

## **Modélisation du système et contrôle actif action correctrice en repère fixe**

Les méthodes passives et semi-actives ont été déjà proposées et étudiées pour le contrôle des vibrations en usinage. Cependant, il est rare de trouver dans ce domaine des systèmes industriels, de large diffusion, utilisant des capteurs pour caractériser les perturbations et des actionneurs afin d'appliquer une force de correction sur la structure. Ceci est encore plus rare pour les outils rotatifs (fraisage), et les limites technologiques sont la principale raison. En effet, il faut placer des capteurs et des actionneurs aussi près que possible du processus de coupe, avec les bonnes caractéristiques (bande passante, précision, temps de réponse, délai de durée limitée, etc.). Les développements technologiques occasionnés par le projet AVIBUS (FUI 8, 2019-2013) ainsi que les actions R&D entreprises conjointement depuis, par l'ENSAM et CETIM, nous permettent d'envisager une telle solution, à savoir un porte-outil rotatif, destiné aux opérations de fraisage, capable de procurer une action correctrice utilisant des actionneurs intégrés. Un tel porte-outil est actuellement en phase de réalisation. Lors de la réflexion engagée, nous avons également constaté d'autres besoins à satisfaire, tant sur un plan technologique (amplificateur de puissance à contrôleur intégré, chaînes d'acquisition « miniature », placées en repère tournant) que sur le plan scientifique (modélisation, synthèse de correcteurs robustes).

Ainsi, en parallèle aux développements technologiques, rendus difficiles par l'intégration des technologies dans un environnement hostile, tant d'un point de vue mécanique qu'électromagnétique, nous avons voulu valider nos propositions par une démarche type « preuve du concept », en utilisant une configuration capable de diminuer les difficultés technologiques (en plaçant l'action correctrice en repère fixe, réduisant la dynamique à un seule axe etc.), tout en gardant l'essentiel des défis scientifiques et aspects modélisation. Nous détaillerons par la suite cette configuration à action correctrice en repère fixe (Figure 46).

## **1. Modélisation du processus de fraisage**

Pour étudier et atténuer le phénomène de broutement en fraisage, on doit modéliser le processus de coupe qui consiste en l'interaction entre l'outil tournant et la pièce (Figure 45). Comme pour les autres modèles que nous avons développés et intégrés dans notre étude, nous allons utiliser une modélisation suffisamment souple et générale, sans pour autant insister sur les détails et sans prétendre à capter tous les phénomènes. Ceci est motivé par deux raisonnements :

- Premièrement, l'objectif de la démarche consiste à diminuer le niveau des vibrations, et plus particulièrement des phénomènes de broutement, en partant du principe que les instabilités démarrent à partir d'un régime stable. Les vibrations de grande amplitude associées à ces instabilités pourraient mettre à défaut nos modèles, faisant intervenir de manière décisive des phénomènes d'indentation ou de talonnage. En revanche, si on mise sur le succès de l'action correctrice, les modèles qui négligent ces phénomènes peuvent donner suffisamment satisfaction.
- Le deuxième argument est lié à la variabilité intrinsèque des processus industriels, bien plus importante que ceux pratiqués en laboratoire. Les outils, possédant déjà une grande dispersion de propriétés qui influent sur les modèles de coupe (qualité de revêtement, acuité des arrêtes, tolérances dimensionnelles etc.), évoluent et changent de propriétés

en raison de leur usure. La matière usinée peut, elle aussi, présenter des variations tout aussi importantes. Face à ces incertitudes et variations, une démarche de contrôle/commande se doit d'être robuste, afin de rester efficace. Ainsi, notre idée est d'utiliser des modèles qui captent suffisamment bien la dynamique globale du processus, laissant les différences modèle / réalité agissant comme « testeur » de la robustesse de nos stratégies, lors des essais. Cela ne dispense pas d'une analyse dédiée à l'évaluation de la robustesse de nos correcteurs (chapitre 3), mais la complète.

Suivant ces réflexions, le modèle du processus de coupe intégré dans notre démarche est assez classique [8]. Pour cela, on suppose généralement l'outil flexible, assujéti à des vibrations radiales. En effet, les efforts de coupe excitent la structure dans les deux directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , induisant les déplacements relatifs de l'outil par rapport à la pièce  $\Delta X$  et  $\Delta Y$ . Nous avons ainsi utilisé un modèle à deux degrés de liberté, même si par la suite, grâce à la configuration de notre banc d'essai, un seul en sera gardé. La représentation du processus de fraisage est montrée dans la figure suivante.

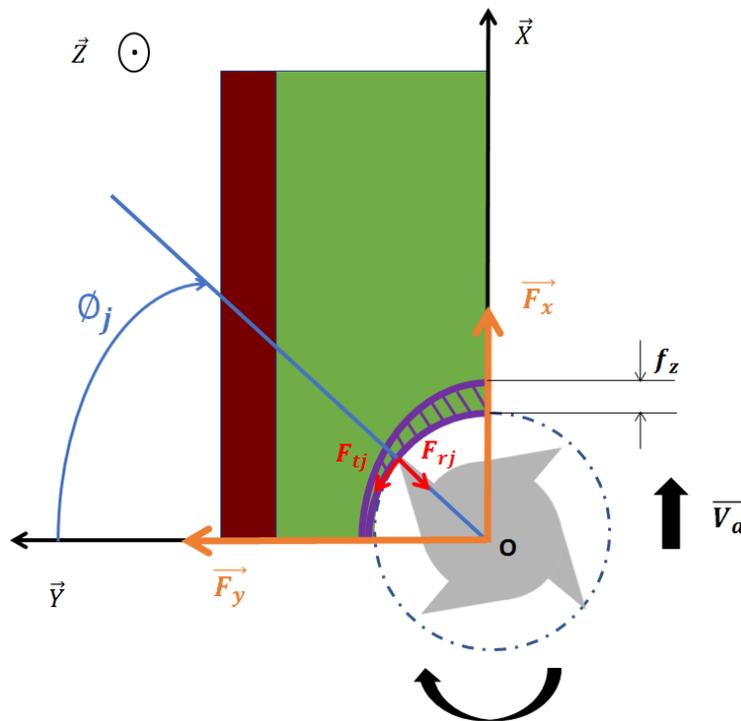


Figure 45 Modélisation dynamique du fraisage à deux degrés de liberté

Le calcul des efforts de coupe  $F_c$  commence par celui de l'épaisseur du copeau instantanée  $h_j(t)$  à la  $j^{\text{ème}}$  dent qui correspond à la distance entre l'arête de coupe et la surface à usiner dans la direction radiale. Donc, nous devons déterminer l'épaisseur du copeau statique et dynamique.

$$h_{\text{stat}} = f_z \sin \phi_j$$

$$h_{\text{dyn}} = \sin \phi_j (x(t) - x(t - \tau)) + \cos \phi_j (y(t) - y(t - \tau)) \quad (1)$$

$$h_j(t) = f_z \sin \phi_j + \Delta X \sin \phi_j + \Delta Y \cos \phi_j$$

$f_z$  : Avance par dent en mm/tr\dent

En utilisant le modèle d'*Altintas & Budak* [8], on obtient les efforts de coupe d'abord au niveau de la  $j^{\text{ème}}$  dent.

$$\begin{cases} \mathbf{Ft}_j(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_t \mathbf{a}_p \mathbf{h}_j(\mathbf{t}) \\ \mathbf{Fr}_j(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_r \mathbf{a}_p \mathbf{h}_j(\mathbf{t}) \end{cases} \quad (2)$$

où  $a_p$  représente la profondeur de passe axiale en mm, et  $K_t, K_r$  sont des coefficients de coupe tangentiel et radial (MPa)

On projette ensuite les deux composantes des  $F_c$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  lié au carter de la broche (bâti) où O est le centre de la fraise,  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont les axes latérales de celle-ci et  $\vec{x}$  est colinéaire à la vitesse d'avance  $\vec{V}_a$ :

$$\mathbf{Fc}_j(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Fc}_{xj}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{Fc}_{yj}(\mathbf{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Fr}_j(\mathbf{t}) \sin \phi_j - \mathbf{Ft}_j(\mathbf{t}) \cos \phi_j(\mathbf{t}) \\ -\mathbf{Fr}_j(\mathbf{t}) \cos \phi_j + \mathbf{Ft}_j(\mathbf{t}) \sin \phi_j(\mathbf{t}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\phi_j(\mathbf{t}) = \frac{2\pi N}{60} \mathbf{t} + j \frac{2\pi}{Z}$  ; Angle instantané entre la  $j^{\text{ème}}$  dent et l'axe  $(O, \vec{y})$   
où  $N$  représente la vitesse de rotation de l'outil en tr/min et  $Z$  le nombre de dents de la fraise.

Ensuite, on utilise les fonctions fenêtres  $\beta_j(\mathbf{t})$  qui « captent » la présence d'interaction de chaque dent avec la matière (présence ou pas de processus de coupe) :

$$\beta_j(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ si } \phi_j(\mathbf{t}) \in [\alpha_e, \alpha_s] \\ \mathbf{0} \text{ sinon} \end{cases} \quad (4)$$

où  $\alpha_e$  et  $\alpha_s$  sont les angles d'entrée et de sortie de l'outil dans la matière respectivement.

On obtient alors:

$$\mathbf{Fc}_j(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{Fc}_{xj}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{Fc}_{yj}(\mathbf{t}) \end{pmatrix} = \beta_j(\mathbf{t}) * \begin{pmatrix} -\mathbf{Fr}_j(\mathbf{t}) \sin \phi_j - \mathbf{Ft}_j(\mathbf{t}) \cos \phi_j(\mathbf{t}) \\ -\mathbf{Fr}_j(\mathbf{t}) \cos \phi_j + \mathbf{Ft}_j(\mathbf{t}) \sin \phi_j(\mathbf{t}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Finalement, en sommant les contributions en efforts de coupe de toutes les dents de la fraise :

$$\mathbf{Fc}_x = \sum_{j=1}^Z \mathbf{Fc}_{xj} \quad ; \quad \mathbf{Fc}_y = \sum_{j=1}^Z \mathbf{Fc}_{yj} \quad (6)$$

On obtient donc  $F_c$  sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{c_x} \\ \mathbf{F}_{c_y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c(\mathbf{t}) &= \mathbf{a}_p \overline{\overline{\mathbf{K}_{dyn}}}(\mathbf{t}) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{a}_p \mathbf{f}_z \overline{\mathbf{K}_{cin}}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{F}_c(\mathbf{t}) &= \mathbf{a}_p \overline{\overline{\mathbf{K}_{dyn}}}(\mathbf{t}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau}) \end{pmatrix} + \mathbf{a}_p \mathbf{f}_z \overline{\mathbf{K}_{cin}}(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

$\overline{\overline{\mathbf{K}_{dyn}}}(\mathbf{t})$  est une matrice périodique et  $\overline{\mathbf{K}_{cin}}(\mathbf{t})$  un vecteur périodique.

Le premier terme dans l'expression des  $F_c$  appelé dans la littérature anglaise « regenerative cutting forces » représente une composante provenant des vibrations dans certains cas, ces vibrations peuvent s'auto-entretenir et s'amplifier, générant des amplitudes importantes. Elles affectent alors l'état de surface des pièces usinées, étant pour ces raisons redoutées par les industriels. Le deuxième terme dans  $F_c$ , appelé « kinematic cutting forces », est à l'origine de vibrations forcées qui peuvent également dégrader l'état de surfaces des pièces en produisant des défauts d'ordre géométriques. La séparation des deux composantes permet de constater la présence des deux types de mouvements : vibrations forcées (inhérentes lorsque le deuxième terme agit sur un système de raideur finie) et instabilités (produites par le premier terme, dans certaines conditions).

Il n'entre pas dans nos buts déclarés de faire une étude détaillée ou un état de l'art exhaustif des études du phénomène de broutement, un des plus passionnants et prolifiques phénomènes étudiés en usinage ; il existe d'ailleurs des bons ouvrages allant dans ce sens [34]. Altintas & Budak [8] et Budak & Altintas [35] ne sont pas les premiers à avoir étudié le phénomène du broutement en fraisage. En effet, ce phénomène a été étudié par plusieurs tels que Sridhar, Hohn et Long (1968), puis par Opitz et Bernardi (1969) et aussi par Koenigsberger et Tlusty (1970). En 1981, Tlusty et Ismail ont développé une méthode de simulation numérique dans le domaine temporel pour prédire l'apparition du broutement. Ensuite il y a eu le duo Altintas et Budak qui ont proposé une méthode analytique de résolution, dans le domaine fréquentiel, basée sur le critère de stabilité de Nyquist pour étudier le phénomène de broutement en fraisage. Cette méthode, qui d'ailleurs utilise un modèle à deux degrés de liberté pour étudier les vibrations de la structure dans les deux directions radiales, repose sur le développement des coefficients directionnels  $\overline{\overline{\mathbf{K}_{dyn}}}(\mathbf{t})$  en série de Fourier et de leur approximation par leur moyenne. Cette méthode, souvent appelée « zero order solution » et introduite par Altintas & Budak [8], est plus utilisée lorsqu'on a un engagement de l'outil supérieure au quart du diamètre de celui-ci [36]. En effet, on est amenés à ajouter les harmoniques les plus élevées dans le développement en série de Fourier des coefficients directionnels lorsque l'engagement et le nombre de dents de l'outil sont faibles rendant le processus de coupe très discontinue [36]. Ensuite, Insperger & Stépan [36] ont présenté une méthode de semi- discrétisation pour prédire les lobes de stabilités en divisant le retard  $\boldsymbol{\tau}$  en un nombre fini d'intervalles de temps  $\Delta t$ . Ainsi, la justesse de ces méthodes de semi-discrétisation dépend fortement de ce paramètre  $\Delta t$ .

Cependant, la majorité de ces études se concentrent sur l'analyse de la stabilité des opérations d'usinage. Les modèles proposés sont, plus ou moins, similaires, seules étant proposées et comparées les méthodes mathématiques employées pour donner d'une certaine manière la capacité à distinguer les jeux de paramètres donnant des processus stables de ceux qui provoquent l'instabilité. Ces méthodes, qu'elles utilisent des approches numériques (semi-discrétisation, méthodes des éléments finis temporels etc.) ou analytiques (en faisant, peu ou prou, des approximations des modèles initiaux : zero-order, linéarisation, approximations de Padé etc.), permettent de tracer ce qu'on appelle des lobes de stabilité, qui représentent des variétés géométriques (courbes, surfaces etc.) plongés dans des espaces ( $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  et rarement plus) de paramètres du processus de coupe, capables de séparer des régions « stables » des régions « instables ».

Notre but n'est pas similaire. Nous employons le modèle de processus proposé afin de construire nos stratégies, mais aussi pour tester leur efficacité (en simulation). Pour ce faire, aucune simplification ou approximation n'est guère nécessaire. D'ailleurs, il nous semble important d'indiquer qu'il est aisé d'enrichir ou compléter ce modèle classique, en utilisant simplement des lois de coupe plus adaptés ou « captant » des phénomènes négligés ici (talonnage, par exemple). En revanche, les tracés de ces lobes de stabilité sera utile pour la mise en évidence de l'efficacité de nos stratégies, et aux comparaisons entre les méthodes de synthèse des correcteurs proposées. Comme nous allons présenter plus tard, nous avons opté pour une approche numérique, assez gourmande en temps de calcul mais présentant l'avantage d'une simplicité d'implémentation et de l'absence de simplifications et approximations supplémentaires.

## **2. Modélisation du comportement dynamique de la structure**

### **a) Modélisation physique**

Nous nous plaçons d'abord dans un cas simple, où soit l'outil, soit l'éprouvette sont modélisables par une poutre en flexion. Notre modèle physique de départ est celui imaginé pour une action correctrice en repère tournant. Cela a été finalement transposé sur une configuration similaire, mais avec une action correctrice en repère fixe, pour les besoins de notre démarche de preuve du concept (Figure 46). On modélise donc une poutre encastrée en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et ayant une « action » correctrice transversale injectée en  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ . Lorsque ce modèle représente l'outil, les effets liés au fait qu'en réalité il s'agit d'une poutre en rotation (dynamique et action correctrice en repère tournant) seront négligés car les faibles moments d'inertie des outils (fraises) utilisés en finition le justifient (modèle traité en détail en chapitre 5).

Les actionneurs piézoélectriques possèdent une raideur très importante (allant jusqu'à plusieurs centaines de  $\text{N}/\mu\text{m}$ ), une très grande dynamique (bande passante limitée, dans nos configurations, par les performances de l'électronique de puissance) et une caractéristique de fonctionnement particulière, qui lie le déplacement produit à la tension électrique appliquée et la force de résistance rencontrée. Nous allons prendre comme modèle une dépendance linéaire du déplacement produit, en fonction de la tension appliquée. Ceci est une bonne approximation si on utilise un actionneur « déraisonnablement » raid, car la contribution de la force résistante

(réaction) développée par la poutre sera ainsi négligeable. L'actionneur que nous utilisons pour le dispositif de contrôle actif en repère fixe a une raideur d'environ  $185 \text{ N}/\mu\text{m}$  puisqu'il s'agit d'une association en série de deux actionneurs piézoélectriques du même fabricant *Piezosystemjena* ; le premier actionneur de référence HPST 1000/35 - 25/80 a une raideur de  $250 \text{ N}/\mu\text{m}$  et le deuxième actionneur de référence HPST 1000/35-25/25 a une raideur de  $700 \text{ N}/\mu\text{m}$ . En revanche, ce modèle « simple » d'actionneur nous obligera de considérer une excitation en déplacement au point de contact actionneur/structure.

