Modélisation du matériau bois par la Méthode des Eléments Discrets

4.1 Les bases du modèle DEM

Le comportement cible du matériau, comportement homogène de type milieux continus, ayant été caractérisé dans le chapitre précédent, ce chapitre se concentre sur sa transposition au modèle Eléments Discrets. Un récapitulatif des grands principes de la méthode pour la représentation des milieux continus est présenté en première partie de chapitre. La seconde partie porte sur la modélisation de la partie élastique anisotrope du comportement. La capacité de la DEM à modéliser une forte anisotropie, comme celle du bois faisant l'objet de la présente thèse, est notamment abordée. La suite du chapitre consiste en la calibration du modèle DEM afin que le domaine discret présente des propriétés mécaniques égales aux propriétés cibles définies au cours du chapitre 3.

4.1.1 Principe général de la DEM appliquée à la modélisation de milieux continus

En DEM, un solide, ou une portion de milieu continu, est discrétisé en un nombre donné d'Eléments Discrets (ED) interagissant entre voisins au travers d'interactions bilatérales. Ces interactions bilatérales sont matérialisées par des « liens cohésifs » (encore appelées liaisons cohésives) et, lorsque ces derniers sont rompus, par des lois de contacts entre Eléments Discrets. L'ensemble des Eléments Discrets forme une structure appelée « domaine ». Les éléments sont les porteurs de la matière et de l'inertie du système, tandis que les liens et les contacts sont les vecteurs du comportement du matériau et des interfaces. La Figure 4.1 montre un échantillon de ciment représenté par un agrégat d'éléments discrets (sphériques) et la Figure 4.2 illustre plusieurs liaisons cohésives usuelles.



Figure 4.1 : Un échantillon de ciment réel et sa représentation (en situation de test) numérique par la DEM (Brown, 2013).



Figure 4.2 : Représentation de trois types de liens cohésifs liant deux ED (André, 2012).

4.1.2 Le code de calcul (GranOO)

De nombreux codes de calculs basés sur la DEM existent. Certains sont des solutions commerciales, comme EDEM, mais la plupart des codes sont soit internes à des laboratoires, soit développés en laboratoire de recherche mais diffusés en Open-Source. C'est le cas de trois codes majeurs : eSyS (Weatherley, 2009), Yade (Kozicki & Donzé, 2008) et GranOO (André et al., 2012). Tous trois répondent aux critères principaux attendus d'un code de calcul numérique à savoir : La fiabilité des calculs, des performances acceptables, l'ergonomie d'usage et la facilité d'intégration de nouvelles fonctionnalités ou de modifications. GranOO possède en sus l'avantage d'avoir été développé dans le but premier de modéliser des milieux continus. Les deux autres codes, même s'ils possèdent des caractéristiques le permettant, ont initialement été orientés vers la modélisation de milieux granulaires. Dans le but de limiter la quantité de développements à réaliser au cours de cette étude, le choix se porte donc naturellement vers la librairie GranOO. Ce dernier est de plus un code développé, à l'origine, au sein de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

4.1.3 Les Eléments Discrets (ou particules)

Le type d'élément est le premier choix présenté, indépendamment de la chronologie réelle du processus de développement du modèle. Dans la vaste majorité des cas, les particules sont de formes sphériques, et c'est également le choix qui a été fait lors de cette étude. Cette forme permet de minimiser les temps de calcul. En effet, la plupart des lois de contact en DEM, et de leur détection, sont basées sur le niveau d'interpénétration des éléments en contacts entre eux (Figure 4.3). Dans le cas d'éléments sphériques, cette interpénétration évolue de façon affine avec la distance entre les deux éléments, ce qui rend son calcul peu coûteux. Dans le cas d'éléments polyédriques, la détection et l'évaluation de cette interpénétration exige un algorithme bien plus complexe de détection du contact et de calcul de l'orientation du plan tangent au contact (nécessaire si présence de frottements).



Figure 4.3 : Interpénétration entre deux éléments discrets.

L'étude, pour simuler la formation des plaquettes, fait intervenir beaucoup de fragmentations du copeau. Ainsi, les amas d'éléments fracturés doivent interagir avec le reste du modèle au travers de contacts. Il en est de même pour l'interaction entre le bois et l'outil venant l'usiner, donc, même dans le cas de la modélisation d'un milieu continu, cette notion de gestion des contacts demeure présente. Il en résulte donc que la géométrie des éléments n'est pas complètement anodine, car la résistance au cisaillement, entre autres, de deux surfaces en contact est influencée par cette forme (en plus des lois de contacts utilisées). Par analogie, deux surfaces des contacts aux géométries différentes dans des matériaux similaires ne possèdent pas la même résistance au cisaillement.

Un Elément Discret sphérique est défini par deux grandeurs : Son rayon R_e et sa masse volumique ρ_e . Il possède 6 degrés de libertés dans l'espace (trois en translation et trois en rotation) comme tout solide dans une représentation tridimensionnelle (ou seulement 3 au total, dont deux translations et une rotation, dans une représentation bidimensionnelle).

4.1.4 Les Liens

Les liens cohésifs peuvent être de n'importe quelle nature, dans le cas présent, il sera toujours question de liens mécaniques (transmission d'efforts et de moments). Pour représenter une liaison élastique linéaire entre deux ED, plusieurs solutions usuelles existent (entrevues en Figure 4.2).

La solution la plus simple est le ressort unidirectionnel. Le comportement est ainsi linéaire en fonction de l'évolution de la distance entre les deux éléments liés, et l'effort résultant colinéaire à cette direction.

Dans le but d'obtenir un comportement multidirectionnel entre deux éléments, il est nécessaire de prendre en compte l'orientation des ED. Il est alors possible, lors du mouvement relatif entre deux ED, d'introduire une notion de cisaillement (absence de rotation des éléments mais déplacement relatif dans une direction transverse à l'axe de la liaison), de flexion (rotation relative dans une direction transverse à l'axe de la liaison) et de torsion (rotation relative dans l'axe de la liaison). Une raideur spécifique à chacun de ces mouvements relatifs peut alors être introduite. Chaque ED possède alors 6 DDL soit 6 paramètres définissant le mouvement relatif entre 2 éléments discrets. La raideur associée peut alors se définir par une matrice symétrique 6×6 ce qui fait 21 paramètres indépendants.

Une solution pour réduire ce nombre de paramètres est de modéliser les liens à l'aide de poutres cylindriques (d'Euler-Bernoulli). (Schlangen & Garboczi, 1997) ont montré que pour modéliser un milieu continu, ce type de lien (parmi les trois sus-citées) était celui permettant de s'approcher au mieux du comportement du matériau. Ces poutres possèdent seulement trois paramètres : leur rayon R_{μ} , leur module d'Young E^{μ} et leur coefficient de Poisson ν^{μ} (au lieu du coefficient de Poisson, il est possible de définir directement son module de cisaillement en torsion G^{μ}). Un quatrième, non paramétrable s'ajoute forcément : sa longueur initiale L_0 , qui est égale à la distance initiale entre les deux centres des éléments liés.

