Modélisation en économie et gestion

Modélisation en économie et gestion

1. Utilité et définition de l'économétrie ..	1	
2. Relations économiques	2	
3. Vérification de l'adéquation empirique des relations	2	
4. Mesure des taux de réaction	3	
5. Formes fonctionnelles et paramètres ..	3	
5.1 Choix d'une relation linéaire	3	
5.2 Choix d'une relation non linéaire ..	4	
6. Validation empirique et types de données	5	
6.1 Dimension du temps ou des agents ..	5	
7. Formulation statistique des relations économiques	6	
8. Processus stochastiques	7	
9. Modèles statiques ou dynamiques et théorie économique	8	
Problèmes et exercices		11
1. Ventes et publicité	11	
2. Élasticité des ventes aux prix	11	
3. Spécification d'une fonction de production	12	
4. Fonction de consommation à prix courants ou constants?	13	
5. Consommation, revenu disponible et salaire	13	
6. Taux d'intérêt nominal ou réel?	14	
7. Choix des données	15	
8. Spécification d'une fonction de consommation dynamique	16	
9. Spécification d'un modèle dynamique de taux de change	19	

Ce chapitre définit l'objectif et la méthode générale de l'économétrie. Il précise quelques notions de base indispensables à la compréhension de l'ouvrage, liées à la modélisation mathématique des phénomènes rencontrés en sciences économiques et en sciences de gestion.

1 Utilité et définition de l'économétrie

L'économétrie est le principal outil d'analyse quantitative utilisé par les économistes et gestionnaires dans divers domaines d'application, comme la macroéconomie, la finance ou le marketing. Les méthodes de l'économétrie permettent de vérifier l'existence de certaines relations entre des phénomènes économiques, et de mesurer concrètement ces relations, sur la base d'observations de faits réels.

Dans son acception la plus restreinte, l'économétrie est un ensemble de techniques utilisant la statistique mathématique qui vérifient la validité empirique des relations supposées entre les phénomènes économiques et mesurent les paramètres de ces relations. Au sens large, l'économétrie est l'art de construire et d'estimer des modèles empiriques adéquats par rapport aux caractéristiques de la réalité, et intelligibles au regard de la théorie économique.

2 Relations économiques

La réflexion que l'on peut mener sur une réalité économique quelconque conduit toujours à établir des relations entre les phénomènes économiques concernés. Une réflexion approfondie dans un domaine de science économique ou science de gestion est à la base de toute analyse économétrique. En d'autres termes, la réalisation de travaux économétriques suppose la connaissance préalable des disciplines économiques en jeu, puisqu'elles suggèrent le type de relation à vérifier sur les données réelles observées.

Exemple

On suppose que la consommation totale des ménages augmente avec leur revenu disponible réel, mais diminue quand le taux d'intérêt monte. Une telle relation économique s'écrit de la manière suivante :

$$c = f(yd, r), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial c}{\partial yd} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial c}{\partial r} < 0 \quad (\text{a})$$

où c correspond à la consommation, yd au revenu disponible et r au taux d'intérêt. La notation $f(\cdot)$ désigne une fonction quelconque, linéaire ou non (il faudrait poser des hypothèses supplémentaires pour en préciser la forme fonctionnelle, mais ce n'est pas le propos de cette section). La supposition de départ se formule de la façon suivante : la dérivée partielle de f par rapport à yd est positive – à taux d'intérêt r inchangé, une augmentation du revenu disponible yd implique une augmentation de la consommation c – et la dérivée partielle de f par rapport à r est négative – à revenu disponible inchangé, une augmentation du taux d'intérêt r implique une diminution de la consommation c .

Exemple

Une relation économique suggère que le taux d'intérêt nominal R est une fonction croissante du taux d'inflation INF et du taux de croissance de la production CR :

$$R = f(INF, CR), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial R}{\partial INF} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial CR} > 0 \quad (\text{b})$$

3 Vérification de l'adéquation empirique des relations

Pour expliquer comment se détermine(nt) un ou plusieurs phénomènes économiques, on construit un modèle à partir de certaines hypothèses et des résultats qu'elles donnent dans le cadre d'une théorie particulière. On vérifie que ce modèle décrit réellement la manière dont le ou les concept(s) d'intérêt se détermine(nt) dans la réalité. Il faut pour cela disposer de mesures réelles des phénomènes (les « statistiques ») et vérifier au moyen de techniques issues de la statistique mathématique⁽¹⁾ que le modèle correspond à ces données observées.

