
Modélisation mathématique et
optimisation du FRTSP – cas prédictif et
replanification

1. Introduction

Après avoir défini le problème FRTSP et étudié son comportement dynamique grâce au modèle de simulation à événements discrets, nous allons nous intéresser dans le présent chapitre à l'optimisation de son processus décisionnel. D'abord nous étudions la nature combinatoire du FRTSP en montrant que la relaxation de plusieurs de ses contraintes le ramène au problème d'affectation généralisée. Un exemple numérique est présenté afin d'illustrer l'ensemble des contraintes et données du problème, plusieurs solutions sont également proposées pour saisir les enjeux de ce problème. Ensuite, nous nous intéressons à l'établissement du plan prédictif en formulant un PLVM pour réduire les temps d'attente des marchandises. Pour compléter cette approche, nous adapterons un algorithme de colonies de fourmis pour les instances de grande taille. Par la suite, nous proposons une approche par horizon glissant pour la replanification du FRTSP afin de prendre en compte des changements relatifs à la demande. Cette mise à jour du plan initial permet d'ajuster les décisions initiales de manière à minimiser les écarts dus au recalcul. Enfin, nous décrivons les processus de couplage simulation / optimisation, aussi bien dans le cas prédictif, que dans le cas de la replanification.

2. Un exemple numérique

Avant de procéder à la formalisation mathématique du problème FRTSP, dans cette section, nous proposons un exemple numérique sur une instance réduite afin d'appréhender sa complexité.

Cet exemple permet d'illustrer toutes les contraintes techniques et organisationnelles, présentées au chapitre 2. Nous allons proposer deux solutions pour cette instance afin de ressortir l'impact des différentes contraintes sur le processus d'exploitation, ainsi que les enjeux et l'intérêt d'une approche d'optimisation.

Nous considérons une ligne ferroviaire composée de 4 stations de voyageurs, où il est possible de procéder aux chargements / déchargements des marchandises. Cette ligne est parcourue par 3 trains mixtes, à intervalle de 10 minutes. Enfin, 10 commandes doivent être transportées sur cette ligne, suivant des parcours différents (i.e. les stations de départs et d'arrivées varient d'une commande à une autre). L'exemple est illustré par la Figure V.1.

Les autres caractéristiques du problème sont :

- Nous considérons l'instant 0, comme le moment de début de l'exploitation.
- Les l_t et r_j sont exprimées en minutes.
- Les cap_t et Q_j sont exprimés en nombre de colis standards.
- La distance entre deux stations successives est exprimée en durée de parcours (comme indiqué dans la Figure V.1, elle est égale à 5 min).
- Comme conséquences directes de la conception de ce système de transport, aucune commande ne peut être déchargée dans la station 1 (les trains sont vides au départ). Aussi, aucune commande ne peut être chargée dans la station 4 (c'est le terminus pour les trains).

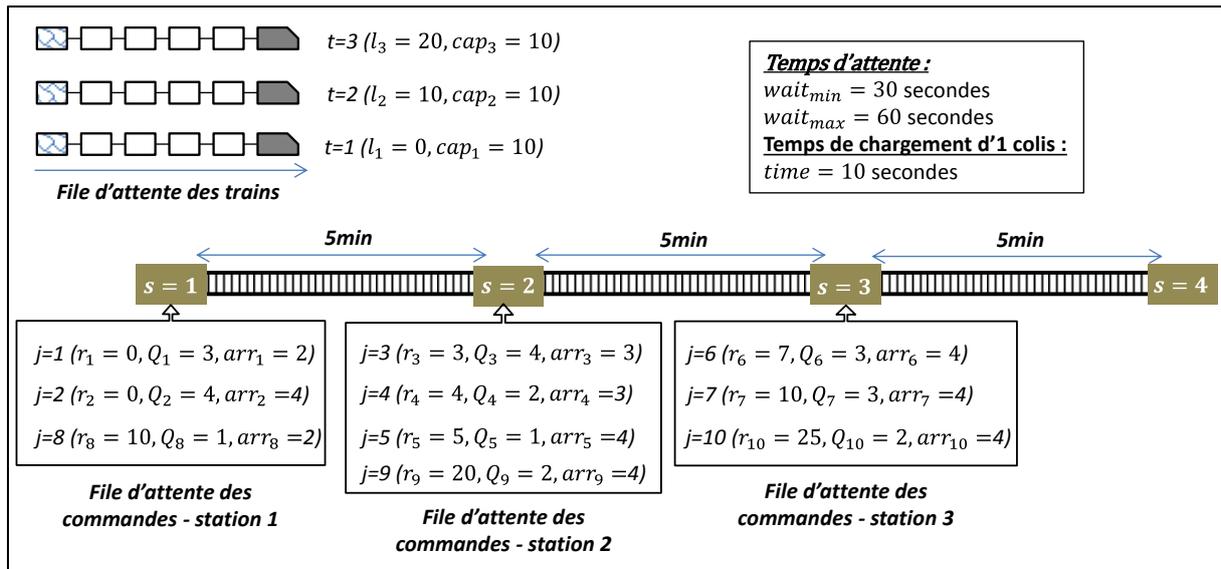


Figure V.1 : Une illustration d'une instance numérique du FRTSP

Nous proposons deux plans différents de transport des commandes, élaborés en appliquant des règles décisionnelles aléatoires. Ceci nous permettra de constater l'impact de toutes les contraintes sur l'activité de transport de marchandises, ainsi que l'importance du schéma décisionnel adopté. Le Tableau V.1 et le Tableau V.2 présentent ces deux plans. Les notations et formules suivantes sont utilisées :

- Commandes disponibles pour le transport dans la station, lors du passage du train : $CDisp$
- Commandes déchargées du train : $CDchg$
- Commandes chargées dans le train : $Cchg$
- Date d'arrivée à la station (min, secondes) : $Arr_s = \begin{cases} l_t & si \ s = 1 \\ Dep_{s-1} + 5 \ sinon \end{cases}$
- Temps d'attente dans la station (secondes) :
 $Tchg = \max(\sum \text{temps de déchargement} + \sum \text{temps de chargement}, wait_{min})$
- Nombre de colis à l'intérieur du train :
 $NbrC_s = \begin{cases} \text{colis chargés} & si \ s = 1 \\ NbrC_{s-1} - \text{colis déchargés} + \text{colis chargés} & sinon \end{cases}$
- Date de départ de la station (min, secondes) : $Dep_s = Arr_s + Tchg$

Le premier plan de transport se résume comme suit :

- Train 1 : commandes transportées {2 ; 3 ; 4}.
- Train 2 : commandes transportées {1 ; 8 ; 7 ; 6}.
- Train 3 : commandes transportées {5 ; 9 ; 10}.

Le temps d'attente moyen de chaque commande dans sa station de départ, avant son transport par un train, est égal à : 7 min.

Les différentes contraintes ayant impacté l'élaboration de ce plan de transport, se présentent comme suit :

- La commande 1 n'a pas été chargée dans le train 1 à la station 1, parce que son chargement aurait nécessité une durée d'arrêt totale égale à 70 secondes ($> wait_{max}$).
- La commande 5 n'a pas été chargée dans le train 1 à la station 2, parce que son chargement aurait nécessité une durée d'arrêt totale égale à 70 secondes ($> wait_{max}$). Aussi, la capacité du train a été atteinte ($cap_1 = 10$).
- Les commandes 6 et 7 n'ont pas été chargées dans le train 1, parce que le déchargement des commandes 3 et 4 a nécessité 60 secondes ($= wait_{max}$).
- La commande 5 n'a pas été chargée dans le train 2, bien que le temps d'attente fût suffisant dans la station 2. Cette décision, a permis le transport des commandes 6 et 7 par le train 2. En effet, le chargement de la commande 5 aurait requis 10 secondes d'attente supplémentaires dans la station 4, nécessaires à son déchargement.

