

I. MODELISATION MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES

Les endommagements caractéristiques des matériaux multicouches sont principalement des délaminages ou des microfissurations transverses dans les plis les moins bien orientés par rapport au chargement. Ces phénomènes font intervenir essentiellement des efforts d'interface entre les couches et des surcontraintes au voisinage des bords (effets de bords) [N.J.Pagano (1978)].

Il est bien connu que les modèles basés sur les théories classiques de plaque (Love-Kirchoff, Reissner-Mindlin), s'avèrent incapables de prédire correctement ces efforts d'interface et ne fournissent pas des champs de contrainte en équilibre avec le chargement réel au voisinage des bords [P.Destuynder (1980)].

De nombreux auteurs se sont intéressés au calcul des efforts internes qui pilotent l'endommagement en vue de le modéliser. Des solutions analytiques ont été proposées pour des cas particuliers [N.J.Pagano (1970)]. Des modélisations numériques tridimensionnelles ont essayé de traiter des cas plus généraux [R.L.Spilker & S.C.Chou (1980), E.F.Ribicki (1971), G.D.Renieri & C.T.Herakovich (1976)]. Ces études par éléments finis 3D présentent l'inconvénient de nécessiter des maillages très fins et donc de demander des temps de calcul importants. Plusieurs auteurs ont alors proposé de nouvelles approches.

Une première famille d'approches consiste à faire des calculs de plaques (qui ne vérifient donc pas les conditions aux limites du problème 3D) et à déterminer au voisinage des bords des champs correcteurs pour corriger l'erreur d'équilibre au bord [O.Allix (1989), H.Dumontet (1990), Lecuyer (1991)].

Une seconde famille consiste à développer des théories de plaques multicouches, où la géométrie reste bidimensionnelle, mais où le nombre de champs cinématiques est augmenté pour bien prendre en compte l'influence de chaque couche [Puppo & Evensen (1970), Garrett & Bailey (1977), Pagano (1978), Pagano & col. (1983), Macquire & col. (1992)]. Un seul calcul de plaque est alors nécessaire pour déterminer les efforts d'interface.

Avec le même objectif que les auteurs ci-dessus, nous proposons de modéliser les plaques composites multicouches à l'aide du modèle "M4" (modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches) [J.F.Caron (1993), A. Ehrlacher et col. (1994b), G.Foret (1995)].

Dans cette modélisation, l'objet est défini par une surface de \mathbb{R}^3 où chaque point (appelé point de matière) contient n particules de matériau (n = nombre de couches). La cinématique est alors donnée par n champs de vitesse sur la surface et les mouvements rigidifiants sont choisis de manière à "redonner" l'épaisseur et l'ordre d'empilement des couches. L'application de la méthode des puissances

virtuelles fait ensuite apparaître naturellement des efforts d'interface, qu'il s'agira d'identifier.

Le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4) apparaît comme une généralisation du modèle de traction uniaxiale "Shear Lag Analysis" [K.Garett & J.E.Bailey (1977)] aux problèmes de contraintes multiaxiales et de flexion. Il peut aussi être considéré comme une simplification du modèle Global-local de Pagano & Rosi (1983). Il a été développée dans le but de faciliter l'étude d'endommagements tels que les délaminages et les micro-fissurations transverses.

Le comportement élastique linéaire du modèle M4 fait intervenir des raideurs de membrane de chacune des couches, ainsi que des raideurs d'interface associées aux discontinuités des champs de déplacement entre deux couches voisines.

Les tenseurs de raideur de membrane s'identifient facilement expérimentalement. Pour les tenseurs de raideurs d'interface cela semble impossible directement. On procède alors à une sorte de "changement d'échelle" en comparant les énergies élastiques d'une modélisation 3D de l'objet, à celle donnée par la modélisation M4 multiparticulaire. Les raideurs d'interface sont alors choisies de sorte que la densité "surfactive" d'énergie soit égale dans les deux modèles.

La construction du modèle M4 par la méthode des puissances virtuelles comporte trois niveaux:

- Niveau 1 : Définition de la géométrie et de la cinématique;
- Niveau 2 : Définition des efforts;
- Niveau 3 : Définition du comportement.

A chaque niveau, des choix de modélisation sont à faire. La pertinence finale du modèle sera fonction de la pertinence de ces divers choix.

I.1. CONSTRUCTION DU MODÈLE MULTIPARTICULAIRE DES MATERIAUX MULTICOUCHES (M4)

I.1.1. Premier niveau de construction: Définition de la géométrie et de la cinématique

a) Famille géométrique de l'objet

On peut décrire généralement l'objet à modéliser par une variété géométrique de dimension 3, 2 ou 1 de \mathbb{R}^3 . Plus la dimension de la variété est élevée plus la description de l'objet est fine.

Pour le M4, on choisit de décrire les objets par des surfaces de \mathbb{R}^3 ; la géométrie des objets est alors bidimensionnelle.

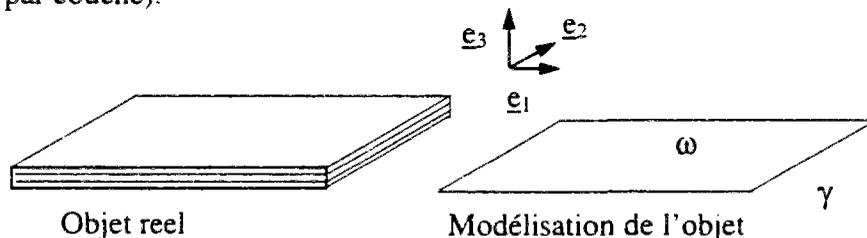
Pour simplifier l'exposé, nous supposons la surface plane dans sa configuration de référence. Nous choisissons un repère orthonormé $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ tel que la surface soit décrite par un domaine ω du plan $X_3=0$ de bord γ .

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations \tilde{X} pour un vecteur de ω , $\tilde{\underline{X}}$ pour un tenseur d'ordre 2 de ω , \underline{X} pour un vecteur de \mathbb{R}^3 et $\underline{\underline{X}}$ pour un tenseur d'ordre 2 de \mathbb{R}^3 .

b) Nombre de particules de matériau

Il est souvent possible de considérer qu'un point de matière n'est occupé que par une seule particule de matériau. Cependant, pour certains objets, on obtient des modèles plus pertinents en considérant que chaque point de matière est occupé par plusieurs particules de matériaux pouvant avoir des mouvements différents (c'est par exemple le cas en mécanique des sols où chaque point de matière est occupé par une particule solide et une particule liquide).

Le modèle M4 fait partie de ces modèles multiparticulaires; en chaque point de matière (X_1, X_2) de ω on suppose l'existence de n particules de matériaux (une particule par couche).



c) La microstructure des particules de matériau

Dans certaines applications, on peut enrichir la cinématique de la particule en lui associant une microstructure (l'exemple le plus connu est celui de la théorie des poutres, où chaque particule possède une microstructure associée à la section de la poutre).

Pour le modèle M4, on suppose que les particules de matériaux n'ont pas de microstructure.

d) Les liaisons internes

D'un point de vue pratique, après le choix de la microstructure, la cinématique de l'objet à l'instant t est définie par un espace vectoriel. Les liaisons internes conduisent à définir un sous espace vectoriel de cet espace.

Pour le modèle M4, on choisit de ne pas avoir de liaisons internes.

Nous disposons alors pour décrire les mouvements de l'objet à l'instant t , d'un espace vectoriel contenant l'ensemble des champs de vitesses généralisées possibles pour le modèle de l'objet.

On adopte alors l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.). La configuration actuelle peut alors être confondue avec les configurations de référence de chaque couche. Dans ce cas, le mouvement peut être décrit par les n champs tridimensionnels de déplacement des particules définis sur ces configurations.

I.1.2. Deuxième niveau de construction: Définition des efforts

C'est à ce niveau que la Méthode des Puissances Virtuelles intervient.

Rappelons en le schéma général:

- 1^{ère} étape : Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels;
- 2^{ème} étape : Choix des formes linéaires définissant les efforts;
- 3^{ème} étape : Application du Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.).

