Modélisation du comportement des matériaux

3.1 Introduction

Lors d'opérations de formage, les tôles métalliques sont soumises à de grandes transformations qui conduisent à des déformations irréversibles. De nombreux modèles ont été développés pour caractériser les déformations plastiques se produisant au sein d'un volume élémentaire du matériau. Ils sont généralement basés sur des observations physiques ou sur des approches phénoménologiques, ces dernières étant privilégiées ici. L'objectif principal de la thèse étant la comparaison théorique et numérique des critères d'instabilité plastique, seuls des modèles classiques seront utilisés pour la représentation de l'élasticité, de l'évolution de la surface de charge plastique, de l'écrouissage, de l'anisotropie ou encore de l'endommagement. L'utilisation de lois de comportement plus avancées présentes dans la littérature permettrait bien souvent d'améliorer la qualité des prédictions de formabilité et pourrait être entreprise sans difficultés particulières.

Certains modèles de striction et de localisation nécessitent des comportements particuliers, élasto-plastiques ou élasto-viscoplastiques, couplés ou non à l'endommagement. Après avoir rappelé des notions sur le formalisme des transformations finies, offrant un cadre adéquat pour la formulation des lois de comportement utilisées en mise en forme, les différents modèles utilisés par la suite, élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques avec ou sans couplage à l'endommagement, sont présentés dans ce chapitre.

3.2 Cinématique des grandes déformations

La cinématique choisie pour représenter les grandes transformations rencontrées en mise en forme est basée sur une décomposition multiplicative du gradient de transformation $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \tag{3.1}$$

où $\mathbf{F}^e$ et $\mathbf{F}^p$ sont respectivement la partie élastique et la partie plastique du gradient de la transformation $\mathbf{F}$. Le gradient des vitesses $\mathbf{G}$ est ensuite obtenu par différentiation du tenseur $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \left(\mathbf{F}^e\right)^{-1} + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \left(\mathbf{F}^p\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}^e\right)^{-1} \tag{3.2}$$

En utilisant la décomposition polaire gauche du gradient de transformation élastique, il est possible d'obtenir :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}_g \cdot \mathbf{R} \tag{3.3}$$

où $\mathbf{V}_g$ est le tenseur gauche de la transformation déformante et $\mathbf{R}$ le tenseur de rotation propre élastique, vérifiant la propriété d'orthogonalité :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1} \tag{3.4}$$

où $\square^T$ désigne le transposé d'une grandeur. L'emboutissage à froid de tôles métalliques est caractérisé par de faibles déformations élastiques mais éventuellement des rotations importantes. Il est alors possible de découper la partie élastique du tenseur gradient $\mathbf{F}$ par :

$$\mathbf{F}^e \cong (\mathbf{1}+\mathbf{e})\cdot\mathbf{R} \tag{3.5}$$

où $\mathbf{e}$ est le tenseur symétrique des déformations élastiques, dont la norme est petite par rapport à l'unité. En combinant les équations précédentes, une approximation du gradient des vitesses peut être obtenue en utilisant un développement polynomial de $\left(\mathbf{F}^e\right)^{-1}$ limité au premier ordre :

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1} + \overset{\circ}{\mathbf{e}} + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{F}}^p\cdot\left(\mathbf{F}^p\right)^{-1}\cdot\mathbf{R}^{-1} \tag{3.6}$$

où

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1} - \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{e} \tag{3.7}$$

est une dérivée temporelle objective de $\mathbf{e}$ calculée à partir du spin élastique $\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1}$. Le taux de déformation totale $\mathbf{D}$ et le taux de rotation $\mathbf{W}$ sont définis respectivement comme la partie symétrique et la partie antisymétrique du gradient des vitesses $\mathbf{G}$, soit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}+\mathbf{G}^T\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}-\mathbf{G}^T\right) \tag{3.8}$$

Une décomposition additive du taux de déformation total et du spin total en leurs parties élastiques et plastiques peut être définie telle que :

$$\mathbf{D} = \overset{\circ}{\mathbf{e}} + \mathbf{D}^p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{W}^p \tag{3.9}$$

