Modélisation des processus

La modélisation mathématique des processus de surface et de subsurface a été dès la fin des années 60 un sujet d'intérêt pour les hydrologues [Kirkby, 1978]. Les modèles distribués sont directement basés sur les équations décrivant les processus dans le bassin versant. Freeze et Harlan [Freeze et Harlan, 1969] ont proposé un cadre général pour la modélisation de l'ensemble surface/subsurface. Le cycle de l'eau présenté dans la première partie n'est pas pris en compte dans sa totalité. Les écoulements en macropores par exemple ne sont pas modélisés. Seuls sont considérés les processus d'infiltration, de ruissellement, d'écoulement de nappe, d'alimentation des rivières. Ce formalisme général constitue aujourd'hui encore la base de tous les modèles distribués. Freeze et Harlan décrivent dans leur article les équations permettant de représenter les différents processus et comment coupler ces équations en utilisant des frontières communes. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires et ne peuvent être résolues qu'à l'aide de méthodes numériques. Les écoulements de surface (ruissellement, rivières) sont décrits par les équations de Saint-Venant ou leurs approximations. Les écoulements dans les milieux saturés sont décrits par l'équation de Darcy combinée à une équation de conservation [Bear, 1972]. Les écoulements dans la zone non saturée (infiltration) sont modélisés à l'aide de l'équation de Richards [Richards, 1931]. Notre étude s'insère dans ce cadre général de modélisation. L'objectif de cette partie est donc de présenter les méthodes classiques de modélisation des processus de surface et de subsurface.

1.1 Écoulements de subsurface

1.1.1 Écoulements dans la zone saturée

L'équation de base dans la description des écoulements en zone saturée dans les modèles distribués est la loi de Darcy. Cette loi suppose qu'il existe une relation linéaire entre la vitesse d'écoulement et le gradient hydraulique. Le coefficient de proportionnalité est appelé conductivité hydraulique et caractérise la capacité du milieu à transmettre de l'eau. L'équation de Darcy peut être écrite dans le cas d'un milieu isotrope [De Marsily, 1986] :

$$\overrightarrow{U} = -K_{sat}\overrightarrow{\nabla}(H) \tag{1.1}$$

avec $\overrightarrow{U}$ la vitesse de Darcy $[LT^{-1}]$, H la charge hydraulique totale $[L]$ et K_{sat} la conductivité hydraulique du milieu $[LT^{-1}]$. On définit la charge hydraulique H d'un fluide incompressible et soumis à la gravité par [De Marsily, 1986] :

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \tag{1.2}$$

où u est la vitesse réelle du fluide au point considéré $[LT^{-1}]$, g l'accélération de la pesanteur $[LT^{-2}]$, p la pression $[ML^{-1}T^{-2}]$, ρ la masse volumique de l'eau $[ML^{-3}]$ et z la côte du point $[L]$. En milieu poreux, les vitesses réelles sont toujours très faibles et on peut négliger le terme de charge dynamique $\frac{u^2}{2g}$. La charge hydraulique se réduit alors à la charge statique et peut s'écrire :

$$H = h + z \tag{1.3}$$

avec $h = p/\rho g$ la pression exprimée en mètres.

Cette équation a été établie vers 1850 par Henry Darcy. Suite aux progrès réalisés en mécanique des fluides, certains auteurs ont montré que cette loi pouvait être retrouvée à partir des équations de Navier-Stokes en supposant que le régime d'écoulement reste laminaire et que les pores ont une géométrie particulière (e.g. [Hassanizadeh, 1986]). Cette loi est une bonne approximation des écoulements dans les matrices poreuses à peu près homogènes. Elle n'est pas valide dans le cas de systèmes hétérogènes ou présentant une macroporosité. Depuis quelques années, l'emploi de cette loi dans des modèles distribués avec de grosses taille de maille est remis en question (e.g. [Reggiani et al, 1999]). Il semble que dans ce cas la loi de Darcy soit trop grossière et que les valeurs de conductivité hydraulique dans ces modèles soient très différentes des valeurs estimées à partir des mesures de terrain.

La deuxième équation de base est l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla}.(\rho\overrightarrow{V}) + q \tag{1.4}$$

où t est le temps $[T]$, ρ la masse volumique de l'eau $[ML^{-3}]$, θ la teneur en eau volumique, $\overrightarrow{V}$ est le vecteur vitesse $[LT^{-1}]$ et q le terme source $[T^{-1}]$.