L'idée philosophique de base de la méthode est de dire que le concept d'effort est abstrait, et que l'on ne peut en avoir qu'une mesure indirecte par le biais d'une mesure de puissance.

Pour définir des efforts, la '*puissance virtuelle*' constitue un "instrument" permettant de faire "*travailler virtuellement*" ces efforts et de mesurer la puissance mise en jeu. La puissance est alors une forme linéaire des champs de vitesses.

Cet "instrument" pour la définition des efforts, est ainsi naturellement un espace vectoriel des champs de vitesses généralisées, appelées mouvements virtuels. La première étape de la Méthode des Puissances Virtuelles consiste donc à choisir cet Espace Vectoriel des Mouvements Virtuels. Ce dernier doit impérativement inclure celui des mouvements réels possibles

a) Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels

Le choix naturellement associé aux objets ci-dessus est l'espace vectoriel des n -champs de vecteurs sur ω (un champ par couche).

L'espace vectoriel des mouvements virtuels peut donc s'écrire sous la forme :

$$V^* = \{ \underline{V}^* = \bar{V}^* + W^* \underline{e}_3, i = 1, n \}$$

(* faisant référence aux grandeurs virtuelles)

Cet espace vectoriel des mouvements virtuels contient un sous espace qui joue un rôle très important dans la définition des efforts intérieurs dans le modèle: le sous espace vectoriel des mouvements rigidifiants.

Il s'agit de l'ensemble des mouvements ne déformant pas l'objet. Les efforts intérieurs ne "travaillent" pas dans un mouvement virtuel rigidifiant (dans le cas du milieu continu 3D "classique", ce sont par exemple les combinaisons de champs de vitesses de translation et de rotation).

Le choix ici de ce sous-espace vectoriel des mouvements virtuels rigidifiants est essentiel; c'est lui qui va redonner l'ordre d'empilement et l'épaisseur des couches, deux caractéristiques géométriques qui ont été "perdues" dans la description de l'objet.

Notons h_i^- , h_i^+ et \bar{h}_i respectivement la côte du bas, la côte du haut et la côte médiane de la $i^{ème}$ couche et $e_i = h_i^+ - h_i^-$ l'épaisseur de cette couche.

Les mouvements virtuels rigidifiants \underline{V}_R^* dans ce modèle sont choisis tels que:

$$\begin{aligned} \exists (\underline{V}_0^*, \underline{\Omega}^*) \text{ tq } \forall (X_1, X_2) \text{ et } \forall i \in [1, n] \\ \underline{V}_R^*(X_1, X_2) = \underline{V}_0^* + \underline{\Omega}^* \wedge (X_1 \cdot \underline{e}_1 + X_2 \cdot \underline{e}_2 + \bar{h}_i \cdot \underline{e}_3) \end{aligned}$$

\underline{V}_0^* vecteur translation de \mathbb{R}^3 et $\underline{\Omega}^*$ vecteur rotation de \mathbb{R}^3 .

L'écriture des mouvements rigidifiants faisant intervenir un terme $\underline{\Omega}^* \wedge \bar{h}_i \cdot \underline{e}_3$ ressort du libre choix du modélisateur. L'introduction du terme \bar{h}_i a pour but de redonner l'épaisseur et l'ordre d'empilement des couches. La pertinence de ce choix devra être jugée à la fin de la construction du modèle

b) Choix des formes linéaires définissant les efforts

Nous pouvons distinguer trois types d'efforts:

- Efforts d'inertie;
- Efforts extérieurs;
- Efforts intérieurs.

** Efforts d'inertie*

La forme définissant les efforts d'inertie (Puissance Virtuelle des quantités d'Accélération PVA) est linéaire en fonction des quantités d'accélération et s'écrit sous la forme d'une densité dans ω .

Nous définissons simplement la puissance de la quantité d'accélération par :

$$PVA(\underline{V}^*) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \rho^i \cdot \underline{\gamma}^i(X_1, X_2) \cdot \underline{V}^{i*}(X_1, X_2) d\omega \quad (1.1)$$

où $\underline{\gamma}^i$ désigne l'accélération au niveau de la couche i .

** Efforts extérieurs*

On définit classiquement la puissance virtuelle des efforts extérieurs comme la somme de l'intégrale d'une densité dans le domaine ω et de l'intégrale d'une densité sur son bord γ , chaque densité étant une expression linéaire de la vitesse virtuelle locale.

Ce choix nous conduit à:

$$\begin{aligned} PVE(\underline{V}^*) = & \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{F}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{V}^{i*}(X_1, X_2) \right) d\omega + \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{T}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{V}^{i*}(X_1, X_2) \right) d\gamma \\ & + \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n F_3^i(X_1, X_2) \cdot W^{i*}(X_1, X_2) \right) d\omega + \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^n T_3^i(X_1, X_2) \cdot W^{i*}(X_1, X_2) \right) d\gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

où \tilde{F}^i est le champ de forces extérieures surfaciques dans la couche i et \tilde{T}^i le champ de forces extérieures linéiques sur le bord de la couche i .

Pour un problème de mécanique, les efforts extérieurs sont des données.

** Efforts intérieurs*

L'intérêt principal de la méthode des puissances virtuelles est de pouvoir définir avec beaucoup de liberté ces efforts intérieurs. Il faut toutefois assurer la cohérence du modèle. Cette cohérence impose que la forme linéaire des efforts intérieurs s'annule sur le sous-espace vectoriel des mouvements rigidifiants:

$$PVI(\underline{V}_R^*) = 0 \quad \forall \underline{V}_R^* \text{ mouvement virtuel rigidifiant} \quad (1.3)$$

En général, cette forme linéaire (Puissance Virtuelle des efforts Intérieurs PVI) est définie à l'aide d'une densité dans ω linéaire en fonction des vitesses généralisées et de leurs gradients successifs. En s'arrêtant au premier gradient des champs de vitesses généralisées, on dit que l'on construit une théorie au premier gradient.

Ce choix conduit ici à:

$$PVI(V^*) = \int \sum_{i=1}^n \left(\underline{A}^i(x, y) \cdot \underline{V}^{i*}(x, y) + \underline{B}^i(x, y) \cdot \underline{grad}(\underline{V}^{i*}(x, y)) \right) d\omega$$

Ainsi, le déroulement du P.P.V. fait apparaître pour le modèle M4 des efforts intérieurs \underline{A}^i et \underline{B}^i , d'aux des champs de vitesses généralisées et de leurs gradients, dont le sens physique est pour l'instant abstrait. L'identification des efforts intérieurs du modèle sera faite ultérieurement.

En décomposant les différents champs en une partie plane et une partie normale, l'expression précédente de PVI se réécrit sous la forme:

$$PVI(\underline{V}^*) = \int \sum_{i=1}^n \left(\tilde{A}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{V}^{i*}(X_1, X_2) + A_3^i(X_1, X_2) \cdot W^{i*}(X_1, X_2) \right) d\omega + \int \sum_{i=1}^n \left(-\tilde{N}^i(X_1, X_2) \cdot \tilde{\varepsilon}^{i*}(X_1, X_2) + \tilde{D}^i(X_1, X_2) \cdot g\tilde{rad}(W^{i*}(X_1, X_2)) \right) d\omega \quad (1.4)$$

$$\text{où } \varepsilon'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta}^{i*} + V_{\beta,\alpha}^{i*}), \quad r(\tilde{V}^{i*}) = \frac{1}{2}(V_{2,1}^{i*} - V_{1,2}^{i*}).$$

B^i , \tilde{D}^i et \tilde{N}^i sont un scalaire, un vecteur et un tenseur de \mathbb{R}^2 issus de la décomposition du tenseur \underline{B}^i de \mathbb{R}^3 . Nous avons en effet:

$$\underline{B}^i \cdot \underline{grad}(\underline{V}^{i*}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^i \cdot (\underline{grad}(\underline{V}^{i*}) + {}^t \underline{grad}(\underline{V}^{i*})) + \frac{1}{2} \cdot \underline{B}^i \cdot (\underline{grad}(\underline{V}^{i*}) - {}^t \underline{grad}(\underline{V}^{i*})).$$