Tableau V.1 : Plan de transport des commandes – 1^{ère} solution

	Station 1			Station 2			Station 3			Station 4		
	CDisp	CDchg	Cchg	CDisp	CDchg	Cchg	CDisp	CDchg	Cchg	CDisp	CDchg	Cchg
Train 1	1; 2	-	2	3; 4; 5	-	3; 4	6; 7	3; 4	-	-	2	-
Arr(s)	0			5 min 40 secondes			11 min 40 secondes			17 min 40 secondes		
Tchg	40 secondes			60 secondes			60 secondes			40 secondes		
NbrC(s)	4			10			4			-		
Dep(s)	40 secondes			6 min 40 secondes			12 min 40 secondes			-		
Train 2	1; 8	-	1; 8	5	1; 8	-	7; 6	-	7; 6	-	7; 6	-
Arr(s)	10 min			15 min 40 secondes			21 min 20 secondes			27 min 20 secondes		
Tchg	40 secondes			40 secondes			60 secondes			60 secondes		
NbrC(s)	4			0			6			-		
Dep(s)	10 min 40 secondes			16 min 20 secondes			22 min 20 secondes			-		
Train 3	-	-	-	5; 9	-	5; 9	10	-	10	-	5; 9; 10	-
Arr(s)	20 min			25 min 30 secondes			31 min			36 min 30 secondes		
Tchg	30 secondes			30 secondes			30 secondes			50 secondes		
NbrC(s)	0			3			5			-		
Dep(s)	20 min 30 secondes			26 min			31 min 30 secondes			-		

Le deuxième plan de transport se résume comme suit :

- Train 1 : commandes transportées {1 ; 4 ; 5 ; 6}.
- Train 2 : commandes transportées {2 ; 8 ; 3}.
- Train 3 : commandes transportées {7 ; 9}.
- Commande 10 : non transportée.

Bien que le temps d'attente moyen des commandes transportées soit égal à : 5 min, la commande 10 (non transportée), le ramène à l'infini. En effet, l'incapacité à prendre en charge l'ensemble des commandes conduit à une infaisabilité. En pratique, sous condition d'une demande plus importante que la capacité disponible, la formulation du FRTSP peut évoluer pour déterminer le plan pouvant transporter le maximum de commandes possibles (pour générer le maximum de bénéfice).

Soumis aux mêmes contraintes considérées lors de l'élaboration du 1^{er} plan de transport, l'élaboration de ce 2^{ème} plan a été moins concluante, au vu de la prise en charge de

l'interaction entre les différentes contraintes et la multitude de possibilités, même pour une instance de taille réduite. Ceci met en lumière la difficulté de résolution du FRTSP.

Tableau V.2 : Plan de transport des commandes – 2^{ème} solution

	Station 1			Station 2			Station 3			Station 4		
	CDisp	CDchg	Cchg									
Train 1	1; 2	-	1	3; 4; 5	1	4; 5	6; 7	4	6	-	5; 6	-
Arr(s)	0			5 min 30 secondes			11 min 30 secondes			17 min 20 secondes		
Tchg	30 secondes			60 secondes			50 secondes			40 secondes		
NbrC(s)	3			3			4			-		
Dep(s)	30 secondes			6 min 30 secondes			12 min 20 secondes			-		
Train 2	2; 8	-	2; 8	3	8	3	7	3	-	-	2	-
Arr(s)	10 min			15 min 50 secondes			21 min 40 secondes			27 min 20 secondes		
Tchg	50 secondes			50 secondes			40 secondes			40 secondes		
NbrC(s)	5			8			4			-		
Dep(s)	10 min 50 secondes			16 min 40 secondes			22 min 20 secondes			-		
Train 3	-	-	-	9	-	9	7; 10	-	7	-	7; 9	-
Arr(s)	20 min			25 min 30 secondes			31 min			36 min 30 secondes		
Tchg	30 secondes			30 secondes			30 secondes			50 secondes		
NbrC(s)	0			2			5			-		
Dep(s)	20 min 30 secondes			26 min			31 min 30 secondes			-		

3. Complexité du problème FRTSP

Nous avons présenté dans le chapitre 3, le problème d'affectation généralisée et mentionné sa complexité. En ce qui concerne le FRTSP, il est possible de le réduire à un problème d'affectation généralisée, en considérant un cas particulier que l'on représente dans la Figure V.2). La réduction du FRTSP peut être décrite comme suit :

- La ligne est réduite à 2 stations seulement.
- Toutes les commandes sont disponibles à l'instant 0, dans la première station, qui sera la seule station de départ. Ces commandes sont transportées vers l'autre station, qui sera l'unique station d'arrivée : $\forall j \in J \left\{ \begin{array}{l} r_j = 0 \\ dep_j = 1 \\ arr_j = 2 \end{array} \right.$
- Chaque commande j doit être transportée par un seul train.
- Le planning de circulation des trains est connu à l'avance. Les trains sont mis en circulation à partir de la station 1 à intervalle régulier.
- Les trains peuvent charger et transporter plusieurs commandes simultanément. Cependant, ils sont limités par une capacité maximum en nombre de colis standard.
- Le temps de chargement d'un colis est négligeable. Ainsi, le temps d'attente des trains dans la station 1 est indépendant du nombre de colis chargés.
- Le moment auquel un train t charge la commande j à la station 1, est égal dans ce cas au temps d'attente de cette commande dans sa station de départ (étant donné que $r_j = 0$). Ainsi, le temps d'attente de la commande j sera directement égal à : $x_{jt} * l_t$ (avec $x_{jt} = 1$ si la commande j est affectée au train t , 0 sinon).

La considération de ces différentes hypothèses, nous permet de formaliser le FRTSP, sous la forme d'un PLNE, comme suit :

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (x_{jt} * l_t) \tag{5.1}$$

$$\sum_{t=1}^T x_{jt} = 1 \quad \forall j \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^J x_{jt} * Q_j \leq \text{Cap}_t \quad \forall t \tag{5.3}$$

$$x_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j, t \tag{5.4}$$

Nous retrouvons l'écriture du PLNE relatif au problème d'affectation généralisée, présentée dans le chapitre 3. En effet, l'objectif (5.1) de minimisation du coût total d'affectation des commandes aux trains (traduisant le temps d'attente total des commandes dans la station de départ), est équivalent à la minimisation du coût total d'affectation des tâches aux machines.

En ce qui concerne les contraintes, nous retrouvons à travers (5.2) l'ensemble de contraintes relatives à l'obligation d'affecter chaque commande à un seul train (i.e. chaque tâche à une seule machine). Aussi, à travers (5.3) l'ensemble des contraintes relatives à la capacité des trains (i.e. capacité des machines).

Comme mentionné dans le chapitre 3, le problème d'affectation est considéré comme étant NP-difficile (Fisher, et al., 1986), ainsi, notre problème l'est aussi.