Considérant deux éléments 1 et 2, dans le repère $(O_1, \vec{X}\mu, \vec{Y}\mu, \vec{Z}\mu)$ où O_1 est le centre de l'élément 1, \vec{X} est la direction du vecteur allant de l'élément 1 à 2 (ce vecteur est appelé « vecteur branche »), et \vec{Y} et \vec{Z} sont deux vecteurs orthogonaux entre eux et à \vec{X} de sorte à former un repère direct ; si ces deux éléments sont initialement distant de L_0 , la poutre les reliant de modules d'Young E^{μ} , de section $S = \pi r^2$ et d'inertie $I = \frac{\pi (2R_{\mu})^4}{64}$ et $I_0 = \frac{\pi (2R_{\mu})^4}{32}$, alors les torseurs des efforts (et moments) transmissibles par la poutre $[T_{b\to 1}]_{O1}$ et $[T_{b\to 2}]_{O2}$ par la poutre s'expriment :

$$[T_{b\to1}]_{O1} = \begin{bmatrix} E^{\mu}S\frac{\Delta L}{L_0} & \frac{GI_0}{L_0}(\theta_{2x} - \theta_{1x}) \\ -\frac{6E^{\mu}I}{L_0^2}(\theta_{2z} + \theta_{1z}) & -\frac{2E^{\mu}I}{L_0}(\theta_{2y} + 2\theta_{1y}) \\ \frac{6E^{\mu}I}{L_0^2}(\theta_{2y} + \theta_{1y}) & -\frac{2E^{\mu}I}{L_0}(\theta_{2z} + 2\theta_{1z}) \end{bmatrix}$$
et (4.1)

$$[T_{b\to2}]_{02} = \begin{bmatrix} -E^{\mu}S\frac{\Delta L}{L_0} & -\frac{GI_0}{L_0}(\theta_{2x} - \theta_{1x}) \\ \frac{6E^{\mu}I}{L_0^2}(\theta_{2z} + \theta_{1z}) & -\frac{2E^{\mu}I}{L_0}(\theta_{2y} + 2\theta_{1y}) \\ -\frac{6E^{\mu}I}{L_0^2}(\theta_{2y} + \theta_{1y}) & -\frac{2E^{\mu}I}{L_0}(\theta_{2z} + 2\theta_{1z}) \end{bmatrix}.$$
(4.2)

Avec $\Delta L = L_{\mu} - L_0$ la différence de la distance entre les deux éléments par rapport à la longueur initiale, θ_{1x} , θ_{2x} , θ_{1y} , θ_{2x} , θ_{1z} et θ_{2z} les rotations de la section droite de la poutre aux point O_1 et O_2 . Le détail des calculs est présenté par (André, 2012).

Dans GranOO, le rayon des poutres n'est pas défini directement, mais par leur rayon adimensionné \tilde{r} , qui est égal au ratio entre le rayon des poutres et des éléments associés.

$$\tilde{r} = \frac{R_{\mu}}{R_e} \tag{4.3}$$

Cette démarche permet, lorsque l'on augmente ou diminue la taille des ED, de présenter une mise à l'échelle automatique des propriétés des liens en gardant un comportement global (raideur du domaine) identique.

4.1.5 Algorithme de résolution

A chaque incrément de temps, les forces dans le domaine d'élément discret sont calculées en fonction de leurs positions, grâce aux liens et contacts. Les accélérations des ED au cours de cet incrément de temps en sont déduites à l'aide du Principe Fondamental de la Dynamique. A partir de là, un schéma d'intégration numérique (de type dynamique explicite) est utilisé pour calculer les vitesses et les positions des éléments à l'incrément suivant (ou, selon le schéma, à un incrément intermédiaire). Plusieurs schémas sont possibles, citons par exemple l'algorithme de Verlet (Verlet, 1967), le « Leap Frog », le Verlet-vitesse (Swope et al., 1982) ou le Gear predictor-corrector (Allen & Tildesley, 1987) qui sont les plus utilisés. L'influence de l'algorithme de résolution sur la modélisation d'un système masse-ressort à un degré de liberté a été investiguée (Rougier et al., 2004), sans trouver de différence significatives entre la précision ou la robustesse de chaque algorithme. Sans élément discriminant dans le choix de l'algorithme, le schéma par défaut utilisé dans GranOO est le Verlet-vitesse.

4.2 Choix du type de domaine : éléments ordonnés ou compactés ?

Une particularité importante de l'étude réside en la forte anisotropie du matériau à modéliser. Les degrés d'anisotropie cibles seront définis par les ratios E_L^C/E_T^C , et E_L^C/E_R^C , (et E_R/E_T calculables à partir des précédents). A titre d'exemple, le degré d'anisotropie cible E_L^C/E_T^C , calculé à partir des modules d'Young cibles déterminés au chapitre 3, est égal à 12,00.

Quelques auteurs ont proposé des solutions pour modéliser des matériaux orthotropes par la DEM, notamment dans le but de modéliser des matériaux composites. D. Illiescu (Iliescu et al., 2010) a utilisé un modèle ordonné où tous les éléments sont alignés sur une grille régulière pour représenter un matériau multicouche, et les rangées d'éléments alignés représentent les fibres du matériau. De la même façon R. Pfeiffer a utilisé un domaine ordonné pour mettre en évidence de façon qualitative la faisabilité de modélisation de matériau anisotrope par la DEM (Pfeiffer, 2015). A. Roux (Roux, 2016) a également utilisé des éléments ordonnés pour modéliser des complexes musculo-tendineux, où l'ordonnancement des éléments est réalisé sur une grille reproduisant l'orientation des fibres musculaires.

K. Duan (Duan et al., 2016), pour représenter l'anisotropie présente dans certaines roches, a employé une méthode différente. Au lieu d'utiliser des modèles ordonnés, il a employé des domaines compacts traditionnels, c'est-à-dire où tous les éléments ont des rayons différents de manière à maximiser le remplissage du domaine en laissant les ED s'imbriquer les uns entre les autres. Des liens entre ED en contacts sont alors générés puis post-traités de manière à supprimer certains d'entre eux en fonction de leur orientation. Une direction est définie, et tous les liens formant un angle plus petit qu'un angle limite donné avec cette direction sont détruits. De la sorte la direction est très fragilisée, notamment en traction puisqu'aucun lien dans cette direction n'est présent pour reprendre les efforts.

Une autre approche propose, pour la modélisation des fibres de matériaux composites à l'échelle microscopique d'utiliser une série d'éléments alignés noyés dans une matrice compacte (Le et al., 2016) ou délimitant des zones de types fibres et d'autres de type matrice (Maheo et al., 2015). Cependant cette approche exige un nombre très important d'ED qui conduit à des temps de calculs exigeant des moyens adaptés (calculateurs massivement parallèles et logiciel sachant exploiter ce parallélisme). Nous nous sommes imposés pour la présente étude de nous limiter à des moyens de calculs conventionnels (ordinateur portable disposant de 8 Go de mémoire vive (RAM) et un processeur quadricœur cadencé à 2,60 GHz) ce qui rend cette dernière approche non applicable à une échelle mésoscopique.

On remarque donc que deux approches différentes ont été utilisées dans la littérature (domaines ordonnés ou domaines compacts) mais peu d'éléments de comparaison existent entre ces deux approches et les auteurs ne justifient pas pourquoi avoir choisi une approche plutôt que l'autre. Pour cette raison, une part de la présente étude a été dédiée à la comparaison entre ces deux méthodes pour modéliser un matériau anisotrope sollicité dans sa partie élastique.

4.2.1 Démarche

Deux types de domaines ont été créés.

Le premier type de domaine, dit ordonné (voir Figure 4.4a), est composé d'éléments régulièrement positionnés suivant une grille cartésienne, au même titre qu'un réseau cristallin.