D'autres détails de comportement de ces actionneurs, comme le gain non linéaire et l'hystérésis par exemple, éloignent notre modèle « simpliste » de la réalité. Nous n'affinons pas dans un premier temps ce modèle car, en dehors de l'influence limitée de ces effets lorsqu'on travaille sur des courses faibles, nous préférons laisser les phénomènes négligés agir comme « perturbations » du modèle nominal de notre système. Ceci contribuera à une validation de la robustesse de notre approche lors de la phase de validation expérimentale.

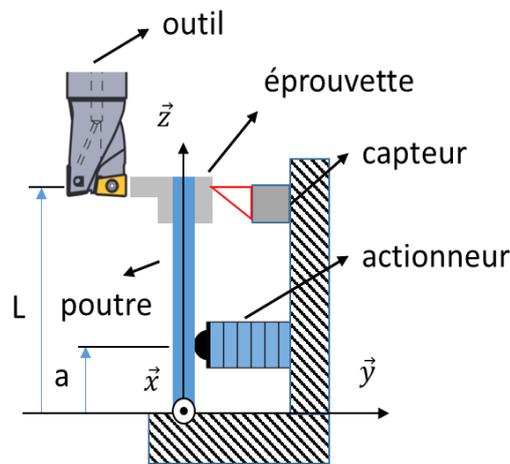


Figure 46 Dispositif du contrôle actif de la lame vibrante en fraisage

Pour modéliser la dynamique de la lame vibrante associée à une éprouvette qui subit une opération de fraisage, on commence par étudier le comportement vibratoire d'une poutre d'Euler-Bernoulli soumise à une perturbation (effort) à son extrémité libre et à un déplacement imposé par un actionneur à une distance  $a$  de l'extrémité encastree.

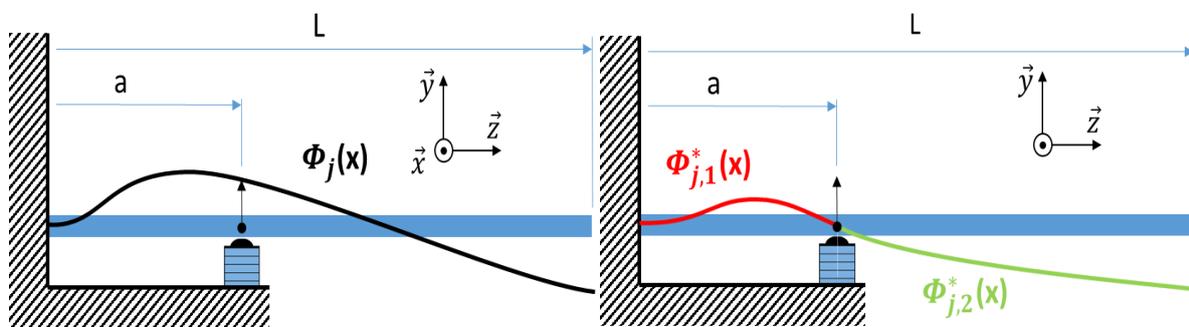


Figure 47 Modèles de poutre encastree-libre, excitation en déplacement en  $x = a$

Il s'agit ici d'un cas atypique d'excitation d'une poutre, pour lequel très peu d'ouvrages présentent des résultats et démarches de modélisation. L'équation de la dynamique d'une poutre uniforme Euler-Bernoulli, en vibrations latérales sans amortissement, est :

$$EI \frac{\partial^4 \mathbf{y}(x, t)}{\partial x^4} = -\rho S \frac{\partial^2 \mathbf{y}(x, t)}{\partial t^2} ; \mathbf{y} = \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_r + \mathbf{y}_b \quad (8)$$

$y_t(x, t)$  désigne le déplacement transversal de la poutre ;  $y_b(x, t)$  désigne le déplacement absolu de la poutre par rapport au repère fixe, en considérant une perturbation appliquée en régime « statique » ;  $y_r(x, t)$  désigne le déplacement transversal relatif (de la déformée « dynamique » par rapport à une poutre en équilibre « statique » sous une déformation  $y_b(x, t)$  [37].

Pour bien comprendre la distinction entre la composante « quasi-statique »  $y_b(x, t)$  et celle relative  $y_r(x, t)$ , il faut comprendre que si on impose au point  $x = a$  un déplacement  $e = y(a, t)$ , mais de manière stationnaire, nous aurons une solution  $y_b(x, t)$ . La composante  $y_r(x, t)$  sera due à un effet dynamique, lié au fait que le déplacement en  $x = a$  est imposé de manière dynamique. Timoshenko semble être le premier à avoir proposé cette approche dans la modélisation des poutres à excitation par la base [37]. En revanche, dans la plupart des travaux concernant ces cas de figure [38] il s'agit d'une excitation sismique qui provient du seul mouvement de la base. Dans notre cas, la base (les appuis ou le point d'encastrement) est fixe mais un point du domaine d'intégration est animé par un mouvement imposé. On préfère parler, dans notre cas d'une excitation en déplacement, au lieu d'utiliser le terme d'excitation sismique.

Le déplacement absolu de la poutre  $y_b$  est déterminé à l'aide de fonctions d'influence de déplacement  $\delta_1(x)$  et  $\delta_2(x)$  pour une poutre en mouvement de vibrations transversales et d'une petite rotation de sa base [38].

Le déplacement relatif est obtenu en utilisant le principe de superposition modale :

$$\mathbf{y}_r = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{f}_j(t) \phi_j^*(x) \quad (9)$$

$\phi_j^*(x)$ , appelées fonctions propres, sont les solutions des vibrations libres non amorties de la poutre :

$$\frac{d^4 \phi_j^*(x)}{dx^4} - \frac{\omega_j^2 \rho S}{EI} \phi_j^*(x) = 0 \quad (10)$$

L'obtention des fonctions de transfert nécessaires fait appel à deux représentations modales (Figure 47). La première base modale  $\{\omega_j, \phi_j(a)\}$  est celle d'une poutre encastree-libre (problème classique [39]). La deuxième base modale  $\{\omega_j^*, \phi_j^*(L)\}$ , celle d'une poutre à appui en  $x = a$  est plus difficile à trouver. Les fonctions propres à déterminer sont définies par morceaux ( $\phi_j^*(x) = \{\phi_{j,1}^*(x), \text{si } x \leq a ; \phi_{j,2}^*(x), \text{si } x \geq a\}$ ). Nous imposons 8 conditions aux limites : extrémité gauche encastree, extrémité droite libre, position imposée en  $x = a$  et continuités  $C_1$  et  $C_2$  au même point.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_t(\mathbf{x} = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_t'(\mathbf{x} = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_t(\mathbf{x} = \mathbf{a}) = \mathbf{U}_{piézo} \\ \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{x} = \mathbf{L}) = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{U}_t''(\mathbf{x} = \mathbf{L}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{tr}(\mathbf{x} = \mathbf{L}) = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{U}_t'''(\mathbf{x} = \mathbf{L}) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (11)$$

Ces conditions se traduisent en termes de fonctions propres  $\phi_{j,1}^*(x)$  et  $\phi_{j,2}^*(x)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,1}^*(x = 0) = 0 \\ \phi_{j,1}^{*'}(x = 0) = 0 \\ \phi_{j,1}^*(x = a) = 0 \\ \phi_{j,1}^{*''}(x = a) = \phi_{j,2}^{*''}(x = a) \\ \phi_{j,1}^{*'}(x = a) = \phi_{j,2}^{*'}(x = a) \\ \phi_{j,2}^*(x = a) = 0 \\ \phi_{j,2}^{*''}(x = L) = 0 \\ \phi_{j,2}^{*'''}(x = L) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

Classiquement, en imposant la condition de déterminant nul pour ce système homogène de 8 équations avec 8 inconnues, nous obtenons une équation transcendante qui possède une infinité de solutions : les pulsations propres  $\omega_j^*$ . On en calcule un nombre fini (nous retenons maximum 8 modes), pour obtenir une approximation par troncature modale. Les coefficients des deux fonctions propres seront déterminés ensuite (à une constante près) pour ces 8 valeurs de pulsations propres. On obtient ainsi les fonctions propres  $\phi_j^*(\mathbf{x})$  et par simple calcul les masses modales respectives :

$$\mu_j = \int_0^L (\phi_j^*(x))^2 dx \quad (13)$$

Pour déterminer les coordonnées modales  $f_j(t)$ , il faut calculer les forces généralisées  $p_j(t)$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{p}_j(t) \phi_j^*(x) \\ \Rightarrow \phi_k^*(x) (\mathbf{p}(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{p}_j(t) \phi_j^*(x)) \\ \Rightarrow \int_0^L \phi_k^*(x) \mathbf{p}(x, t) dx &= \int_0^L \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{p}_j(t) \phi_j^*(x) \phi_k^*(x) dx \end{aligned} \quad (14)$$

En utilisant l'orthogonalité des modes propres, qui s'écrit pour une poutre homogène, de section uniforme :

$$\int_0^L \phi_i^*(x)\phi_j^*(x) dx = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ \mu_i & i = j \end{matrix} \quad (15)$$

on obtient :

$$\int_0^L \phi_j^*(x)p(x,t) dx = \int_0^L p_j(t)\phi_j^*(x)^2 dx = p_j(t) \int_0^L \phi_j^*(x)^2 dx = \mu_j p_j(t) \quad (16)$$

$$\Rightarrow p_j(t) = \frac{1}{\mu_j} \int_0^L \phi_j^*(x)p(x,t) dx$$

En remplaçant  $y_r$  et  $p$  par leurs décompositions modales dans l'équation des vibrations forcées de la poutre en  $y_r$ , et en utilisant la relation (10), on obtient :

$$f_j'' + 2\zeta_j\omega_j f_j' + \omega_j^2 f_j = \frac{p_j}{\rho S} \quad (17)$$

En utilisant l'intégrale de *Duhamel*, la solution de cette équation est :

$$f_j(t) = \frac{1}{\rho S \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}} \int_0^t p_j(\Gamma) e^{-\zeta_j \omega_j (t-\Gamma)} \text{Sin}[\omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} (t - \Gamma)] d\Gamma \quad (18)$$

On obtient alors les fonctions propres  $\phi_j^*(x)$  et par conséquent la première fonction de transfert recherchée  $H_w$  (perturbation extérieure  $\rightarrow$  déplacement vibratoire) :

$$H_w(s) = y_t(L,s)/F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\phi_j^*(L)^2}{\mu_j^*(s^2 + 2\lambda_j^* \omega_j^* s + \omega_j^{*2})} \right) \quad (19)$$

Pour la deuxième fonction de transfert  $H_u$  (action correctrice  $\rightarrow$  déplacement vibratoire) nous proposons une approche différente : elle est obtenue en utilisant deux fonctions  $H_{u1}$  et  $H_{u2}$  :

$$\begin{aligned} H_u(s) &= \frac{y_t(L,s)}{e(s)} = H_{u1}(s) \times H_{u2}(s) \\ H_{u1}(s) &= \frac{y_t(L,s)}{F_p(s)} \\ H_{u2}(s) &= \frac{F_p(s)}{e(s)} = \frac{1}{\frac{e(s)}{F_p(s)}} \end{aligned} \quad (20)$$

L'approche consiste d'abord à se poser la question : quelle est la force  $F(t)$  appliquée en  $x = a$  nécessaire pour produire le déplacement  $y_t(L,t)$ . Cette force sera donc nécessairement la réaction poutre  $\rightarrow$  actionneur si on impose le bon déplacement avec un actionneur idéal, tel que nous faisons. Cela se traduit par une relation simple entre cette force et le déplacement nécessaire.

La première sous fonction  $H_{u1}$  est équivalente à une fonction de transfert habituelle (force d'excitation extérieure → déplacement vibratoire) où la perturbation  $F_p$  est appliquée en  $x = a$  de la poutre et le déplacement est mesuré à son extrémité en  $= L$ . On utilisera la base modale  $\{ \omega_j, \phi_j(a) \}$  d'une poutre encastrée-libre. Classiquement :

$$H_{u1}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\phi_j(L) \phi_j(a)}{\mu_j (s^2 + 2 \lambda_j \omega_j s + \omega_j^2)} \right) \quad (21)$$

La deuxième sous fonction  $H_{u2}$  fait aussi intervenir cette fonction de transfert (perturbation extérieure → déplacement vibratoire) où la perturbation  $F_p$  est appliquée en  $x = a$  de la poutre et le déplacement  $e$  est mesuré au même point.

$$H_{u2}(s) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\phi_j(a)^2}{\mu_j (s^2 + 2 \lambda_j \omega_j s + \omega_j^2)} \right)} \quad (22)$$

Nous obtenons finalement notre deuxième fonction de transfert  $H_u$  :

$$H_u(s) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\phi_j(L) \phi_j(a)}{\mu_j (s^2 + 2 \lambda_j \omega_j s + \omega_j^2)} \right)}{\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\phi_j(a)^2}{\mu_j (s^2 + 2 \lambda_j \omega_j s + \omega_j^2)} \right)} \quad (23)$$

Les amortissements modaux  $\lambda_j$  ont été identifiés expérimentalement pour les deux premiers modes, en utilisant la méthode des -3dB sur un balayage en fréquence : 0,035% et 5%.

### b) Modèle d'état

Notre modèle est linéaire et par conséquent il obéit au principe de superposition.

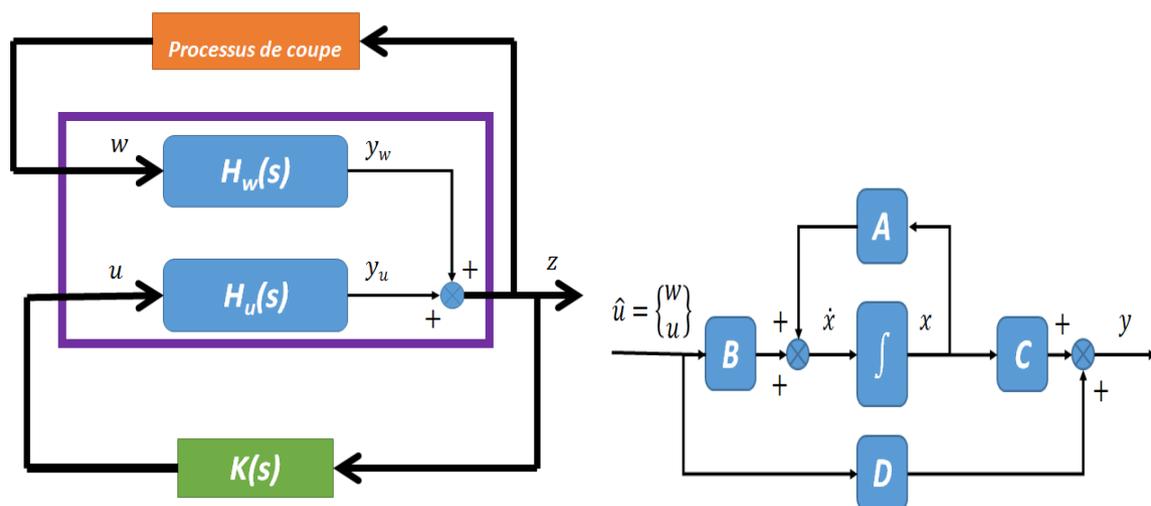


Figure 48 Représentation du système : fonctions de transfert vs. Modèle d'état

Cela nous conduit à une représentation de la dynamique par un formalisme utilisant les fonctions de transfert (Figure 48, gauche). En revanche, pour implémenter une stratégie de contrôle actif d'un système, on a recours en général à un modèle d'état approprié (Figure 48, droite). Pour en obtenir un, nous pouvons procéder suivant deux méthodes. La première méthode consiste à déduire de  $H_u$  et  $H_w$  les équations différentielles correspondantes. Par traitement et identification algébrique, nous pouvons trouver ensuite notre modèle d'état. Cependant, nous allons plutôt utiliser une des méthodes de réalisation d'état à partir de la matrice de transfert d'un système multi variable, parce que cela nous semble la méthode la plus adéquate lorsqu'on dispose déjà des fonctions de transfert. Nous avons donc choisi d'appliquer la forme canonique compagne de commandabilité aux deux fonctions de transfert  $H_u$  et  $H_w$ , en raison de la forme de leurs expressions similaire à celle requise dans cette technique. Pour expliquer le principe d'obtention de telles formes compagnes commandable dites canoniques, on prend l'exemple d'un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_1y(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \quad (24)$$

Ce qui correspond à la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (25)$$

Après des calculs intermédiaires [40], on obtient finalement la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \\ \ddot{X} \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [b_0 \quad b_1 \quad b_2] x \end{aligned} \quad (26)$$

Ensuite, il faut utiliser ces formes canoniques obtenues des fonctions de transfert  $H_u$  et  $H_w$  pour avoir la représentation d'état de notre système. Pour cela, il existe les méthodes de réalisation d'état d'un système multi variable décrit par sa matrice de transfert, telles que les méthodes basées sur les formes de *Jordan* où on utilise la méthode de *Gilbert* dans le cas de pôles simples conduisant directement à une réalisation minimale ou celles basées sur la factorisation de la matrice de transfert comme la technique de *Smith Mc Millan* ou bien d'autres méthodes. Dans notre cas, c'est la méthode de réalisation directe qui a été utilisée pour la simplicité de sa mise en œuvre, malgré la nécessité de réduction d'ordre.