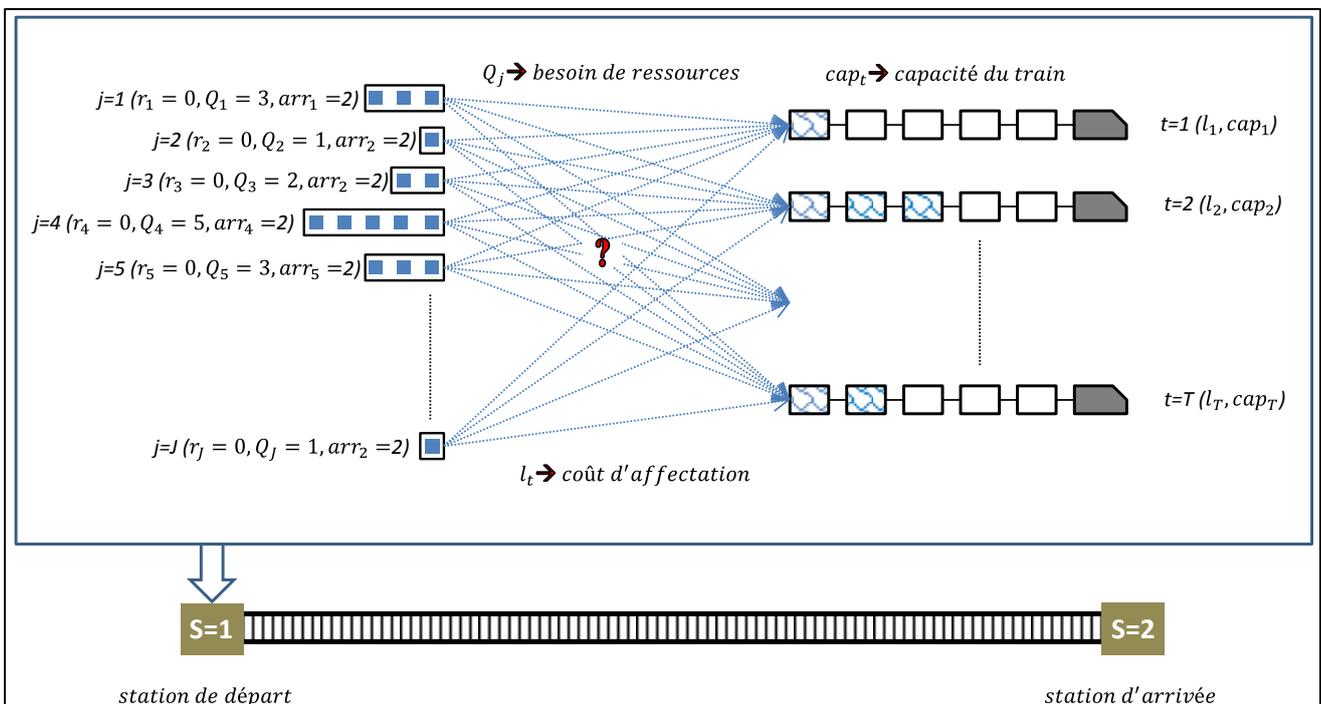


Figure V.2 : Réduction du problème FRTSP à un problème d'affectation généralisée

4. Formulation d'un PLVM du FRTSP dans le cas prédictif

Lors de la première planification qui permet d'obtenir un plan prédictif, toutes les données relatives au système de transport sont connues et définies en amont de la période

d'exploitation. Ainsi, le carnet des commandes sera connu à l'avance et aucun changement ne sera considéré en cours d'exploitation. Aussi, le planning de circulation des trains est fixé et respecté durant toute la période d'exploitation.

Les notations utilisées pour la définition des données considérées dans ce problème sont résumées dans le Tableau V.3.

Tableau V.3 : Notations utilisées dans le PLVM

Indices	$j : 1, \dots, J$	Pour les commandes
	$t : 1, \dots, T$	Pour les trains
	$s : 1, \dots, S$	Pour les stations
Paramètres	r_j	Date de disponibilité de la commande j
	dep_j	Station de départ de la commande j
	arr_j	Station d'arrivée de la commande j
	l_t	Date de disponibilité du train t dans la station 1
	J	Nombre de commandes
	T	Nombre de trains
	S	Nombre de stations
	$tt_{s,s+1}$	Temps de trajet entre deux stations successives
	Q_j	Nombre de colis standard composant la commande j
	Cap_t	Capacité de chargement du train t en nombre de colis standard
	$Wait_{max}$	Temps d'attente maximum des trains dans chaque station
	$Wait_{min}$	Temps d'attente minimum des trains dans chaque station
	$time$	Temps de chargement / déchargement d'un colis standard
	M	Un grand nombre positif
Variables de décision	x_{jts}	1 si la commande j est présente à l'intérieur du train t dans la station s , 0 sinon
	C_{ts}	Temps d'attente du train t à la station s
	R_{jts}	Moment auquel le train t charge la commande j à la station s

La formalisation des différentes contraintes identifiées se présente comme suit :

- **Affectation des commandes aux trains et leur transport**

Chaque commande j doit être affectée à un seul train t dans sa station de départ dep_j . Cette exigence est formalisée comme suit :

$$\sum_{t=1}^T x_{jts} = 1 \quad \forall j \text{ avec } s = dep_j \quad (5.5)$$

De plus, x_{jts} est égale à 1 si la commande j est présente à l'intérieur du train t dans la station s . Pour cela, nous définissons :

$$x_{jts} - x_{jts+1} = 0 \quad \forall j, t \text{ avec } s \in [dep_j, arr_j - 1] \quad (5.6)$$

Cet ensemble de contraintes (5.6), nous permet d'assurer la présence des colis de la commande j , à l'intérieur du train t , entre sa station de départ et sa station d'arrivée. Pour compléter le processus d'affectation des commandes aux trains, nous définissons :

$$x_{jts} = 0 \quad \forall j, t \text{ avec } \begin{cases} s \in [1, dep_j[\cup]arr_j, S] \text{ si } dep_j \neq 1 \text{ et } arr_j \neq S \\ s \in]arr_j, S] \text{ si } dep_j = 1 \text{ et } arr_j \neq S \\ s \in [1, dep_j[\text{ si } dep_j \neq 1 \text{ et } arr_j = S \end{cases} \quad (5.7)$$

L'ensemble des contraintes (5.7), permet de limiter le transport des colis de la commande j dans un train t , strictement au tronçon défini entre leur station de départ et d'arrivée.

- **Respect de la capacité des trains**

Chaque train est limité par un nombre maximum de colis pouvant être transportés simultanément. De plus, nous avons supposé que chaque commande doit être transportée en une seule fois et par un seul train. La formalisation de ces contraintes d'exploitation s'effectue comme suit :

$$\sum_{\forall j \in J_s} x_{jts} * Q_j \leq Cap_t \quad \forall t, s \quad (5.8)$$

Cet ensemble de contraintes (5.8), traduit la limitation du nombre de colis dans les trains dans chaque station. Dans ce cas, j appartient à l'ensemble J_s , qui représente l'ensemble des commandes, dont la station d'arrivée n'est pas s . La définition de cet ensemble, nous permet la prise en considération du déchargement des commandes, dans leur station d'arrivée (ce qui libère forcément, l'espace qu'elles occupaient dans le train).

- **Temps d'attente des trains dans les stations**

Nous avons défini précédemment, les exigences d'exploitation, en matière de temps d'attente des trains dans les stations. Nous formalisons ces exigences sous la forme de trois ensembles de contraintes comme suit :

$$C_{ts} \geq Wait_{min} \quad \forall t, s \quad (5.9)$$

$$C_{ts} \geq \sum_{\forall j \in J'_s} x_{jts} * Q_j * time \quad \forall t, s \quad (5.10)$$

$$C_{ts} \leq Wait_{max} \quad \forall t, s \quad (5.11)$$

Les ensembles de contraintes (5.9) et (5.11), traduisent les limites des temps d'attente des trains dans chaque station. D'autre part, nous avons défini $wait_{max}$ comme étant une limite de temps d'attente des trains, exclusivement liée à la possibilité de prolonger l'arrêt d'un train, pour le chargement de commandes. En d'autres termes, s'il n'y avait pas d'activité de transport de marchandises, les trains ne s'arrêteraient dans les stations que durant $wait_{min}$. Ainsi, l'ensemble de contraintes (5.10), nous permet de calculer au plus juste, le temps nécessaire au chargement de toutes les commandes devant être transportées par le train t , à partir de la station s . Pour cela, j

est considéré dans J'_s qui est l'ensemble des commandes, dont les stations de départ et d'arrivée sont la station s .

- **Respect de la date de disponibilité des commandes**

Les commandes ne sont pas toutes disponibles à l'instant 0. De ce fait, elles ne peuvent être transportées par un train, qu'après qu'elles soient disponibles dans leur station de départ. Ceci donne lieu à :

$$x_{jts} * r_j \leq \begin{cases} l_t + \sum_{s'=1}^{s-1} (C_{ts'} + tt_{s',s'+1}) & \forall j, t \text{ et } s = dep_j \text{ si } dep_j > 1 \\ l_t & \forall j, t \text{ et } s = dep_j \text{ si } dep_j = 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

Dans cet ensemble de contraintes (5.12), la date d'arrivée du train t à la station de départ dep_j de la commande j , est calculée sur la base de :

- La date de mise en circulation de ce train à partir de la station 1.
- Les temps d'attente de ce train dans toutes les stations précédentes de la station dep_j .
- La somme des temps de parcours entre toutes les stations précédentes de la station dep_j .

Dans le cas où $dep_j = 1$, cette date est égale à l_t .