L'équation globale décrivant les écoulements dans la zone saturée résulte de la combinaison de la loi de Darcy avec l'équation de conservation de la masse. En introduisant l'Eq 1.1 dans l'équation de conservation Eq 1.4, on obtient :

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla}.(\rho K_{sat}\overrightarrow{\nabla}(H)) + q \tag{1.5}$$

En supposant le fluide incompressible, on peut simplifier cette équation et la mettre sous la forme [Beven, 2001] :

$$S\frac{\partial H}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}.(K_{sat}\overrightarrow{\nabla}(h+z)) = q \tag{1.6}$$

où S est le coefficient d'emagasinement du milieu $[L^{-1}]$ et q représente les termes sources/puits.

1.1.2 Écoulement en zone non saturée

Richards [Richards, 1931] a généralisé l'équation de Darcy au début des années 1930 pour décrire le comportement des milieux non saturés. Les expériences à petite échelle ayant montré que le comportement des sols était très non-linéaire en fonction de l'humidité, Richards supposa que cette même relation pouvait s'appliquer mais avec une conductivité hydraulique non-linéaire dépendant de l'humidité ou de la pression capillaire. L'équation de Richards, aussi appelée équation de Darcy généralisée, s'écrit donc pour un milieu isotrope [Bear, 1972] :

$$\overrightarrow{U} = -K(h)\overrightarrow{\nabla}(H) \tag{1.7}$$

où $\overrightarrow{U}$ est la vitesse d'écoulement dans le milieu $[LT^{-1}]$, $K(h)$ la conductivité hydraulique du milieu dépendant de la pression d'eau h dans le sol. On définit cette pression à partir de la pression capillaire p_c $[L]$ dans le milieu. Par définition , on a :

$$p_c = p_{nw} - p_w$$

avec p_{nw} la pression du fluide dit non mouillant $[L]$ (dans notre cas l'air) et p_w la pression du fluide dit mouillant $[L]$ (dans notre cas l'eau). La pression d'eau h dans le milieu est définie par :

$$h = -p_c$$

On suppose dans la suite du manuscrit que l'écoulement d'air est infiniment rapide et on choisit la pression atmosphérique comme pression de référence. Par conséquent, la pression d'eau h est positive dans la zone saturée et négative dans la zone non saturée.

Dans le cas des écoulements en milieu non saturé, l'équation de mouvement résulte de la combinaison de l'équation de Richards (Eq 1.7) et de l'équation de la conservation de la masse (Eq 1.4). On obtient alors en supposant le milieu et le fluide incompressibles :

$$C(h)\frac{\partial H}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla}.(K(h)\overrightarrow{\nabla}(h+z)) = q \tag{1.8}$$

où C(h)= $\partial\theta/\partial h$ $[L^{-1}]$ est la capacité capillaire caractérisant la variation de teneur en eau θ avec la pression capillaire h et q le terme source/puits.

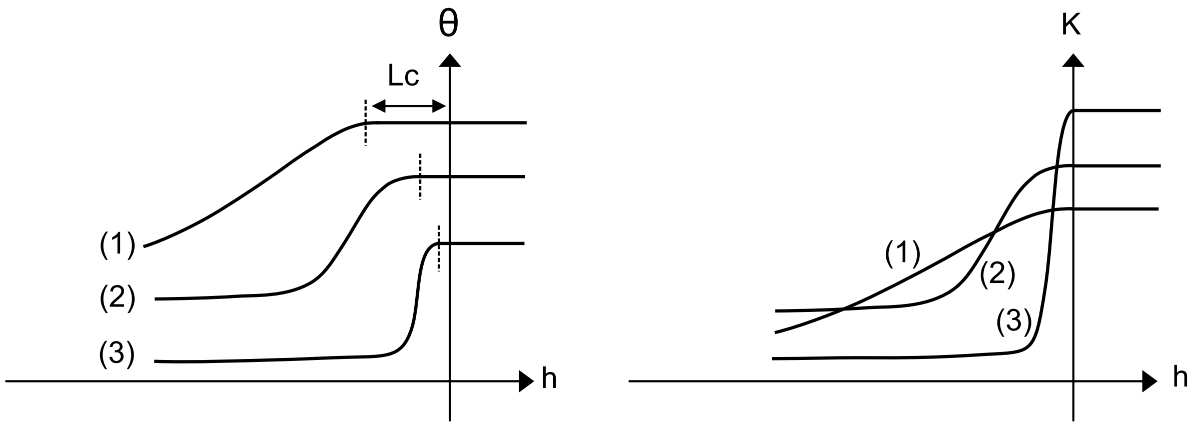

FIG. 1.1 – Lois de teneur en eau θ et de conductivité hydraulique K en fonction de la pression capillaire h pour trois sols hypothétiques sans hystérésis (1) Argile (2) Sable marneux (3) Sable .