Le second type est dit compacté ou compact (voir Figure 4.4b). Il est nécessaire de souligner que les méthodes de compactions de domaines en DEM sont multiples et reste un sujet d'étude très actif au sein de la communauté car celles-ci ont une influence sur la réponse mécanique du domaine produit (Kumar et al., 2016). Cependant ce sujet étant à la fois pointu et périphérique à cette étude, il n'a pas été investigué. Les domaines compacts sont générés avec GranOO grâce à un algorithme dédié, dénommé « cooker », assurant une bonne fraction volumique et permettant de vérifier la bonne répartition des liens dans l'espace. La méthodologie pour transformer le domaine généré en un milieu anisotrope est inspirée des travaux de K. Duan (Duan et al., 2016), mais adaptée de sorte à ne pas supprimer de liens, en affectant simplement des propriétés élastiques différente aux liens en fonction de leur orientation. Plus de détails sont données section 4.2.2.2 ci-après.



Figure 4.4 : (a) Domaine ordonné et (b) domaine compact.

Chaque type de domaine est sollicité en compression, d'abord selon ses trois directions principales orthotropie \vec{L} , \vec{R} et \vec{T} , puis hors-axe. Le module d'Young de chaque domaine est mesuré et analysé.

Dans cette section, il n'est pas question de calibrer le modèle mais d'établir la faisabilité de modélisation d'un matériau anisotrope donné.

4.2.2 Tests mis en place

4.2.2.1 Modèles

Les domaines d'études sont des cubes de $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$, composés d'au minimum 21 éléments de long dans une dimension, ce qui implique un rayon d'élément de 0,2381 mm.

Pour des domaines compacts, il a été constaté que ce nombre de 21 ED (théoriquement 21,5) est suffisant pour stabiliser les caractéristiques géométriques d'un domaine cubique (André, 2012), et donc sa réponse à une sollicitation uniforme. Cela permet de limiter les temps de calculs. Cependant, même à propriétés géométriques stabilisés, D. André observe

lors d'essais en flexion de son domaine une variation de sa contrainte à rupture de l'ordre de 10%. Nous adoptons donc ce nombre d'ED mais nous réaliserons néanmoins, pour chaque cas test, les simulations pour 10 distributions différentes de manière à apprécier l'impact de la distribution des éléments pour les domaines compacts. Le nombre total d'éléments pour les domaines compacts de ceux-ci.

Les domaines alignés ne présentent pas cette nécessité puisqu'ils sont générés suivant une grille prédéfinie, qui ne possède pas de caractère aléatoire. Par contre, afin de pouvoir tester le domaine en dehors de ses directions principales, 9 domaines alignés différents doivent être générés, chacun présentant une orientation de grille de plus en plus inclinée dans le plan (LR) de sorte à modifier les directions principales du domaine (Voir Figure 4.5). L'angle d'inclinaison est noté ξ . Dans le cas du domaine ordonnée dont les axes principaux sont confondus avec les arêtes du cube, le nombre d'ED utilisé est parfaitement de 21³ (9 261). Lorsque les directions principales sont inclinées par contre, certaines rangées d'ED sont supprimées afin de respecter les dimensions du cube. De ce fait, le nombre minimum d'ED utilisé est 8 358, ceci dans le cas d'un matériau incliné de 80 °.



Figure 4.5 : Différents domaines ordonnés dont les directions principales sont inclinées d'un angle ξ égal à 10° (a), 30° (b) ou 50° (c) par rapport à la direction de sollicitation.

Les caractéristiques générales des domaines utilisés sont indiquées dans le Tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Propriété du domaine ordonné non incliné (à gauche) et des domaines compacts (à droite).

Nb. d'éléments	9 261		Nb. d'éléments (moyenne)	11 670,7
Nb. de liens	26 420		Nb. d'éléments (écart-type)	63,75
Fraction volumique	0,523 (π/6)		Nb. de liens (moyenne)	31 794
		Ī	Nb.de liens (écart type)	439,01
			Fraction volumique (moyenne)	0,654
		Γ	Fraction volumique (écart-type)	0,0044

La masse volumique des éléments discrets n'a pas d'influence durant le type d'essais à mener, car on recherche la réponse quasi-statique du modèle. Les sollicitations se font à faible vitesse et aucun effet d'inertie n'est attendu. La valeur par défaut de masse volumique d'élément a

été utilisée. Les trois paramètres descriptifs des éléments discrets utilisés sont présentés au sein du Tableau 4.2.

Eléments (type)	sphères
Rayon $(10^{-3} \cdot m)$	0,2381
Masse volumique $(kg \cdot m^{-3})$	1 000

Tableau 4.2 : Propriétés des éléments

4.2.2.2 Propriétés des poutres

Les poutres possèdent toutes un rayon adimensionné égal à 1. En d'autres termes, leur rayon est égal à celui des éléments discrets. Dans le cas des domaines compacts, lorsque deux éléments liés n'ont pas exactement le même rayon, le rayon de la poutre est égal à la moyenne des rayons des deux éléments reliés.

Le coefficient de Poisson des poutres est fixé arbitrairement à 0,3 (par défaut). Comme les poutres ne seront pas (dans le cas des domaines alignés) ou très peu (dans les cas des domaines compacts) sollicitées en torsion, ce paramètre n'est pas influent sur les résultats des simulations.

L'implémentation DEM de GranOO offre à l'utilisateur la possibilité de définir un amortissement visqueux s'appliquant aux vitesses relatives entre ED liés de manière à pouvoir limiter la durée des oscillations au sein du modèle DEM. Nous avons choisi arbitrairement un taux d'amortissement de 0,2 (Une étude plus détaillée de ce paramètre est faite dans le cas des simulations de coupe en section 5.3.4). Cette valeur est élevée mais permet une stabilisation très rapide des efforts dans le domaine. Il a été vérifié qu'il ne nuisait pas à la mesure des efforts une fois stabilisés.

L'ensemble des paramètres des liens utilisés dans le cas des domaines ordonnés est présenté dans le Tableau 4.3.

Liens (type)	Poutres d'Euler-Bernoulli
E_L^{μ} (MPa)	100
E_R^{μ} (MPa)	5
E_T^{μ} (MPa)	1
$R_e(m)$	$0,2381 \times 10^{-3}$
Taux d'amortissement	0,2
Coefficient de Poisson	0,3
Longueur initiale (<i>m</i>)	$0,4762 \times 10^{-3}$

Tableau 4.3 : Propriété des liens

Dans les domaines, les poutres ne sont pas parfaitement alignées avec les directions \vec{L} , \vec{R} et \vec{T} . Dans ce cas, les modules E_L^{μ} , E_R^{μ} , E_T^{μ} ne sont donc pas les modules d'Young des poutres mais les valeurs utilisées pour les calculer en fonction de leur orientation par rapport au repère \vec{L} , \vec{R} , \vec{T} . Quatre lois de calculs du module d'Young E_{12} d'une poutre reliant deux ED

quelconques 1 et 2 ont été retenues. Considérons que le vecteur branche forme un angle θ avec l'axe \vec{L} , et la projection \vec{p} du vecteur branche dans le plan (O_1, \vec{R}, \vec{T}) forme un angle φ avec l'axe \vec{T} (Voir Figure 4.6). En d'autres termes, les angles θ et φ sont respectivement la colatitude et la colongitude du point O_2 dans le repère $(O_1, \vec{R}, \vec{T}, \vec{L})$.