- **Calcul du moment auquel la commande est chargée dans un train**

Le calcul du temps d'attente de chaque commande avant son transport requiert la connaissance d'une part, de sa date de disponibilité et d'autre part, de son moment de chargement (ce qui dépend de l'affectation décidée). Ainsi, le moment de chargement est obtenu comme suit :

$$R_{jts} \geq \begin{cases} l_t + \sum_{s'=1}^{s-1} (C_{ts'} + tt_{s',s'+1}) - M(1 - x_{jts}) & \forall j, t \text{ and } s = dep_j \text{ si } dep_j > 1 \\ l_t - M(1 - x_{jts}) & \forall j, t \text{ and } s = dep_j \text{ si } dep_j = 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

L'introduction de M dans l'ensemble des contraintes (5.13) est nécessaire à la linéarisation de la forme initiale de cet ensemble de contraintes. En effet, la forme de base de (5.9) est quadratique et s'écrit comme suit : $R_{jts} \geq x_{jts} * (l_t + \sum_{s'=1}^{s-1} (C_{ts'} + tt_{s',s'+1}))$.

- **Domaines de définition des variables**

$$x_{jts} \in \{0,1\}, C_{ts} \geq 0, R_{jts} \geq 0 \quad \forall j, t, s \quad (5.14)$$

A ce stade de l'étude, nous avons défini l'objectif le plus important comme celui relatif à la maximisation du taux de rotation des marchandises, ce qui revient à la minimisation de leur temps d'attente au niveau des stations de départ. La formalisation mathématique de cet objectif se présente comme suit :

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T (R_{jts} - x_{jts} * r_j) \quad \text{avec } s = dep_j \quad (5.15)$$

Dans (5.15), la somme des temps d'attente de toutes les commandes dans leur station de départ est considérée.

5. L'adaptation des colonies de fourmis pour le FRTSP

Bien que les problèmes d'optimisation combinatoire soient généralement faciles à décrire, leur résolution nécessite des techniques qui sont moins évidentes. Tel que nous l'avons déjà évoqué, le processus de résolution standard pour les grandes instances, fait appel soit à des règles spécifiques à chaque problème, en utilisant des heuristiques, soit par des métaheuristiques qui sont génériques. Nous proposons d'adapter les colonies de fourmis « ACO » en raison des bonnes performances obtenues pour la résolution du problème d'affectation généralisée, dont on a montré le lien avec le FRTSP. Un second argument est lié à la nature constructive des ACO, qui n'a pas besoin d'une solution de départ pour initier sa recherche.

Nous allons développer plusieurs variantes de colonies de fourmis, ce qui nous permettra d'identifier la variante qui serait en mesure de considérer au mieux, les spécificités du problème étudié.

5.1. La variante AS des ACO

Cette première étape, nous permet d'adapter l'algorithme de base, aux spécificités du FRTSP. En effet, l'ACO a été développé initialement, pour la résolution du problème du voyageur de commerce. Cette première application d'ACO porte le nom d'Ant System « AS ».

L'algorithme de base, développé pour le problème du voyageur de commerce, reproduit assez fidèlement les principes du phénomène biologique ayant servi à son développement.

Ce problème s'intéresse à la recherche du plus court chemin, reliant n villes. Chaque ville devant être visitée exactement une seule fois. Ce problème est formalisé par un graphe complet, tel que les sommets représentent les villes et les arrêtes modélisent les chemins les reliant. L'algorithme AS va procéder de manière à ce qu'à chaque itération, chaque fourmi va construire une solution complète (i.e. un chemin parcourant toutes les villes). Plusieurs mécanismes sont mis en place pour reproduire la recherche du meilleur chemin par chaque fourmi, en s'inspirant du phénomène biologique. Dans notre adaptation des AS au FRTSP, nous nous sommes également inspirés de cette modélisation, en apportant les ajustements nécessaires, pour prendre en compte les spécificités de notre problème.

Cette adaptation peut être décrite comme suit :

- Nous définissons un nombre maximum d'itérations « it_{max} » et un nombre de fourmis « m » constituant la colonie.
- Nous construisons un graphe pour chaque fourmi lors de son processus de résolution, telle que chaque sommet correspond à une décision potentielle (l'affectation d'une commande à un train donné).
- Chaque sommet est défini par un couple (*commande, train transportant cette commande*) ou (j, t) . Les sommets sont liés entre eux par des arrêtes. Chaque lien relie la dernière décision prise (j, t) avec la nouvelle décision potentielle (j', t') .
- Initialement, les m fourmis sont positionnées aléatoirement sur m sommets.

- Puis, à chaque étape de la construction de la solution, chaque fourmi se déplace d'un sommet (j, t) vers un autre sommet (j', t') correspondant à une commande non encore affectée à un train. La prise de décision se fait au regard d'un calcul de probabilités, pour évaluer l'ensemble des possibilités. Une schématisation de ce processus est donnée par la Figure V.3. La probabilité utilisée lors de chaque décision par chacune des fourmis se base sur deux éléments, pour équilibrer la balance diversification / intensification :

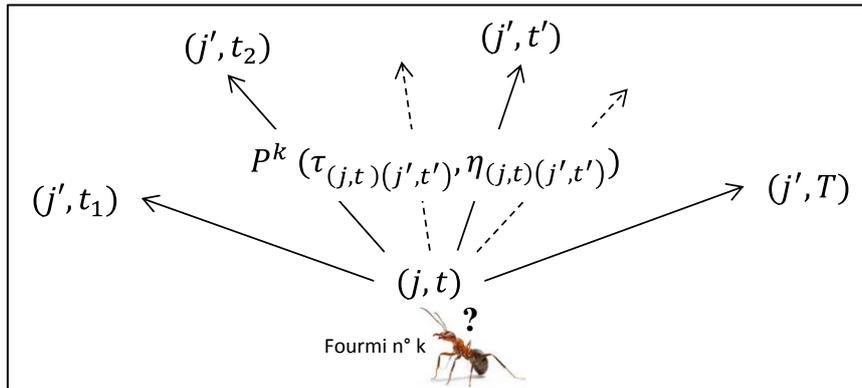


Figure V.3 : Une étape durant le processus de construction d'une solution par une fourmi

- L'intensification : elle s'effectue grâce à la phéromone, qui représente la mémoire collective des fourmis transmise entre les générations successives. Elle permet de capitaliser l'information concernant la qualité des décisions prises auparavant. Les traces de phéromones laissées lors de l'itération précédente sont notées : $\tau_{(j,t)(j',t')}(it)$.
- La diversification : une heuristique basée sur une information disponible localement lors de la décision à prendre et qu'on note $\eta_{(j,t)(j',t')}$. Comme l'objectif du FRTSP est de réduire le temps d'attente total des commandes, l'idée est de privilégier les faibles temps d'attente. Si le temps d'attente est noté $d_{(j,t)(j',t')}$ lorsque la commande j' est transportée par le train t' et que la probabilité utilisée lors de la prise de décision, doit traduire une préférence pour les faibles temps d'attente, l'heuristique peut être définie comme étant inversement proportionnelle à ce temps, comme suit :

$$\eta_{(j,t)(j',t')} = 1/d_{(j,t)(j',t')} \quad (5.16)$$

Concernant la phéromone, elle devrait informer sur la qualité de la décision correspondante, au vu des performances des solutions dans laquelle elle a participé. Ainsi, la probabilité pour chaque fourmi « k » de choisir le couple (j', t') , sachant que c'est le couple (j, t) qui a été choisi à l'étape précédente est donnée par la formule suivante :

$$p_{(j,t)(j',t')}(it) = \frac{[\tau_{(j,t)(j',t')}(it)]^\alpha [\eta_{(j,t)(j',t')}]^\beta}{\sum_{l \in T_d} [\tau_{(j,t)(j',t_l)}(it)]^\alpha [\eta_{(j,t)(j',t_l)}]^\beta} \quad (5.17)$$

T_d : l'ensemble des trains pouvant transporter j' . La définition de cet ensemble nous permet d'éliminer dès la construction des solutions, celles qui sont non faisables (telles

que celles qui concernent l'affectation de commandes à des trains, dont la date de passage est avant la date de disponibilité de ces mêmes commandes).

k : l'identifiant d'une fourmi.

α : paramètre qui détermine l'importance relative des traces de phéromones, c'est-à-dire l'intensification ou l'exploitation.

β : paramètre qui détermine l'importance relative de la règle heuristique, représentant la diversification ou l'exploration.