1.1.3 Paramétrisation du sol

Un des problèmes majeurs dans l'utilisation de cette équation concerne la paramétrisation du sol, et en particulier de la zone non saturée. Dans cette zone, la teneur en eau θ ainsi que la conductivité hydraulique K sont des grandeurs qui dépendent non-linéairement de la pression en eau h [Hillel, 2004] (voir Fig 1.1). La plupart des modèles distribués utilise des relations fonctionnelles entre teneur en eau, conductivité hydraulique et pression capillaire. Ces fonctions caractérisent le comportement des sols à partir de paramètres, qui sont nécessaires à la bonne définition du problème. Un grand nombre de ces modèles de comportement existent dans la littérature [Mualem, 1976] [Burdine, 1953]. Les plus utilisés ont été développés par Van Genuchten [Van Genuchten, 1980] et Brooks and Corey [Brooks et Corey, 1964]. Ils associent à une valeur de pression capillaire une valeur unique de teneur en eau ou de conductivité hydraulique. Néanmoins, ils ne sont qu'une approximation grossière du comportement complexe des sols. L'évolution de la conductivité hydraulique ou de la teneur en eau est très souvent différente si le sol est en phase de drainage ou d'imbibition. Ce phénomène, appelé hystérésis, est rarement pris en compte dans les modèles distribués.

La définition de ces fonctions est, de plus, difficile car la mesure des courbes caractéristiques de sol représente un investissement expérimental non négligeable. Les études de laboratoires ont montré que ces courbes dépendent beaucoup de la texture des sols. La Fig 1.1 schématise de façon simple les lois de teneur et de conductivité hydraulique pour trois types de sol (une argile, un sable marneux et un sable). La grandeur notée Lc sur ces courbes est appelée longueur capillaire et caractérise la hauteur de la frange capillaire (zone de tension au dessus du niveau de la nappe). On peut voir sur cette illustration qu'un sable, qui a une structure grossière, a une conductivité hydraulique à saturation forte, une longueur capillaire faible et que l'évolution de la conductivité hydraulique et de la teneur en eau sont beaucoup plus non linéraires que pour les deux autres types de

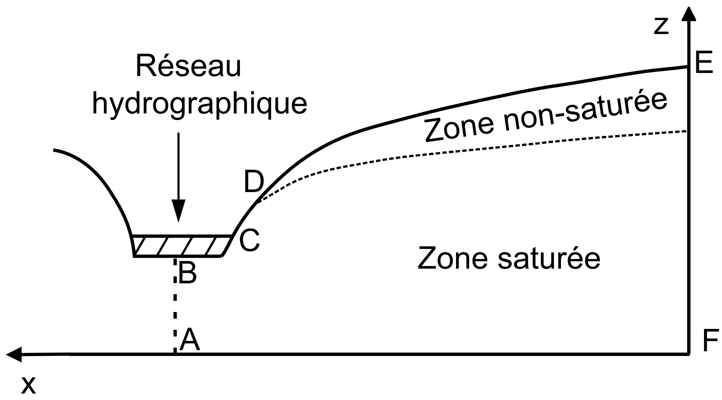

FIG. 1.2 – Domaine d'étude idéalisé pour la modélisation des écoulements de subsurface seuls

sol. En revanche, les sols à texture plus fine ont une conductivité hydraulique à saturation plus faible, une longueur capillaire plus grande et présentent des évolutions de teneur en eau et de conductivité hydraulique plus douces. Ceci est lié à la taille des particules solides et leur organisation qui déterminent la distribution des pores et donc le comportement du sol. Il faut noter qu'en terme de modélisation ces lois jouent un rôle primordial et ont une grande influence sur le comportement simulé des systèmes (e.g. [Vogel et al, 2001], [Van Genuchten et Nielsen, 1985]).

