là où la valeur élevée de la vitesse empêche d'utiliser efficacement des modèles analytiques, et là où les modèles plaque sont inefficaces pour renseigner sur l'endommagement et le délaminage. La définition bidimensionnelle de la géométrie de la structure devrait permettre de procéder à des calculs beaucoup moins longs que les calculs éléments finis tridimensionnels.

Quand au contact, son importance est capitale pour la détermination du champ de contraintes local, surtout pour les impacts relativement rapides. L'introduction de la force de contact comme donnée du problème peut permettre un calcul simple et correct de la réponse globale (inflexion de la plaque). Mais si nous voulons construire un modèle capable de fournir des informations fiables sur l'endommagement et le délaminage, nous devons d'abord considérer la force de contact comme une inconnue du problème, et nous devons ensuite définir la loi de contact de façon précise.

Dans les chapitres à venir, nous ferons constamment référence aux résultats de cette synthèse bibliographique. Ces résultats serviront d'une part à faire les choix nécessaires lors de la construction numérique de notre modèle; c'est l'objet du prochain chapitre, et d'autre part à préparer le champ à la validation et aux multiples calculs auxquels nous allons procéder pour mettre en évidence la