Finalement, les deux méthodes d'obtention du modèle d'état de notre système nous permettent de construire le correcteur recherché selon la stratégie de commande désirée ( $H_\infty$ ,  $LQG$ ,...) pour atténuer les vibrations de notre système. Afin de bien comprendre le fonctionnement du contrôle de notre système, on va calculer le gain modal des deux fonctions de transfert  $H_u$  et  $H_w$ . On commence par déterminer le gain modal de  $H_w$  (criticité modale) (Figure 49) pour identifier les

modes les plus critiques pour la stabilité du système. Par la suite, on calcule le gain modal de  $H_u$  (influence du contrôleur) (Figure 50) pour savoir si le correcteur arrive à détecter et surtout à agir sur ces modes critiques. Avec notre calcul de ces deux fonctions de transfert, celles-ci représentent les deux premiers modes de notre système. On notera que l'axe y (magnitude) de tous les diagrammes de Bode de la fonction de transfert  $H_w$  figurant dans ce rapport désigne le rapport d'amplitudes du déplacement vibratoire  $y_t$  mesuré à l'extrémité de la poutre ( $x=L$ ) par la perturbation externe au même point alors que l'axe y des diagrammes de Bode de la fonction de transfert  $H_u$  représente plutôt le rapport d'amplitudes du déplacement vibratoire  $y_t$  mesuré à l'extrémité de la poutre ( $x=L$ ) par le déplacement imposé par l'actionneur piézoélectrique en  $x=a$  de la poutre.

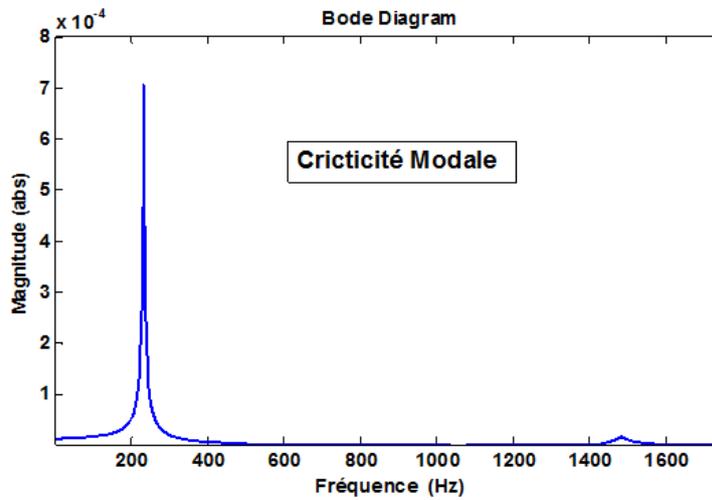


Figure 49 Diagramme de Bode de  $H_w$

On peut constater que le premier mode est le plus critique (Figure 49). Le correcteur a donc plus intérêt à amortir le premier mode pour atténuer davantage les déplacements vibratoires de la lame.

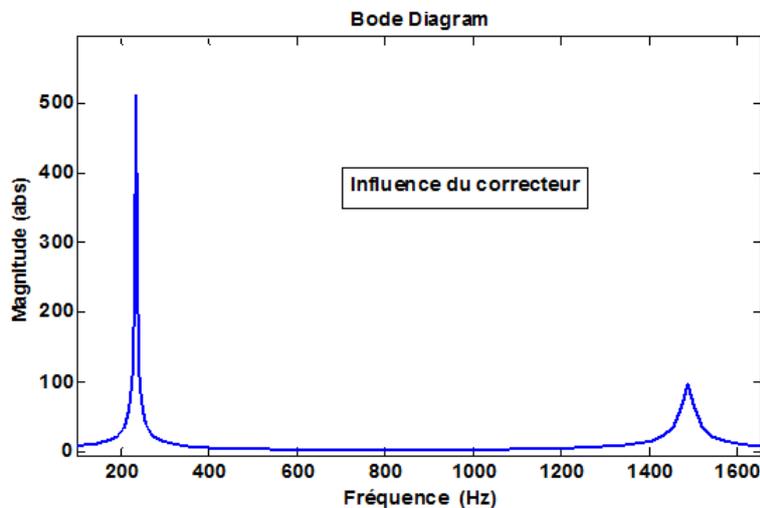


Figure 50 Diagramme de Bode de  $H_u$

L'influence du contrôleur ou sa capacité à contrôler (Figure 50), donnée par la magnitude de la fonction  $H_u$ , sur le deuxième mode est la plus faible. Par conséquent, le correcteur doit fournir plus d'efforts pour pouvoir agir sur ce mode que sur le premier. Ceci peut s'expliquer par la localisation de l'actionneur et/ou capteur qui n'est pas idéale pour influencer ce deuxième mode. Si on a la possibilité de changer la position ces deux derniers, il serait alors intéressant de déterminer l'origine de ce manque d'influence sur ce mode. Pour cela, il faut déterminer le degré de contrôlabilité et d'observabilité de chaque mode.

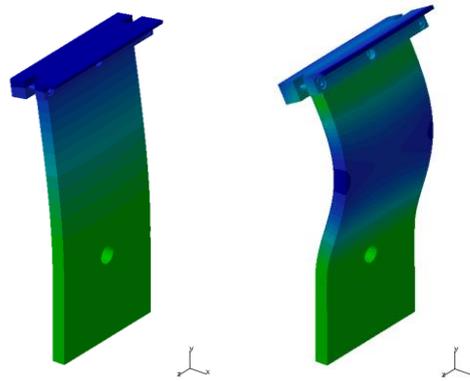


Figure 51 Premier mode de flexion (~150Hz) et deuxième mode de flexion (~1000Hz)

Pour valider les modèles qui représentent la lame, on compare les résultats de simulation utilisant le formalisme des fonctions de transfert, avec ceux obtenus avec le modèle d'état. On a choisi la lame vibrante de dimensions  $5 \times 160 \times 80$  mm étudiée et testée plus tard avec les différents correcteurs. On obtient une différence en déplacements vibratoires de l'ordre de  $10^{-14}$  entre ceux obtenus de la « plant » et ceux résultants de l'ensemble des deux fonctions de transfert  $H_u$  et  $H_w$ . Ce résultat montre le degré d'exactitude du modèle d'état par rapport au modèle du système en fonctions de transfert (Figure 52).

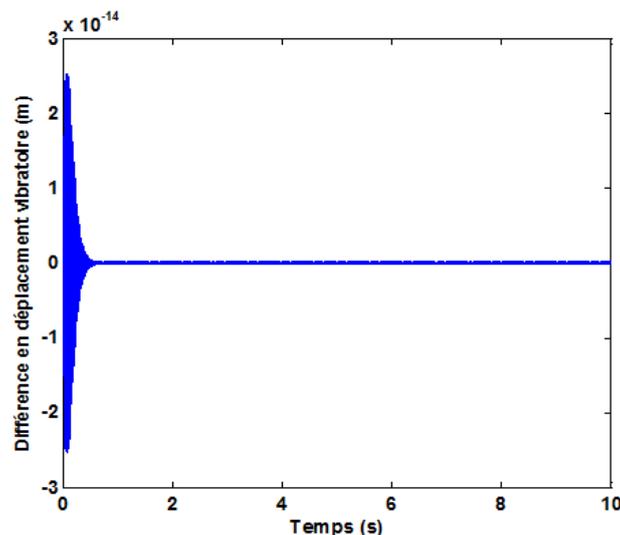


Figure 52 Validation du modèle d'état

### 3. Stratégies de calcul des correcteurs

#### a) Première stratégie

La première stratégie consiste à ignorer le processus de coupe pendant la phase de détermination du correcteur. Elle est par conséquent plus simple à réaliser puisqu'elle ne nécessite que le modèle d'état du système vibrant uniquement. Celui-ci, ayant déjà été obtenu précédemment nous permet alors de produire des correcteurs  $H_\infty$  en utilisant l'approche par équations de Riccati qui repose sur le principe de dichotomie, des correcteurs  $LQG$  ou encore des correcteurs déterminés via l'algorithme D-K itération, plus connus sous le nom de la  $\mu$  *synthèse*.

#### b) Deuxième stratégie

Contrairement à la première, la deuxième stratégie est nettement plus contraignante. En effet, il faut relier le modèle d'état du système vibrant au processus de coupe afin d'établir un nouveau modèle d'état. Celui-ci servira au calcul du correcteur suivant différentes stratégies de commande. En s'inspirant du travail de Monnin et al [17], on réalise la modélisation du système pour le contrôle actif du fraisage suivant la deuxième stratégie. On dispose déjà de la représentation d'état du système lame vibrante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + [\mathbf{B}_\omega \mathbf{B}_u] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (27)$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \mathbf{F}_y(t) \\ &= -\mathbf{a}_p (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau)) \sum_{j=1}^z \beta_j(t) (\mathbf{K}_t \sin \phi_j(t) \cos \phi_j(t) - \mathbf{K}_r \cos^2 \phi_j(t)) \\ &\quad - \mathbf{a}_p \mathbf{f}_z \sum_{j=1}^z \beta_j(t) (-\mathbf{K}_r \sin \phi_j(t) \cos \phi_j(t) + \mathbf{K}_t \sin^2 \phi_j(t)) \end{aligned} \quad (27')$$

Ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{K}_d(t) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t - \tau)) + \mathbf{F}_p(t) \quad (28)$$

$\mathbf{K}_d(t)$  est la raideur dynamique qui dépend du nombre de dents de l'outil mais aussi de ses angles d'entrée et de sortie dans la matière à usiner.

On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_\omega \mathbf{C} \mathbf{K}_d(t)) \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}_\omega \mathbf{C} \mathbf{K}_d(t) \mathbf{x}(t - \tau) \\ \quad + \mathbf{B}_\omega \mathbf{F}_p(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (29)$$

On pose

$$\mathbf{x}_\tau(t) \cong \mathbf{x}(t - \tau) \quad (30)$$

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation N°30, on obtient :

$$\mathbf{x}_\tau(s) \cong e^{-s\tau} \mathbf{x}(s) \quad (31)$$

On applique l'approximation de Padé de la fonction  $e^{-s\tau}$  à l'ordre  $n_d$ . Cette approximation consiste à chercher une fraction rationnelle ayant le même développement de Taylor de la fonction  $e^{-s\tau}$  à l'ordre  $n_d$ . Cette méthode est très utile en pratique pour le calcul de la fonction exponentielle en précision machine car elle nécessite d'une part moins d'opérations (à cause de la symétrie numérateur / dénominateur) et fournit de plus une approximation de meilleure qualité que le développement de Taylor de la fonction  $e^{-s\tau}$ . Le choix de  $n_d$  est crucial puisqu'en l'augmentant on améliore certes la précision de l'approximation qui devient de plus en plus fine. Cependant, on augmente en parallèle l'ordre du modèle d'état du système final, et par conséquence celui du correcteur. Celui-ci subissait déjà des opérations de réduction d'ordre au cours de la première stratégie, c'est-à-dire en négligeant carrément le processus de coupe dans la modélisation. Cette approximation (Figure 53) se traduit par :

$$e^{-s\tau} \cong \mathbf{C}_d (s \mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d \quad (32)$$

Où  $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d$  et  $\mathbf{D}_d$  désignent le système d'état d'ordre  $n_d$  de l'approximation de Padé de la fonction  $e^{-s\tau}$ .



Figure 53 Approximation de la fonction  $e^{-s\tau}$

On note le vecteur état de cette approximation  $\mathbf{x}_d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ . Ce modèle d'état se traduit en temporel par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d(t) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}_d \mathbf{x}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_\tau(t) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{D}_d \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

On suppose qu'on a le même retard  $\tau$  pour tous les éléments du vecteur état  $\mathbf{x}(t)$ . Le système d'équations (33) est alors équivalent à:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{d,i}(t) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{d,i}(t) + \mathbf{B}_d \mathbf{x}_i(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\tau,i}(t) &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_{d,i}(t) + \mathbf{D}_d \mathbf{x}_i(t) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{Où } \tilde{\mathbf{X}}_\tau = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\tau,1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\tau,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_D = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{d,1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{d,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_d}$$

$X_D(t)$  est le vecteur état approximé du système infini dimensionnel dû à la présence du retard  $\tau$  à un nombre d'états finis.  $n_d$  est l'ordre de l'approximation de Padé de la fonction  $e^{-s\tau}$  qui apparaît lors de la transformation de Laplace du vecteur état retardé  $x(t - \tau)$ , et  $n$  est l'ordre du modèle d'état initial du système sans processus de coupe.  $X(t)$  est le vecteur état du système non retardé.

Le modèle d'état correspondant à la dynamique du vecteur  $X_D(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{X}_D(t) &= A_D X_D(t) + B_D X(t) \\ X_\tau(t) &= C_D X_D(t) + D_D X(t) \end{aligned} \quad (35)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_D &= \text{diag}(A_d, A_d, \dots, A_d) \in \mathbb{R}^{n_d \times n} \times \mathbb{R}^{n_d \times n} \\ B_D &= \text{diag}(B_d, B_d, \dots, B_d) \in \mathbb{R}^{n_d \times n} \times \mathbb{R}^n \\ C_D &= \text{diag}(C_d, C_d, \dots, C_d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_d \times n} \\ D_D &= \text{diag}(D_d, D_d, \dots, D_d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (36)$$

En intégrant les équations (30) et (35) dans l'équation (29), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = [A + B_\omega C K_d(t) (I - D_D)] X(t) - \\ B_\omega C K_d(t) C_D X_D(t) + B_\omega F_p(t) + B_u u(t) \\ Y(t) = C X(t) \end{cases} \quad (37)$$

Afin d'obtenir un système linéaire invariant dans le temps, on fait l'hypothèse d'un processus de coupe (Figure 54) légèrement discontinue équivalent à une faible variabilité de la raideur dynamique  $K_d(t)$ . Ce cas d'usinage a lieu surtout lorsqu'on a un engagement élevé de l'outil dans la matière avec grand nombre de dents de l'outil. On approxime, dans ce cas-là, la raideur dynamique par « the average component of the Fourier series expansion » cité par Altintas & Budak [8]. Sébastien Seguy [78] a aussi approximé la raideur dynamique  $K_d(t)$  par « l'ordre zéro » appelée aussi « la valeur moyenne » de sa décomposition en série de Fourier.

$$\overline{K_d(t)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau K_d(t) dt \quad (38)$$

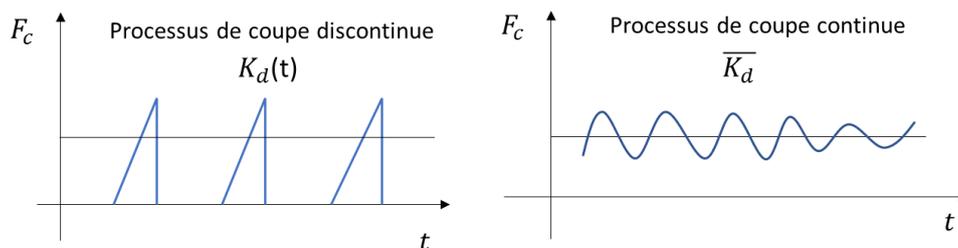


Figure 54 Types de processus de coupe

$X(t)$  devient alors  $\tilde{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Le système d'équations (37) devient :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = [A + B_\omega C \overline{K_d(t)} (I - D_D)] \tilde{X}(t) - \\ B_\omega C \overline{K_d(t)} C_D X_D(t) + B_\omega F_p(t) + B_u u(t) \\ Y(t) = C \tilde{X}(t) \end{cases} \quad (39)$$

On pose alors le nouveau vecteur état du système vibrant associé au processus de coupe :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ X_D(t) \end{pmatrix} \quad (40)$$

La première équation du système d'équations (35) devient :

$$\dot{X}_D(t) = A_D X_D(t) + B_D \tilde{X}(t) \quad (41)$$

Le système d'équations (39), (40) et (41) donne le modèle d'état du système entier avec processus de coupe suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}'(t) &= A' X'(t) + B' \begin{pmatrix} F_p(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \\ Y' &= [C \quad 0] X'(t) \\ A' &= \begin{bmatrix} [A + B_\omega C \overline{K_d(t)} (I - D_D)] & -B_\omega C \overline{K_d(t)} C_D \\ B_D & A_D \end{bmatrix} \\ B' &= \begin{bmatrix} B_\omega & B_u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

Le correcteur calculé suivant la deuxième stratégie dépend naturellement du processus de coupe, et donc des paramètres de coupe tels que la profondeur de passe axiale  $a_p$ , de l'engagement radial de l'outil mais aussi du type d'opération d'usinage effectuée sur la pièce. Par conséquent, une opération qui possède une variation paramétrique (vitesses de rotation, engagement axial et/ou radial évolutif etc.) nécessiterait une multitude de correcteurs déterminés selon cette méthode. Il serait donc plus judicieux d'utiliser un correcteur obtenu avec la première stratégie pour les opérations d'usinages dont les paramètres de coupe changent souvent, et un correcteur de la deuxième stratégie pour les opérations qui varient très peu. Un autre inconvénient des correcteurs déterminés suivant la deuxième stratégie est que les simplifications inhérentes à la méthode, opérées sur le modèle de départ, se manifestent par une efficacité limitée. En fin de compte, ces correcteurs se trouvent moins performants que ceux déterminés par la première stratégie.