L'expression du taux de déformation plastique peut alors être déduite des équations précédentes comme :

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{R}\cdot\left(\dot{\mathbf{F}}^p\cdot\left(\mathbf{F}^p\right)^{-1}\right)^S\cdot\mathbf{R}^{-1} \tag{3.10}$$

où $\square^S$ désigne la partie symétrique d'une grandeur mécanique. Dans la plupart des développements théoriques effectués pour l'expression des critères d'instabilité plastique, des conditions particulières de chargements seront choisies afin d'imposer un spin nul, la dérivée temporelle de la déformation pouvant alors être assimilée à la dérivée temporelle objective. Cette remarque sera utilisée pour simplifier l'écriture des modèles de comportement élasto-plastique couplé ou non à l'endommagement et des modèles élasto-viscoplastiques présentés dans les prochaines parties de ce chapitre. Dans des cas plus généraux, il est pratique de formuler les lois de comportement dans un repère tournant dans lequel les équations de comportement sont formellement identiques à une formulation en hypothèse de petites perturbations. Le repère d'orthotropie du matériau, supposé rester orthogonal et évoluer avec la matrice de rotation générée par le spin $\mathbf{W}$, peut être utilisé pour cela, ce qui revient à l'emploi de dérivées de Jaumann. Pour plus de détails concernant la mécanique des milieux continus en grandes déformations, le lecteur pourra se référer à (Sidoroff 1981; 1982; Rougée 1997) ou encore à (Garrigues 2007).

3.3 Comportement élasto-plastique

3.3.1 Modèle élasto-plastique

La démarche adoptée pour modéliser le comportement repose sur le choix d'une approche phénoménologique pouvant être écrite dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et appliquée aux matériaux élasto-plastiques. L'application visée étant l'emboutissage de tôles minces, le modèle développé dans ce paragraphe permet de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'anisotropie induite et de l'évolution de l'écrouissage mais est restreint aux déformations à froid et aux matériaux indépendants du temps physique. Cette dernière restriction sera levée dans les dernières parties de ce chapitre. Des détails complémentaires sur ce modèle peuvent être consultés dans (Lemaitre et Chaboche 1990) ou encore dans (Haddag 2007; Abed-Meraim 2009).

La relation entre le taux de contrainte de Cauchy et le taux de déformation élastique est décrite par une loi hypo-élastique :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p \right) \tag{3.11}$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur d'ordre quatre représentant les modules d'élasticité permettant de relier le taux de contraintes de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ au taux de déformation élastique $\mathbf{D}^e$ défini comme la différence entre le taux de déformation totale $\mathbf{D}$ et le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^p$, exprimés dans le repère corotationnel. Une loi d'écoulement plastique associée permet d'exprimer l'évolution de ce tenseur :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{V} \tag{3.12}$$

où $\dot{\lambda}$ et $\mathbf{V}$ sont respectivement le multiplicateur plastique et la direction d'écoulement plastique, normale à la surface de charge délimitée par le potentiel f. Le critère de charge peut s'écrire sous la forme de Kuhn – Tucker :

$$\begin{gathered} f = \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X} \right) - Y \leq 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\lambda} f = 0 \end{gathered} \tag{3.13}$$

avec Y et $\mathbf{X}$ respectivement la taille de la surface de charge, reliée à la variable d'écrouissage isotrope, et la variable d'écrouissage cinématique.

Deux définitions classiques seront utilisées pour calculer la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$: la contrainte équivalente de von Mises dans le cas isotrope et la contrainte équivalente de Hill'48 dans le cas anisotrope. La première s'exprime sous la forme suivante :

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{X})=\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}):(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X})} \tag{3.14}$$

où la notation $\square'$ est utilisée pour représenter la partie déviatorique de la grandeur considérée. La direction d'écoulement devient alors :

$$\mathbf{V}=\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}}{\bar{\sigma}} \tag{3.15}$$