1. Si nécessaire, quelques rappels utiles de la statistique mathématique peuvent être puisés dans tout bon manuel de base, comme par exemple le livre de Probabilités, statistique et processus stochastiques de Patrick Roger, publié chez Pearson Education France dans la même collection.

4 Mesure des taux de réaction

Dans la mesure où le modèle est acceptable, on souhaite également mesurer quantitativement les taux de réaction des phénomènes expliqués aux variations des phénomènes explicatifs. Ces mesures permettront de simuler ultérieurement l'effet de telle ou telle variation hypothétique d'un phénomène explicatif sur les phénomènes expliqués.

Soit un modèle explicatif du taux d'intérêt, sous la forme d'une équation où le taux d'inflation est une variable explicative. On vérifie son adéquation à la réalité observée. Comme on dispose alors des mesures des taux de réaction du taux d'intérêt à ses déterminants, on peut évaluer à l'avance l'effet sur le taux d'intérêt d'une accélération de l'inflation d'un montant déterminé. Souvent, plusieurs théories concurrentes expliquent les mêmes réalités économiques. Les techniques économétriques permettent d'identifier celle qui explique le mieux la réalité, celle qui est au plus près des observations.

5 Formes fonctionnelles et paramètres

L'objectif est de vérifier l'adéquation d'un modèle à la réalité observée et de mesurer les taux de réaction des phénomènes expliqués aux phénomènes explicatifs. Pour confronter efficacement modèle et données, il convient d'exprimer ce dernier sous une forme « manipulable ». Selon la relation (a), la consommation est une fonction du revenu disponible et du taux d'intérêt. Cette formulation est mathématiquement trop « vague » pour pouvoir être confrontée à la réalité observée. Pour pallier le problème, il faut spécifier *a priori* une forme fonctionnelle particulière de la fonction $f()$. Les possibilités sont innombrables.

5.1 CHOIX D'UNE RELATION LINÉAIRE

Le choix le plus simple est celui d'une relation linéaire. Il se justifie quand on peut raisonnablement supposer que les dérivées partielles de la variable dépendante par rapport à chaque variable explicative ne sont pas fonction des niveaux atteints par ces variables explicatives. Cette hypothèse signifie que la variation de la variable dépendante, suite à une variation de une unité de l'une des variables explicatives, est toujours la même quels que soient les niveaux déjà atteints par celles-ci.

Exemple

On suppose que la fonction $f()$ est linéaire. Soient les paramètres α , β et γ tels que :

$$c = \alpha + \beta yd + \gamma r, \quad \text{avec } \beta > 0 \text{ et } \gamma < 0 \quad (a')$$

On a donc $f(yd, r) = \alpha + \beta yd + \gamma r$. On remarque que :

$$\beta = \frac{\partial c}{\partial yd} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\partial c}{\partial r}$$

Le coefficient β est donc la dérivée partielle de c par rapport à yd . Il rend compte de l'importance de la variation de c quand yd augmente de une unité, à r constant. Que se passe-t-il quand r ne change pas, mais que yd augmente de une unité (il s'agit de l'unité dans laquelle yd est exprimé) ? La réponse est que c varie de β unités (il s'agit ici de l'unité de mesure dans laquelle c est exprimé). De la même manière, γ est la dérivée partielle de c par rapport à r . Il rend compte de l'importance de la variation (par exemple en milliards d'euros à prix constants) de c quand r augmente de une unité (par exemple d'un montant absolu de 1 % lorsque r est exprimé en pourcentage), yd restant inchangé. Lorsque la relation entre les variables est supposée linéaire, chaque paramètre est interprété comme la dérivée partielle de la variable dépendante par

rapport à la variable explicative concernée. Chaque paramètre mesure donc la variation de la variable dépendante suite à une augmentation de une unité de la variable explicative concernée, les autres variables explicatives restant inchangées.

5.2 CHOIX D'UNE RELATION NON LINÉAIRE

La linéarité est certes commode, mais n'est pas toujours une propriété adéquate à la relation traitée. Souvent, il est irréaliste de supposer que la variation de la variable dépendante est toujours la même, suite à une variation de une unité d'une variable explicative, quels que soient les niveaux déjà atteints par cette dernière et par les autres variables explicatives. On ne peut alors partir du principe que les dérivées partielles sont indépendantes des niveaux des variables. Dans ce cas, on travaille avec des relations formalisées sous la forme d'équations non linéaires.