Figure 4.6 : Orientation d'un lien dans un repère d'orthotropie LRT

Les lois de calculs de E_{12} que nous proposons sont les suivantes :

- Loi Tout Ou Rien (TOR) :

$$E_{12} = E_L^{\mu} \text{ ou } E_R^{\mu} \text{ ou } E_T^{\mu};$$
 (4.4)

selon si \vec{L} , \vec{R} ou \vec{T} est la direction la plus proche du vecteur branche $\overrightarrow{O_1O_2}$.

- Loi type « Equation d'Hankinson » (Hankinson, 1921) décrite en section 1.4.1 :

$$E_{12} = \frac{E_L^{\mu} \cdot E_{\vec{p}}}{E_L^{\mu} \cdot \sin^2 \theta + E_{\vec{p}} \cdot \cos^2 \theta'}$$
(4.5)

Avec

$$E_p = \frac{E_R^{\mu} \cdot E_T^{\mu}}{E_T^{\mu} \cdot \sin^2 \varphi + E_T^{\mu} \cdot \cos^2 \varphi}$$
(4.6)

étant le module d'Young dans la direction de projection \vec{p} .

- Loi linéaire :

$$E_{12} = E_L^{\mu} + \left(E_R^{\mu} - E_L^{\mu}\right) \cdot \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}} + \left(E_T^{\mu} - E_R^{\mu}\right) \cdot \frac{\theta \cdot \varphi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$
 (4.7)

- Loi sphérique :

$$E_{12} = \cos(\varphi) \cdot E_L^{\mu} + \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot E_R^{\mu} + \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot E_T^{\mu}.$$
(4.8)

L'équation d'Hankinson est testée car elle représente communément le comportement du matériau bois, avec une forte baisse du module d'Young dès une variation faible de θ . Les trois autres lois ont été testées car elles sont simples d'implémentation et peu coûteuses en temps de calcul. L'allure des modules d'Young E_{12} calculés pour un lien incliné d'un angle θ par rapport au plan (O_1, \vec{R}, \vec{T}) variant de 0 à 90° est présentée Figure 4.7.



Figure 4.7 : Allure du module d'Young E_{12} en fonction de la loi de calcul et de l'angle θ du lien.

4.2.2.3 Sollicitations

Dans les directions principales

Les domaines sont comprimés dans les directions \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z} par deux plateaux de compression. L'un est fixe tandis que l'autre est mobile. Le contact entre les éléments et les plateaux se fait par une loi répulsive élastique. Le contact se fait sans frottement. Le plateau mobile se déplace jusqu'à ce que le domaine subisse une déformation de compression de 5%.

Hors-axe

La méthode de sollicitation des domaines est la même, mais elle n'est plus réalisée que selon la direction \vec{X} .

4.2.2.4 Mesures

Les modules d'Young dans une direction X donnée sont calculés de la façon suivante :

$$E_X^D = \frac{F_X}{S_X \cdot \varepsilon_X}.$$
(4.9)

 S_X est la section initiale des domaines normale à la direction de sollicitation. Les modèles ordonnés ont une section constante égale à 100 mm². Les domaines compacts générés automatiquement présentent une légère variation de section, négligeable, qui sera elle aussi approximée à 100 mm².

 F_X est calculé comme la somme des efforts appliqués par les éléments sur le plateau fixe de compression.

$$F_X = \sum F_{elements \to plateau} \tag{4.10}$$

Le calcul de ε_X est moins immédiat : il n'est pas pertinent d'utiliser les déplacements du plateau mobile ni des éléments de bords du domaine pour calculer la déformation globale du domaine car le contact avec le plateau est progressif dû à l'irrégularité de la frontière du domaine DEM. Nous proposons donc de déterminer la déformation moyenne du domaine grâce aux déplacements des ED restants, en ayant éliminé les effets de bords.

Si la déformation du milieu était homogène, le champ de déplacement des ED serait linéaire et pourrait s'écrire :

$$U_x^e = X_0^e \cdot \varepsilon_x + Cst, \tag{4.11}$$

Avec U_x^e le déplacement d'un ED quelconque, X_0^e sa position initiale et *Cst* une constante donnée dépendant des conditions aux limites du domaine et de la position de l'origine du repère utilisée pour les calculs.

Néanmoins, à cause de la distribution aléatoire des ED et de l'orientation des liens dans l'espace, ce champ de déplacement n'est pas linéaire. Nous recherchons donc le champ de déplacement linéaire le plus proche au sens des moindres carrés par rapport au champ de déplacement des ED simulé.

La déformation globale du domaine ε_x est donc calculée à chaque pas de temps comme le coefficient linéaire minimisant l'écart au carré entre le champ théorique cité précédemment et les mesures des positions des éléments :

$$\varepsilon_x = \frac{covariance(X,U)}{variance(X)} = \frac{\sum_{Nb_e}(X_0 - \overline{X_0}) \cdot (U_x - \overline{U_x})}{\sum_{Nb_e}(X_0 - \overline{X_0})^2}.$$
(4.12)

Les ED en contact avec les plateaux de compression ne sont pas considérés dans ce calcul car ils se réarrangent légèrement en début d'essais sans déformation globale du domaine.

4.2.3 Résultats

4.2.3.1 Degré d'anisotropie dans les directions principales du matériau

Les modules d'Young mesurés lors des simulations de compression sont utilisés afin de calculer les degrés d'anisotropie du domaine, à savoir E_L^D/E_R^D et E_L^D/E_T^D . Ces deux valeurs sont représentées dans la Figure 4.8 pour les 5 cas testés. L'ordonnée est en échelle logarithmique uniquement pour faciliter la comparaison des résultats.



Figure 4.8 : Comparaison des degrés d'anisotropie du domaine obtenus en fonction du type de domaines et des lois de calculs des rigidités des liens choisies.

Ces résultats montrent que le degré d'anisotropie des domaines est fortement influencé par la méthode de création de l'anisotropie. Si les domaines ordonnés permettent de retranscrire parfaitement le degré d'anisotropie d'entrée, ce n'est pas le cas des domaines compacts. Dans leurs cas, les degrés d'anisotropie atteint sont beaucoup plus faibles que les degrés d'anisotropie renseignés dans les liens E_L^{μ}/E_R^{μ} et E_L^{μ}/E_T^{μ} . La loi utilisée pour calculer les rigidités des liens a elle aussi un effet sur le degré d'anisotropie du domaine. Pour les domaines compacts, le degré d'anisotropie le plus élevé est obtenu avec la loi TOR.

4.2.3.2 Evolution des degrés d'anisotropie en fonction de ceux d'entrée

Puisque les degrés d'anisotropie obtenus des domaines compacts sont très inférieurs aux degrés d'anisotropie renseignés au travers des modules d'Young des poutres, nous proposons de faire varier ces derniers et d'évaluer l'évolution des degrés d'anisotropie du domaine. Cinq valeurs supplémentaires de degrés d'anisotropie ont donc été testées (voir Tableau 4.4) en modifiant uniquement la valeur de E_L^{μ} .

	0	1		0 1	1	
E^{μ}_{I}	100	500	1000	1500	2000	2500
L	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
E_L^{μ}/E_R^{μ}	1	5	10	15	20	25
E_L^{μ}/E_T^{μ}	5	25	50	75	100	125

Tableau 4.4 : Degrés d'anisotoropie entre les modules d'Young des poutres utilisés.