La fonction anisotrope et quadratique de Hill'48 est quant à elle :

$$\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{X})=\sqrt{(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X}):\mathbf{M}:(\boldsymbol{\sigma}'-\mathbf{X})} \tag{3.16}$$

où le tenseur $\mathbf{M}$, représentant l'anisotropie initiale de la tôle, peut être exprimé à partir des coefficients de Hill'48 en utilisant la représentation vectorielle des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}'$ et $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} G_H+H_H & -H_H & -G_H & 0 & 0 & 0 \\ -H_H & F_H+H_H & -F_H & 0 & 0 & 0 \\ -G_H & -F_H & F_H+G_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_H \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

où les coefficients de Hill'48 peuvent être définis pour des chargements plans à partir des coefficients de Lankford r_0, r_{45} et r_{90} :

$$F_H=\frac{r_0}{r_{90}(1+r_0)} \qquad G_H=\frac{1}{1+r_0} \qquad H_H=\frac{r_0}{1+r_0}$$
$$L_H=M_H=N_H=\frac{r_0+r_{90}}{2r_{90}(1+r_0)}(1+2r_{45})$$

où r_0, r_{45} et r_{90} sont définis à partir des rapports des déformations plastiques pris respectivement dans des directions orientées à 0°, 45° et 90° par rapport à la direction de laminage et la déformation plastique dans l'épaisseur de la tôle mesurées au cours d'un essai mécanique. Lorsque les trois coefficients de Lankford sont égaux, il est possible de montrer que les critères de Hill'48 et von Mises sont équivalents ; le critère de von Mises peut alors être considéré comme un cas particulier du critère de Hill'48. Avec la définition du critère de Hill'48, la direction d'écoulement devient :

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{M} : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})}{\bar{\sigma}} \tag{3.18}$$

De nombreux critères de plasticité alternatifs ont été développés afin d'améliorer la prise en compte de l'anisotropie de la tôle pour différents types de matériaux, avec par exemple les travaux de (Hill 1979; Barlat et al. 1991; Hill 2000; Banabic et al. 2003; Barlat et al. 2005). Seuls les critères de von Mises dans le cas isotrope et le critère de Hill'48 dans le cas anisotrope seront considérés par la suite, leur utilisation étant suffisante pour l'objectif fixé de comparaison théorique des critères d'instabilité plastique. Il a par ailleurs été montré que le choix de critères de plasticité plus avancés permette bien souvent une nette amélioration des prédictions réelles de CLF (Kuroda et Tvergaard 2000; Banabic et Dannenmann 2001).

D'autre part, l'évolution de la variable d'écrouissage cinématique peut être représentée par la loi non-linéaire d'Armstrong – Frederick :

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \mathbf{n}_{\mathbf{X}} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda} \tag{3.19}$$

avec C_X et X_{sat} deux constantes du matériau représentant respectivement la vitesse de saturation et la valeur de saturation de la variable d'écrouissage cinématique et $\mathbf{n}_{\mathbf{X}}$ la direction de saturation définie par :

$$\mathbf{n}_{\mathbf{X}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}}{\bar{\sigma}} \tag{3.20}$$

Lorsque le critère de von Mises est utilisé, il peut être noté que les directions d'écoulement plastique et de saturation de l'écrouissage cinématique sont confondues. Dans l'équation (3.13), la taille courante de la surface de charge est reliée à la variable d'écrouissage isotrope par :

$$Y = Y_0 + R \tag{3.21}$$

où Y_0 représente la taille initiale du domaine élastique. La variable d'écrouissage isotrope R est utilisée pour représenter l'évolution de la taille de la surface de charge et est physiquement reliée à la densité des dislocations réparties aléatoirement dans le volume de matière. Différentes lois peuvent être utilisées pour décrire son évolution. La loi saturante de Voce semble adaptée aux matériaux dont l'écrouissage isotrope présente un seuil :

$$\dot{R} = C_R \left(R_{sat} - R \right) \dot{\lambda} = H_R \dot{\lambda} \tag{3.22}$$

où C_R et R_{sat} sont les constantes matérielles représentant la vitesse de saturation et la valeur de saturation de l'écrouissage isotrope ; leur identification peut être réalisée à partir des essais monotones classiques. En l'absence d'endommagement, il est possible de montrer à partir de la définition du taux de déformation plastique cumulée que le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est égal au taux de déformation plastique cumulée $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La loi (3.22) peut alors être intégrée sous la forme :