#### 4. Contrôle actif d'une lame vibrante

Dans cette partie vont être présentés les résultats, en simulations et essais, du contrôle actif d'une lame vibrante excitée par une perturbation externe et corrigée suivant des stratégies de commande étudiées dans le chapitre précédent. L'effet du correcteur sera constaté sur une lame

soumise, en premier temps, à une perturbation quelconque. L'effort de fraisage sera ensuite appliqué à notre système, corrigé avec les mêmes correcteurs. On verra par la suite l'impact de ceux-ci sur la stabilité du système usinant.

Nous avons comparé les résultats de simulation de la vibration de la lame avec et sans correction suivant deux stratégies : compensateur  $H_\infty$ , compensateur  $LQG$  et correcteur de type  $\mu$ -synthèse. On a testé ces correcteurs sur deux différentes lames de même matériau mais de dimensions légèrement différentes (lame 5x281x80 et lame 4.1x281x80).

Lame vibrante	N°1	N°2
Dimensions (mm)	5x281x80	4.1x281x80
Fréquences propres (Hz)	62.66, 394.69, 1109.53, 2181.94, 3617.32, 5415.92	51.38, 323.64, 909.81, 1789.2, 2966.2, 4441.06,
Raideur statique (N/mm)	28.9841	15.3960

Tableau 2 Différentes lames pour les essais de contrôle

Les correcteurs cités ont tous apporté de l'amortissement dans le système vibrant correspondant à chacune de ces lames. On a choisi de montrer pour chaque stratégie de commande l'effet de la présence du correcteur dans le système vibrant correspondant à quelques-unes de ces lames.

On a effectué les simulations sur Matlab/Simulink avec le solveur  $d'ode23t$  (*Trapézoïdal*), un pas de calcul variable inférieur à 0.00001 qui est réglé en fonction de la convergence de la boucle de simulation et une erreur relative de 0.00000001.

#### a) Synthèse d'un correcteur $H_\infty$

La méthode  $H_\infty$  est généralement utilisée lorsqu'on désire faire du contrôle robuste. D'ailleurs, on la retrouve souvent en contrôle actif du broutement en usinage tel que le tournage ou le fraisage [17].

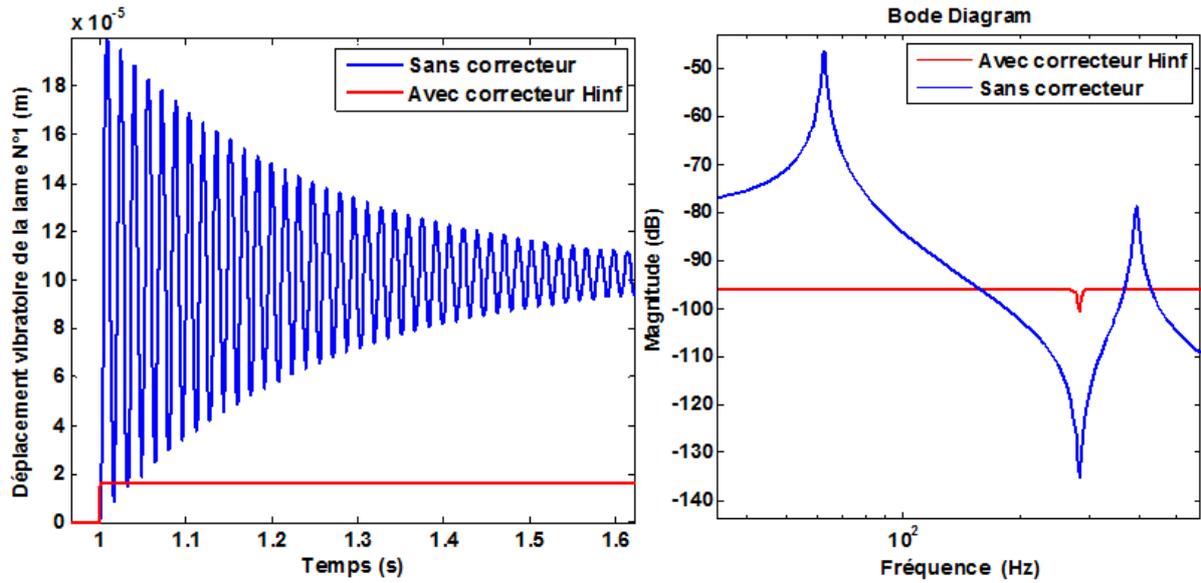


Figure 55 Contrôle actif de la lame vibrante N°1 avec un correcteur  $H_{\infty}$

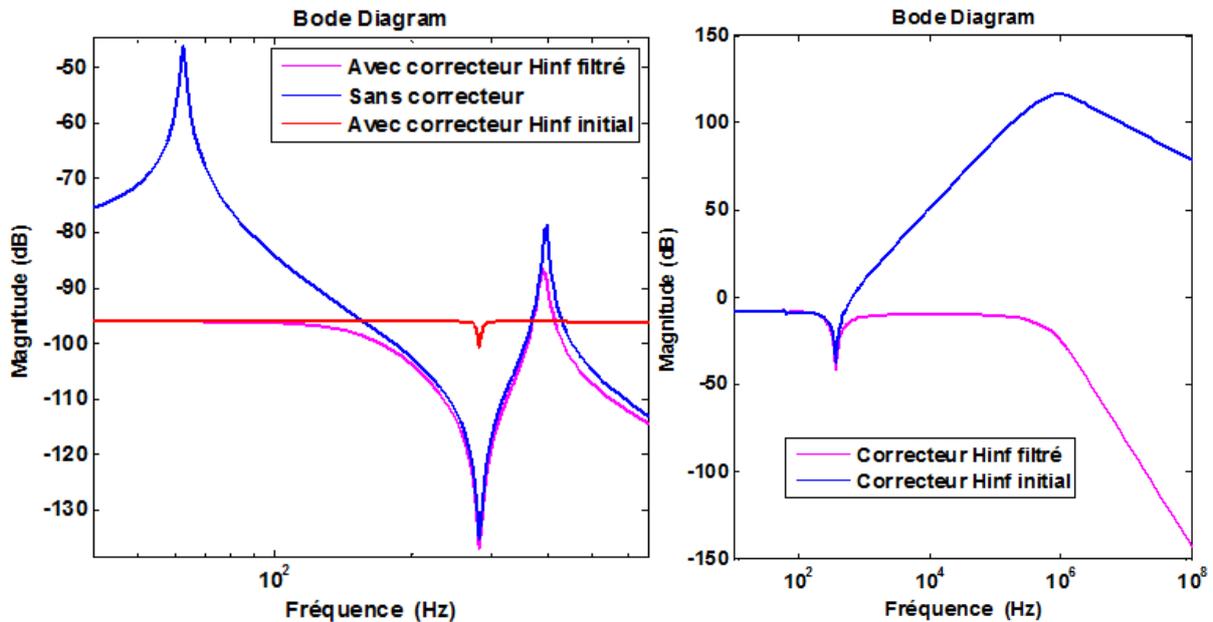


Figure 56 Diagrammes de Bode de la lame N°1 et diagramme de Bode de la commande des correcteurs  $H_{\infty}$

Le correcteur (Figure 55) atténue le 1<sup>er</sup> mode de la lame vibrante N°1 de 49.3 dB et le 2<sup>nd</sup> de 17.2 dB. Malheureusement, ce correcteur tel qu'il est déterminé, produit un signal de commande élevé (gain élevé en haute fréquence), ce qui amplifie le bruit de mesure jusqu'à rendre le système instable. On recourt alors à un filtre passe bas de 2<sup>nd</sup> ordre qui réduit cet effet amortissant puisque le correcteur résultant atténue maintenant le 2<sup>nd</sup> pic de résonance de seulement 8 dB (Figure 56).

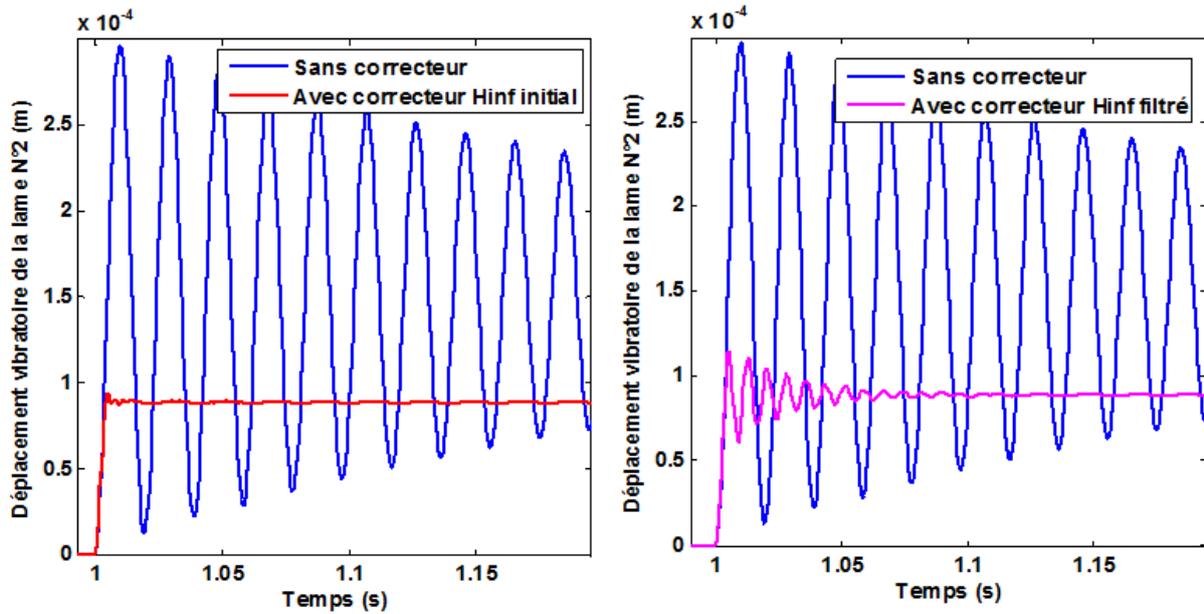


Figure 57 Contrôle actif de la lame vibrante N°2 avec correcteur  $H_\infty$  initial et filtré

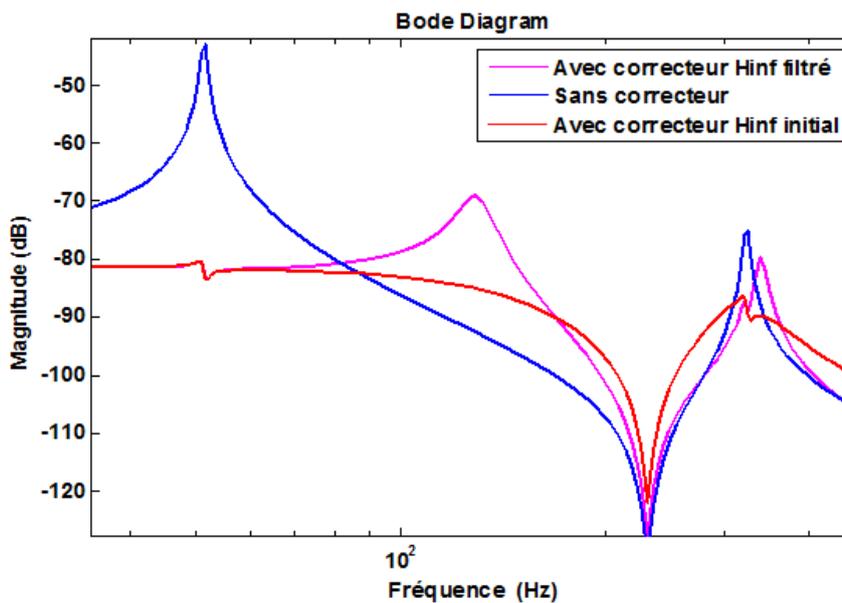


Figure 58 Diagrammes de Bode de la lame N°2 avec correcteurs  $H_\infty$

Le correcteur  $H_\infty$  initial atténue le 1<sup>er</sup> pic de résonance de la lame vibrante N°2 de 37.5 dB et le 2<sup>nd</sup> de 11.2 dB. Cependant avec un filtre passe bas de 2<sup>nd</sup> ordre, l'amortissement se dégrade au niveau des deux pics. En effet, on réalise maintenant une atténuation du 1<sup>er</sup> mode de 25.9 dB et sur le 2<sup>ème</sup> de 4.7 dB (Figure 57, Figure 58).

Si ces correcteurs sont par définition stables et possèdent des propriétés de robustesse, ils présentent néanmoins certains inconvénients.

Ces inconvénients résident dans la présence d'une erreur statique importante et d'une instabilité en présence de bruits de mesure et/ou lorsque nous utilisons un système en retenant un nombre de modes supérieur à celui utilisé pour la synthèse du correcteur. Pour remédier à l'erreur

statique, on a eu recours à un filtre passe haut de 1<sup>er</sup> ordre qui joue le rôle d'un pré-compensateur. Pour l'instabilité évoquée, nous utilisons un filtre numérique passe-bas afin d'atténuer suffisamment les perturbations en haute fréquence. On obtient alors un correcteur  $H_\infty$  suite à un « ajustage » (techniques classiques de « loop-shaping ») [31] (Figure 59). Néanmoins, on a remarqué que l'on pouvait avoir deux versions de ce correcteur. La première version, qu'on appellera correcteur  $H_\infty$  complet, intègre le filtre en question dans sa fonction de transfert contrairement à la deuxième version qu'on a choisi d'appeler correcteur  $H_\infty$  incomplet. Bien que celui-ci soit plus efficace dans la suppression de l'erreur statique, le correcteur  $H_\infty$  complet amortit le plus les deux pic de résonance.