Les mêmes essais ont été réalisés avec ces nouvelles valeurs et les degrés d'anisotropie résultants des domaines ont été calculés. Les résultats sont regroupés dans le Tableau 4.5 et la Figure 4.9.

Tableau 4.5 : Degrés d'anisotropie du domaine obtenus en fonction des degrés d'anisotropies entre les poutres.

E_L^{μ}/E_R^{μ}	1	5	10	15	20	25
E_L^D/E_R^D (Ordonné)	1,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00
E_L^D/E_R^D (TOR)	1,00	2,07	2,75	3,21	3,56	3,85
E_L^D/E_R^D (Hankinson)	1,00	1,38	1,49	1,53	1,55	1,57
E_L^D/E_R^D (Linéaire)	1,01	1,69	1,97	2,10	2,18	2,24
E_L^D/E_R^D (Sphérique)	1,00	1,60	1,84	1,95	2,02	2,06
E_L^{μ}/E_T^{μ}	5	25	50	75	100	125
$\frac{E_L^{\mu}/E_T^{\mu}}{E_L^D/E_T^D \text{ (ordonné)}}$	5 5	25 25	50 50	75 75	100 100	125 125
$\frac{E_L^{\mu}/E_T^{\mu}}{E_L^D/E_T^D \text{ (ordonné)}}$ $\frac{E_L^D/E_T^D \text{ (TOR)}}{E_L^D/E_T^D \text{ (TOR)}}$	5 5 2,22	25 25 4,46	50 50 5,69	75 75 6,49	100 100 7,03	125 125 7,51
$\frac{E_L^{\mu}/E_T^{\mu}}{E_L^D/E_T^D \text{ (ordonné)}}$ $\frac{E_L^D/E_T^D \text{ (TOR)}}{E_L^D/E_T^D \text{ (Hankinson)}}$	5 5 2,22 1,96	25 25 4,46 2,82	50 50 5,69 3,10	75 75 6,49 3,21	100 100 7,03 3,27	125 125 7,51 3,31
$\frac{E_L^{\mu}/E_T^{\mu}}{E_L^D/E_T^D \text{ (ordonné)}}$ $\frac{E_L^D/E_T^D \text{ (TOR)}}{E_L^D/E_T^D \text{ (Hankinson)}}$ $\frac{E_L^D/E_T^D \text{ (Linéaire)}}{E_L^D/E_T^D \text{ (Linéaire)}}$	5 5 2,22 1,96 1,47	25 25 4,46 2,82 2,05	50 50 5,69 3,10 2,25	75 75 6,49 3,21 2,34	100 100 7,03 3,27 2,39	125 125 7,51 3,31 2,42



Figure 4.9 : Evolution des degrés d'anisotropie du domaine mesurés pour les 4 lois de calcul de la rigidité des liens des domaines compacts.

Les courbes montrent que les degrés d'anisotropie tendent à se stabiliser avec l'augmentation des rapports E_L^{μ}/E_R^{μ} et E_L^{μ}/E_T^{μ} . Plus ces deux ratios augmentent, moins E_L^D/E_R^D et E_L^D/E_T^D évoluent rapidement. A E_L^{μ} variable, E_R^D/E_T^D est également légèrement influencé quel que soit la loi de calcul. L'observation de ces résultats montre que nous sommes loin d'atteindre le degré d'anisotropie escompté ($E_L^D/E_T^D \approx 12$). Pour un rapport E_L^{μ}/E_T^{μ} égal à 120, nous n'atteignons même pas un degré d'anisotropie du domaine de 8 entre ces deux directions. Dans la pratique, il n'est pas envisageable d'aller plus loin car cela conduirait à une réduction très importante du pas de temps (voir section 5.3.1) et donc à des temps de calculs prohibitifs.

4.2.3.3 Module d'Young hors des directions principales

Chaque essai de compression mené sur un domaine incliné d'un angle ξ (que ce soit « physiquement » dans le cas des domaines ordonnés, ou dans le calcul des propriétés dans le cas des domaines compacts) conduit à la mesure d'un module d'Young $E^D(\xi)$ dans une direction formant un angle ξ avec la direction longitudinale dans le plan LR. Ce module est calculé exactement de la même façon que précédemment (section 4.2.2.4). Les valeurs $E(\xi = 0^\circ) = E_L^D$ et $E(\xi = 90^\circ) = E_R^D$ relevées sont également utilisées pour calculer théoriquement $E_{th}(\xi)$, à partir de l'équation d'Hankinson, les modules d'Young pour chaque valeur de ξ . Ces valeurs sont considérées comme estimatrices des propriétés hors axe du domaine en fonction de ses propriétés dans ses directions principales. Les résultats de chaque essai réalisé sur les domaines inclinés sont comparés à ce comportement théorique en Figure 4.10. Les courbes en pointillés sont les modules d'Young théoriques calculés selon l'équation d'Hankinson en fonction de E_L^D et E_R^D et ξ . Les courbes pleines sont les modules mesurés durant les simulations pour des degrés d'anisotropies des modules d'Young des poutres égaux $E_L^{\mu}/E_R^{\mu} = 20$ et $E_L^{\mu}/E_T^{\mu} = 100$. Les doubles barres, dans le cas des domaines



compacts, sont l'écart-type calculé sur les dix « répétitions » (les dix domaines générés aléatoirement).

Figure 4.10 : Module d'Young des domaines mesurés comparés à l'allure usuelle de l'équation d'Hankinson en fonction de la direction de sollicitation (définie par ξ).

Remarquons dans un premier temps que, dans le cas des domaines compacts, les écarts types relevés (sur 10 domaines) sont faibles. A partir de ces derniers, les coefficients de variations ont été calculés pour chaque lois et chaque angle ξ . Le coefficient de variation moyen est de 2,27% et le plus élevé est de 3,25% dans le cas de l'utilisation de la loi TOR pour un angle ξ de 90° (donc en direction purement radiale).

A première vue les écarts entre modules d'Young mesurés et modules d'Young estimés sont également faibles pour les domaines compacts, notamment pour les lois de type TOR ou d'Hankinson. Les écarts entre rigidités mesurées et estimées sont plus élevés dans le cas des

(4.13)

lois linéaires et sphériques, mais semblent toujours moins grands que dans le cas des domaines alignés où ils semblent maximaux.

Ce qui est confirmé par le calcul des écarts relatifs (4.13) dont les résultats sont présentés Figure 4.11.



Figure 4.11 : Evolution de l'écart relatif entre les rigidités mesurées et calculées grâce à l'équation d'Hankinson pour chaque loi de calculs de rigidité des liens.

A faible angle, l'écart relatif atteint un maximum de presque 25% dans le cas des domaines alignés alors qu'il ne dépasse jamais 6 % quel que soit l'angle dans le cas des domaines compacts.

4.2.4 Choix de l'approche

Deux conclusions sont à tirer de l'étude précédente : Afin d'atteindre des degrés d'anisotropies élevés, l'unique solution, dans les conditions testées, est d'utiliser un domaine ordonné. Par contre, dans le cas où seulement une faible anisotropie est souhaitée, il est préférable d'utiliser un domaine compact, qui aura l'avantage non négligeable de posséder un comportement mécanique en dehors des directions principales beaucoup plus cohérent avec le comportement du bois.