1.1.4 Conditions aux limites

L'équation de Richards ne peut être résolue sans la connaissance des conditions aux limites du système. La figure 1.2 représente une coupe 2D idéalisée d'un transect de bassin versant. On suppose que cette coupe a été réalisée dans une direction perpendiculaire à l'écoulement dans le réseau hydrographique. Elle servira de base pour expliquer l'ensemble des conditions aux limites classiquement utilisées dans la modélisation distribuée des processus de subsurface. Considérons d'abord les limites AF, AB et FE. La frontière AF correspond à la limite supérieure de la roche mère, appelée aussi substratum. Compte tenu de la profondeur de cet horizon, il est très difficile d'estimer par la mesure la valeur des flux traversant sa limite supérieure. On sait néanmoins que ce type de roche est très peu perméable voire imperméable. On considère donc par souci de simplification que le flux d'eau traversant cette limite est nul. La limite FE se trouve à la verticale d'un maximum de topographie et est appelée ligne de partage des eaux. L'eau de pluie tombant à droite de cette limite est supposée s'écouler vers un exutoire qui n'appartient pas à notre domaine d'étude. La pluie tombant entre le réseau hydrographique et cette limite s'écoulera à travers la zone non saturée et la zone saturée pour rejoindre le réseau hydrographique. On considère donc qu'aucun volume d'eau ne traverse la ligne FE (limite à flux nul). Il en est de même pour la limite AB puisque cette dernière est un axe de symétrie du système. En utilisant les équations de Richards et de Darcy, on obtient pour les lignes AF, AB et FE les conditions aux limites suivantes :

sur AB et FE

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{1.9}$$

sur AF

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{1.10}$$

La limite BC correspond au lit du réseau hydrographique. Cette zone est constamment sous une hauteur d'eau z_r égale au niveau de la rivière. On applique donc sur cette zone une condition à la limite de charge imposée :
sur BC

$$H_{BC} = z_r \tag{1.11}$$

La surface CE correspond à la surface du sol. Lorsque la nappe est affleurante, on peut voir apparaître près de la rivière une zone de suintement où la surface du sol sera complètement saturée. Cette zone alimente le phénomène de ruissellement (ruissellement sur surface saturée). La surface du sol est donc séparée en deux zones : la zone CD ou zone de suintement et la zone DE ou zone d'infiltration. Sur la zone d'infiltration, on impose une condition à la limite de flux imposé ϕ_{DE} égal à la pluie q_{pluie}. On a donc :
sur DE

$$\phi_{DE} = q_{pluie} \tag{1.12}$$

Les modèles distribués ne s'intéressant qu'à la dynamique de subsurface traitent la limite de suintement CD de façon particulière. On impose d'abord un flux égal à la pluie. Une fois que la surface de suintement apparaît, on impose une pression nulle le long de la limite CD, ce qui revient à imposer une charge égale à la côte topographique du sol z_{sol}. On a donc sur CD :

$$\begin{cases} \phi_{CD} = q_{pluie} & \text{si la surface de suintement n'est pas apparue} \\ H_{CD} = z_{sol} & \text{si la surface de suintement existe} \end{cases} \tag{1.13}$$

La position du point D le long de la surface du sol dépend du temps. En effet, elle évolue en fonction du niveau de la nappe. Lorsque celle-ci gonfle, le point D est susceptible de remonter la pente et d'atteindre une autre position (point D' sur la figure). Ce point nécessite donc une attention particulière pendant la résolution du fait de changement de condition à la limite. Cette technique sera détaillée plus amplement dans le prochain chapitre consacré aux techniques de couplage.