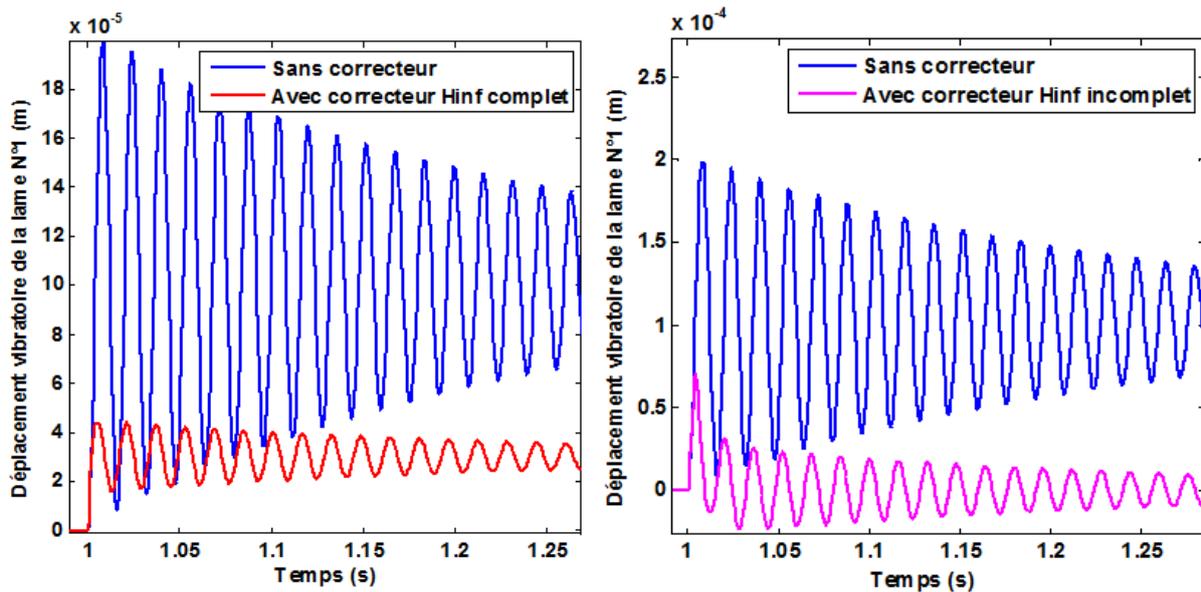


Figure 59 Contrôle actif de la lame vibrante N°1 avec correcteurs  $H_\infty$  par « loop-shaping »

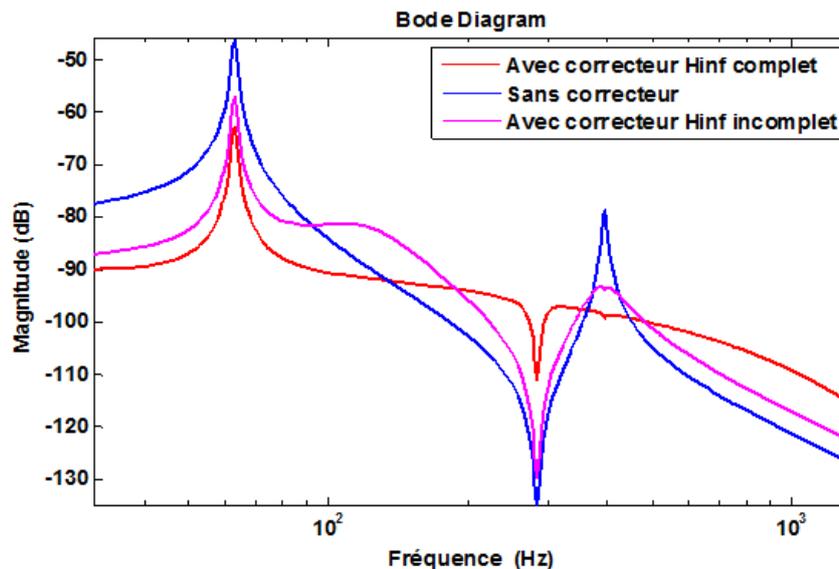


Figure 60 Diagrammes de Bode de la lame vibrante N°1 avec correcteurs  $H_\infty$  par « loop-shaping »

En effet, le 1<sup>er</sup> mode est atténué de 16.3 dB avec le correcteur  $H_\infty$  complet et de 10.7 dB avec l'incomplet (Figure 60). Ensuite, le 2<sup>nd</sup> mode est amorti de 14.6 dB avec la version incomplète

du correcteur  $H_\infty$  par « loop-shaping » au lieu de 18.4 dB avec la version complète. Finalement, malgré son efficacité contre l'erreur statique, on peut pas travailler avec la version incomplète du correcteur  $H_\infty$  par « loop-shaping » à cause de la commande très élevée à basse fréquence (irréalisable en pratique, en raison de la saturation de l'actionneur) (Figure 61). Il suffit alors d'appliquer le filtre passe bas de 2<sup>nd</sup> ordre, utilisé sur les correcteurs  $H_\infty$  simples précédemment, au correcteur  $H_\infty$  par « loop-shaping » complet.

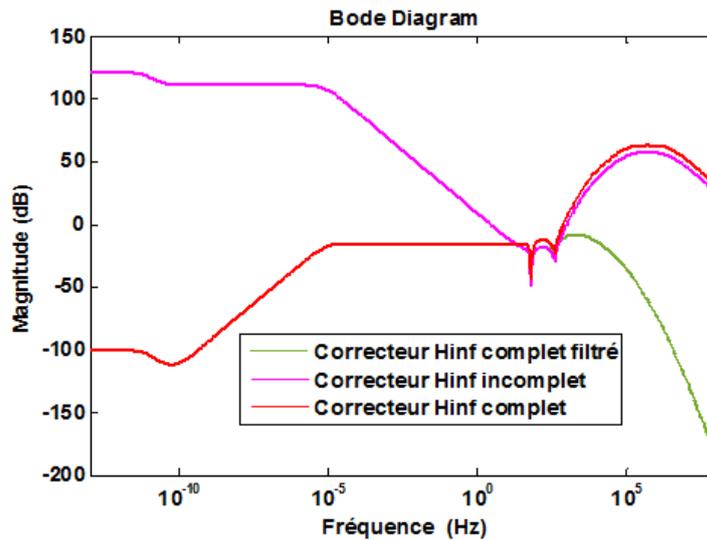


Figure 61 Diagramme de Bode de la commande des correcteurs  $H_\infty$  par « loop-shaping »

b) Synthèse d'un correcteur Gaussien

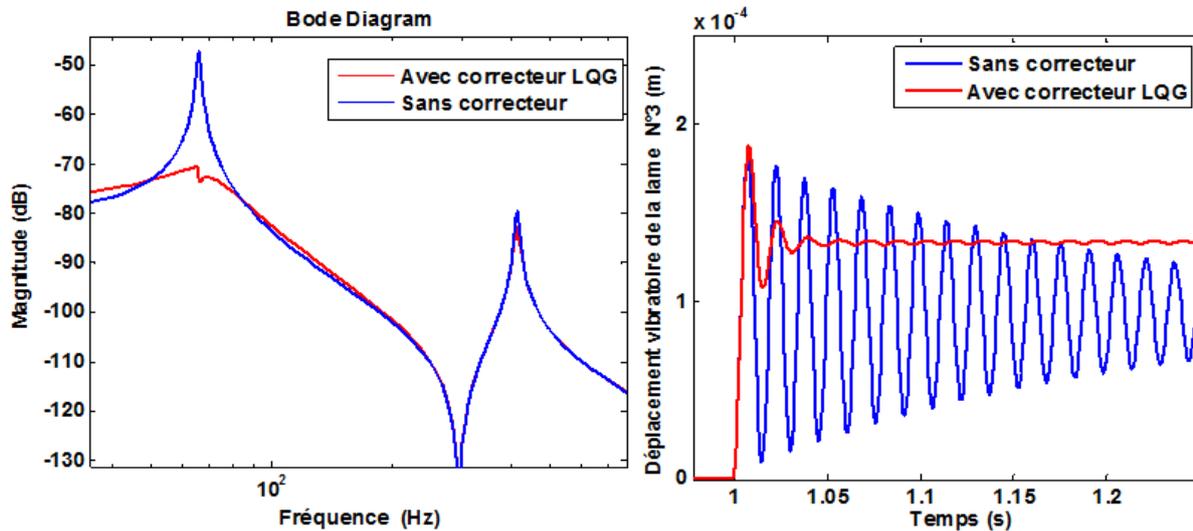


Figure 62 Contrôle actif de la lame vibrante N°1 avec un correcteur LQG

Le correcteur LQG (Figure 62) atténue surtout le 1<sup>er</sup> mode de 23.2 dB et de seulement 3.1 dB le 2<sup>nd</sup>. Cependant, il a l'avantage de générer un signal de commande qui ne nécessite pas une opération supplémentaire, celle de filtrer comme avec les correcteurs  $H_\infty$  (Figure 63).

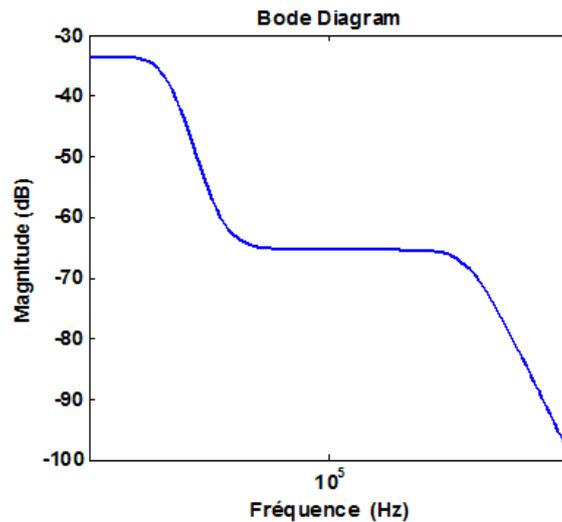


Figure 63 Diagramme de Bode de la commande du correcteur  $LQG$

c) Synthèse d'un correcteur  $\mu$  synthèse

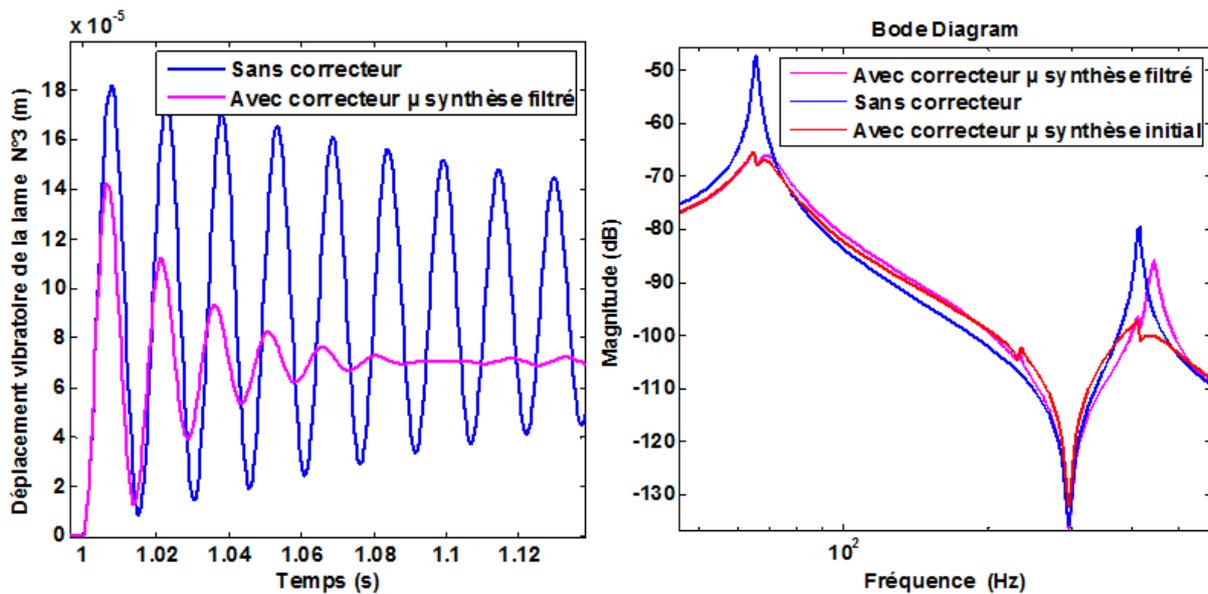


Figure 64 Contrôle actif de la lame vibrante N°1 avec un correcteur  $\mu$  synthèse

Le correcteur  $\mu$  synthèse (Figure 64) génère aussi un signal élevé à haute fréquences. On lui applique alors le même filtre passe bas de 2<sup>nd</sup> ordre (Figure 65). On garde la même atténuation sur le 1<sup>er</sup> mode avec le correcteur  $\mu$  synthèse résultant de 18 dB. Néanmoins, l'amortissement du 2<sup>ème</sup> pic de résonance se dégrade avec ce dernier avec seulement 6.3 dB au lieu de 17.6 dB avec le correcteur  $\mu$  synthèse non filtré. Néanmoins, on obtient la même réponse temporelle avec le correcteur  $\mu$  synthèse initial et filtré.

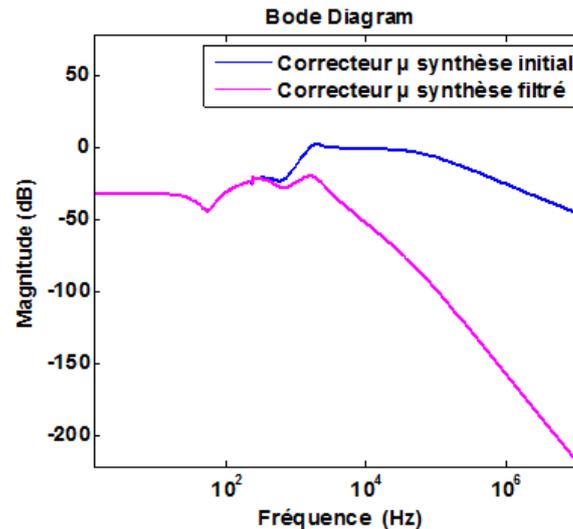


Figure 65 Diagramme de Bode de la commande du correcteur  $\mu$  synthèse

#### d) Validations expérimentales

Les compensateurs  $LQG$  et  $H_\infty$  ont été testés pour une lame vibrante de dimensions 5 x 80 x 280 mm. Le banc d'essai (Figure 66) est constitué par un actionneur piézoélectrique à 100 $\mu$ m de course, qui agit sur la structure au point  $x = 35$  mm, d'un capteur laser Keyence LK-G82 ayant une bande passante suffisante pour mesurer les déplacements vibratoires au point d'abscisse  $x = 280$  mm et d'un contrôleur COMPACT RIO de National instrument (processeur et FPGA) associé à la carte d'acquisition NI 92 22 de National Instrument et à l'amplificateur PIEZOMECHANIK RCV 1000/7 qui a une tension de sortie allant de 0 à 1000V et un courant maximale de sortie de 7 A. Le contrôle n'est donc pas colocalisé puisque le capteur et l'actionneur sont localisés sur des points distincts de la structure. Cette remarque est importante car c'est bien ce que la pratique du contrôle actif en usinage imposera par la suite. Les deux correcteurs donnent des résultats satisfaisants en simulation, illustrés par les figures 54-63, dans des représentations fréquentielles (diagrammes de Bode) ou temporelles.

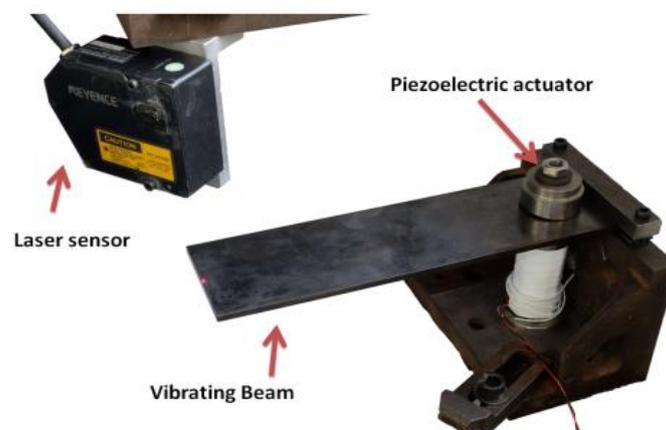


Figure 66 Banc d'essai du contrôle actif de la lame vibrante

L'essai consiste à perturber la lame via un effort appliqué à son extrémité libre en utilisant un marteau choc exactement là où on mesure les déplacements vibratoires avec le capteur laser.

Les fonctions des correcteurs obtenus précédemment ont été discrétisées afin d'être implémentées dans le contrôleur. Nous avons donc utilisé comme technique de conversion en discret *First-Order Hold* connue aussi sous le nom de *triangle approximation* avec une fréquence d'échantillonnage allant de 10 kHz à 40 kHz. On a voulu comparer les résultats de discrétisation du correcteur *LQG* selon la technique de *Zero-order hold* (par défaut) avec celle qu'on a retenue *First-Order Hold* à la même fréquence d'échantillonnage de 10 kHz (Figure 67).

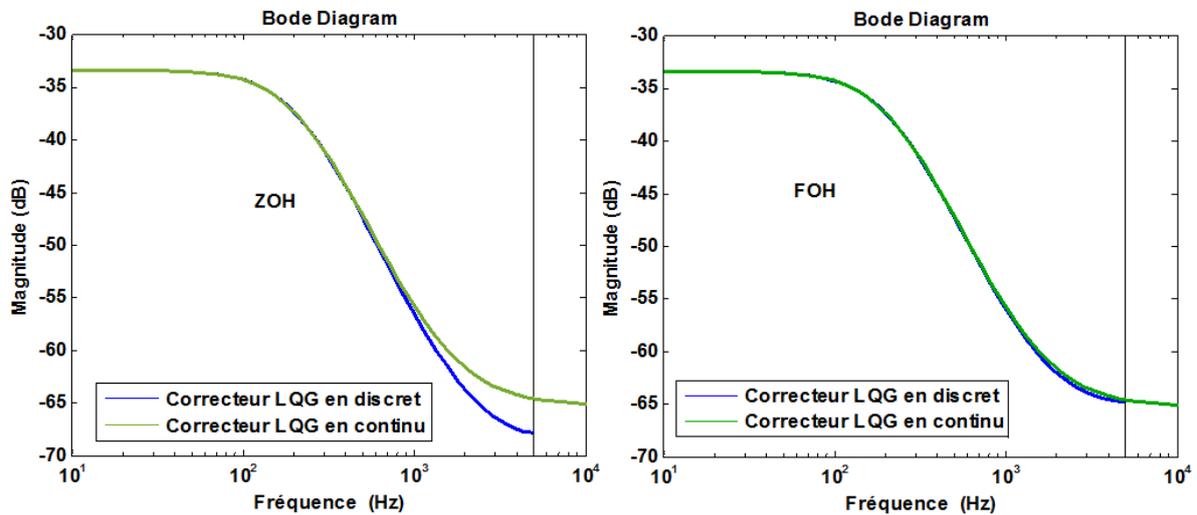


Figure 67 Diagrammes de Bode du correcteur *LQG* continu et discret suivant deux techniques de discrétisation

Nous avons validé le bon fonctionnement des correcteurs par essais sur cette lame. En effet, les signaux présentés dans la Figure 68 confirment les très bons résultats, sur une lame de souplesse très importante. Finalement, les résultats expérimentaux confirment ce que les simulations avaient prédit : le correcteur  $H_\infty$  donne de meilleurs résultats.