Les deux paramètres α et β permettent d'équilibrer la balance intensification / diversification, en définissant la part relative de chacun de ces deux mécanisme.

- A la fin de la construction d'une solution complète, par chaque fourmi à chaque itération, chacune dépose une quantité de phéromones $\Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it)$, qui est calculée comme suit :

$$\Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) = \begin{cases} Q/L^k(it) & \text{si l'arrête reliant } (j, t) \text{ et } (j', t') \text{ est utilisée par } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.18)$$

$L^k(it)$: c'est le temps d'attente total de toutes les commandes dans leur station de départ (i.e. la valeur de la fonction objectif, en considérant la solution construite par la fourmi k). Comme c'est un problème de minimisation, nous considérons l'inverse de cette valeur. Ainsi, plus le temps d'attente sera grand, moindre sera la quantité de phéromone déposée.

Q : un paramètre à fixer

- La mise à jour de la quantité de phéromones, présente sur chaque arrête du graphe des possibilités, s'effectue en considérant deux éléments :
 - Toutes les quantités de phéromones déposées lors de l'itération actuelle, par toutes les fourmis :

$$\Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) \quad (5.19)$$
 - L'évaporation de phéromone, présente sur toutes les arrêtes du graphe, traduit l'oubli. Pour cela, nous introduisons le facteur d'évaporation $(1 - \rho)$ (i.e. ρ représente le facteur de persistance). ρ est déterminé dans l'intervalle $[0,1]$.

Ceci donne lieu à la formule de calcul des quantités de phéromones sur chaque arrête, comme suit :

$$\tau_{(j,t)(j',t')}(it + 1) = \rho \cdot \tau_{(j,t)(j',t')}(it) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) \quad (5.20)$$

A noter que la trace de phéromones est initialisée de la même manière sur toutes les arrêtes du graphe, avec $\tau_0 \geq 0$.

L'algorithme de la variante de base AS, appliqué au problème FRTSP est présenté par l'Algorithme V.1.

Algorithme V.1 : L'adaptation de l'algorithme AS au FRTSP

-
1. Définition des paramètres ($\alpha, \beta, \rho, m, Q, it_{max}$)
 2. Initialisation de la trace de phéromones τ_0
 3. Meilleure solution $\leftarrow \emptyset$
 4. Tant que (itération $\leq it_{max}$)
 5. Pour chaque fourmi de la colonie
 6. Pour chaque commande (considérer n'importe quelle commande aléatoirement)
 7. Identifier les trains qui sont en mesure de transporter la commande actuelle (c'est une heuristique qui permet d'améliorer la performance de l'algorithme de base):
 - Le moment auquel le train t arrive à dep_j doit être $\geq r_j$
 - L'espace disponible à l'intérieur du train doit être $\geq Q_j$
 - Le temps nécessaire au chargement de Q_j + [le temps nécessaire au chargement des autres $Q_{j'}$ qui ont le même dep_j et qui doivent être transportés par le même train + Le temps nécessaire au déchargement des $Q_{j''}$ qui sont à l'intérieur de ce même train et ont $arr_{j''} = dep_j$] $\leq wait_{max}$
 8. Sélection du train qui va transporter la commande actuelle, en se basant sur les probabilités calculées avec la formule (5.17)
 9. Prochaine commande
 10. Prochaine fourmi de la colonie
 11. Mise à jour de la meilleure solution (si amélioration il y a)
 12. Mettre à jour la trace de phéromones en utilisant la formule (5.20), pour toutes les arrêtes du graphe
 13. Prochaine itération
-

5.2. Différentes variantes d'ACO

Il existe plusieurs variantes d'ACO, qu'on peut retrouver en détail dans (Dorigo & Stützle, 2004). Dans nos travaux, nous avons retenu deux variantes, ayant donné lieu à une troisième variante « hybride », assez performante pour la résolution du problème d'affectation généralisée (Ramalhinho Lourenço & Serra, 2000).

5.2.1. Variante Max-Min Ant System : « MMAS »

Nous proposons une première évolution de la variante de base, à travers la variante MMAS, qui a été introduite par (Stützle & Hoos, 2000). Cette variante introduit plusieurs modifications, dans le but d'améliorer le processus d'exploration de l'ensemble des solutions et en faisant un meilleur usage de l'expérience acquise, lors des itérations antérieures. Ceci, à travers la mise en œuvre de mécanismes de sortie des optimums locaux, ainsi qu'en proposant un meilleur équilibrage de la balance diversification / intensification.

Les modifications principales qu'apporte la variante MMAS à la variante AS, peuvent être résumées à travers les points suivants :

- Seule une fourmi est autorisée à déposer une quantité de phéromones sur le parcours de la solution qu'elle a construit. Bien que deux possibilités sont suggérées par la littérature, à savoir :
 - La fourmi qui a produit la meilleure solution en cours de l'itération actuelle.
 - La fourmi qui a produit la meilleure solution sur toutes les itérations antérieures.

Dans notre cas, nous proposons la considération de la première possibilité. Notre choix est justifié par la convergence trop rapide, à laquelle conduit la seconde possibilité (avec le risque de se retrouver bloqué dans un optimum local).

- Toutefois, même avec la première possibilité, il persiste un risque d'exclure de manière assez prématurée du champ d'exploration, des solutions potentiellement plus performantes (en raison du mécanisme d'évaporation des phéromones). Ainsi, la seconde modification introduite, est la limitation de la variation des quantités de phéromones, sur l'ensemble des arrêtes du graphe, à l'intérieur d'un intervalle $[\tau_{min}, \tau_{max}]$.
- Une dernière modification notable concerne la possibilité de réinitialiser la trace de phéromones, sur l'ensemble des arrêtes du graphe. En effet, dans le cas où aucune amélioration de la solution n'a été proposée, après un certain nombre d'itérations (à définir comme paramètre), la quantité de phéromones est remise à τ_0 .

Ces modifications sont accompagnées par de nouvelles formules, pour calculer les nouveaux paramètres et réajuster d'autres, comme suit :

- Le calcul des bornes de l'intervalle des quantités de phéromones, s'effectue suivant les formules suivantes (il s'agit d'une adaptation des formules proposées dans (Stützle & Hoos, 2000), aux spécificités du problème FRTSP) :

$$\tau_{max} = \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \left(\frac{1}{L^{best}(it)} \right) \quad (5.21)$$

$$\tau_{min} = \tau_{max} \left(\frac{(1 - \sqrt[T]{p_{best}})}{(T/2 - 1) \sqrt[T]{P_{best}}} \right) \quad (5.22)$$

$L^{best}(it)$: la meilleure valeur de la fonction objectif à l'itération it , en considérant la solution construite par la meilleure fourmi « *best* ».

P_{best} : il s'agit de la probabilité qu'une fourmi ait fait le meilleur choix d'affectation des commandes, pour chaque train. Dans (Stützle & Hoos, 2000), les auteurs proposent de la fixer à 0,05.

Le calcul de ces bornes s'effectue à chaque fois qu'une meilleure solution est trouvée.

- La mise à jour de la trace de phéromones, à la fin de chaque itération (qui était donnée par (5.20)), devient :

$$\tau_{(j,t)(j',t')}(it + 1) = \begin{cases} \rho \cdot \tau_{(j,t)(j',t')}(it) + \Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) & \text{si } k = best \\ \rho \cdot \tau_{(j,t)(j',t')}(it) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.23)$$

$\Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^{\text{best}}(it)$: représente la quantité de phéromones calculée, pour la fourmi ayant construit la meilleure solution à l'itération it . A savoir, $\Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) = 0, \forall k \neq \text{best}$ (i.e. pour toutes les arrêtes qui ne correspondent pas au chemin parcouru par la fourmi « *best* », il n'y a que le processus d'évaporation qui est considéré).

Si la quantité de phéromones mise à jour sur une arrête est supérieure à τ_{max} , elle est initialisée à τ_{max} . D'autre part, si elle est inférieure à τ_{min} , elle est initialisée à τ_{min} .

Les modifications au niveau de l'algorithme de la variante AS, pour la considération des spécificités de la variante MMAS, sont présentées dans l'Algorithme V.2.