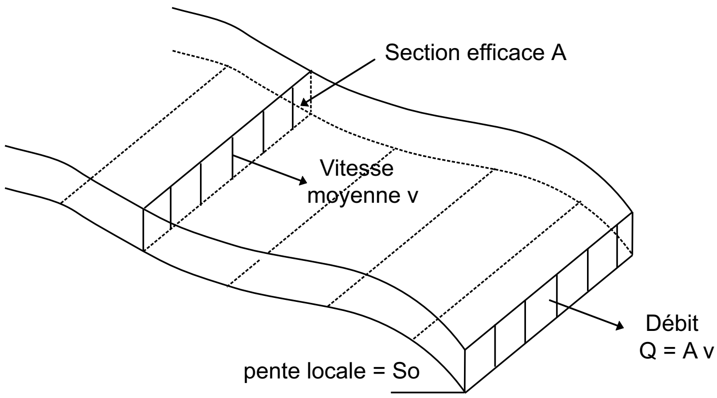

FIG. 1.3 – Schéma d'une lame d'eau idéalisée

1.1.5 Résolution numérique

L'équation de Richards (Eq 1.8) est une équation aux dérivées partielles non-linéaire de par la nature des fonctions caractéristiques des sols. Ce type d'équation n'a pas de solution analytique sauf dans des cas extrêmement simples. Dans la plupart des cas, il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour la résolution. Depuis le début des années 1970, un grand nombre de travaux ont été réalisés sur la résolution numérique de l'équation de Richards et de nombreuses méthodes ont été implémentées. Les différences finies, les éléments finis classiques [Neuman, 1973], les éléments finis mixtes hybrides [Mosé et al, 1994] [Le Potier et al, 1998] et les volumes finis sont autant de formulations numériques existantes pour la résolution. Les méthodes de Picard et de Newton sont deux algorithmes de résolution du problème très souvent utilisés [Paniconi et Putti, 1994]. Les travaux de [Freeze, 1972a, Freeze, 1972b] [Celia et al, 1990] [Huyakorn et al, 1986] [Therrien et Sudicky, 1996] font référence dans le domaine de la modélisation des écoulements saturés/non saturés. Le détail de toutes ces méthodes n'est pas donné dans cette partie (voir [Huyakorn et Pinder, 1983] pour plus de détails). Les choix réalisés dans le cadre de cette étude seront développés dans la prochaine partie.

1.2 Écoulements de surface

Le ruissellement et les écoulements dans les rivières étant décrits dans les modèles distribués selon les mêmes bases physiques, ils seront traités ici de manière unifiée et regroupés sous la dénomination d'écoulements de surface. La description suivante des écoulements de surface n'est pas exhaustive.

1.2.1 Les équations de Barré Saint-Venant

Les écoulements de surface sont classiquement décrits par les équations de Saint Venant. Bien qu'étant une approximation mono ou bidimensionnelle, ces équations sont suffisantes pour représenter la nature tridimensionnelle des écoulements de surface [Crank, 1988] [Di Giammarco et al, 1996]. On suppose que l'écoulement peut être correctement décrit

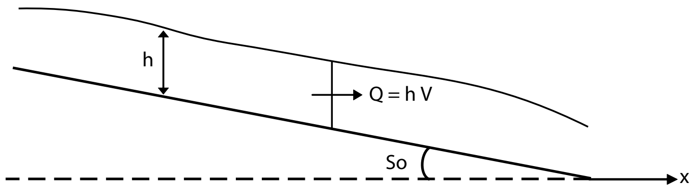

FIG. 1.4 – Lame d'eau 1D idéalisée

par une vitesse V moyennée sur l'ensemble d'une section efficace A. Le débit moyen Q qui traverse cette section vaut alors : $Q = VA$ (voir Fig 1.3). Les variables vitesse et section varient avec le temps. On se retrouve donc devant un problème à deux inconnues. Il nous faut donc deux équations pour le résoudre. Ces deux équations, formulées pour la première fois par Saint Venant, proviennent d'un bilan de masse et d'un bilan de moment. Pour des raisons de simplicité, on dérive ces équations dans un cas 1D simplifié (voir Fig 1.4).

L'équation de conservation de la masse s'établit de la même manière que dans la partie précédente. On considère encore une fois un volume élémentaire et on traduit de façon mathématique le fait que la variation de masse dans le volume élémentaire est égale à la somme des flux entrant et sortant. On obtient alors l'équation suivante [Beven, 2001] :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} + i = -\frac{\partial (Vh)}{\partial x} + i \tag{1.14}$$

où h est la hauteur de lame d'eau moyennée $[L]$, V la norme de la vitesse moyennée $[LT^{-1}]$ et i le terme source d'eau $[LT^{-1}]$.

La deuxième équation nécessaire à la résolution est issue d'un bilan de moment qui traduit l'égalité entre les variations spatiale et temporelle du moment local et la variation spatiale de pression, la perte en énergie potentielle et les pertes par friction. Cette équation s'écrit après simplification [Freeze, 1978] :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \tag{1.15}$$

où g $[L^2T^{-1}]$ est l'accélération de la gravité, S_0 est la pente de la surface du sol, h $[L]$ une hauteur moyenne de lame d'eau et S_f est la pente de friction liée à la rugosité de la surface. La pente de friction S_f est généralement déduite de relations empiriques reliant la hauteur de lame d'eau, la vitesse moyenne d'écoulement et la pente de friction comme la relation de Manning-Strickler ou celle de Darcy-Weisbach [Kirkby, 1978]. L'équation de Manning-Strickler sera utilisée ultérieurement et peut s'écrire de la façon suivante :

$$V = \frac{h^{2/3}}{n}\sqrt{S_f} \tag{1.16}$$

où n $[LT^{-1/3}]$ est le paramètre de Manning-Strickler caractérisant la rugosité du sol.