$$R = R_{sat}\left(1 - e^{-C_R\bar{\varepsilon}}\right) \tag{3.23}$$

Dans le cas de matériaux ne présentant pas de saturation de l'écrouissage, des lois de type puissance, et notamment la loi de Swift, sont couramment utilisées :

$$\dot{R} = nk\left(\frac{R + Y_0}{k}\right)^{\frac{n-1}{n}} \dot{\lambda} = H_R\dot{\lambda} \tag{3.24}$$

avec $Y_0 = k\varepsilon_0^n$ la limite élastique initiale définissant la taille de la surface de charge avant l'entrée en plasticité et n, k et ε_0 trois paramètres matériaux liés au taux de croissance de la surface de plasticité. Une forme équivalente de cette loi peut être obtenue :

$$Y = k\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}\right)^n = Y_0 + R \tag{3.25}$$

La loi de type puissance de Hollomon, utilisée dans les prochains chapitres pour le développement théorique dans des cas de comportement simplifié, est un cas particulier de la loi de Swift pour lequel la taille initiale de la surface de plasticité est nulle, ce qui se traduit par :

$$R = k\bar{\varepsilon}^n = Y \tag{3.26}$$

Cette relation découle de l'équation (3.25) en prenant $\varepsilon_0 = 0$ et peut être écrite sous une forme équivalente :

$$\dot{R} = nk\left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{n-1}{n}} \dot{\lambda} = H_R\dot{\lambda} \tag{3.27}$$

En choisissant $Y_0 = 0$ dans l'équation (3.24), la loi de Hollomon est retrouvée. Les trois lois d'écrouissage présentées peuvent être combinées et le taux de croissance de l'écrouissage isotrope s'écrit alors sous la forme générique suivante :

$$\dot{R} = H_R\dot{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \dot{Y} = H_Y\dot{\lambda} \tag{3.28}$$

avec H_R et H_Y des modules scalaires identiques reliés à l'écrouissage isotrope et exprimés à partir des relations précédentes. La condition de cohérence est d'autre part définie à partir du critère de plasticité par :

$$\dot{f} = \dot{\bar{\sigma}} - \dot{Y} = 0 \tag{3.29}$$

En y introduisant les relations d'évolution des variables internes et la loi d'écoulement plastique, l'expression du multiplicateur plastique est obtenue :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H_X} + H_Y} : \mathbf{D} \tag{3.30}$$

En remplaçant le multiplicateur plastique par son expression dans la loi d'écoulement plastique et dans la loi d'hypo-élasticité, la relation entre le taux de contrainte et le taux de déformation totale devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{C} - \alpha^{ep} \frac{\left(\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \otimes \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}\right)}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H_X} + H_Y} \right) : \mathbf{D} = \mathbf{L}^{ep} : \mathbf{D} \tag{3.31}$$

où α^{ep} représente un indicateur de charge plastique, égal à un au cours de la charge plastique ou à zéro sinon. Le module $\mathbf{L}^{ep}$ est le module tangent élasto-plastique.

La démarche développée offre un cadre général pour la modélisation d'une large classe de comportements des matériaux. En la suivant, la description du comportement peut être améliorée par la prise en compte d'effets supplémentaires, comme l'endommagement.

3.3.2 Modèle élasto-plastique endommageable

Certains critères d'instabilité plastique, notamment ceux développés pour la prédiction de modes localisés sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient de la vitesse (Chapitre 6), nécessitent l'utilisation de modèles de plasticité non-associée ou encore la présence d'un régime adoucissant. De tels effets adoucissants peuvent être introduits par le couplage des équations constitutives avec l'endommagement en plasticité associée.