Appliquée au problème du voyageur de commerce et au problème d'affectation quadratique, dans (Stützle & Hoos, 2000), il est montré que la variante MMAS est en mesure d'obtenir de très bonnes performances, à travers l'exploitation de la meilleure solution trouvée, ainsi qu'en évitant la stagnation prématurée dans le processus de recherche. De plus, la convergence de cette variante a été prouvée théoriquement dans (Stützle & Dorigo, 2002).

Algorithme V.2 : L'adaptation de l'algorithme MMAS pour le FRTSP à partir de AS

De 1 jusqu'à 10 les étapes de l'algorithme AS restent inchangées	
11.	Si meilleure solution > meilleure solution à l'itération courante (ou = \emptyset)
12.	Calcul de τ_{max} avec la formule (5.21)
13.	Calcul de τ_{min} avec la formule (5.22)
14.	Mettre à jour la meilleure solution (avec celle de l'itération courante)
15.	Fin Si
16.	Mettre à jour la phéromone en utilisant la formule (5.23) pour toutes les arrêtes
17.	Pour chaque arrête $((j, t), (j', t'))$
18.	Si $\tau_{(j,t)(j',t')} < \tau_{\text{min}}$
19.	$\tau_{(j,t)(j',t')} = \tau_{\text{min}}$
20.	Sinon Si $\tau_{(j,t)(j',t')} > \tau_{\text{max}}$
21.	$\tau_{(j,t)(j',t')} = \tau_{\text{max}}$
22.	Fin Si
23.	Prochaine arrête
24.	Si meilleure solution non améliorée depuis un certain nombre d'itérations
25.	Réinitialisation de la quantité de phéromones à τ_0 sur l'ensemble des arrêtes
26.	Fin Si
27.	Prochaine itération

5.2.2. Variante Ant Colony System : « ACS »

Cette seconde alternative d'évolution de la variante de base AS que nous proposons, a été introduite par (Dorigo & Gambardella, 1997). Elle est très appropriée pour les problèmes de grandes tailles. Cette variante présente la particularité de capitaliser l'expérience des fourmis de la colonie, au cours d'une même itération. De plus, des mécanismes sont mis en place, pour une meilleure exploration de l'espace de recherche.

Les modifications principales qu'apporte la variante ACS à la variante AS, peuvent être résumées à travers les points suivants :

- Lors de la construction d'une solution, les fourmis utilisent un mécanisme de sélection des possibilités plus agressif, que dans le cas de la variante AS. Il s'agit d'une règle proportionnelle pseudo-aléatoire qui, selon la valeur prise par une variable aléatoire, utilise : 1- le mécanisme de la variante AS (à travers la décision probabiliste), ou 2- sélectionne directement la prochaine possibilité, qui a la probabilité la plus élevée d'être choisie (i.e. la possibilité la plus désirable).
- Un processus de mise à jour locale de la trace de phéromones est lancé, à chaque étape de la construction de la solution par chaque fourmi.
- A la fin de chaque itération, le processus de mise à jour globale de la trace de phéromones, est similaire à celui décrit pour la variante MMAS (i.e. seule la fourmi ayant produit la meilleure solution, dépose une quantité de phéromones).

Ces modifications requièrent la définition de nouvelles formules, dans le but de calculer les nouveaux paramètres. Une description de ces formules pour le problème du voyageur de commerce, est donnée dans (Dorigo & Gambardella, 1997) et (Dorigo, et al., 2006). Nous proposons une adaptation aux spécificités du problème FRTSP, comme suit :

- Nous avons décrit pour AS, le processus qui pilote à chaque étape de la construction de la solution, le déplacement d'une fourmi dans le graphe, d'un sommet (j, t) à un autre (j', t') . Dans le cas de la variante ACS, ce processus est enrichi avec une règle aléatoire. Ainsi, la sélection du prochain sommet (j', t') s'effectue selon la formulation suivante :

$$(j', t') = \begin{cases} \arg \max_{(j_m, t_m)} \{ \tau_{(j,t)(j_m, t_m)} [\eta_{(j,t)(j_m, t_m)}]^\beta \} & \text{si } q \leq q_0 \\ \text{suivant la formule (5.17)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.24)$$

q : variable aléatoire choisi à l'intérieur de l'intervalle $[0,1]$.

q_0 : paramètre de la variante ACS, à fixer lors de l'initialisation. A noter : $0 \leq q_0 \leq 1$. La valeur prise par le paramètre q_0 permet de faire pencher la balance intensification / diversification, soit d'un côté soit de l'autre.

- La mise à jour locale de la trace de phéromones, s'effectue durant la construction de la solution par une fourmi. Une fois une arrête sélectionnée, la quantité de phéromones qui y est associée est mise à jour, suivant la formule suivante :

$$\tau_{(j,t)(j', t')}(it) = \varphi \cdot \tau_{(j,t)(j', t')}(it) + (1 - \varphi) \cdot \tau_0 \quad (5.25)$$

φ : le facteur de persistance local (i.e. $(1 - \varphi)$ représente le facteur d'évaporation). Il est compris dans l'intervalle $[0,1]$.

Cette mise à jour locale favorise la diversification, à travers la diminution de la désirabilité de l'arrête choisie, pour les prochaines fourmis de la colonie, durant la même itération.

- La mise à jour globale de la trace de phéromones, présente deux légères variations dans la formule, par rapport à la variante MMAS. Ces variations se présentent comme suit :

- La quantité de phéromones déposée par la fourmi, ayant produit la meilleure solution de la génération courante, est multipliée par le facteur d'évaporation $(1 - \rho)$. Ceci est dans le but de ralentir la convergence vers un ensemble de solutions, qui risque de bloquer la recherche dans un optimum local.
- Pour toutes les autres arrêtes, la quantité de phéromones reste inchangée (i.e. il n'y a pas de processus d'évaporation).

La formule se présente comme suit :

$$\tau_{(j,t)(j',t')}(it + 1) = \begin{cases} \rho \cdot \tau_{(j,t)(j',t')}(it) + (1 - \rho) \cdot \Delta\tau_{(j,t)(j',t')}^k(it) & \text{si } k = \text{best} \\ \tau_{(j,t)(j',t')}(it) & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.26)$$

Les modifications au niveau de l'algorithme de la variante AS, pour la considération des spécificités de la variante ACS, sont présentées dans l'Algorithme V.3.

A noter que la convergence de la variante ACS a été prouvée théoriquement dans (Stützle & Dorigo, 2002).

Algorithme V.3 : L'adaptation de l'algorithme ACS pour le FRTSP à partir de AS

De 1 jusqu'à 7 les étapes de l'algorithme AS restent inchangées	
8.	Sélection du train qui va transporter la commande actuelle en se basant sur la formule (5.24)
9.	Mise à jour locale de la trace de phéromones sur l'arrête $((j, t), (j', t'))$, en utilisant la formule (5.25)
10.	Prochaine commande
11.	Prochaine fourmi de la colonie
12.	Mise à jour de la meilleure solution (si amélioration il y a)
13.	Mettre à jour la trace de phéromones, en se basant sur le résultat des calculs effectués avec la formule (5.26), pour toutes les arrêtes
14.	Prochaine itération

5.2.3. Variante hybride : « MMACS »

D'abord, il faut noter que les deux variantes MMAS et ACS présentent plusieurs similitudes. En effet, nous relevons deux caractéristiques communes comme suit :

- Seule une fourmi est autorisée à déposer une nouvelle quantité de phéromones, à la fin de chaque itération. Ce qui implique pour les itérations suivantes, des solutions potentiellement voisines de la meilleure solution précédente.
- Pour éviter la stagnation du processus de recherche, les deux variantes mettent en œuvre un mécanisme régulant la variation de la quantité de phéromones, sur chaque arrête. En effet, pour la variante MMAS, les limites sont explicites à travers l'intervalle $[\tau_{min}, \tau_{max}]$. Alors que pour la variante ACS, elles sont implicites et découlent de la forme des deux formules (5.25) et (5.26). En ce qui concerne la limite inférieure, aussi bien la mise à jour locale, que globale, n'autorisent une quantité de phéromones inférieure à τ_0 . En ce qui concerne la limite supérieure, la formule de

mise à jour globale nous permet de déduire sa borne supérieure, qui est égale à $Q/L^k(it)$ avec k correspondant à la fourmi ayant trouvé la meilleure solution globale

($L^k(it)$ étant la valeur de la fonction objectif).