1.2.2 Approximations dites de l'onde diffusive et de l'onde cinématique

Deux approximations des équations de Saint Venant sont souvent utilisées dans la modélisation des processus de surface. Selon l'approximation dite de l'onde diffusive, les variations spatiale et temporelle du moment local sont négligées et l'équation 1.15 devient :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f) \tag{1.17}$$

L'approximation de l'onde diffusive a été très étudiée pour délimiter son domaine de validité. Hromadka [Hromadka et al, 1985] considère qu'elle est acceptable pour des régimes d'écoulement faibles à modérés. Henderson [Henderson, 1966] considère que les termes d'inertie sont toujours négligeables et Ahn [Ahn et al, 1993] évalue les erreurs liées à ces simplifications à 5 à 10 %, ce qui reste acceptable compte tenu des incertitudes liées à la géométrie ou aux paramètres hydrologiques.

L'approximation de l'onde cinématique ne prend en compte que les effets de friction et de perte d'énergie potentielle. Elle s'écrit :

$$g(S_0 - S_f) = 0 \tag{1.18}$$

soit :

$$S_0 = S_f \tag{1.19}$$

Cette approximation permet dans certains cas de s'affranchir de problèmes numériques liés à l'utilisation des équations dynamiques de Saint Venant. Elle est particulièrement adaptée à la modélisation de pentes fortes et très rugueuses avec des apports latéraux d'eau relativement faibles [Woolhiser et Ligget, 1967].

1.2.3 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites ont un rôle déterminant dans la modélisation des processus de surface. Selon l'équation utilisée pour décrire l'écoulement, le nombre de conditions aux limites à spécifier varie. Les équations de Saint Venant ainsi que l'approximation de l'onde diffusive nécessitent la donnée de deux conditions aux limites alors que l'approximation de l'onde cinématique n'en nécessite qu'une seule.

Dans le cas où il faut imposer une condition à la limite en amont du domaine de surface, on peut imposer une hauteur de lame d'eau nulle ou imposer une valeur de flux entrant. Pour la condition à la limite en aval, deux options sont possibles. L'écoulement peut soit être critique ou normal. Dans le cas d'un écoulement critique, la relation mathématique est issue de la définition du nombre de Froud Fr qui relie les forces d'inertie au forces gravitationnelles :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} \tag{1.20}$$

Un nombre de Froud inférieur à 1 signifie que l'écoulement est subcritique ou tranquille alors qu'un nombre de Froud supérieur à 1 caractérise un écoulement supercritique ou rapide. L'écoulement critique est obtenu pour un nombre de Froud égal à 1. On obtient donc comme condition à la limite [Freeze, 1978] :

$$V_{sortie} = \sqrt{gh} \tag{1.21}$$

où V_{sortie} est la norme de la vitesse moyenne en sortie du domaine de surface. Cette condition à la limite peut s'assimiler à une condition libre de chute et convient particulièrement bien à la modélisation d'un écoulement dans un ouvrage artificiel.

La condition à la limite normale est plus appropriée à la modélisation de canaux naturels. L'écoulement en sortie de domaine est supposé être purement gravitaire. La lame d'eau en sortie de domaine est donc parallèle à la surface du sol ($S_0 = S_f$) et on obtient donc un gradient de hauteur de lame d'eau nul en sortie. Cette condition à la limite dépend de la relation hauteur de lame d'eau/vitesse moyenne utilisée. Si on utilise la relation de Manning (Eq 1.16), on obtient alors comme condition à la limite en aval :

$$V_{sortie} = \frac{h_{sortie}^{2/3}}{n} \sqrt{S_0} \tag{1.22}$$

1.2.4 Résolution numérique

Les équations de Saint Venant ainsi que ses deux approximations classiques sont comme l'équation de subsurface 1.8 des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Seule l'approximation de l'onde cinématique présente une solution analytique dans un cas monodimensionnel simple. Une résolution approchée à l'aide de techniques numériques est donc nécessaire. Un grand nombre de travaux ont été réalisé sur la modélisation des écoulements dans les canaux et du ruissellement. Les mêmes méthodes numériques (différences finis, éléments finis, volumes finis,...) sont souvent utilisées pour la résolution. On peut notamment citer comme travaux de référence ceux présentés dans les articles suivants [Xanthopoulos et al, 1976] [Zhang et Cundy, 1989] [Gottardi et Venutelli, 1993] [Di Giammarco et al, 1996] [Singh et al, 1998] ou l'ouvrage de Chow [Chow, 1959].