Exemple

On souhaite modéliser la relation entre les ventes d'un produit de grande consommation V et les dépenses de publicité PUB de l'entreprise productrice. Si l'on pense que la « productivité », en termes de ventes, des dépenses de publicité décroît avec leur montant, on peut écrire :

$$V = \alpha PUB^\beta, \quad \text{avec } 0 < \beta < 1$$

Cette spécification implique en effet une dérivée première de V par rapport à PUB , qui décroît avec le montant de PUB . Autrement dit, au fur et à mesure que les dépenses publicitaires augmentent, l'augmentation des ventes devient de plus en plus faible.

Certaines relations non linéaires sont équivalentes à des relations linéaires entre des transformations des variables.

Exemple

Si l'on transforme les variables en logarithmes, une fonction de production de Cobb-Douglas, du type $Y = AK^\beta L^\gamma$, où Y , L et K sont la production, le travail et le capital, implique une relation linéaire entre les **transformations** des variables :

$\ln(Y) = \ln(AK^\beta L^\gamma)$ et donc $\ln(Y) = \ln(A) + \beta \ln(K) + \gamma \ln(L)$. Elle n'implique pas toutefois la constance des productivités marginales, qui restent bien sûr $\frac{\partial Y}{\partial L} = A\gamma K^\beta L^{\gamma-1}$ et $\frac{\partial Y}{\partial K} = A\beta K^{\beta-1} L^\gamma$.

Cette nouvelle équation ne constitue qu'une autre manière d'exprimer la même fonction de production : chacune des deux écritures implique l'autre et les propriétés économiques sont exactement les mêmes. L'écriture en logarithme met en évidence que $\beta = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln K} = \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y}$ et

$\gamma = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln L} = \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{L}{Y}$ sont les élasticités⁽¹⁾ de la production aux quantités de facteurs capital et travail. Ces élasticités sont supposées constantes (indépendantes des quantités de facteurs K et L) dans une telle fonction de production (Cobb-Douglas). Alors que la dérivée partielle d'une variable x_1 par rapport à une variable x_2 mesure la variation de x_1 (en nombres d'unités) quand x_2 augmente de une unité, l'élasticité de x_1 à x_2 mesure la variation de x_1 (en pourcentage) quand x_2 augmente de 1 %. Les coefficients β et γ , qui ne sont donc pas des productivités marginales, sont des rapports entre productivités marginales et moyennes. La fonction de Cobb-Douglas implique en effet la constance de ces rapports, au sens de leur indépendance par rapport à K et L .

1. Affirmer que l'élasticité de x_1 à x_2 est égale à 2 revient à affirmer la proposition suivante : lorsque x_1 augmente de 1 %, alors x_2 augmente de 2 %.

Cela dit, de nombreuses formes fonctionnelles non linéaires ne peuvent être linéarisées moyennant une transformation des variables.

Exemple

Soit la fonction de production CES, ayant la forme :

$$Y = (\lambda K^{-\rho} + (1 - \lambda)L^{-\rho})^{-1/\rho},$$

Elle ne peut être linéarisée exactement (c'est-à-dire transformée en une relation linéaire reliant des transformations non linéaires séparées de chaque variable).

Remarque**Une erreur de spécification à éviter : la redondance**

Il est important de comprendre l'interprétation des coefficients en termes de dérivées partielles pour éviter des erreurs dans la spécification d'une relation. Une erreur très répandue consiste à introduire une variable explicative supplémentaire sous prétexte qu'elle affecte la variable dépendante par son effet sur une autre variable explicative déjà introduite. C'est le phénomène de la redondance !

6 Validation empirique et types de données

6.1 DIMENSION DU TEMPS OU DES AGENTS

Une fois représentées par des formes fonctionnelles adéquates, les relations théoriques, c'est-à-dire le modèle, peuvent être confrontées aux données observées. Il s'agit de vérifier leur caractère explicatif de la réalité et de mesurer concrètement la valeur de leurs paramètres. Il est alors possible de calculer les taux de réaction des variables expliquées aux variables explicatives. Les données observées peuvent être des séries temporelles, des données en coupe instantanée ou des données panel.

Séries temporelles

Quand une équation semble décrire correctement la manière dont une variable évolue d'une période à l'autre, en fonction de l'évolution temporelle de certaines variables explicatives, elle peut être vue comme une relation stable et valable à tout moment. Ses coefficients ne sont pas indicés par le temps. On les suppose constants dans le temps. C'est une hypothèse forte, mais dans la mesure où la théorie économique a une quelconque validité pour expliquer les phénomènes économiques, on peut supposer l'existence de relations stables. Pour les vérifier empiriquement, il faut estimer leurs coefficients à partir des observations historiques des variables du modèle, appelées « séries temporelles » (ou « séries chronologiques »).