En écrivant que $\underline{V}^{i*} = \tilde{V}^{i*} + W^{i*} \cdot \underline{e}_3$, nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} \underline{B}^i \cdot \underline{grad}(\underline{V}^{i*}) &= B'_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon'_{\alpha\beta}(\tilde{V}^{i*}) + B'_{\alpha 3} \cdot W'_{,\alpha} + r(\tilde{V}^{i*}) \cdot (B'_{12} - B'_{21}) \\ &= N'_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon'_{\alpha\beta}(\tilde{V}^{i*}) + D'_{\alpha} \cdot W'_{,\alpha} + r(\tilde{V}^{i*}) \cdot B^i \end{aligned}$$

Cette expression de la puissance des efforts intérieurs doit s'annuler pour les mouvements rigidifiants (condition de cohérence (1.3)):

$$PVI(\underline{V}_R^*) = 0 \quad \forall \underline{V}_R^* \text{ mouvement virtuel rigidifiant.}$$

En choisissant des mouvements virtuels particuliers, on montre que les efforts intérieurs exhibés ci-haut vérifient les équations suivantes:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{A}^i = 0 \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n A_3^i = 0 \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^n (\bar{A}^i \cdot [X_1 \underline{e}_2 - X_2 \underline{e}_1] + B^i) = 0 \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n (A_3^i \cdot [X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2] - \bar{h}_i \bar{A}^i + \bar{D}^i) = 0 \quad (1.8)$$

Ces efforts intérieurs sont pour l'instant un concept abstrait. Il s'agit maintenant de préciser ce concept.

Le modèle M4 est construit dans le but d'obtenir des efforts intérieurs à l'interface. Pour mettre en évidence de tels efforts d'interface, la démarche est simple; il suffit d'imaginer un champ de vitesse virtuelle qui les fasse travailler eux seulement.

Si on s'intéresse par exemple à l'interface $i, i+1$, il suffit alors de choisir un champ de vitesse virtuelle qui rigidifie séparément les blocs 1 à i et $i+1$ à n .

Le choix par exemple d'un champ virtuel défini par:

$$\begin{cases} \underline{V}^{k*}(X_1, X_2) = \bar{V}_0^* + W_0^* \underline{e}_3 + r(X_1 \underline{e}_1 - X_2 \underline{e}_2) + \bar{\Gamma}^*(X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2) \underline{e}_3 - \bar{h}_i \bar{\Gamma}^* & k \in [1, i] \\ \underline{V}^{k*}(X_1, X_2) = 0 & k \in [i+1, n] \end{cases}$$

permet d'écrire la condition de cohérence (1.3) sous la forme:

$$\int_{\omega} [\bar{V}_0^* + W_0^*] [\sum_{k=1}^i (\bar{A}^k + A_3^k \underline{e}_3)] d\omega + \int_{\omega} \left(\begin{aligned} & [\bar{\Gamma}^* \wedge \underline{e}_3 + r^* \underline{e}_3] \cdot [\sum_{k=1}^i B^k \underline{e}_k - \bar{A}^k \wedge (X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2)] - \\ & [\bar{\Gamma}^* \wedge \underline{e}_3 + r^* \underline{e}_3] \cdot [\sum_{k=1}^i \underline{e}_k \wedge (-\bar{h}_k \bar{A}^k + \bar{D}^k) + A_3^k \underline{e}_3 \wedge (X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2)] \end{aligned} \right) d\omega = 0$$

$$\forall \bar{V}_0^*, W_0^*, r^*, \bar{\Gamma}^*$$

Seuls des efforts de l'interface $i, i+1$ travaillent dans ce mouvement virtuel. Ceci nous amène à définir:

$$\bar{\tau}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=i}^n \bar{A}^k(X_1, X_2) \quad (1.9)$$

$$\underline{v}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=i}^n A_3^k(X_1, X_2) \quad (1.10)$$

$$\bar{\mu}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=i}^n (\bar{h}_i^* - \bar{h}_k) \bar{A}^k(X_1, X_2) + \bar{D}^k(x, y) \quad (1.11)$$

$$\theta^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sum_{k=i}^n B^k(X_1, X_2) \quad (1.12)$$

avec les conventions:

$$[]^{0,1} = []^{n,n+1} = 0$$

Avec ces notations, nous avons à partir de la relation (1.9):

$$\tilde{A}^i = \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} \quad i \in [2, n-1]$$

$$\tilde{A}^1 = \tilde{\tau}^{1,2}$$

$$\tilde{A}^n \text{ est donné par la relation de cohérence (1.5) } \sum_{i=1}^n \tilde{A}^i = 0$$

$\tilde{\tau}^{i,i+1}$ est appelé champ d'effort de cisaillement à l'interface $i,i+1$

On peut procéder de même pour les autres relations (1.10, 1.11, 1.12). Les autres relations de cohérence (1.6, 1.7 et 1.8) s'écrivent alors:

$$\sum_{i=1}^n A_3^i = 0 \quad \text{pour les efforts } v^{i,i+1}$$

$$\sum_{i=1}^n (-\bar{h}_i \tilde{A}^i + \tilde{D}^i) = 0 \quad \text{pour les efforts } \tilde{\mu}^{i,i+1} \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^n B^i = 0 \quad \text{pour les efforts } \theta^{i,i+1} \quad (1.14)$$

On introduit alors les appellations suivantes:

appellation	effort
efforts de cisaillement à l'interface $i,i+1$	$\tilde{\tau}^{i,i+1}$
effort normal à l'interface $i,i+1$	$v^{i,i+1}$
moments de flexion à l'interface $i,i+1$	$\tilde{\mu}^{i,i+1}$
couple de torsion à l'interface $i,i+1$	$\theta^{i,i+1}$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs se réécrit alors sous la forme:

$$\begin{aligned}
 PVI(\underline{V}^*) = & \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left((\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \tilde{V}^{i,*} + (v^{i,i+1} - v^{i-1,i}) W^{i,*}(X_1, X_2) \right. \\
 & \left. + (\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) r(\tilde{V}^{i,*}) \right) d\omega \\
 & + \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left(-\tilde{N}^i: \tilde{\varepsilon}^{i,*} + \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) g \bar{r} ad(W^{i,*}) \right) d\omega
 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Les taux de déformation généralisés du modèle sont les opposés des cofacteurs des efforts intérieurs dans l'expression de la puissance des efforts intérieurs.

On introduit les appellations suivantes:

appellation	déformation
déformations membranaires de la couche i	$\tilde{\epsilon}^i$ (1.16)
discontinuité de cisaillement à l'interface i,i+1	$\bar{D}^{i,i+1} = \bar{U}^{i+1} + \frac{e^{i+1}}{2} g\bar{r}ad.U_3^{i+1} - \bar{U}^i + \frac{e^i}{2} g\bar{r}ad.U_3^i$ (1.17)
discontinuité normale à l'interface i,i+1	$D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i$ (1.18)
discontinuité de rotation dans le plan	$\omega_3^{i,i+1} = r(\bar{U}^{i+1}) - r(\bar{U}^i)$ (1.19)
discontinuité de rotation orthogonale au plan	$\bar{\omega}^{i,i+1} = g\bar{r}ad.U_3^{i+1} - g\bar{r}ad.U_3^i$ (1.20)

c) Application du Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.)

Le Principe des Puissances Virtuelles (P.P.V.) postule que pour tout ω :

$$\forall \underline{V}^*, (PVE + PVI - PVA)(\underline{V}^*) = 0 \quad (1.21)$$

Il est équivalent aux équations fondamentales de la dynamique: $\underline{f} = m \cdot \underline{\gamma}$. On l'exploite ici de manière à en tirer les équations aux dérivées partielles de l'équilibre local.