Cependant, une différence majeure existe entre ces deux variantes. Il s'agit de la règle décisionnelle qui dirige le processus de recherche. En particulier, pour la variante MMAS, c'est la décision probabiliste de la variante de base qui est utilisée. Cette dernière présente un équilibre entre exploration de nouvelles solutions (diversification) et exploitation de l'expérience acquise par les fourmis (intensification). En ce qui concerne la variante ACS, la règle proportionnelle pseudo-aléatoire utilisée, accentue le processus d'intensification, ce qui conduit principalement, à l'exploration de solutions voisines.

La variante hybride que nous proposons, est dérivée d'une variante proposée dans (Ramalhinho Lourenço & Serra, 2000), et développée pour le problème d'affectation généralisée. Nous y avons apporté quelques ajustements, pour prendre en compte les spécificités du problème FRTSP.

Cette variante propose de combiner une partie des caractéristiques de la variante MMAS et une autre partie de la variante ACS, comme suit :

- La règle décisionnelle adoptée est celle de la variante ACS (5.24).
- Il n'y a pas de mise à jour locale de la trace de phéromones.
- La mise à jour globale de la trace de phéromones, est similaire à celle de la variante MMAS (5.23).

Les modifications au niveau de l'algorithme de la variante AS, pour la considération des spécificités de la variante MMACS, sont présentées dans l'Algorithme V.4.

6. Une approche par horizon glissant pour optimiser la replanification du FRTSP

Le transport de marchandises en ville est soumis à de fortes perturbations (principalement liées aux commandes de dernière minute). Aussi, des retards de livraison, voire des annulations de commandes, font partie du quotidien de cette activité. D'autre part, le service de transport ferroviaire de voyageurs en milieu urbain durant les heures creuses est assez fiable. En effet, les légers retards qui peuvent se produire, sont rapidement absorbés. De plus, étant donné que les trains circulent en série, les uns après les autres sur la même ligne, l'impact des éventuels retards sera global et impactera toutes les commandes non transportées et cela, de manière équivalente. Dans ce cas, il n'y a pas de nécessité de procéder à une replanification. Il suffit de procéder à un décalage dans le temps des décisions prises initialement. Toutefois, les rares cas d'annulation de trains, auront pour impact, la nécessité de réaffecter les commandes qui devaient être transportées par le train annulé. Dans le cadre de ce travail de recherche, nous proposons une démarche de replanification, qui se focalisera sur l'ajustement du plan initial de transport des marchandises, en ne considérant que les

perturbations liées aux commandes. En ce qui concerne les perturbations liées aux trains, elles seront traitées dans d'autres travaux.

Algorithme V.4 : L'adaptation de l'algorithme MMACS pour le FRTSP à partir de AS

De 1 jusqu'à 7 les étapes de l'algorithme AS restent inchangées	
8.	Sélection du train qui va transporter la commande actuelle en se basant sur la formule (5.24)
9.	Prochaine commande
10.	Prochaine fourmi de la colonie
11.	Si meilleure solution > meilleure solution à l'itération courante (ou = \emptyset)
12.	Calcul de τ_{max} avec la formule (5.21)
13.	Calcul de τ_{min} avec la formule (5.22)
14.	Mettre à jour la meilleure solution (avec celle de l'itération courante)
15.	Fin Si
16.	Mettre à jour la phéromone en utilisant la formule (5.23) pour toutes les arrêtes
17.	Pour chaque arrête $((j, t), (j', t'))$
18.	Si $\tau_{(j,t)(j',t')} < \tau_{min}$
19.	$\tau_{(j,t)(j',t')} = \tau_{min}$
20.	Sinon Si $\tau_{(j,t)(j',t')} > \tau_{max}$
21.	$\tau_{(j,t)(j',t')} = \tau_{max}$
22.	Fin Si
23.	Prochaine arrête
24.	Si meilleure solution non améliorée depuis un certain nombre d'itérations
25.	Réinitialisation de la quantité de phéromones à τ_0 sur l'ensemble des arrêtes du graphe
26.	Fin Si
27.	Prochaine itération

La replanification est une démarche indispensable, pour adapter les décisions de la planification initiale, au fur et à mesure que les changements surviennent, lors de la phase d'exploitation. Dans ce travail, nous proposons une approche par horizon glissant pour réduire les effets négatifs des modifications, en intégrant ces écarts dans l'objectif du FRTSP.

Les perturbations relatives aux commandes peuvent être classées comme suit :

- Les commandes de « dernière minute » : il s'agit de commandes reçues durant la période d'exploitation. Leur prise en charge présente plusieurs avantages, tels que :
 - Utiliser l'espace résiduel pour le transport de marchandises dans les trains. Ce qui permet d'accroître le rendement de cette activité.
 - La capacité d'absorber des commandes de dernières minutes est un bon indicateur de réactivité du service de transport.

- Augmenter les bénéfices de l'activité de transport de marchandises (la prise en charge tardive peut être facturée plus cher, ce qui rend cette perspective encore plus intéressante pour l'opérateur).
- Les commandes annulées : il s'agit des commandes planifiées pour être transportées, mais qui devront être retirées des plans de transport. En fonction du modèle économique choisi, la nécessité d'utiliser au mieux l'espace libéré sera plus ou moins critique, pour la rentabilité de la solution.
- Les commandes réceptionnées en retard : il s'agit des commandes qui arrivent à leur station de départ, à une date ultérieure à leur date de disponibilité prévisionnelle.

Le modèle mathématique développé dans le cas prédictif, fournit un plan initial de transport des marchandises. Ce dernier reste optimal, si aucune perturbation n'est enregistrée. Ainsi, il détermine le train t qui va transporter chaque commande j à partir de sa station de départ $s = dep_j$, avec la valeur de la variable de décision x_{jts} . Aussi, il détermine le moment auquel cette commande sera transportée, avec la valeur de R_{jts} . En pratique, il est très rare, de ne pas avoir de changements entre le moment où le plan initial est calculé et le moment où les décisions doivent être exécutées. L'objectif du modèle de replanification, est de réadapter le plan de transport des commandes précédemment établi, au vu des changements opérés, comme suit :

- Toute commande déjà transportée, n'est plus considérée, lors de l'établissement du nouveau plan de transport. De plus, pour assurer un minimum de stabilité au système, nous avons indiqué que les décisions prises sur un certain horizon temporel H_G , ne peuvent être modifiées. Ainsi, nous définissons J^t comme étant l'ensemble des commandes, dont la planification du transport est déterminée à l'intérieur de H_G . Ce qui implique aussi, les commandes déjà transportées (i.e. $\forall j \in J^t, x_{jts}$ sera fixe).
- L'ensemble des commandes annulées, qu'on note J^c .
- L'ensemble des commandes retardées, qu'on note J^r .
- L'ensemble des nouvelles commandes, qu'on note J^n .
- Le plan de transport initial, avec la valeur des moments auxquelles les commandes du plan initial devaient être transportées (i.e. les R_{jts} sont des données d'entrée pour le modèle de replanification).
- Le plan de transport initial implique un engagement commercial vis-à-vis des clients. Pour rappel, une fois la commande transportée, elle doit être prise en charge par un transport aval. Ainsi, dans le cas d'une replanification, il faut veiller à ne pas décaler la date de transport de chaque commande impliquée par la replanification, au-delà d'une limite à définir, qu'on note Var_{max} . D'autre part, cette limite de variation permettra de garder indirectement, un contrôle sur l'utilisation de l'espace dans les stations (i.e. ne pas avoir des commandes, dont le temps d'attente s'allonge de manière incontrôlée).

6.1. Un PLVM pour la minimisation des changements lors de la replanification du FRTSP

Une formulation est proposée pour recalculer le plan de transport des marchandises, en minimisant non seulement les temps d'attente des marchandises, mais en prenant en compte également les changements décisionnels entre la replanification et la planification initiale. Dans le Tableau V.4, des notations supplémentaires sont utilisées pour le PLVM pour la replanification.