Données en coupe instantanée

Quand une équation semble plutôt décrire la manière dont différents agents économiques (entreprises, individus, régions, pays, secteurs...) déterminent la valeur particulière d'une variable en fonction des valeurs que prennent pour eux certaines variables explicatives, elle peut être vue comme une relation commune aux différents agents. Les coefficients

sont supposés les mêmes pour tous les agents, durant une période d'étude donnée. Pour vérifier cette relation, il faut la confronter à des observations concrètes des variables du modèle pour un ensemble d'agents différents, durant une même période. On appelle de telles observations des « données en coupe instantanée ».

Données panel

Quand une équation semble décrire la manière dont une variable varie d'une période à l'autre et diffère d'un agent à l'autre en fonction de l'évolution dans le temps de certaines variables explicatives et de leurs différences d'un agent à l'autre, elle peut être vue comme une relation stable et commune à tous, décrivant le comportement de tous les agents durant toutes les périodes. Pour mesurer et vérifier une telle relation, il faut la confronter à des observations des variables du modèle pour un ensemble d'agents différents, sur des périodes différentes. On appelle de telles observations des « données panel ».

Données réelles ou nominales

Une variable de flux ou de stock peut généralement être mesurée en termes nominaux (à prix courants, en valeur...) ou en termes réels (à prix constants, en volume...). La mesure en termes réels est égale à la mesure en termes nominaux divisée par un indice de prix approprié. Le choix d'un type de mesure au détriment de l'autre dépend logiquement du contexte de la relation étudiée. De manière générale, la variable dépendante et certaines variables explicatives doivent être exprimées en termes réels si la valeur réelle de la variable dépendante reste inchangée quand les valeurs nominales de ces variables explicatives doublent et que tous les prix doublent simultanément.

Certaines variables de taux existent en version nominale ou réelle. C'est le cas des taux d'intérêt et des taux de change. On réalise une approximation du taux d'intérêt réel en calculant la différence entre le taux d'intérêt nominal et le taux d'inflation. On obtient le taux de change réel entre deux devises en multipliant le taux de change nominal par le rapport entre les indices de prix des deux zones concernées. Une fois de plus, le choix de l'une des deux versions est dicté logiquement par le contexte de la relation étudiée.

7 Formulation statistique des relations économiques

En économétrie, on suppose généralement que les variables économiques sont aléatoires. En d'autres termes, on considère que la valeur observée d'un phénomène économique, par exemple l'investissement total effectué durant une année particulière, est en partie due au hasard : c'est la réalisation d'une variable aléatoire correspondante susceptible de produire d'autres réalisations si l'on répète l'expérience.

Exemple

À chaque période t , on observe la valeur de la variable aléatoire c_t , en l'occurrence la consommation, mais, d'un point de vue conceptuel, on pourrait observer d'autres valeurs, éventuellement différentes, si l'on répétait l'expérience. De la même manière, à chaque période t , les valeurs effectivement observées de $y_d t$ et r_t sont perçues comme des réalisations uniques des variables aléatoires correspondantes $y_d t$ et r_t , qui pourraient avoir d'autres réalisations.

Le hasard détermine en partie les réalisations effectivement observées des variables économiques et les résultats auraient pu être différents. Les probabilités d'obtenir telle ou telle valeur effectivement réalisée sont déterminées par les distributions statistiques des variables. Les relations économiques supposées par la théorie économique imposent des liaisons entre ces distributions.

Exemple

Une relation comme (a') relie les réalisations particulières des variables aléatoires c_t , yd_t et r_t qu'elle contient, par une forme fonctionnelle avec des coefficients α , β et γ supposés non aléatoires. Habituellement, on ajoute un aléa u_t à la relation :

$$c_t = \alpha + \beta yd_t + \gamma r_t + u_t \tag{a'}$$

(L'exemple est présenté dans un cadre temporel, mais il en va de même en coupe instantanée : $c_i = \alpha + \beta yd_i + \gamma r_i + u_i$, ou en panel : $c_{it} = \alpha + \beta yd_{it} + \gamma r_{it} + u_{it}$.)