Son application conduit alors, après les habituelles intégrations par parties, aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites suivantes:

● *Equations de mouvement:*

$$\begin{cases} \text{div} \bar{N}^i + \bar{\tau}^{i,i+1} - \bar{\tau}^{i-1,i} - \frac{1}{2} rot((\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \underline{e}_i) + \bar{F}^i = \rho^i \bar{\gamma}^i \\ -\text{div} \left(\bar{\mu}^{i,i+1} - \bar{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\bar{\tau}^{i,i+1} + \bar{\tau}^{i-1,i}) \right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} + F_i = \rho^i \gamma_i^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n] \quad (1.22)$$

● *Conditions aux limites:*

$$\begin{cases} \bar{N}^i \cdot \bar{n} - \frac{1}{2} (\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \bar{n} \wedge \underline{e}_i = \bar{T}^i \\ \left(\bar{\mu}^{i,i+1} - \bar{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\bar{\tau}^{i,i+1} + \bar{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \bar{n} = T_i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n] \quad (1.23)$$

I.1.3. Troisième niveau de construction: Le comportement

Le troisième niveau vise à mettre en relation les déformations généralisées et les efforts intérieurs, ce qui revient à définir les comportements de matériau dans le modèle.

Au point où nous sommes, de nombreux champs ont été définis dans ω . Ils n'ont pas tous le même statut du point de vue du problème mécanique. On en trouve de trois natures:

- des inconnues principales qui sont les champs de déplacement;
- des données dont les efforts surfaciques et linéiques extérieurs;
- des inconnues auxiliaires ou grandeurs constitutives parmi lesquelles figurent les efforts intérieurs.

Les relations constitutives expriment les efforts intérieurs en fonction des inconnues principales. Ce sont ces relations constitutives qui caractérisent les matériaux dont est constitué l'objet que l'on modélise. Elles définissent le comportement. En les définissant on ferme le problème: il y a autant d'équations que d'inconnues.

Dans la suite, on suppose que le comportement est linéaire, c'est à dire que les efforts internes sont reliés linéairement aux déformations associées.

Nous avons alors en chaque point (X_1, X_2) de ω $[3n + 6(n-1)]$ composantes d'efforts intérieurs et autant de déformations généralisées. Le comportement linéaire général du multicouche multiparticulaire ferait donc intervenir une "matrice" $9n-6 * 9n-6$.

De nombreux couplages existent: couplages entre les énergies correspondant aux déformations membranaires des différentes couches, couplages entre les énergies correspondant aux discontinuités dans les interfaces, couplages entre les énergies 'membranaires' et 'd'interface'...[A.Ehrlacher & col.(1994a)].

Tout cela fait que la matrice $9n-6*9n-6$ de comportement est pleine et le modèle est peu opératoire. Des hypothèses de découplage d'énergies doivent donc être émises pour rendre le modèle plus opératoire. Différents choix sont alors possibles. On présente ci-dessous un choix avec deux hypothèses simplificatrices qui semblent à première vue réalistes.

* Première hypothèse simplificatrice

On suppose que les énergies élastiques liées aux déformations membranaires de chaque couche sont découplées entre elles, et découplées des énergies liées aux déformations aux interfaces.

Cela conduit à l'existence pour chaque couche d'un tenseur de raideur membranaire d'ordre 4 de \mathbb{R}^2 noté $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i$ tel que:

$$\tilde{\tilde{N}}^i = \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}^i \quad (1.24)$$

* *Deuxième hypothèse simplificatrice*

On suppose que les énergies liées aux déformations (discontinuités) de chaque interface sont découplées. On suppose de plus que les énergies liées aux "discontinuités normales" $D_3^{i,i+1}$, aux "discontinuités tangentielles" $\tilde{D}^{i,i+1}$ aux "discontinuités de rotation dans le plan" $\omega_3^{i,i+1}$ et aux "discontinuités de rotation orthogonales au plan" $\tilde{\omega}^{i,i+1}$ sont découplées entre elles.

Cela conduit à l'existence pour chaque interface $i,i+1$ d'un tenseur d'ordre 2 de \mathbb{R}^2 $\tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1}$, d'une constante $K_v^{i,i+1}$, d'une constante $K_\theta^{i,i+1}$ et d'un tenseur d'ordre 2 de \mathbb{R}^2 $\tilde{\tilde{K}}_\mu^{i,i+1}$ tels que:

$$\tilde{\tau}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1} \cdot \tilde{D}^{i,i+1} \quad (1.25)$$

$$v^{i,i+1} = K_v^{i,i+1} \cdot D_3^{i,i+1} \quad (1.26)$$

$$\theta^{i,i+1} = K_\theta^{i,i+1} \cdot \omega_3^{i,i+1} \quad (1.27)$$

$$\tilde{\mu}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\mu^{i,i+1} \cdot \tilde{\omega}^{i,i+1} \quad (1.28)$$

Le modèle M4 découlant de ces hypothèses s'appelle modèle M4 découplé.

L'identification expérimentale directe de ces "raideurs d'interface" est très difficile. Nous proposons dans le paragraphe suivant un raisonnement s'appuyant sur un "changement d'échelle" consistant à comparer une modélisation 3D classique du multicouche et une version simplifiée de la modélisation M4.

D'autres possibilités de découplage ont été envisagées. Chaque choix peut donner lieu à une version du modèle M4. La pertinence du choix se mesurera à la simplicité, à la prédictibilité et à l'aspect opératoire du modèle obtenu.

Parmi ces choix possibles, on peut citer celui conduisant au modèle dit M4 $2n+1$ [T.Naciri & col. (1996)]. Dans cette version, on conserve un certain couplage entre les énergies de discontinuités des différentes interfaces. Nous reviendrons sur cette version du modèle dans le paragraphe I.2.2., lors de l'identification des raideurs d'interface.

Mais auparavant, il est utile de récapituler ci-dessous les équations du modèle M4 découplé:

1.1.4. Equations du modèle M4 découplé

- *Equations de mouvement (1.22):*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} - \frac{1}{2} \operatorname{rot}((\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \underline{e}_3) + \tilde{F}^i = \rho^i \tilde{\gamma}^i \\ -\operatorname{div} \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} + F_3^i = \rho^i \gamma_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n]$$

- *Conditions aux limites (1.23):*

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{N}}^i \cdot \tilde{n} - \frac{1}{2} (\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \tilde{n} \wedge \underline{e}_3 = \tilde{T}^i \\ \left(\tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \tilde{n} = T_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n]$$

appellation	effort
efforts de cisaillement à l'interface i,i+1	$\tilde{\tau}^{i,i+1}$
effort normal à l'interface i,i+1	$v^{i,i+1}$
moments de flexion à l'interface i,i+1	$\tilde{\mu}^{i,i+1}$
couple de torsion à l'interface i,i+1	$\theta^{i,i+1}$

appellation	déformation
déformations membranaires de la couche i	$\tilde{\tilde{\epsilon}}^i \quad (1.16)$
discontinuité de cisaillement à l'interface i,i+1	$\tilde{D}^{i,i+1} = \tilde{U}^{i+1} + \frac{e^{i+1}}{2} g \tilde{r} ad. U_3^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} g \tilde{r} ad. U_3^i \quad (1.17)$
discontinuité normale à l'interface i,i+1	$D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i \quad (1.18)$
discontinuité de rotation dans le plan	$\omega_\gamma^{i,i+1} = r(\tilde{U}^{i+1}) - r(\tilde{U}^i) \quad (1.19)$
discontinuité de rotation orthogonale au plan	$\tilde{\omega}^{i,i+1} = g \tilde{r} ad. U_3^{i+1} - g \tilde{r} ad. U_3^i \quad (1.20)$

- *Comportement*

$\tilde{\tilde{N}}^i = \tilde{\tilde{K}}^i \cdot \tilde{\tilde{\epsilon}}^i \quad (1.24)$	$\tilde{\tau}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\tau^{i,i+1} \cdot \tilde{D}^{i,i+1} \quad (1.25)$
$v^{i,i+1} = K_v^{i,i+1} \cdot D_3^{i,i+1} \quad (1.26)$	$\theta^{i,i+1} = K_\theta^{i,i+1} \cdot \omega_\gamma^{i,i+1} \quad (1.27)$
$\tilde{\mu}^{i,i+1} = \tilde{\tilde{K}}_\mu^{i,i+1} \cdot \tilde{\omega}^{i,i+1} \quad (1.28)$	

I.2. PRÉSENTATION DU MODÈLE M4 SIMPLIFIÉ (M4S)

Dans ce paragraphe, on part des équations précédentes du M4 découplé pour introduire des hypothèses simplificatrices dans le but de rendre le modèle plus simple et opératoire (§.I.2.1). Grâce à un '*changement d'échelle*', nous essayerons alors d'identifier les rigidités d'interface intervenant dans les équations (§I.2.2).