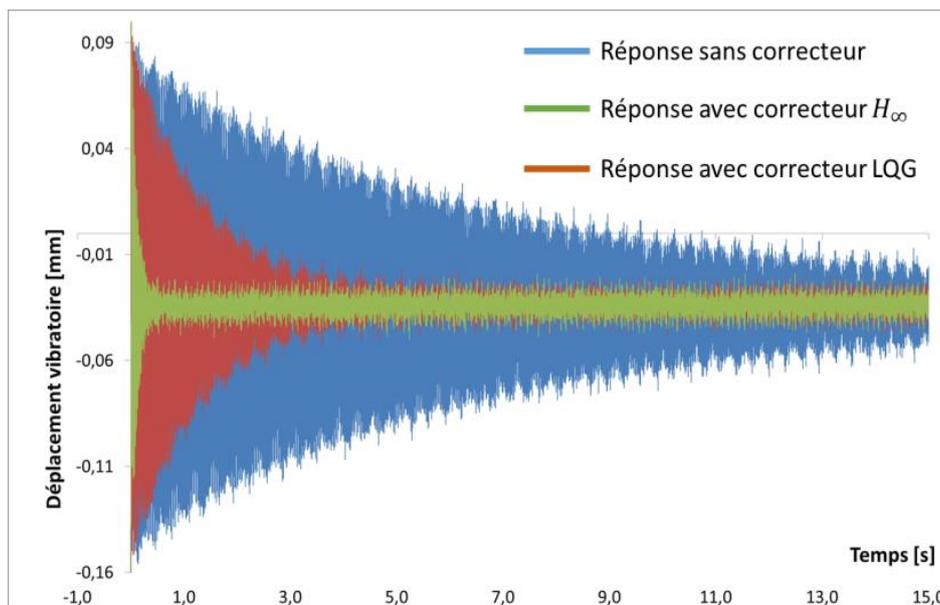


Figure 68 Résultats des essais de contrôle de la lame vibrante

On a ensuite déterminé le décrément logarithmique puis le taux d'amortissement  $\varepsilon$  du système avec et sans correcteur correspondant aux signaux obtenus :

Taux d'amortissement	$H_\infty$	$LQG$	Sans correcteur
$\varepsilon$	0.0708	0.0234	0.0055

Tableau 3 Taux d'amortissement du système

Le tableau confirme les réponses temporelles et fréquentielles du système obtenues précédemment puisque le correcteur  $H_\infty$  occupe toujours la meilleure position en amortissement actif des vibrations.

## 5. Contrôle actif du système usinant

Pour intégrer le processus de coupe dans notre démarche, on a dû coupler le modèle que nous avons développé (paragraphe 2) avec les modèles de structures actives (Figure 69), suivant la stratégie décrite dans la (Figure 37, c).

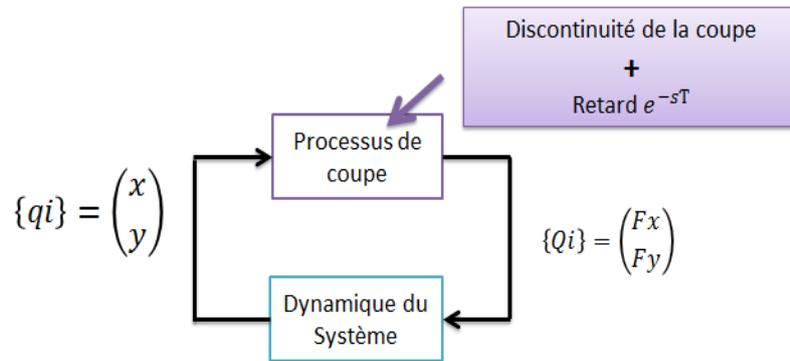


Figure 69 Interaction Structure/Processus

Les nombreuses simulations avec le modèle de coupe initial (paragraphe 1) ont permis de recalibrer celui-ci en fonction des résultats qu'on obtenait. En effet, Le processus de coupe génère maintenant la perturbation  $F_y$  suivante qui va exciter la lame vibrante:

$$F_y(t) = -a_p (y(t) - y(t - \tau)) \sum_{j=1}^Z \beta_j(t) (K_t \sin \phi_j(t) \cos \phi_j(t) - K_r \cos^2 \phi_j(t)) - a_p f_z \sum_{j=1}^Z \beta_j(t) (-K_r \sin \phi_j(t) \cos \phi_j(t) + K_t \sin^2 \phi_j(t)) - \alpha \sum_{j=1}^Z \beta_j(t) \dot{y}(t)$$

(37)

Les coefficients de coupe  $K_t$  et  $K_r$  sont tirés de la bibliographie et n'ont donc pas été identifiés pour deux raisons principalement. D'abord, ces deux paramètres ne sont pas pris en compte dans la synthèse de contrôle suivant la première stratégie puisque les efforts de coupe, dans ce cas-là, sont considérés comme des perturbations au système usinant. Ensuite, la dynamique du système a été validée via des essais rendant ainsi l'identification de ces coefficients non nécessaire.

**a) Correcteurs déterminés selon la première stratégie**

Afin de trouver des points de fonctionnement correct avec des paramètres d'usinage plausibles, nous avons utilisé la même démarche sur une lame plus raide (5x160 x80 mm) de raideur statique 215.7 N/mm pour les simulations de couplage système actif / processus de fraisage. Nous avons testé nos correcteurs, pour un processus de fraisage ayant les paramètres suivants :  $N = 2800$  tr/min,  $f_z = 0.08$  mm/tr/dent,  $z = 2$  dents,  $K_t = 1000$  MPa,  $K_r = 300$  MPa,  $\varnothing_{\text{outil}} = 16$  mm,  $a_r$  (engagement radial) = 1 mm avec  $a_p$  (engagement axial) = 2 mm pour ceux obtenus suivant la première stratégie (Figure 70) et  $a_p = 0.5$  mm pour ceux calculés suivant la deuxième stratégie. Les coefficients de coupe  $K_t$  et  $K_r$  n'ayant pas été identifiés, les amplitudes des réponses du système vibrant sans correcteur seront « excessivement » élevées mais représentatifs d'un état d'usinage très instable. Les correcteurs donnent des résultats équivalents pour les deux types d'opérations de fraisage en opposition ou en avalant.

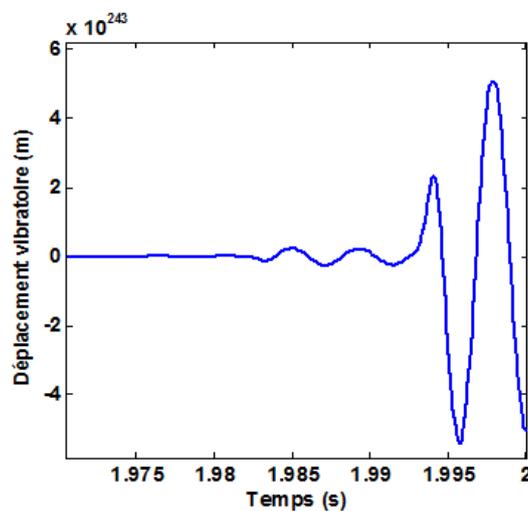


Figure 70 Type de réponse du système usinant sans correcteur

Le correcteur  $H_\infty$  non filtré (Figure 71) réussit à stabiliser le système puisqu'on obtient avec des amplitudes vibratoires ne dépassant pas les 0.06 mm pour une opération de fraisage avec une profondeur de passe axiale de 2 mm. En effet, le correcteur  $H_\infty$  permet d'atténuer le 1<sup>er</sup> pic de 37 dB et le 2<sup>nd</sup> de 11.9 dB.

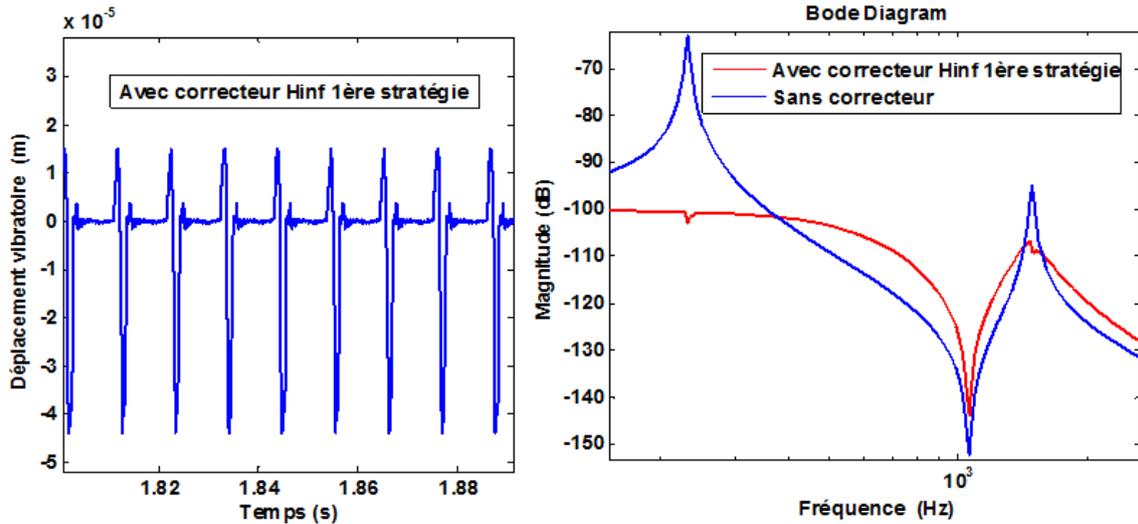


Figure 71 Réponse du système usinant avec correcteur  $H_{\infty}$  de la première stratégie

Malheureusement, ce correcteur n'est pas réalisable sur notre banc d'essai car le signal qu'il génère est trop élevé entraînant la saturation de l'actionneur piézoélectrique. Ceci pourrait s'expliquer par notre modélisation du système qui ne considère que ses deux premiers pics de résonance. On procède alors au filtrage de ce correcteur avec un filtre passe bas de 1<sup>er</sup> ordre (Figure 72).

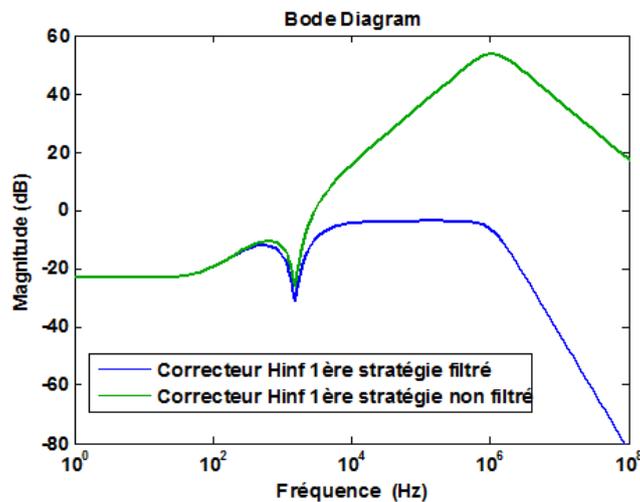


Figure 72 Filtrage du correcteur  $H_{\infty}$  de la première stratégie

Le filtrage détériore les performances du correcteur puisqu'il le rend moins efficace sur le système comme on peut le constater sur la Figure 73. En effet, il y a une diminution de l'amortissement apporté au système usinant. On obtient une atténuation de 24.3 dB sur le 1<sup>er</sup> mode et 6.9 dB sur le 2<sup>nd</sup>. Par conséquent, le correcteur filtré ne stabilise plus le système pour les paramètres de coupe définis. Il faut alors diminuer les valeurs de ces derniers tels que la profondeur de passe axiale ou l'engagement radial pour voir l'effet positif du correcteur filtré sur la réponse du système pendant l'opération de fraisage.

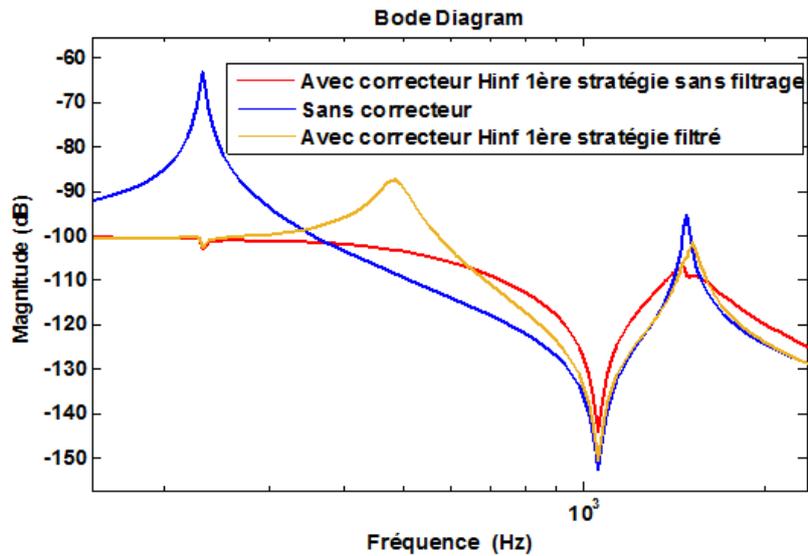


Figure 73 Réponses fréquentielles du système avec le correcteur  $H_{\infty}$  de la première stratégie avec/sans filtrage

Le correcteur  $LQG$  est plus souple que le correcteur  $H_{\infty}$  puisqu'on a beaucoup plus de possibilités pour contrôler le signal de commande généré de manière à ce que celui-ci soit réalisable sans avoir le besoin de recourir au filtrage. En effet, les correcteurs  $LQG$  dépendent de plusieurs paramètres tels que les matrices de covariance de la perturbation ou du bruit mais aussi des matrices de pondérations du critère quadratique propres à la stratégie de commande  $LQG$ .

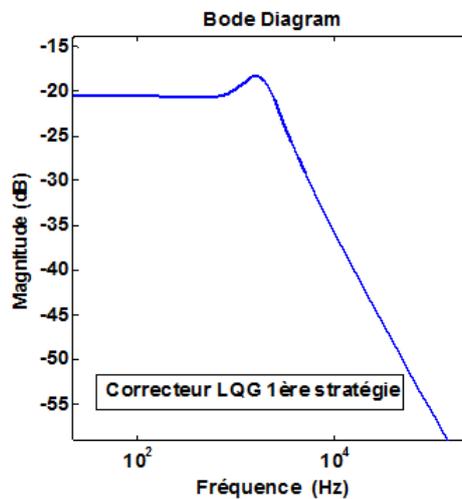


Figure 74 Diagramme de Bode du correcteur  $LQG$  de la première stratégie

Finalement, le correcteur  $LQG$  retenu avec une combinaison précise de ses paramètres possède un pic exactement au niveau du 2<sup>ème</sup> mode du système vibrant. Le correcteur génère un signal réalisable sur notre banc d'essai. De plus, ce signal est bien cohérent puisqu'il présente un pic là où le système vibre le plus (Figure 74).