Etant donné le degré d'anisotropie visé, le choix se porte logiquement sur l'emploi d'un domaine ordonné, qui doit maintenant être calibré en fonction des paramètres issus du chapitre précédent. Ce choix permet d'obtenir les degrés d'anisotropie voulus mais induit donc une dégradation de la raideur hors axe du domaine, au pire des cas de l'ordre de 25% (Figure 4.11).

4.3 Processus de calibration

Le comportement mécanique du matériau ayant été défini dans le chapitre 3, et l'organisation des ED sous forme d'éléments alignés ayant été choisie dans la section précédente, le modèle numérique DEM peut dorénavant être calibré.

Le but de l'étape de calibration est de déterminer quelles doivent être les valeurs des propriétés « d'entrée » du modèle DEM afin d'obtenir un domaine dont les propriétés mécaniques sont celles désirées. Les propriétés d'entrée sont plus précisément les propriétés des ED et des liens (poutres). Les propriétés des ED seront annotées d'un indice e et celles des poutres d'un exposant μ comme précédemment. Les propriétés globales du domaine seront elles aussi annotées d'un exposant D.

Les modèles de coupes développés à terme seront bidimensionnels (les éléments utilisés sont tridimensionnels, et possèdent un volume, mais tous seront positionnés sur une grille à deux dimensions, dans le plan LT). Donc la calibration du modèle sera réalisée uniquement selon les deux directions longitudinale et tangentielle.

4.4 Propriétés des ED

Les grandeurs cibles sont celles décrites au cours du chapitre 3 concernant le matériau à modéliser. Les propriétés des éléments discrets sont leur rayon R_e et leur masse volumique ρ_e (en plus de leur forme, déjà fixée sphérique).

4.4.1 Masse volumique des éléments

La masse volumique des Eléments Discrets doit être calculée de sorte à ce que la masse totale du domaine soit égale à la masse du solide continu modélisé. Cette égalité se traduit par l'équation suivante :

$$\rho_e = \frac{v_D}{\Sigma v_e} \times \rho_D, \tag{4.14}$$

avec ρ_D la masse volumique du domaine, V_e le volume d'un ED et V_D celui du domaine (Figure 4.12).

Dans le cas d'un domaine ordonné avec des éléments sphériques identiques, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\frac{V_D}{\Sigma V_e} = \frac{n_e \times 8 \times R_e^3}{n_e \times \frac{4}{3} \times \pi \times R_e^3} = \frac{6}{\pi'}$$
(4.15)

où n_e est le nombre d'ED dans le domaine et R_e le rayon des EDs.



Figure 4.12 : Élément discret sphérique et son volume représenté (domaines alignés).

Connaissant l'infradensité moyenne ρ_i du hêtre utilisé ($\rho_i = 520 \text{ kg/m}^3$) et son humidité moyenne (H% = 70%) lors des essais, il est possible de remonter à la masse volumique de l'échantillon lors des essais ρ_c selon l'équation suivante :

$$\rho_{C} = \rho_{i} + \rho_{i} \times \frac{H\%}{100}.$$
(4.16)

Donc, d'après l'équation (4.16), la masse volumique moyenne des échantillons est environ égale à 884 kg/m3.

On souhaite que ρ_D soit égale à ρ_C , donc, de (4.14), (4.15) et (4.16), on déduit par application numérique que $\rho_e = 1.689 \text{ kg/m}^3$.

4.4.2 Rayon des ED (raffinage du domaine)

Le choix du rayon des ED est un paramètre qui peut avoir une influence significative sur les résultats obtenus lors des simulations (notamment quand des éléments très grossiers sont utilisés).

La démarche la plus répandue consiste à se fixer une taille à priori. Cette taille est fonction des phénomènes que l'on souhaite observer (dans notre cas, la formation de plaquettes). On identifie ensuite l'ensemble des comportements (liens et contacts) pour que le modèle DEM reproduise au mieux les expériences choisies ou les phénomènes identifiés. Cette démarche permet une grande maîtrise des temps de calculs mais peut conduire à des paramètres de comportement dépendants du choix fait pour ce rayon. Autrement dit, il peut ne pas y avoir de convergence des résultats auxquels on s'intéresse vis-à-vis du rayon des ED. Dans ce cas, un utilisateur désireux d'augmenter la qualité des résultats de simulation devra, après réduction de la taille des ED, identifier à nouveau les modèles de comportement. Il est également à noter que cette convergence ne peut être atteinte que pour une taille très réduite des ED conduisant à des temps de calculs non admissibles.

La taille des ED doit répondre à un compromis entre temps de calcul raisonnable (puisque nous souhaitons développer un modèle capable d'être utilisé sur des moyens de calculs ordinaires) et résolution spatiale suffisante permettant l'observation de plaquettes, qui ont pour ordre de grandeur 1 à 5 mm d'épaisseur. Pour cette première étude, R_e est fixé à 0,25 mm à cause des contraintes évoquées.

4.5 Propriétés élastiques des liens

4.5.1 Modules d'Young du domaine

Le module d'Young du domaine, que ce soit longitudinal ou tangentiel, découle de la raideur des poutres orientées dans ces directions reliant les ED. Les poutres n'ont pas la même section que le volume de matière dont elles représentent le comportement (Figure 4.13). Dans une direction principale donnée, les modules d'Young des poutres et leurs rayons adimensionnés doivent être tels que la raideur de la poutre soit égale à la raideur du volume de matière représenté, et donc vérifier :

Figure 4.13 : Fraction de matière continue et poutre représentative devant porter son comportement en traction-compression.

Pour les liens longitudinaux et les liens tangentiels, la relation devient précisément :

$$E_L^{\mu} \times \widetilde{r_L}^2 = \frac{4}{\pi} E_L^D \text{ et } E_T^{\mu} \times \widetilde{r_T}^2 = \frac{4}{\pi} E_T^D.$$
(4.18)

Ces deux équations, indépendantes l'une de l'autre, possèdent chacune deux inconnues : E_L^{μ} et \tilde{r}_L d'une part et E_T^{μ} et \tilde{r}_T d'autre part. Ce degré de liberté va être utile afin de régler le module de cisaillement du domaine G_{LT}^{D} , car il dépend lui aussi des quatre mêmes paramètres précédents.

Le système est sous-déterminé : 2 équations pour 4 inconnues. Les deux équations manquantes vont être issues de l'identification du module de cisaillement.

4.5.2 Module de cisaillement du domaine

Les rayons (adimensionnés) des poutres et leurs modules d'Young sont donc calibrés en même temps car ils impactent les mêmes propriétés mécaniques du domaine : ses deux modules d'Young et son module de cisaillement.

Nous proposons de calibrer ce module de cisaillement pour une sollicitation de cisaillement simple sur une petite fraction de matière.

Soit la même fraction cubique de matière qu'à la section (4.5.1), de côté $2R_e$ et de module de cisaillement G_{LT}^c . Ce volume est déformé selon un champ de déformation linéaire $\gamma_{LT} dL$ (cisaillement simple), résultant en un déplacement tangentiel relatif entre les deux faces opposées longitudinalement δ_{cis} (voir Figure 4.14). Dans l'hypothèse de petite perturbation $\delta_{cis} = \gamma_{LT} \times 2R_e$.