I.2.1. Obtention du modèle M4s par simplification du modèle M4 découplé

Parmi les différentes simplifications possibles, on en choisit une qui conduit à une version du modèle simple et opératoire. Le modèle obtenu sera appelé modèle M4 simplifié (M4s).

On introduit tout d'abord une liaison cinématique qui consiste à relier tous les déplacements transverses entre eux. Cela revient à supposer que les différentes couches sont parfaitement liées entre elles dans le sens transversal 3, et qu'elles se déplacent identiquement dans ce sens.

$$\forall i \in [1, n] \quad U_3^i = U_3 \quad (1.29)$$

On fait ensuite l'hypothèse simplificatrice que le rotationnel des couples de torsion est nul pour toute interface:

$$\forall i \in [1, n] \quad \text{rot}(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) = 0 \quad (1.30)$$

Ce choix est normal, puisque les particules de matière n'ont pas de microstructure. Nous verrons plus loin la simplification qu'apporte cette hypothèse au niveau des équations.

Ces deux hypothèses permettent de réduire le nombre de champs cinématiques de $3n$ à $2n+1$. Les équations d'équilibre (1.22) sont elles aussi réduites à $2n+1$. Elles peuvent s'écrire en fonction uniquement des efforts membranaires et des efforts de cisaillement d'interface:

$$\begin{cases} \text{div} \tilde{N}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{F}^i = \rho^i \cdot \tilde{\gamma}^i \\ \sum_{i=1}^n \left(-\text{div} \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + F_3^i \right) = \rho^i \cdot \gamma_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n] \quad (1.31)$$

Les conditions aux limites (1.23) deviennent:

$$\begin{cases} \bar{N} \cdot \bar{n} = \bar{T}^i & \forall i \in [1, n] \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{2} (\bar{\tau}^{i,i+1} + \bar{\tau}^{i-1,i}) \bar{n} - T_3^i \right) = 0 & \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n] \end{cases} \quad (1.32)$$

Les deuxièmes équations de (1.29) et de (1.30) doivent être comprises au sens des distributions, les cisaillements d'interface pouvant être discontinus.

La discontinuité de cisaillement à l'interface devient:

$$\bar{D}^{i,i+1} = \bar{U}^{i+1} - \bar{U}^i + \left(\frac{e^i}{2} + \frac{e^{i+1}}{2} \right) \cdot g \bar{r} ad \cdot U_3 \quad (1.33)$$

I.2.2. Identification des rigidités d'interface du M4s

Pour déterminer les relations de comportement du modèle M4 simplifié, on écrit les équations du modèle tridimensionnel classique. Pour simplifier l'illustration, on suppose l'absence de forces de volume et on se place dans un cadre quasi-statique.

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

$$(1.35)$$

On pose:

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dz \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad i \in [1, n] \quad (1.36)$$

$$\tau_{\alpha}^{i-1,i}(X_1, X_2) = \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, h_i^-) \quad (1.37)$$

$$\tau_{\alpha}^{i,i+1}(X_1, X_2) = \sigma_{\alpha 3}(X_1, X_2, h_i^+) \quad (1.38)$$

En intégrant les deux premières équations (1.34) de l'équilibre 3D ci-dessus on obtient:

$$\begin{aligned} N_{11,1}^i + N_{12,2}^i + \tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i} &= 0 \\ N_{21,1}^i + N_{22,2}^i + \tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i} &= 0 \quad i \in [1, n] \end{aligned}$$

On observe alors qu'en intégrant dans l'épaisseur de chaque couche ces deux premières équations d'équilibre 3D, on retrouve les deux premières équations quasi-statiques du M4s à condition d'admettre l'hypothèse simplificatrice $\forall i \in [1, n] \quad \text{rot}(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) = 0$.

Les efforts membranaires par couche pour le M4s sont donc supposés être égaux à l'intégration selon l'épaisseur de la couche des contraintes 3D dans le plan.

Les efforts de cisaillement d'interface $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ du M4s sont supposés être égaux aux efforts de cisaillement d'interface du modèle 3D à l'interface.

Ces résultats bien qu'attendus n'étaient pas forcément évidents. La dénomination des efforts intérieurs du M4 n'est justifiée que maintenant, à postériori.

En reprenant la relation de comportement (1.24): $\tilde{N}^i = \tilde{K}^i \cdot \tilde{\varepsilon}^i$, le tenseur \tilde{K}^i s'identifie au tenseur des raideurs membranaires classiques. On sait donc le déterminer à partir des caractéristiques du matériau constituant la couche.

Intéressons-nous maintenant à la troisième équation (1.35) d'équilibre 3D. Pour pouvoir retrouver la troisième équation quasi-statique du M4s on introduit des approximations des composantes du champ de contrainte 3D (que l'on notera $\sigma_{\alpha\beta}^{up}$) en fonction de l'information moyenne disponible au niveau du M4s.

Comme $N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dz$, nous posons :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{up} = \frac{1}{e_i} N_{\alpha\beta}^i \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (1.39)$$

L'intégration dans toute l'épaisseur du multicouche de la troisième équation d'équilibre (1.35) pour $\tilde{\sigma}^{up}$ nous redonne alors la troisième équation d'équilibre du M4s.

On approxime ainsi les composantes membranaires du champ 3D par un champ constant par morceaux.

Pour les composantes $\sigma_{\alpha i}$, on dispose des informations (1.36-1.38) au niveau des interfaces. On approxime alors $\sigma_{\alpha i}$ par un champ affine par morceaux:

$$\sigma_{\alpha i}^{up}(z) = \tau_{\alpha}^{i-1,i} + \frac{z - h_i^-}{h_i^+ - h_i^-} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i}) \quad (1.40)$$

Le modèle M4s ne faisant pas apparaître de contrainte normale au plan, nous supposons que l'apport énergétique de σ_{33} est négligeable.

Ecrivons maintenant l'énergie élastique associée au champ de contrainte 3D réel:

$$W(3D) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[\int_{\omega} \frac{1}{2} \sigma_{kl} S'_{lkr} \sigma_{sr} d\omega \right] dz \quad k, l, r, s = 1, 2, 3$$

où S'_{ikrs} sont les composantes du tenseur de souplesse de la $j^{\text{ème}}$ couche [J.M.Berthelot (1992)].

En supposant que l'axe 3 est un axe d'orthotropie, cette expression s'écrit [J.M.Berthelot (1992)]:

$$W(3D) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left[\int_{\omega} (\sigma_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\delta\gamma} + 2\sigma_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta 33} \sigma_{33} + \sigma_{33} S'_{3333} \sigma_{33} + \sigma_{3\alpha} S'_{\alpha 3\beta 3} \sigma_{3\beta}) d\omega \right] dz \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

En y injectant les champs de contrainte approchés (1.39) et (1.40), on obtient une approximation de l'énergie élastique associée au champ de contrainte du modèle M4s:

$$W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N'_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\delta\gamma} + \frac{2e_i}{3} S'_{\alpha 3\beta 3} \left[2\tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} + 2\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} + \tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i-1,i} \right] \right] d\omega \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \quad (1.41)$$

Toujours dans le sens d'obtenir un modèle découplé, la dernière simplification du modèle consiste à supposer que les interfaces sont découplées. En écrivant que:

$$\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i-1,i} = \tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Nous obtenons le découplage désiré:

$$W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N'_{\beta\alpha} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\delta\gamma} + 2e_i \cdot S'_{\alpha 3\beta 3} \left[2\tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} + 2\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} \right] \right] d\omega \quad (1.42)$$

Cette expression définit une énergie élastique approchée du M4s. Par ailleurs, l'énergie élastique du M4s s'exprime en fonction des efforts par:

$$W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N'_{\beta\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tau_{\alpha}^{i,i+1} D'_{\alpha}{}^{i,i+1} \right] d\omega \quad (1.43)$$

En identifiant les deux densités massiques d'énergie élastique données par les relations (1.42) et (1.43), la relation de comportement du modèle M4 simplifié s'écrit:

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \frac{1}{e_i} S'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\gamma\delta} \quad (1.44)$$

$$D'_{\alpha}{}^{i,i+1} = 2 \left[e_i S'_{\alpha 3\beta 3} + e_{i+1} S'_{\alpha 3\beta 3} \right] \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad (1.45)$$

La version $2n+1$ du modèle M4 que nous avons évoquée au paragraphe précédent adopte une autre présentation du modèle [T.Naciri & col. (1996)]. Les équations de mouvement obtenues sont celles du M4s, cependant le comportement est un peu différent. En arrivant à l'expression (1.41) ci-dessus, on ne fait plus d'hypothèse simplificatrice. Dans le comportement, on conserve alors un couplage entre deux interfaces successives $i-1, i$ et $i, i+1$.