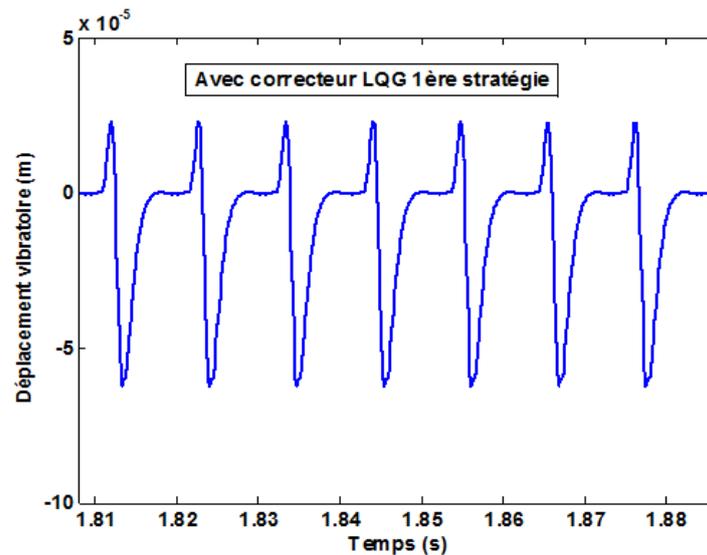


Figure 75 Contrôle actif du système avec le correcteur *LQG* de la première stratégie

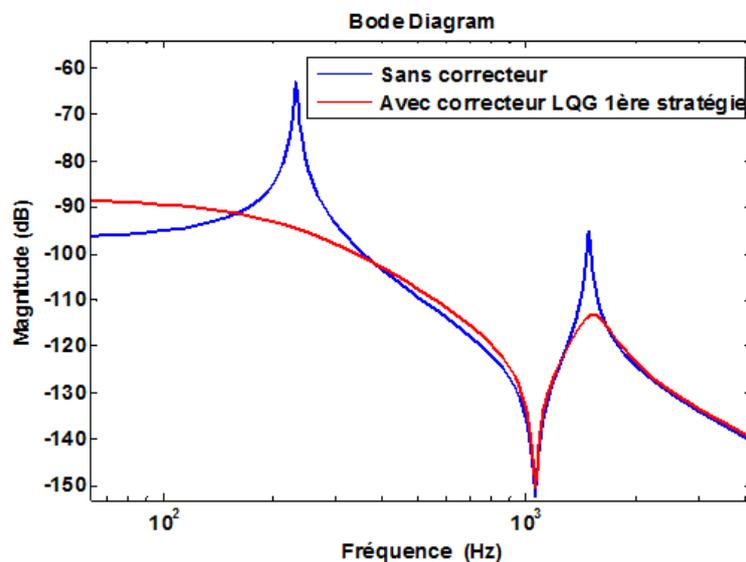


Figure 76 Diagramme de Bode du système avec/sans correcteur *LQG* de la première stratégie

Le correcteur *LQG* (Figure 75) obtenu suivant la première stratégie réussit à stabiliser le système puisqu'on a des amplitudes vibratoires ne dépassant pas les 0.077 mm correspondant à une atténuation de 28.4 dB sur le 1<sup>er</sup> pic et de 17.9 dB sur le 2<sup>nd</sup> (Figure 76). En plus, ce correcteur ne nécessite aucun filtrage pour son implémentation sur notre banc d'essai. Pour cette opération de fraisage, il est donc préférable d'utiliser le correcteur *LQG*.

Dans tous les cas d'engagements axiaux  $a_p$  qu'on a pris, le système est toujours instable en boucle ouverte et stable en présence d'un correcteur  $H_\infty$  ou *LQG*. Cependant, c'est le correcteur  $H_\infty$  qui est le plus performant quand il ne subit pas d'opération de filtrage, destiné à faire diminuer son signal toujours aussi élevé. En effet, on est contraint de filtrer ce correcteur si on veut l'utiliser sur notre système vibrant. Malheureusement, le correcteur  $H_\infty$  filtré obtenu ne réussit pas à rendre le système stable pour les paramètres de coupe définis précédemment ( $a_p =$

2 mm). On recourt alors au correcteur  $LQG$  puisqu'il arrive à amener le système à un état d'usinage stable bien qu'il soit moins performant que le correcteur  $H_{\infty}$ .

Nous avons testé par la suite l'effet du correcteur  $\mu$  *synthèse* (Figure 77) sur le système usinant pendant une opération de fraisage avec les paramètres de coupe définis. Malgré le signal élevé que le correcteur génère, qui impose l'utilisation d'un filtre, le système n'est pas stable avec ce correcteur. En diminuant l'engagement axial à **0.8** mm, on obtient un régime stable, ce qui montre que l'efficacité des correcteurs reste limitée et que la limite de stabilité n'est que déplacée, et pas complètement effacée.

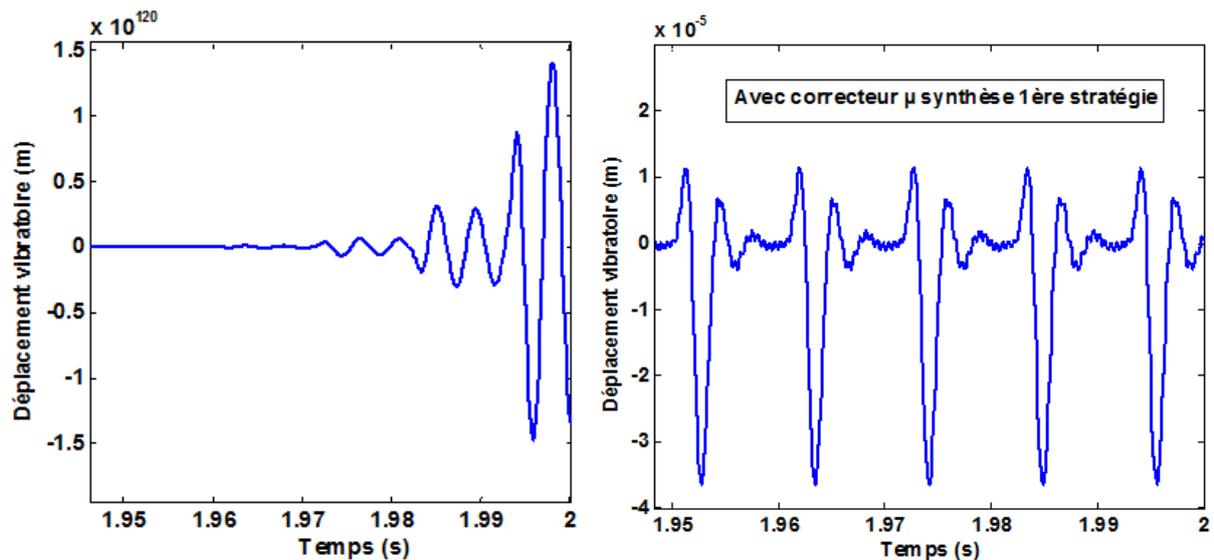


Figure 77 Réponse temporelle du système avec/sans correcteur  $\mu$  *synthèse* de la première stratégie filtré

En présence du correcteur  $\mu$  *synthèse*, les déplacements vibratoires du système usinant ne dépassent pas les 0.05 mm avec un filtre passe bas de 1<sup>er</sup> ordre au lieu de 0.045 mm en l'absence de ce dernier. D'ailleurs, l'amortissement des deux modes n'est pas identique avec et sans filtrage. Le 1<sup>er</sup> pic est atténué également dans les deux cas de 26.9 dB. Néanmoins, le 2<sup>nd</sup> pic est seulement atténué lorsque le correcteur n'est pas filtré, de 26.7 dB. Bien que le 2<sup>nd</sup> pic soit légèrement amplifié de 1.4 dB lorsqu'on recourt au filtre, le correcteur résultant (Figure 78) stabilise le système.

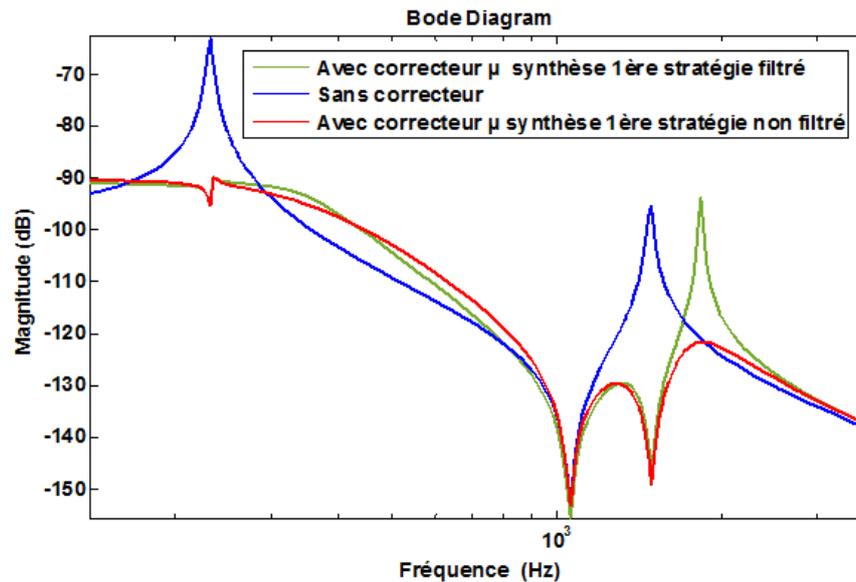


Figure 78 Diagramme de Bode du système usinant avec correcteur  $\mu$  synthèse de la première stratégie

### b) Correcteurs déterminés suivant la deuxième stratégie

Les correcteurs déterminés selon la deuxième stratégie dépendent naturellement du processus de coupe, et donc des paramètres de coupe ainsi que du mode de l'opération de fraisage (en avalant ou en opposition). Bien que le processus de coupe intervienne dans le calcul de ces correcteurs, ceux-ci donnent des résultats équivalents pour les deux types d'opérations de fraisage en opposition ou en avalant (effet sur les lobes de stabilité).

Les correcteurs calculés suivant la deuxième stratégie diminuent certes l'amplitude de la réponse du système divergent, mais ne sont pas en mesure de le ramener à un état stable. En effet, les correcteurs  $H_\infty$  et  $LQG$  déterminés suivant la deuxième stratégie correspondant aux paramètres de coupe déjà définis ne réussissent pas à stabiliser le système lors d'une opération de fraisage pour ces mêmes paramètres de coupe. On décide d'étudier l'effet de ces correcteurs, déterminés avec les anciens paramètres de coupe, sur le système pendant une opération de fraisage en gardant identiques les paramètres de coupe sauf la profondeur de passe axiale qui prend maintenant la valeur de **0.4 mm** (Figure 79).

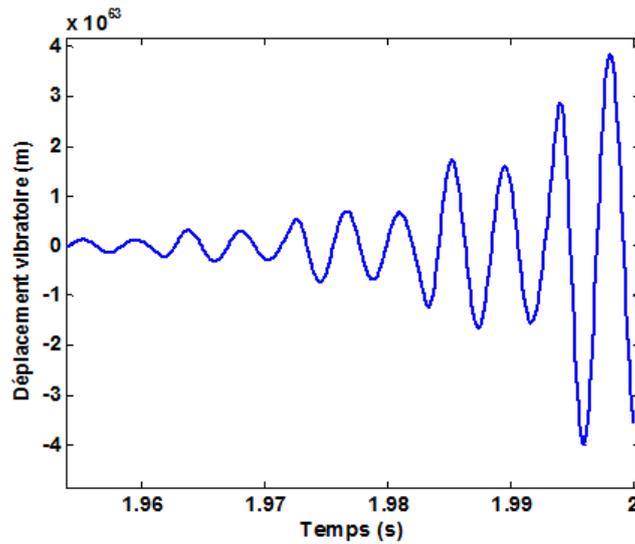


Figure 79 Réponse temporelle du système sans correcteur  $A_p=0.4$  mm

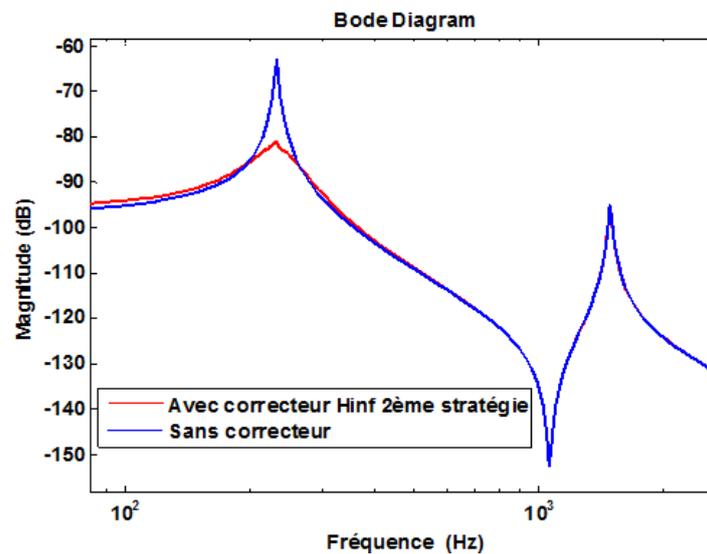


Figure 80 Diagramme de Bode du système usinant avec correcteur  $H_\infty$  de la deuxième stratégie

Le correcteur  $H_\infty$  (Figure 80) obtenu suivant la deuxième stratégie agit uniquement sur le 1<sup>er</sup> pic de résonance avec une atténuation de seulement 18.2 dB. Ceci explique l'incapacité de ce correcteur à stabiliser le système pour les anciens paramètres de coupe.

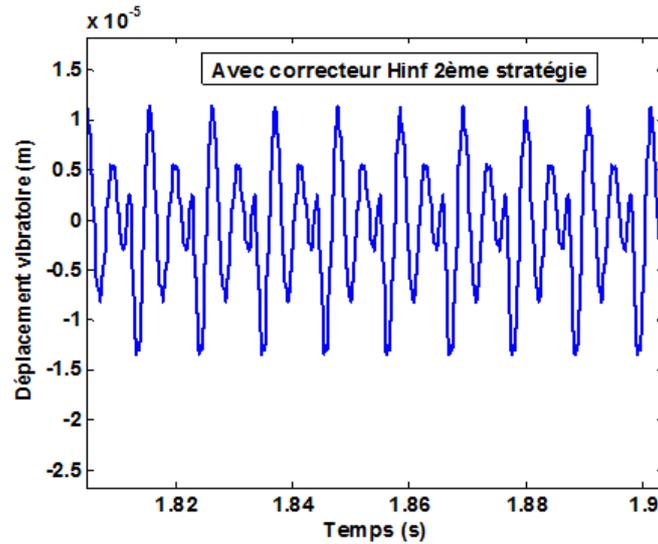


Figure 81 Réponse temporelle du système avec correcteur  $H_\infty$  de la deuxième stratégie

Les déplacements vibratoires du système usinant, en présence du correcteur  $H_\infty$  de la deuxième stratégie ne dépassent pas les 0.025 mm (Figure 81).

Avec les anciens paramètres de coupe on détermine le correcteur  $LQG$  suivant la deuxième stratégie (Figure 82). Celui-ci atténue le 1<sup>er</sup> mode de 20.4 dB et de 3.7 dB le 2<sup>nd</sup>.

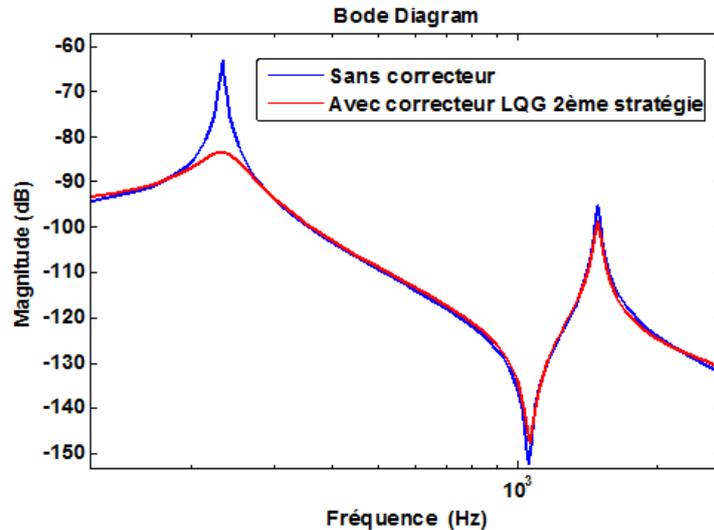


Figure 82 Diagramme de Bode du système usinant avec correcteur  $LQG$  de la deuxième stratégie

Après plusieurs simulations en changeant à chaque fois la valeur de l'engagement axial, on a constaté que le correcteur  $LQG$  calculé suivant la deuxième stratégie était légèrement meilleur que le correcteur  $H_\infty$  de la deuxième stratégie. En effet, pour une profondeur de passe axiale de **0.5** mm (Figure 83) le correcteur  $LQG$  de la deuxième stratégie stabilise le système contrairement au correcteur  $H_\infty$  de la même stratégie. Ce constat est aussi visible sur les lobes de stabilités.

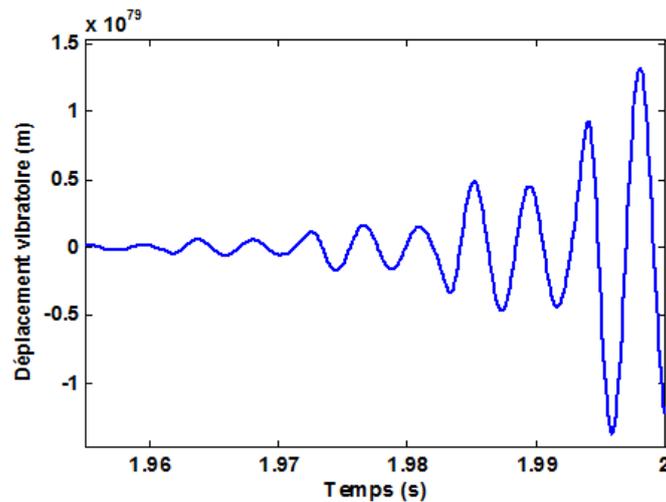


Figure 83 Réponse temporelle du système sans correcteur  $A_p=0.5$  mm

Le correcteur *LQG* de la deuxième stratégie (Figure 84) diminue les déplacements vibratoires du système usinant puisqu'ils ne dépassent plus les 0.028 mm.