Différentes approches ont été développées ces dernières décennies pour modéliser l'endommagement. Le modèle de Gurson est utilisé pour décrire l'endommagement dans des milieux poreux présentant un comportement élasto-plastique ductile (Gurson 1977; Needleman et Rice 1978; Tvergaard et Needleman 1984). Ce modèle est basé sur la représentation de la germination de cavités et de microfissures à l'intérieur du volume élémentaire représentatif (VER), de leur croissance puis de leur coalescence conduisant à la rupture. La mécanique de l'endommagement continu constitue une seconde approche, dont les bases reposent sur la thermodynamique des processus irréversibles (Rabotnov 1969; Kachanov 1986). Selon ce modèle, la variable tensorielle d'endommagement est reliée à la densité surfacique des micro-défauts, constitués par exemple de vides, de cavités ou de microfissures pouvant être présents sur une surface du VER. Cette grandeur d'endommagement peut être d'ordre quatre dans le cas d'endommagement anisotrope ou un scalaire dans le cas d'endommagement isotrope. Le choix d'une variable scalaire, plus simple à mettre en œuvre et à identifier, a été privilégié ici. Le couplage du modèle élasto-plastique avec l'endommagement est alors mené en suivant l'approche de Lemaitre, reliant l'endommagement au rapport entre la surface des micro-défauts et la surface totale sur un VER (Lemaitre 1985) :

$$d = \frac{S_{def}}{S} \tag{3.32}$$

avec d la variable d'endommagement, S_{def} la surface des micro-défauts sur une surface élémentaire S d'un VER. La contrainte effective est alors reliée à la contrainte usuelle par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} \tag{3.33}$$

En adoptant le principe d'équivalence en déformation, le comportement d'un matériau endommagé relie le taux de déformation au taux de contrainte effective par les équations constitutives du matériau non endommagé dans lesquelles la contrainte est remplacée par la contrainte effective (Lemaitre et Chaboche 1990). La forme incrémentale de la loi d'élasticité devient alors :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{p}\right) \tag{3.34}$$

ou encore :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(1-d\right)\mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{p}\right) - \frac{\dot{d}}{1-d}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.35}$$

où le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^{p}$ peut être exprimé à partir d'une loi d'écoulement associée vérifiant la relation de normalité :

$$\mathbf{D}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.36}$$

La surface de charge et le critère d'écoulement plastique deviennent après couplage avec l'endommagement :

$$\begin{gathered} f = \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}, \mathbf{X}\right) - Y \leq 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\lambda} f = 0 \end{gathered} \tag{3.37}$$

Si la contrainte équivalente de Hill'48 est utilisée, il est possible d'en déduire l'expression du taux de déformation plastique :

$$\mathbf{D}^{p} = \frac{\dot{\lambda}}{\left(1-d\right)} \frac{\mathbf{M} : \left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X}\right)}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X}\right) : \mathbf{M} : \left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X}\right)}} \tag{3.38}$$

Dans cette équation, la variable d'écrouissage cinématique est affectée par l'endommagement à travers la modification de sa direction de saturation, alors notée $\mathbf{n}_{\mathrm{X}d}$:

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left(X_{sat} \mathbf{n}_{\mathrm{X}d} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} = \mathbf{H}_{\mathrm{X}} \dot{\lambda} \tag{3.39}$$

avec :

$$\mathbf{n}_{\mathrm{X}d} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_{eff} - \mathbf{X}}{\bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}'_{eff}, \mathbf{X}\right)}$$

Par commodité, la notation $\mathbf{H}_{\mathrm{X}}$ utilisée dans le cas élasto-plastique est réutilisée ici bien qu'il ne s'agisse pas exactement des mêmes fonctions, la direction de saturation étant affectée par l'endommagement. Il peut toutefois être montré que $\mathbf{n}_{\mathrm{X}}$ et $\mathbf{n}_{\mathrm{X}d}$ sont égaux en l'absence d'endommagement.