Dans ce cas (modèle $2n+1$), la relation de comportement à l'interface s'exprime à partir de (1.41) par:

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = \frac{4}{3} [e_i S_{\alpha 3 \beta 3}^i + e_{i+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{i+1}] \cdot \tau_{\beta}^{i,i+1} + \frac{2}{3} e_{i+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{i+1} \cdot \tau_{\beta}^{i+1,i+2} + \frac{2}{3} e_i S_{\alpha 3 \beta 3}^i \cdot \tau_{\beta}^{i-1,i}$$

La différence essentielle entre le M4s et le M4 $2n+1$ réside donc dans la relation de comportement à l'interface.

Remarque:

Dans le cas d'un empilement [0/90/0] par exemple, nous obtenons avec les deux modèles une relation de comportement à chaque interface de la forme [A.Ehrlacher & col. (1994a), T.Naciri & col. (1996)]:

$$\tau_{\alpha}^{0/90} = K \cdot D_{\alpha}^{0/90}$$

La rigidité K d'interface est cependant différentes entre les deux modèles dans un rapport $\frac{K^{2n+1}}{K^{M4}}$ égal à $3/2$.

Ainsi, plusieurs démarches sont actuellement envisagées pour déterminer le comportement à l'interface. La démarche conduisant au modèle dit $2n+1$ part des champs cinématiques 3D [T.Naciri & col. (1996)]. Une autre démarche consiste à approximer les contraintes 3D par la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner [A.Chabor (1996)]. Une troisième démarche enfin effectue le passage du modèle 3D au modèle M4 par un changement d'échelle [P.Carreira]. Nous retiendrons par exemple qu'entre les deux modèles M4s et $2n+1$, la rigidité à l'interface peut varier dans un rapport de 1 à 1.5. Mais, tout cela ne change rien quant à la philosophie, les équations et la pertinence du M4s.

Le M4 simplifié ainsi construit se prête bien à l'établissement de solutions analytiques dans le cadre de la statique.

Pour valider le modèle M4 simplifié, nous traiterons dans le chapitre II deux problèmes simples, se prêtant à des solutions analytiques.

La possibilité de solution analytique reste toutefois limitée à des cas simples de géométrie et de chargement. Pour pouvoir traiter avec le M4s des problèmes plus complexes, et pour pouvoir juger de la fiabilité de ce modèle, nous sommes amenés à construire un outil de calcul numérique.

Nous avons choisi de développer cet outil sur la base de la technique des éléments finis. Nous présentons dans le prochain paragraphe, les grandes lignes et quelques spécificités de ce développement.

Mais auparavant, il est utile de rappeler les équations du M4s:

I.2.3. Equations du M4s

* *Equations de mouvement* (1.31):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tilde{N}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{F}^i = \rho^i \cdot \tilde{\gamma}^i \\ \sum_{i=1}^n \left(-\operatorname{div} \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + F_3^i \right) = \rho^i \cdot \gamma_3^i \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \omega, i \in [1, n]$$

* *Condition aux limites* (1.32)

$$\begin{cases} \tilde{N} \cdot \tilde{n} = \tilde{T}^i \quad \forall i \in [1, n] \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \tilde{n} - T_3^i \right) = 0 \end{cases} \quad \forall (X_1, X_2) \in \gamma, i \in [1, n]$$

* *Comportement*

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e_i} S_{\beta\alpha\delta\gamma}^i N_{\gamma\delta}^i \quad (1.44)$$

$$D_{\alpha}^{i,i+1} = 2 \left[e_i S_{\alpha 3 \beta 3}^i + e_{i+1} S_{\alpha 3 \beta 3}^{i+1} \right] \tau_{\beta}^{i,i+1} \quad (1.45)$$

I.3. FORMULATION EN DYNAMIQUE DU M4 DECOUPLÉ PAR ÉLÉMENTS FINIS

Dans les paragraphes précédents, nous avons obtenu les équations de mouvement (1.22, 1.23) du modèle M4 découplé et celles plus opératoires (1.31, 1.32) du modèle M4s. On ne dispose de solutions analytiques M4s que pour quelques problèmes simples de statique [M.H.Philippe (1996)]. On ne dispose pas de solution analytique pour des problèmes d'impact.

Pour évaluer les performances du modèle M4s, à la fois en statique et en dynamique, nous devons donc le développer numériquement. Nous avons choisi de procéder à ce développement à l'aide de la méthode des éléments finis.

Grâce au principe de Hamilton et à la technique des éléments finis, les équations du M4 découplé seront formulées en dynamique à l'aide d'une seule équation matricielle, dite équation éléments finis (§I.3.2).

Nous introduirons ensuite l'hypothèse simplificatrice (1.29). Cette hypothèse se traduit au niveau de la formulation éléments finis par une liaison cinématique. Grâce à cette liaison cinématique nous nous placerons dans le cadre du modèle simplifié M4s (§I.4.3). L'outil numérique pourra donc être utilisé aussi bien pour le M4 découplé que pour le M4 simplifié.

Nous présenterons enfin (§I.3.4) la technique adoptée pour la résolution par le M4s de problèmes statiques, avec prise en compte de la liaison cinématique et des conditions aux limites. Nous verrons plus tard (§IV.4), que c'est cette même technique qui sera à la base de la résolution de problèmes de dynamique.

La présentation de la méthode des éléments finis sera faite en annexe. Nous y parlerons aussi de quelques particularités que présente l'application de la technique des éléments finis dans le cas du M4, notamment au niveau du calcul des matrices de rigidité d'interface.

I.3.1. Formulation variationnelle du M4 découplé

Dans ce paragraphe, nous écrivons une formulation variationnelle des équations dynamiques du M4 découplé. Grâce à la technique des éléments finis, nous formulons ensuite le problème à l'aide d'une seule équation matricielle dite équation éléments finis.

Nous partons du principe de Hamilton qui stipule que [*H.L.Langhaar (1962) cité par B.R.Petersen (1985)*]:

Parmi les mouvements qui peuvent faire évoluer un système conservatif d'une configuration initiale X_1 à une configuration finale X_2 prescrites, pendant un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$, le mouvement qui aura effectivement lieu est celui qui rend stationnaire la valeur de l'intégrale:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c - \delta W_d - \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (1.46)$$

E_c désignant l'énergie cinétique, W_d l'énergie de déformation et W_{ext} le travail des efforts extérieurs. Le symbole δ faisant référence à la première variation [*G.Dhatt & G.Touzot (1984)*].

Nous remarquerons que le cas statique correspond à un problème stationnaire où $E_c=0$, et nous retrouvons alors le principe de minimisation de l'énergie potentielle:

$$\delta(W_d - W_{ext}) = 0$$

Exprimons les différents termes de l'expression (1.46) en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés.