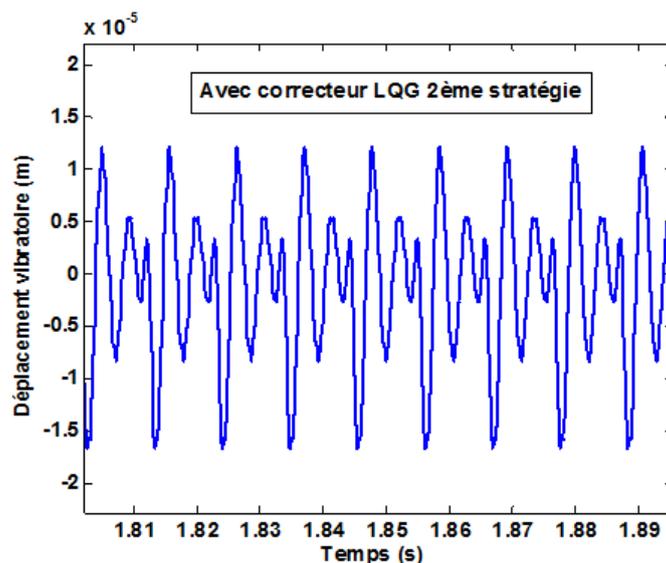


Figure 84 Réponse temporelle du système avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie

### c) Lobes de stabilité

Plusieurs études ont été menées pour obtenir les lobes de stabilité en usinage qui permettent de séparer le domaine de l'usinage stable de celui qui est instable. Parmi les méthodes les plus connues, on retrouve celle d'Altintas et Budak [8] qui utilise l'approximation des coefficients directionnels (présents dans l'expression des  $F_c(t)$  dans le deuxième paragraphe) développés en série de Fourier par leur moyenne. Cette méthode est souvent appelée *zero order solution* [36]. Il y a aussi des méthodes plus récentes, à la fois analytiques et expérimentales (certaines consistent à identifier les fonctions de transfert de la structure lors d'essais dynamiques). D'autres techniques consistent à enregistrer le signal sonore du processus de coupe et à détecter le broutement si l'énergie du son correspondant dépasse un certain critère. Dans notre cas, pour tracer ces lobes de stabilité relatives à notre opération de fraisage on a choisi de faire varier la

vitesse de la broche  $N$  (tr/min) ainsi que la profondeur de passe  $A_p$  (mm) tout en ayant un critère simple, basé sur une interprétation du résultat temporel. Celui-ci consiste à confirmer l'instabilité de notre système si le déplacement vibratoire de la lame dépasse un certain seuil, au-delà d'un certain horizon de temps. Il s'agit de parcourir pour chaque vitesse de rotation de la broche  $N$ ,  $n_{A_p}$  (2000) valeurs de  $A_p$  de l'intervalle  $[A_{pmin} (0.05 \text{ mm}), A_{pmax} (6 \text{ mm})]$  jusqu'à ce qu'on trouve, en utilisant le principe de dichotomie, la première valeur de profondeur de passe correspondante à un état instable du système notée  $A_{plim}$ . Cette dernière représente l'ordonnée du point appartenant à la courbe des lobes de stabilité du système. Cette opération se répète pour les  $n_N$  (2000) valeurs de  $N$  allant de  $N_{min}$  (1000 tr/min) à  $N_{max}$  (7000 tr/min). On obtient ainsi les lobes de stabilité du système usinant sans et avec correction sous forme de graphes délimitant les zones de stabilité par rapport à celles d'instabilité en fonction de la vitesse de rotation  $N$  et de la profondeur de passe  $A_p$ . On nommera cette méthode de calcul les lobes de stabilité première stratégie. Il existe aussi une autre stratégie pour l'obtention des lobes de stabilité qu'on appellera deuxième stratégie. Il s'agit de calculer ces lobes en parcourant toutes les valeurs de profondeur de passe axiale  $A_p$  à chaque vitesse de rotation  $N$ . Ce qui revient à calculer les lobes pour chaque point de la zone du plan considéré. Elle permet certes de générer les courbes des lobes de stabilité qui couvrent toute la surface du graphe (Figure 85, gauche) mais nécessite un temps de calcul considérable. Le résultat d'usinage d'une éprouvette, avec et sans correcteur  $H_\infty$  (Figure 85, droite) obtenu suivant la première stratégie, au point de fonctionnement désigné par une croix (Figure 85, gauche).

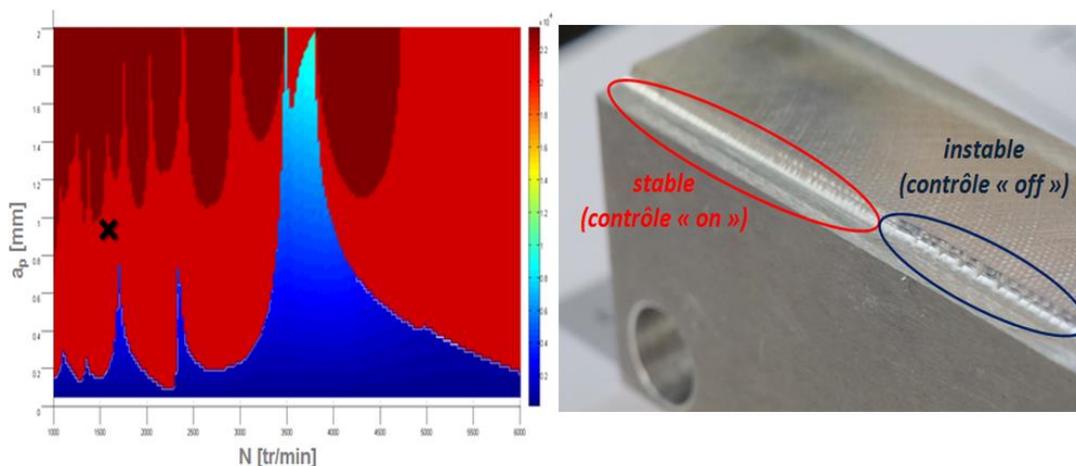


Figure 85 Calcul des lobes de stabilité selon la deuxième stratégie du système avec et sans contrôle

On obtient les lobes de stabilité du système sans correction et avec correction suivant la première stratégie. Le résultat confirme nos attentes. En effet, le filtrage indispensable du correcteur  $H_\infty$  pour son implémentation détériore la performance de celui-ci. D'ailleurs, on le constate sur les diagrammes de Bode avant de voir l'effet du filtrage sur les lobes de stabilité.

Nous avons par la suite tracé les lobes de stabilité du système usinant sans et avec tous les correcteurs obtenus suivant la première stratégie (Figure 86). Comme les résultats de simulations (réponses temporelles et fréquentielles), le correcteur  $H_\infty$  est toujours le plus performant puisqu'il donne un domaine d'usinage stable plus large qu'avec les autres stratégies.

On remarque aussi que finalement le filtre appliqué au correcteur  $H_{\infty}$  dans le but de diminuer le signal de commande si élevé de ce dernier ne détériore pas vraiment ce domaine stable de l'usinage. Au contraire, on voit bien que pour les vitesses de rotation de la broche allant jusqu'à 3000 tr/min, les lobes de stabilité du système usinant avec le correcteur  $H_{\infty}$  filtré est légèrement au-dessus de celles obtenus avec ce même correcteur sans filtrage. Cette tendance s'inverse par la suite pour des vitesses plus grandes.

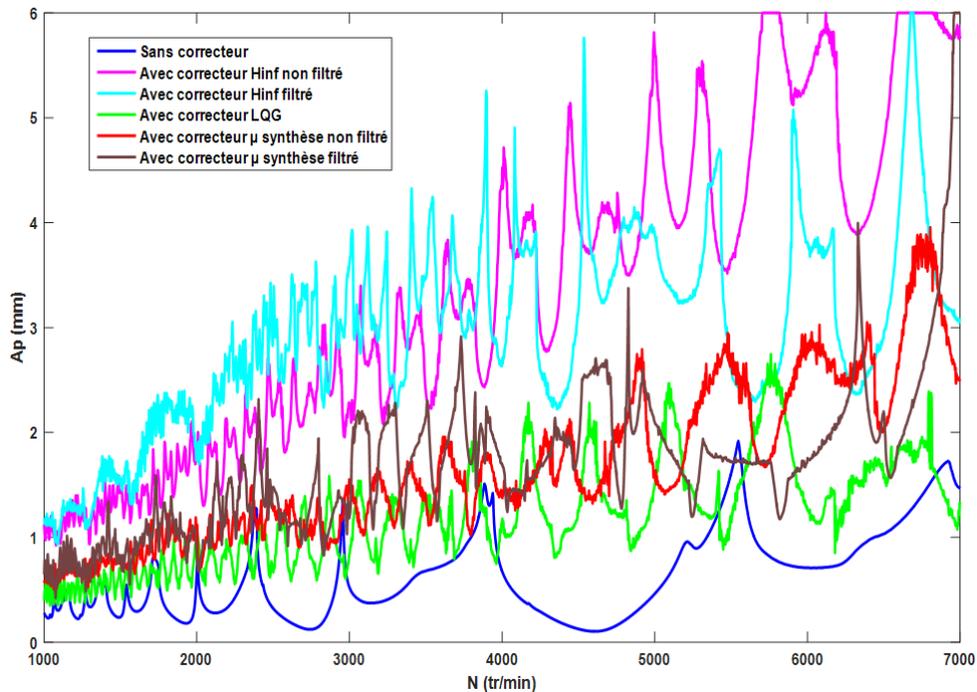


Figure 86 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs de la première stratégie

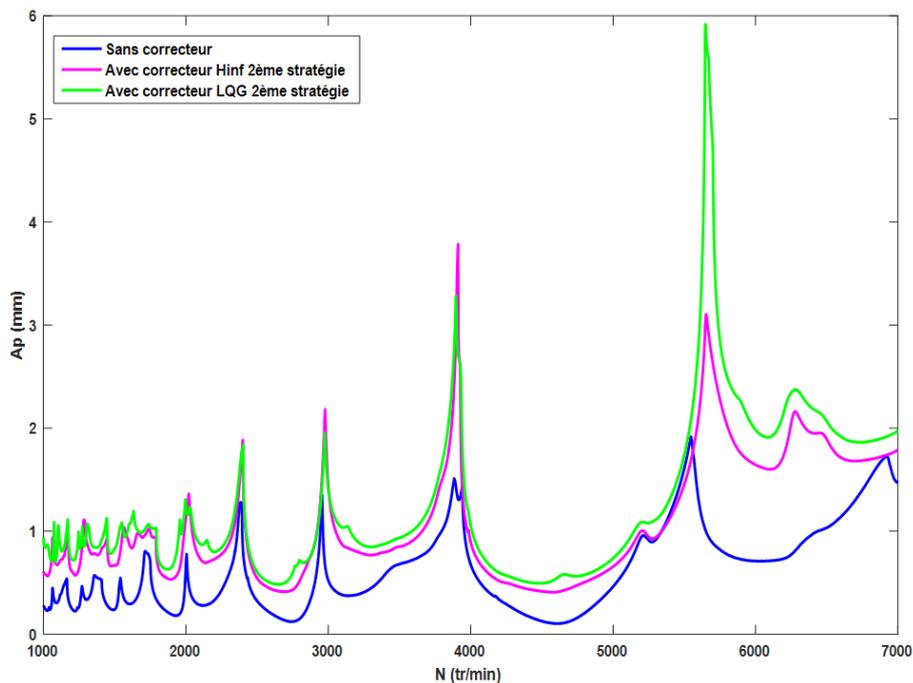


Figure 87 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs de la deuxième stratégie

Les lobes de stabilité du système usinant avec le correcteur  $LQG$  déterminé suivant la deuxième stratégie (Figure 87) sont légèrement au-dessus de ceux obtenus avec le correcteur  $H_\infty$  de la deuxième stratégie. Ce résultat était prévisible puisque l'atténuation du 1<sup>er</sup> mode avec le correcteur  $LQG$  (20.4 dB) est légèrement supérieure à celle obtenue avec le correcteur  $H_\infty$  (18.2 dB). De même pour les déplacements vibratoires du système usinant qui sont légèrement plus amortis avec le correcteur  $LQG$  de la deuxième stratégie.

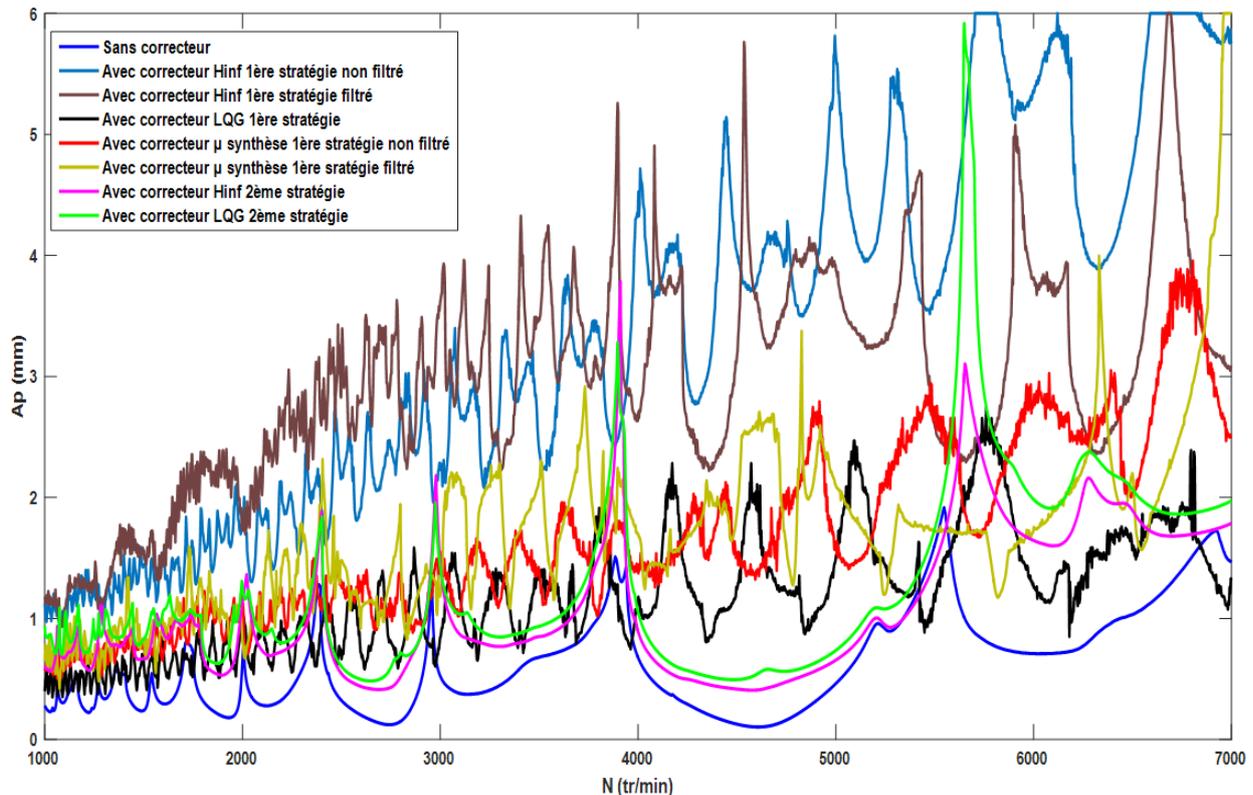


Figure 88 Lobes de stabilité du système usinant avec tous les correcteurs

Ensuite, on a comparé les lobes de stabilité du système usinant en présence de tous les correcteurs obtenus dans ce chapitre suivant les deux stratégies (Figure 88).

## Conclusion

On a présenté les résultats de simulations du contrôle actif en fraisage d'une poutre flexible, en repère fixe, avec des correcteurs déterminés suivant deux stratégies. Les correcteurs obtenus suivant la première stratégie se sont montrés plus performants que leurs équivalents en deuxième stratégie. Néanmoins, ce constat n'est pas définitif. En effet, le calcul des correcteurs suivant la deuxième stratégie a nécessité deux approximations pour avoir un système linéaire. La première approximation est celle de la raideur dynamique par la moyenne de son développement en série de Fourier malgré le nombre faible de dents de l'outil dont on dispose. La deuxième stratégie est celle de Padé de la fonction  $e^{-s\tau}$  effectuée à un ordre faible entraînant une différence importante entre la fonction retard et son approximé. Les lobes de stabilité confirment les résultats de simulations des réponses temporelles et fréquentielles puisque les correcteurs déterminés suivant la première stratégie ont des lobes plus hauts que leurs

équivalents en deuxième stratégie. Ensuite, on retrouve aussi les différences de performances des correcteurs dans chaque stratégie. En effet, en première stratégie on constate que le correcteur  $H_\infty$  donne un domaine d'usinage stable plus large que celui obtenu avec le correcteur  $LQG$ . Cette tendance s'inverse en deuxième stratégie puisque ce sont les lobes de stabilités du système avec le correcteur  $LQG$  qui sont légèrement plus hauts que ceux avec le correcteur  $H_\infty$ .