Tableau V.4 : Notations additionnelles pour le cas de replanification

Paramètres	
nr_j	Date de disponibilité de la commande j (il peut s'agir d'une nouvelle commande, ou une commande retardée. Dans le cas où il n'y a aucun changement $nr_j = r_j$)
Var_{max}	Variation maximale entre le premier plan de transport et le nouveau
Variable de décision	
NR_{jts}	Nouveau moment auquel le train t charge la commande j à la station s (après replanification)

L'objectif de la replanification est la minimisation des variations avec le plan initial. Ainsi, la fonction objectif se présente comme suit :

$$\text{Minimize } \sum_{j \in J'} \sum_{t \in T'} (NR_{jts} - R_{jts}) \text{ avec } s = dep_j \quad (5.27)$$

Dans (5.27), il s'agit de minimiser la somme des variations, entre le plan précédent et celui résultant de la replanification. L'indice j est utilisé pour l'ensemble J' , correspondant à l'ensemble des commandes non transportées et pouvant faire l'objet d'une replanification ($J' = (J \setminus J^t \setminus J^c) \cup J^n$). L'indice t est relatif aux trains de l'ensemble T' , ne considérant que ceux qui seront mis en circulation après l'horizon gelé ($\forall t, l_t \geq H_G$). A noter que pour les nouvelles commandes ($j \in J^n$), R_{jts} n'existe pas encore. Pour préserver la performance du système global, à travers la réduction du temps d'attente des commandes dans leur station de départ avant leur transport, nous considérons : $\sum_{t \in T'} R_{jts} = nr_j, \forall j \in J^n$ avec $s = dep_j$.

L'ensemble des contraintes du PLVM dans le cas prédictif (de (5.5) jusqu'à (5.14)), sont considérées pour le modèle de replanification. Les modifications à y apporter se présentent comme suit :

- j est considéré dans l'ensemble J' .
- t est considéré dans l'ensemble T' .
- r_j est remplacé par nr_j dans l'ensemble des contraintes (5.8).
- R_{jts} est remplacé par NR_{jts} dans l'ensemble des contraintes (5.9).

Dans le but de limiter les variations lors de la replanification, nous définissons les deux ensembles de contraintes supplémentaires comme suit :

$$\sum_{t \in T'} (NR_{jts} - R_{jts}) \leq Var_{max} \quad \forall j \in J'' \text{ avec } s = dep_j \quad (5.28)$$

$$\sum_{t \in T'} (R_{jts} - NR_{jts}) \leq Var_{max} \quad \forall j \in J'' \text{ avec } s = dep_j \quad (5.29)$$

avec $J'' = J \setminus J^t \setminus J^c \setminus J^r$

6.2. L'approche de replanification par horizon glissant

Dans l'adaptation de l'approche par horizon glissant au FRTSP, nous avons utilisé plusieurs paramètres qui sont définis comme suit :

- L'horizon de planification H_p : il s'agit de la période considérée pour la planification du transport de marchandises, à chaque itération. Il peut s'agir d'une partie d'une journée d'exploitation, voire de plusieurs.
- L'intervalle de planification r : cet intervalle doit résulter d'un compromis, afin de trouver un équilibre entre la réactivité voulue et la stabilité souhaitée. Plus précisément, la réactivité est obtenue avec un intervalle court afin de replanifier aussi fréquemment que possible, ce qui permet d'absorber un maximum de perturbations, mais qui génère de nombreux calculs intermédiaires et donc un plus grand risque d'instabilité. La stabilité est atteinte avec un intervalle de recalcul assez long avec le risque de dégrader la réactivité du système.
- L'horizon gelé H_G : ce mécanisme permet d'assurer un minimum de stabilité au système, en fixant un intervalle de temps durant lequel les décisions précédentes ne sont pas remises en cause. En effet, aussi bien les ressources matérielles, qu'humaines, impliquées dans l'activité de transport de marchandises, doivent avoir une certaine visibilité sur la charge de travail à venir.
- L'horizon libre H_L : hors horizon gelé, les décisions précédentes peuvent être remises en cause si nécessaire. Toutefois, ces dernières sont indispensables pour avoir une visibilité sur la charge de transport prédictive, durant tout l'horizon de planification. De plus, le transport de marchandises aval, devant être pris en charge par un moyen de transport tierce, il est indispensable d'établir une date de livraison prévisionnelle.

A ces différents paramètres, s'ajoute le nombre d'itérations à considérer, durant une période d'exploitation (qui peut être une journée, ou une semaine par exemple).

Lors de la première itération, c'est le modèle du cas prédictif qui est utilisé. La solution proposée est ce qu'on qualifie de plan de transport initial. Toutes les itérations suivantes, utilisent le modèle de replanification. A noter que le plan initial reste la référence pour les commandes du plan prédictif. Pour les nouvelles commandes, leur première planification devient la référence. Enfin, si aucune perturbation n'a été enregistrée durant le pas de planification actuelle, le recalcul est inutile.

Pour résumer le processus de replanification à horizon glissant, dans le cas de la solution de transport étudiée, nous proposons la Figure V.4.

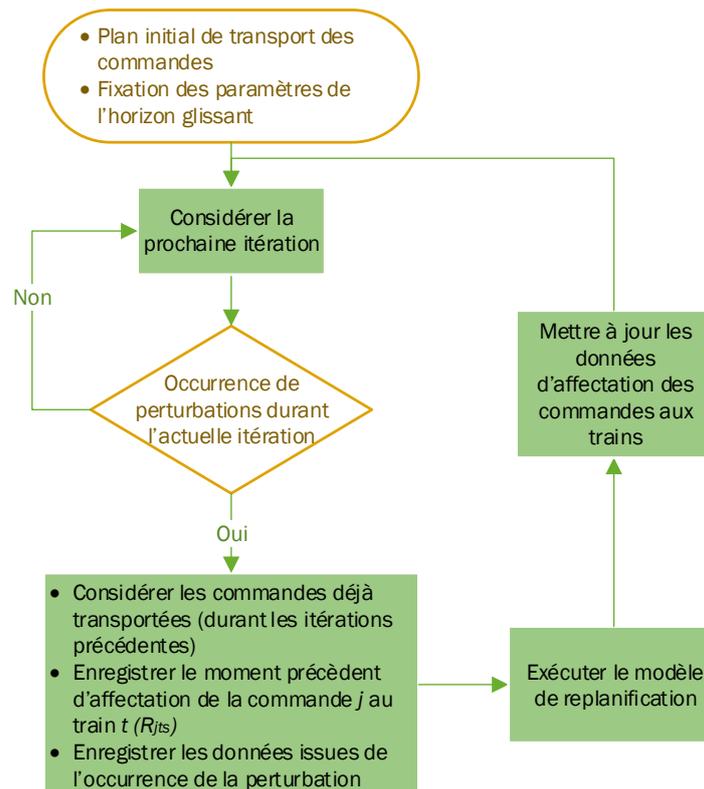


Figure V.4 : La replanification du FRTSP par horizon glissant

7. Couplage simulation / optimisation

Dans le but de reproduire le caractère dynamique de la solution de transport étudiée, nous proposons un couplage avec la simulation. Ce couplage donne lieu à une répartition des rôles comme suit :

- Le modèle de simulation à événements discrets permet la simulation du fonctionnement de la solution de transport étudiée.
- Les modèles d'optimisation mathématique, implémentée dans CPLEX, permettent d'optimiser l'élaboration du plan de transport des marchandises, de manière à réduire leur temps d'attente dans leur station de départ.
- Le modèle de simulation ARENA met en évidence les bénéfices de cette optimisation, sur les différentes composantes de la solution de transport étudiée. De plus, il permet d'observer dans le temps, l'évolution de l'utilisation des différentes ressources mobilisées, à travers la considération des résultats de l'optimisation.

7.1. Cas prédictif

Dans ce cas, c'est la génération des commandes, suivant le premier scénario modélisé sur ARENA, qui est considéré (présenté dans la section 3.1 du chapitre 4).

Un premier apport du modèle de simulation, concerne la validation du modèle d'optimisation. En effet, la simulation de la solution de transport, en considérant les résultats du modèle d'optimisation, a mis en évidence quelques incohérences telles que la nécessité de définir de nouvelles contraintes, notamment pour la continuité du voyage de toute marchandise, ou l'ajustement des bornes de certains intervalles.