Pour le M4 découplé, l'énergie de déformation s'écrit:

$$W_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[\begin{aligned} &\tilde{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^i : \tilde{\tilde{\tilde{K}}}^i : \tilde{\tilde{\tilde{\epsilon}}}^i + \tilde{D}^{i,i+1} \cdot \tilde{\tilde{K}}_{\tau}^{i,i+1} \cdot \tilde{D}^{i,i+1} + D^{i,i+1}_3 \cdot K_v^{i,i+1} \cdot D^{i,i+1}_3 + \\ &\tilde{\omega}^{i,i+1} \cdot \tilde{\tilde{K}}_{\mu}^{i,i+1} \cdot \tilde{\omega}^{i,i+1} + \omega_3^{i,i+1} \cdot K_{\theta}^{i,i+1} \cdot \omega_3^{i,i+1} \end{aligned} \right] d\omega \quad (1.47)$$

Dans cette expression, les déformations membranaires ainsi que les différents termes de discontinuité aux interfaces peuvent être exprimés en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés.

L'énergie extérieure W_{ext} se compose d'une énergie W_s correspondant aux efforts surfaciques et d'une énergie W_c correspondant aux efforts linéiques:

$$W_s = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\tilde{F}^i \cdot \tilde{u}^i + F_3^i \cdot u_3^i] d\omega \quad (1.48)$$

$$W_c = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma} [\tilde{T}^i \cdot \tilde{u}^i + T_3^i \cdot u_3^i] d\gamma \quad (1.49)$$

Enfin, l'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \rho^i \frac{\partial u^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial u^i}{\partial t} d\omega \quad (1.50)$$

La relation (1.50) nécessite l'expression de $\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt$ en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés. Nous écrivons alors:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \rho^i \frac{\partial u^i}{\partial t} \cdot \delta \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right) d\omega dt$$

Une intégration par parties conduit à:

$$2\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \rho^i \frac{\partial u^i}{\partial t} \cdot \delta u^i \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho^i \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \cdot \delta u^i dt \cdot d\omega$$

Les hypothèses du principe de Hamilton supposent que la configuration initiale et finale sont prescrites, ce qui assure que $\delta \underline{u}^i(t_1) = 0$. Nous choisissons $\delta \underline{u}^i$ de sorte que $\delta \underline{u}^i(t_2) = 0$.

$$\text{D'où: } 2\delta \int_{t_1}^{t_2} E_c dt = - \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[\int_{t_1}^{t_2} \rho^i \frac{\partial^2 \underline{u}^i}{\partial t^2} \cdot \delta \underline{u}^i dt \right] d\omega \quad (1.51)$$

Grâce aux expressions (1.47-1.49) et (1.51), nous pouvons exprimer la relation (1.46) en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivées. A partir de là, et utilisant la technique des éléments finis dont nous avons rappelé les principes en annexe I.b, nous allons pouvoir obtenir une équation éléments finis matricielle traduisant les équations du M4 en dynamique.

I.3.2. Équation éléments finis du M4 découplé en dynamique: $M\ddot{U}+KU=F$

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre la formulation variationnelle (1.46) du problème obtenue au paragraphe précédent. En appliquant la méthode d'approximation par éléments finis (exposée en annexe I.b), nous traduisons les équations du modèle M4 découplé à l'aide d'une seule équation matricielle, appelée équation éléments finis.

Nous commençons par décomposer le domaine géométrique ω en éléments ou mailles ω^e . Au niveau de chaque élément, le déplacement \underline{u}^e est fonction des déplacements nodaux \underline{u}_j via les fonctions de forme (voir annexe I.a).

Le choix du degré d'interpolation des fonctions de forme dépend essentiellement de l'ordre de dérivation des fonctions de forme dans le calcul des déformations [M.Smaoui (1993)]. L'expression de ces déformations fait apparaître des dérivées premières de fonction de forme. Le calcul précis de ces déformations nécessite alors de choisir une interpolation quadratique, c'est à dire des fonctions de forme de degré deux. L'élément que nous obtenons alors est dit quadratique [G.Dhatt & G.Touzot (1984)].

Pour des considérations d'erreur d'approximation [cf. G.Dhatt & G.Touzot (1984)], nous choisissons d'avoir 8 noeuds par élément. L'élément obtenu est dit quadratique incomplet.

Chaque noeud possède $3n$ composantes de déplacement, soit 3 composantes par couche. Nous noterons U_{jk}^i les termes de déplacement nodaux, où l'indice i désigne la couche, j le numéro du noeud et k la composante 1, 2 ou 3 respectivement suivant \underline{e}_1 , \underline{e}_2 ou \underline{e}_3 .

Nous choisissons d'arranger les termes de déplacement nodaux par noeud, puis par couche et enfin par composante. Ceci permet de définir un vecteur déplacements nodaux $U^e = [U_{11}^1 \ U_{12}^1 \ U_{13}^1 \ U_{11}^2 \ \dots \ U_{p,3}^3]$, où p désigne le nombre de noeuds par élément ($p=8$). Nous verrons plus tard (§I.3.4.), que ce choix d'arrangement est le plus économique en temps de calcul.

En désignant par $U(X_1, X_2, t)$ le vecteur déplacement à $3n$ composantes au point (X_1, X_2) à l'instant t , nous pouvons écrire, avec des notations évidentes, l'interpolation quadratique du déplacement:

$$U_k^i(X_1, X_2, t) = \sum_{s=1}^8 N_s(X_1, X_2) \cdot U_{sk}^i(t) \quad (1.52)$$

A partir de là, en utilisant les relations de comportement (1.24-1.28) du M4 découplé et les techniques classiques de décomposition matricielle, nous pouvons exprimer les différents termes intervenant dans la formulation variationnelle (1.46):

$$\sum_{i=1}^n \bar{N}^i(t) : \bar{\varepsilon}^i(t) = {}^t U^e(t) ({}^t Q \cdot K \cdot Q) U^e(t) \quad (1.53)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{D}^{i,i+1}(t) \cdot \bar{\tau}^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t T \cdot K_r \cdot T) U^e(t) \quad (1.54)$$

$$\sum_{i=1}^n v^{i,i+1}(t) \cdot D_3^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t O \cdot K_v \cdot O) U^e(t) \quad (1.55)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mu}^{i,i+1}(t) \cdot \bar{\omega}^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t \mathcal{L} \cdot K_\mu \cdot \mathcal{L}) U^e(t) \quad (1.56)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta^{i,i+1}(t) \cdot \omega_3^{i,i+1}(t) = {}^t U^e(t) ({}^t \Delta \cdot K_\theta \cdot \Delta) U^e(t) \quad (1.57)$$

$$\sum_{i=1}^n \rho^i \underline{\gamma}^i \delta \underline{u}^i = {}^t \ddot{U}^e \cdot \Theta^e \cdot \delta U^e \quad (1.58)$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}^i \cdot \delta \underline{u}^i = ({}^t \Pi \cdot F) \delta U^e \quad (1.59)$$

$$\sum_{i=1}^n \underline{T}^i \cdot \delta \underline{u}^i = ({}^t \Pi \cdot T) \delta U^e \quad (1.60)$$

Les matrices ' K ' font intervenir des termes de raideur et la matrice Θ^e des termes de masse. Les différentes matrices intervenant dans ces expressions sont explicitées en annexe I.a. Nous présenterons en annexe I.c un exemple de calcul pour la matrice T .