Par contre, comme la contrainte n'apparait pas explicitement dans les expressions d'évolution de l'écrouissage isotrope, ces équations restent valables sans modification et pourront être écrites sous la forme générique précédente, soit :

$$\dot{R} = H_R \dot{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \dot{Y} = H_Y \dot{\lambda} \tag{3.40}$$

où il est intéressant de noter la relation entre le multiplicateur plastique et le taux de déformation plastique équivalente :

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\varepsilon}} \left(1 - d\right) \tag{3.41}$$

L'évolution de la variable d'endommagement isotrope est reliée à l'évolution de la microstructure du matériau et plus particulièrement au taux de déformation plastique équivalente $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La loi d'évolution de l'endommagement isotrope du modèle de Lemaitre relie cette variable à la déformation plastique équivalente et au taux de restitution de la densité d'énergie élastique, dont l'expression est (Lemaitre 1992) :

$$Y_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{3.42}$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope linéaire, l'écriture de cette grandeur est simplement donnée par :

$$Y_e = \frac{J_2^2}{2E} \left[\frac{2}{3}\left(1+\nu\right) + 3\left(1-2\nu\right) \left(\frac{\sigma_{eff}^H}{J_2} \right)^2 \right] \tag{3.43}$$

où $J_2\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}\right)=\sqrt{3/2\,\boldsymbol{\sigma}'_{eff}:\boldsymbol{\sigma}'_{eff}}$ est le second invariant de la contrainte effective déviatorique, $\sigma_{eff}^H = 1/3\, tr\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}\right)$ la contrainte effective hydrostatique, E et ν le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau non endommagé.

Des améliorations de la loi de Lemaitre ont été proposées et appliquées récemment à la simulation d'opérations de formage de tôles minces par emboutissage. Un seuil d'activation Y_{ei}, agissant sur le taux de restitution de la densité d'énergie élastique et à partir duquel l'endommagement peut évoluer, est introduit :

$$\dot{d} = H_d \dot{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1-d\right)^{\beta_d}} \left(\dfrac{Y_e - Y_{ei}}{S_d}\right)^{s_d} \dot{\lambda} & \text{si } Y_e \geq Y_{ei} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.44}$$

avec S_d, s_d et β_d des paramètres matériaux. A partir de la condition de cohérence, $\dot{f}=0$, et de la dérivée partielle de la contrainte équivalente, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}, \mathbf{X}\right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'_{eff}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}_{eff}, \mathbf{X}\right)}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} - H_Y \dot{\lambda} = 0 \tag{3.45}$$

En combinant les équations (3.34)-(3.45), cette condition conduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \left(\mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}\right) - \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda}\right) - H_Y \dot{\lambda} = 0 \tag{3.46}$$

L'expression du multiplicateur plastique devient alors :

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{C}}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{C} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} + H_Y} : \mathbf{D} \tag{3.47}$$

La relation entre le taux de contrainte et le taux de déformation dans le cas de comportements élasto-plastiques couplés à l'endommagement prend la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\left(1-d\right)\mathbf{C} - \alpha^{epd} \frac{\left(\mathbf{C} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}}\right) \otimes \left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{C}\right) + H_d \boldsymbol{\sigma}_{eff} \otimes \left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{C}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{C} : \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} + H_Y} \right) : \mathbf{D} = \mathbf{L}^{epd} : \mathbf{D} \tag{3.48}$$

où α^{epd} est un indicateur de charge plastique, égal à un dans le cas de charge plastique ou zéro sinon. En l'absence d'endommagement, le module tangent élasto-plastique couplé à l'endommagement $\mathbf{L}^{epd}$ devient égal au module tangent élasto-plastique classique.

3.4 Comportement élasto-viscoplastique

Les modèles présentés dans ce paragraphe sont issus d'un formalisme proche de celui utilisé pour l'écriture des modèles élasto-plastiques développés précédemment. L'attention sera donc plutôt portée sur la mise en évidence de différences entre ces modèles lors de la formulation du cas de comportement élasto-viscoplastique.

La relation entre la contrainte de Cauchy et le taux de déformation élastique reste inchangée :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}^e \tag{3.49}$$

La décomposition additive du taux de déformation en une partie élastique instantanément réversible et une déformation inélastique est postulée. Cette déformation inélastique peut être composée dans le cas général d'une déformation élastique à effet retardé, d'une déformation plastique instantanée et d'une déformation viscoplastique, cette dernière étant plus particulièrement considérée ici :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{vp} \tag{3.50}$$

En choisissant une loi d'écrouissage visqueuse additive, la fonction de charge peut s'exprimer par :

$$f = \bar{\sigma} - Y = \bar{\sigma} - R - Y_0 - Y_1 \dot{\bar{\varepsilon}}^m \tag{3.51}$$

où Y_1 et m sont respectivement un coefficient et l'exposant de viscosité qui dépendent du matériau. Différentes lois additives peuvent être formulées en fonction de l'application choisie et du comportement réel du matériau, la loi exposée en (3.51) présente les avantages de la simplicité et l'appartenance au formalisme des matériaux standard.