En parallèle, le comportement de ce volume de matière est représenté par une poutre longitudinale de rayon $\tilde{r}_L \times R_e$, de longueur $2R_e$ et de module d'Young E_L^{μ} , reliant deux ED. Une déformation équivalente est obtenue en appliquant un déplacement tangentiel relatif entre les deux ED de δ_{cis} , dans la direction normale au lien, tout en bloquant leurs deux autres DDL. De ce fait, les sections de la poutre au niveau des deux ED ne présentent aucune rotation. Néanmoins, le repère du vecteur branche du lien forme lui un angle θ_1 avec le repère d'un des ED et θ_2 avec le second. Sous hypothèse de petite perturbation, ces deux angles sont égaux entre eux et à la variation d'angle précédemment décrite : $\theta_1 = \theta_2 = \gamma_{LT} = \delta_{cis}/2Re$.



Figure 4.14 : schématisation plane d'une fraction de matière continue et poutre d'Euler-Bernoulli représentative devant porter son comportement en cisaillement.

L'effort tranchant, résultant d'une telle déformation d'une portion de milieu continu peut être déduit du module de cisaillement, des caractéristiques géométriques du volume et de la déformation imposée :

$$G_{LT}^{C} = \frac{\sigma_{LT}}{\gamma_{LT}} \qquad (i)$$

$$= \frac{T_{cis}}{A} \times \frac{l_{cis}}{\delta_{cis}} \qquad (ii)$$

$$= \frac{T_{cis}}{4R_{e}^{2}} \times \frac{2R_{e}}{\delta_{cis}}. \qquad (iii)$$

Donc

$$\Rightarrow T_{cis} = G_{LT}^C \times dx \times 2ne \times Re.$$
(4.20)

La norme de l'effort tranchant transmis par la poutre longitudinale aux ED qu'elle relie, s'écrit quant à elle :

$$T_{cis} = \frac{6E_L^{\mu}I}{L_0^2}(\theta_2 + \theta_1)$$
 (*i*)

$$= \frac{6E_L^{\mu} \times \frac{\pi(2R_{\mu})}{64}}{(2R_e)^2} \times (\theta_2 + \theta_1)$$
 (*ii*) (4.21)

$$= \frac{3}{8}\pi \times \frac{E_L^{\mu} \times (R_e \times \widetilde{r_L})^4}{R_e^2} \times 2\left(\frac{d_x}{2/R_e}\right) \qquad (iii)$$

$$= \frac{1}{8}\pi \times E_L^r \times R_e \times r_L^r \times a_x \qquad (lv)$$

En égalant les deux équations (4.20) et (4.21 *iv*), et en isolant E_L^{μ} , on déduit l'expression de ce dernier :

$$E_L^{\mu} = \frac{16}{3} \times \frac{G_{LT}^{C}}{\tilde{r_L}^2}.$$
 (4.22)

Dans le cas où le champ de déplacement aurait été appliqué selon la direction longitudinale, le calcul des efforts tranchants selon le modèle MMC aurait conduit exactement au même résultat car la symétrie $G_{LT} = G_{TL}$ est respectée. Par contre, un lien tangentiel n'aurait pas forcément la même rigidité transverse et reprendrait potentiellement des efforts différents. Les mêmes calculs conduisent donc à :

$$E_T^{\mu} = \frac{16}{3} \times \frac{G_{TL}^{C}}{\tilde{r_T}^2}.$$
 (4.23)

Nous avons donc, deux fois deux équations (4.18), (4.22) et (4.23), et deux fois deux inconnues. Ces deux systèmes présentent chacun une solution unique et il est donc possible de forcer la symétrie de comportement. Leur résolution avec $G_{TL}^{c} = G_{LT}^{c}$ conduit aux valeurs indiquées au sein du Tableau 4.6.

Theread no information meroscopiques et rayons damensionnes earrores							
E^{μ}_{L}	$\widetilde{r_L}$	G_{LT}^D	E_T^{μ}	$\widetilde{r_T}$	G_{TL}^D		
1,11× 10 ⁵ MPa	0,33	773,47 MPa	7,73× 10 ² MPa	1,14	769,04 MPa		

Tableau 4.6 : Modules microscopiques et rayons adimensionnés calibrés

Il est important de noter que le calcul des rayons adimensionnés et des modules d'Young des poutres est complètement indépendant de la taille des ED, ces derniers dépendants uniquement des modules d'Young et modules de cisaillement dits « cibles ».

L'approche utilisée donne une valeur approchée du module de cisaillement souhaité. Il convient de remarquer qu'en 3D, cette approche ne permet plus d'obtenir les valeurs exactes souhaitées de module de cisaillement. En effet, en 3D, 6 paramètres devraient être calibrés (un module d'Young et un rayon adimensionné pour chaque direction). Par contre, 9 équations seraient à vérifier (3 en traction-compression sous la même forme que (4.19), et 6 en cisaillement sous la même forme que (4.22) et (4.23)). Cela nécessiterait donc de réaliser un compromis concernant la symétrie de raideur ou/et les modules de cisaillement dans certains plans.

Une autre approche pour estimer le module de cisaillement serait de réaliser un essai numérique de torsion comme déjà utilisé pour calibrer le module de cisaillement de domaines isotropes (André, 2012). Etablir des modules de cisaillement à partir de cette méthode est plus complexe dans le cas de milieu orthotrope mais demeure envisageable (Sumsion & Rajapakse, 1978).

4.6 Propriétés anélastiques

Il s'agit ici de la modélisation de la densification du bois dans la direction tangentielle. Cette densification est prise en compte uniquement dans les liens initialement orientés dans cette direction. Il faut donc transcrire le comportement donné en fin de section 3.3.1.3 au niveau des poutres.

La contrainte seuil de densification de la poutre devient ainsi σ_0^{μ} . Comme $E_T^{\mu} = \frac{4}{\pi \tilde{r}^2} E_T^D$, pour une déformation donnée, les contraintes dans le lien sont proportionnelles aux contraintes au sein du volume continu représenté dans les mêmes proportions. Donc $\sigma_0^{\mu} = \sigma_0 \times \frac{4}{\tilde{r}_T^2}$, et p_0 , le facteur de densification, est le même que calculé précédemment car c'est une grandeur caractéristique de la déformation de la poutre qui est directement égale à la déformation du milieu continu.

Soit F (notation uniquement employée dans cette section) l'effort axial transmissible par les liens. Dans le cas du modèle de type poutre d'Euler-Bernoulli, à un incrément de calcul i donné, F(i) est égal à :

$$F(i) = E^{\mu} S^{\mu} \frac{L(i) - L_0}{L_0}, \qquad (4.24)$$

avec E^{μ} , S^{μ} , L(t) et L_0 respectivement le module d'Young du lien, sa section, sa longueur à l'incrément *i* et sa longueur initiale. A l'incrément i+1, la déformation totale devient $\frac{L(i+1)-L_0}{L_0}$ où L(i + 1) est donnée par l'algorithme explicite. Ce comportement est inchangé dans les liens initialement orientés dans la direction longitudinale du matériau. Par contre, le comportement des liens initialement orientés dans la direction tangentielle est modifié afin que le comportement anélastique identifié au chapitre 3 y soit retranscrit.

Le nouvel effort transmissible par les liens orientés selon la direction tangentielle lui est implémenté est donc dépendant de son historique et calculé de la façon suivante :

Soit p(i) la déformation plastique du lien à un incrément i. p est initialisé comme nul car le lien n'est pas encore plastifié.