Définissons les matrices élémentaires:

$$K^e = \int_{\omega^e} [{}^t Q \cdot K \cdot Q + {}^t T \cdot K_r \cdot T + {}^t O \cdot K_v \cdot O + {}^t \mathcal{L} \cdot K_\mu \cdot \mathcal{L} + {}^t \Delta \cdot K_\theta \cdot \Delta] d\omega \quad (1.61)$$

$$M^e = \int_{\omega^e} \Theta^e d\omega \quad (1.62)$$

$$F^e = \int_{\omega^e} {}^t \Pi \cdot F d\omega \quad (1.63)$$

En intégrant les expressions précédentes dans la formulation variationnelle (1.46) exprimée en fonction des termes de déplacement \underline{u}_i et de leurs dérivés, nous obtenons la relation

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\omega^e} \delta U^e \cdot (K^e U^e + M^e \dot{U}^e - F^e) dt = 0 \quad (1.64)$$

Pour obtenir les matrices globales de rigidité K et de masse M , il suffit alors d'assembler les différentes matrices élémentaires K^e et M^e , par l'une des techniques classiques d'assemblage [voir *G.Dhatt & G.Touzot (1984)*]. Nous assemblons également les vecteurs élémentaires U^e et F^e de façon à former les vecteurs déplacement global U et force extérieure global F [*G.Dhatt & G.Touzot (1984)*]. Nous obtenons alors:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U \cdot (K \cdot U + M \cdot \dot{U} - F) dt = 0 \quad (1.65)$$

δU désignant une variation de déplacement arbitraire, cette équation ne peut être vérifiée dans le cas général, que si $K \cdot U + M \cdot \dot{U} - F = 0$. Nous obtenons ainsi l'équation globale du problème en dynamique, dite équation éléments finis:

$$\boxed{M \cdot \dot{U} + K \cdot U = F} \quad (1.66)$$

Cette forme d'équation est classique; nous pouvons la retrouver avec les modèles classiques 2D ou 3D. Toutefois, les particularités du modèle M4 (cinématique particulière et présence d'interfaces) font que les matrices K et M présentent des structures et des expressions quelque peu différentes des structures classiques. Pour cela, nous présentons en annexe I.c quelques détails sur le calcul de la matrice de rigidité K . Nous reparlerons de la matrice masse plus tard (§.IV.3.), lorsque nous parlerons des différentes structures opératoires pour cette matrice.

1.3.3. Prise en compte au niveau des éléments finis de la simplification du modèle découplé: le modèle simplifié M4s

Dans ce paragraphe, nous allons traduire le passage du modèle découplé au modèle simplifié, par des opérations sur les lignes et les colonnes des matrices élémentaires K^e , M^e et F^e .

Les hypothèses (1.29, 1.30) du M4s se traduisent par des énergies de flexion d'interface nulles et des composantes 3 identiques pour les différentes couches $U_3^1 = U_3$.

Il restera ensuite à traduire les conditions $U_{pi}^{3'} = 0$ sur les nouvelles variables, comme hypothèses de conditions aux limites, ce que nous verrons au paragraphe suivant.

L'utilisation des nouvelles matrices élémentaires K^e , M^e et F^e permet ainsi la conservation des énergies élémentaires, et donc la conservation des énergies globales intervenant dans la formulation variationnelle découlant du principe de Hamilton.

Nous noterons enfin qu'il est possible d'introduire les liaisons cinématiques directement au niveau des matrices globales, sans intervenir au niveau des matrices élémentaires. Mais cela serait plus complexe à mettre en œuvre à cause du fait que les matrices globales K et M ont une structure bande et sont stockées sous forme de vecteurs.

I.3.4. Prise en compte des conditions aux limites et technique de résolution en statique

Nous nous plaçons dans le cadre de la statique, d'abord parce que nous allons aborder dans le chapitre suivant une phase de validation en statique qui utilisera directement les résultats de ce paragraphe, et ensuite parce que, comme nous le verrons plus loin (§IV.2.), la résolution en dynamique se ramène à la résolution à chaque pas de temps d'un problème statique avec ces mêmes techniques.

Les conditions aux limites peuvent être exprimées sur les déplacements ou les contraintes.

Les conditions aux limites en contraintes sont introduites de manière simple sous forme d'efforts extérieurs.

Pour l'introduction des conditions aux limites en déplacement plusieurs méthodes existent [G.Dhatt & G.Touzot (1984)].

La méthode du terme diagonal dominant, simple à mettre en œuvre, n'est pas bien adaptée à notre matrice K . En effet, le rapport élevé qui peut exister entre les termes de rigidité membranaires et ceux relatifs à l'interface, peut engendrer une matrice K mal-conditionnée.

La méthode du terme unité sur la diagonale consiste, pour chaque liaison cinématique, à modifier le vecteur force global F et la matrice de rigidité globale K . Pour des systèmes de grande taille, avec un grand nombre de relations cinématiques (cas du M4 simplifié par exemple), cette méthode devient coûteuse et complexe à programmer.

La méthode que nous adoptons est la *méthode de suppression des équations*. Elle consiste à supprimer les équations surabondantes. Nous supprimerons ainsi la

ligne et la colonne correspondant à chaque liaison cinématique de type M4 simplifié (1.67). Cette méthode a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues, et de le réduire considérablement dans le cas du modèle simplifié. Cela permet de diminuer la taille de la matrice à inverser, et par la même le temps de calcul.

Partant de l'équation globale $K.U=F$, l'introduction des conditions aux limites et des relations cinématiques permet de classer les composantes du vecteur déplacement global U , en composantes cherchées et, par opposition, composantes données (imposées nulles ou non nulles).

Pour simplifier la présentation, nous supposons que les premières composantes de U sont les composantes cherchées. Nous posons alors $U = \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix}$ (l'indice c ici faisant référence aux composantes cherchées de U et l'indice d aux composantes données de U).

Nous pouvons alors décomposer le système $K.U=F$ à résoudre en:

$$\begin{pmatrix} K_{cc} & K_{cd} \\ K_{dc} & K_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_c \\ U_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ F_d \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

(Pour le vecteur F , l'indice c fait référence aux composantes cherchées de U et l'indice d aux composantes données de U)

U_d étant donné, le but est de déterminer U_c . Il suffit pour cela de résoudre la première équation de ce système:

$$K_{cc}.U_c + K_{cd}.U_d = F_c$$

soit encore:

$$K_{cc}.U_c = F_c - K_{cd}.U_d. \quad (1.69)$$

K_{cc} et F_c sont obtenus à partir de K et F , par suppression de lignes et colonnes correspondant aux conditions aux limites (nulles en déplacement) et aux relations cinématiques.

Une fois les matrices K_{cc} et F_c extraites, la résolution consistera à inverser la matrice K_{cc} .

Plusieurs méthodes de résolution des systèmes linéaires sont alors possibles. Elles peuvent être classées en deux catégories [G.Dhatt & G.Touzot (1984)]:

- les *méthodes itératives*, conduisant à la solution après un certain nombre d'itérations, nombre qui dépend de la structure de la matrice K_{cc} à inverser;
- les *méthodes directes*, conduisant à la solution après un nombre défini d'opérations. Elles sont plus complexes à programmer, demandent plus d'espace

mémoire, et sont un peu plus sensibles aux erreurs d'arrondi. Elles sont cependant en général plus rapides que les méthodes itératives.

Pour notre cas, nous choisissons d'utiliser une méthode directe, dérivant de la méthode d'élimination de Gauss. Elle consiste d'abord en une décomposition de la matrice K_{cc} dite décomposition de Cholesky, suivie d'une résolution par montée-descente [G.Dhatt & G.Touzot (1984)]. Cette méthode est autorisée par le fait que la matrice extraite K_{cc} est symétrique, définie et positive. Elle présente une structure bande. Seule la partie utile (composantes non nulles) sera stockée.

Grâce à la méthode de Gauss, nous décomposons donc K_{cc} sous la forme de Cholesky $K_{cc}=L'L$, où la matrice L est triangulaire inférieure.

Le système à résoudre s'écrit alors:

$$L'L U_c = F_c$$

et se décompose en

$$\begin{cases} L V_c = F_c \\ 'L U_c = V_c \end{cases} \quad (1.70)$$

Le système $L V_c = F_c$ se résout facilement par montée, L étant triangulaire inférieure.

Une fois V_c déterminé, on peut résoudre $'L U_c = V_c$ par descente, $'L$ étant triangulaire inférieure.

Notons que cette opération d'inversion (ou encore de décomposition) est en général l'opération la plus coûteuse en temps de calcul, et qu'elle dépend essentiellement de la taille de la matrice K_{cc} à inverser (ordre et largeur de bande). Cela explique à posteriori notre choix de la manière de prise en compte des conditions aux limites en déplacement, ainsi que de l'arrangement des composantes du vecteur déplacement par noeud, couche puis composante. Ces choix réduisent au mieux la taille et la largeur de bande de la matrice à inverser, et diminuent par conséquent le temps de calcul.