La principale différence de ce modèle par rapport au modèle élasto-plastique réside dans l'expression du multiplicateur viscoplastique qui, en plasticité associée, peut être calculé directement à partir de la fonction de charge viscoplastique :

$$\dot{\lambda}^{vp} = \dot{\bar{\varepsilon}} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - R - Y_0}{Y_1} \right\rangle^{1/m} \tag{3.52}$$

où la notation $\langle \square \rangle$ représente l'opérateur partie positive de la grandeur considérée. Un autre choix d'une loi d'écrouissage visqueuse multiplicative peut être réalisé. Dans ce cas, une écriture possible de la fonction de charge est donnée par :

$$f = \bar{\sigma} - Y = \bar{\sigma} - Y_0 - R\dot{\bar{\varepsilon}}^m \tag{3.53}$$

L'expression du multiplicateur viscoplastique est alors donnée par :

$$\dot{\lambda}^{vp} = \dot{\bar{\varepsilon}} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - Y_0}{R} \right\rangle^{1/m} \tag{3.54}$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle permet de retrouver le modèle élasto-plastique présenté précédemment (avec comme surface de charge $f = \bar{\sigma} - Y_0 - R$) lorsque le paramètre de sensibilité à la vitesse m tend vers zéro. Le taux de déformation viscoplastique peut être exprimé à partir du potentiel viscoplastique ou de la définition de la surface de charge et du multiplicateur viscoplastique $\dot{\lambda}^{vp}$:

$$\mathbf{D}^{vp} = \dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.55}$$

Les lois d'évolution des variables d'écrouissages isotropes et cinématiques deviennent alors :

$$\begin{aligned} \dot{R} &= H_R \dot{\lambda}^{vp} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda}^{vp} \end{aligned} \tag{3.56}$$

où les modules H_R et $\mathbf{H}_{\mathrm{X}}$ peuvent être pris identiques à ceux définis dans le cas élasto-plastique. Des compléments sur l'implantation numérique de ce modèle sont présents dans (Lemaitre et Chaboche 1990).

3.5 Synthèse

Différents modèles ont été proposés afin de représenter le comportement plastique du matériau en grandes déformations. Ceux-ci sont basés sur une approche phénoménologique, pouvant être qualifiés de classiques. Dans un premier temps, un modèle élasto-plastique indépendant du temps a été exposé, celui-ci permet de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale de la tôle, de l'anisotropie induite et de l'écrouissage. Son choix a été dicté par la simplicité et la généralité de sa formulation. Il sera appliqué dans le Chapitre 4 lors de l'étude des critères de prédiction de la striction diffuse et au cours du Chapitre 5 pour certains critères prédisant des modes localisés.

Dans le cas des critères de prédiction de localisation sous forme de bandes étudiés au Chapitre 6, il sera montré qu'un comportement adoucissant est nécessaire. Ce phénomène a été introduit par un couplage du comportement élasto-plastique avec de l'endommagement ductile isotrope en suivant l'approche de Lemaitre.

La localisation est caractérisée par une concentration des déformations dans un faible volume de la structure, accompagnée d'une forte augmentation de la vitesse de déformation dans cette zone. En suivant cette observation, il semble naturel de prendre en compte la sensibilité à la vitesse de déformation par l'usage d'un modèle élasto-viscoplastique pour mieux représenter le comportement réel du matériau.

Ces éléments sur la modélisation du comportement du matériau étant présentés, les prochains chapitres se consacreront à l'étude théorique des critères d'instabilité plastique pour la prédiction de modes diffus puis localisés. L'implantation des modèles de comportement du matériau dans un code développé sous Matlab permettra enfin au Chapitre 7 d'obtenir des courbes rhéologiques et des courbes limites de formage pour les différents matériaux étudiés.