Si, à l'incrément i + 1 l'effort « élastique » est inférieur ou égal à l'effort « plastique » seuil ou précédent :

$$E_T^{\mu} S_T^{\mu} \frac{L(i+1) - L_0 p(i) - L_0}{L_0} < \sigma_0^{\mu} S_T^{\mu} e^{\frac{p(i)}{p_0}}, \tag{4.25}$$

Alors le lien ne plastifie pas plus qu'il ne l'est déjà (ou demeure élastique s'il n'a pas encore été plastifié) :

$$F(i+1) = E_T^{\mu} S_T^{\mu} \frac{L(i+1) - L_0 p(i) - L_0}{L_0} \text{ et } p(i+1) = p(i).$$
(4.26)

Si au contraire :

$$E_T^{\mu} S_T^{\mu} \frac{L(i+1) - L_0 p(i) - L_0}{L_0} \ge \sigma_0^{\mu} S_T^{\mu} e^{\frac{p(i)}{p_0}}, \tag{4.27}$$

alors il faut trouver la déformation plastique p(i + 1) qui vérifie :

$$F(i+1) = \sigma_0^{\mu} S_T^{\mu} e^{\frac{p(i+1)}{p_0}} = E_T^{\mu} S_T^{\mu} \frac{L(i+1) - L_0 p(i+1) - L_0}{L_0}.$$
(4.28)

Il faut donc que la fonction g suivante de p(i + 1) soit nulle :

$$g(p(i+1)) = E_T^{\mu} S_T^{\mu} \frac{L(i+1) - L_0 p(i+1) - L_0}{L_0} - \sigma_0^{\mu} S_T^{\mu} e^{\frac{p(i+1)}{p_0}} = 0.$$
(4.29)

L'utilisation d'un schéma explicite fait que les pas de temps sont très petits et qu'il en est de même pour les incréments de déplacement. Il est donc cohérent de résoudre (4.29) de manière approchée en linéarisant la fonction g autour du point p(i), et donc d'écrire :

$$g(p(i+1)) \cong g(p(i)+\delta p) \cong g(p(i)) + \frac{dg(p(i))}{dp}\delta p = 0.$$

$$(4.30)$$

Or,

$$\frac{dg(p(i))}{dp} = -E_T^{\mu}S_T^{\mu} - \frac{\sigma_0^{\mu}}{p_0}S_T^{\mu}e^{\frac{p(i)}{p_0}},\tag{4.31}$$

et

$$g(p(i)) = E_T^{\mu} S_T^{\mu} \frac{L(i) - L_0 p(i) - L_0}{L_0} - \sigma_0^{\mu} S_T^{\mu} e^{\frac{p(i)}{p_0}}.$$
(4.32)

Donc il est possible de calculer :

$$\delta p = -\frac{g(p(i))}{\frac{dg(p(i))}{dp}} \tag{4.33}$$

D'où

$$p(i+1) \cong p(i) + \delta p. \tag{4.34}$$

Il reste ainsi simplement à recalculer l'effort à l'incrément i + 1 :

$$F(i+1) = \sigma_0^{\mu} S_T^{\mu} e^{\frac{p(i+1)}{p_0}}.$$
(4.35)

Remarque : Des liens de type « poutres plastiques » ont été implémentés en parallèle de ces travaux dans la version 2.0 de GranOO qui n'était pas encore disponible lorsque le modèle courant a été développé. Il peut être pertinent d'utiliser plutôt ce type de lien que les poutres élastiques modifiées afin d'optimiser les temps de calcul si leur comportement convient à la présente étude, mais cette nouvelle version n'a pas encore été testée.

4.7 Limites à rupture des liens

En DEM, les liens cohésifs peuvent être rompus classiquement (mais pas uniquement) selon :

- Un critère en déformation
- Un critère en effort
- Une combinaison des deux

Le critère par défaut implémenté dans GranOO est un critère général pour les matériaux isotropes. Cette approche a été modifiée de sorte à isoler un critère de rupture en traction des liens et un critère de rupture en cisaillement.

Les deux critères sont basés sur un niveau d'effort puisqu'en MMC il est plutôt indiqué en contraintes. Le premier critère est la contrainte à la rupture en traction du lien $\sigma^{\mu,max}$, le lien étant détruit si la contrainte axiale en traction est dépassée dans le lien. Le second critère est $\tau^{\mu,max}$ et le lien est détruit si la contrainte induite par l'effort tranchant *T* dépasse ce seuil. Mathématiquement, la rupture à lieu si dans un lien :

$$\frac{F}{S^{\mu}} > \sigma^{\mu,max} \text{ ou } \frac{|T|}{S^{\mu}} > \tau^{\mu,max}.$$
(4.36)

4.7.1 En traction

Suivant la même logique qu'à la section 4.5, les seuils à la rupture en traction des liens longitudinaux et tangentiels sont calculés selon les équations :

$$\sigma_L^{\mu,max} = \sigma_L^{maxi} \times \frac{4}{\pi \tilde{r}_L^2} \text{ et } \sigma_T^{\mu,max} = \sigma_T^{maxi} \times \frac{4}{\pi \tilde{r}_T^2}.$$
(4.37)

4.7.2 En cisaillement

D'une part, le calcul du module de cisaillement cible, ainsi que la calibration du module de cisaillement du domaine, sont sujets à de fortes incertitudes. D'autres part, les données présentent dans la littérature ne permettent pas de qualifier la limite à la rupture du hêtre vert à haut taux de déformations, elles n'ont donc pas permis d'identifier une contrainte à la rupture cible. Aussi la limite en cisaillement des liens ne peut être calibrée à priori.

Ce paramètre reste donc libre, et sera ajusté directement lors des simulations de coupe afin de retrouver une phénoménologie identique à celle observée lors des essais de coupe orthogonale.

4.8 Récapitulatif

L'ensemble des paramètres étudiés au cours de ce chapitre sont répertoriés dans le Tableau 4.7, ainsi que leur méthode de calcul et leur valeur calculée le cas échéant. Toutes les valeurs cibles définies sont respectées à l'exception du module de cisaillement qui est seulement approché.

Paramètre du modèle		Calcul	Valeur	
Rayon des ED R_e		Fixé	0,25 mm	
Masse volumique des ED	$ ho_e$	$\frac{6}{\pi} \times \rho_C$	1 689 kg/m3	
Rayons adimensionnés des	$\widetilde{r_L}$		0,33	
poutres	$\widetilde{r_T}$	Voir section 15	1,14	
Modules d'Voung des poutres	E_L^{μ}	Voli section 4.5	1,1072 × 10 ⁵ MPa	
Modules d' l'oung des pouries	E_T^{μ}		$7,7300 \times 10^2$ MPa	
Seuil initial de densification	σ^{μ}_{0}	$\sigma_0 imes rac{4}{\widetilde{r_T}^2}$	13,23 MPa	
Facteur de densification des poutres po		N/A	35,2	
Controintos en munturo dos	$\sigma_L^{max,\mu}$	$\sigma_L^{maxi} imes rac{4}{\widetilde{r_L}^2}$	1 179,94 MPa	
poutres	$\sigma_T^{max,\mu}$	$\sigma_T^{maxi} imes rac{4}{\widetilde{r_T}^2}$	5,05 MPa	
	$\sigma_{LT}^{max,\mu}$	N/A	Variable	
Coef. de Poisson des poutres	ν	N/A	0,3	

Tableau 4.7 : Paramètres des modèles de comportement ED.

Ces paramètres établis, ils sont renseignés dans les simulations de coupe présentées maintenant.