On justifie de différentes façons la présence d'un aléa dans une relation entre des variables. Très souvent, on affirme qu'une relation économique n'est pas une représentation exacte et complète de la réalité. Elle ne reprend que les principaux facteurs qui influencent c ; l'aléa u , communément appelé « terme d'erreur », représente tous les effets qui ont tendance à se compenser mutuellement, de toutes les autres variables qui influencent également c . Cette interprétation, très intuitive, a longtemps été favorisée dans les manuels d'économétrie, au détriment des autres, sans que ce choix soit réellement justifié. Selon une autre interprétation (qui n'exclut pas la précédente), très ancienne également, les mesures concrètes des réalisations des variables, telles qu'elles sont calculées et publiées par les instituts de statistiques, s'accompagnent d'erreurs aléatoires et l'aléa u représente l'effet cumulé de toutes ces erreurs sur la relation originale (pour que cette dernière soit exacte, il faudrait que les concepts soient « parfaitement » mesurés). Autre interprétation : si l'on considère que la formule $\alpha + \beta yd_t + \gamma r_t$ constitue une approximation de la variable aléatoire c_t par une fonction des variables aléatoires yd_t et r_t , u_t est l'erreur d'approximation qui en résulte.

8 Processus stochastiques

En finance, en marketing et en macroéconomie, la plupart des données se présentent sous la forme de séries temporelles. Rappelons qu'une série temporelle est un ensemble d'observations qui portent toutes sur un même concept, mais à des dates successives. On suppose qu'à chaque période, la donnée observée est une réalisation (unique) d'une variable aléatoire spécifique, et que l'on obtiendrait d'autres réalisations si l'on répétait l'expérience. On mesure donc la réalisation d'une variable aléatoire (univariée) par période et l'ensemble des variables aléatoires considérées sur les périodes successives forme un processus stochastique. Une série temporelle est une réalisation d'un processus stochastique, au sens où chaque donnée de la série est la réalisation de l'une des variables aléatoires qui composent le processus stochastique.

Les processus stochastiques se répartissent en deux groupes selon qu'ils sont stationnaires ou non. Lorsqu'ils le sont, l'espérance (valeur moyenne) et la variance (dispersion) restent constantes dans le temps, et les covariances entre des composantes de dates différentes

ne dépendent que de l'écart de temps qui les sépare. Un cas particulier de processus stochastique stationnaire est le processus « bruit blanc » (traduction littérale de « white noise ») : l'espérance est nulle en toute période, la variance est constante dans le temps et les covariances entre composantes de dates différentes sont toujours nulles.

Les processus stochastiques non stationnaires se répartissent eux-mêmes en deux groupes selon qu'ils sont à tendance uniquement déterministe ou à tendance stochastique (on les appelle alors « processus intégrés » ou « processus à racine unitaire »). Lorsqu'ils sont à tendance uniquement déterministe, leur non-stationnarité est due à un phénomène purement mécanique ; elle est inhérente à leur partie déterministe, mais en rien à leur partie aléatoire. Lorsqu'ils sont à tendance stochastique, leur non-stationnarité est due à une accumulation progressive de chocs aléatoires ; elle est donc au moins partiellement inhérente à leur partie aléatoire. Ces processus peuvent avoir également une tendance déterministe.

Si l'on travaille avec des séries temporelles, le choix des méthodes d'inférence statistique à employer dépend de la nature des processus stochastiques qui ont généré les données. C'est pourquoi les distinctions évoquées précédemment sont très importantes.

Dans un processus stochastique stationnaire, les coefficients de corrélations entre deux composantes de dates différentes sont appelés « coefficients d'autocorrélation ». Ils ne dépendent que de l'écart de temps, ou retard, qui sépare les deux composantes. La succession de ces coefficients d'autocorrélation, pour des retards croissants, forment ce que l'on appelle un « autocorrélogramme ». Il montre avec quelle intensité les réalisations du processus restent liées linéairement à leurs valeurs passées, pour des retards de plus en plus éloignés.

9 Modèles statiques ou dynamiques et théorie économique

Un modèle statique implique que l'influence d'une variation d'une variable explicative sur la variable dépendante produit tous ses effets durant la période où cette variation a lieu. Il exclut toute inertie et tout délai dans les ajustements de la variable dépendante aux fluctuations des variables explicatives, alors qu'ils sont l'un et l'autre plus la règle que l'exception. En effet, une variable dépendante dépend souvent des valeurs passées, et pas seulement des valeurs actuelles, de ses variables explicatives (délais d'ajustement), ainsi que de sa propre valeur passée (inertie, effets d'habitude). De nombreux phénomènes économiques réels sont donc mieux expliqués par un modèle dynamique plutôt que statique.

Les relations entre les variables que la théorie économique propose sont souvent formulées de manière statique et représentent une situation d'équilibre (plus aucune force économique ne pousse à changer de situation ; tous les ajustements sont effectués). Pour autant, la théorie économique ne prétend pas que, dans la réalité, la situation soit équilibrée à chaque instant. Les données observées rendent compte obligatoirement de cet état de fait.

Il est donc erroné de vérifier une théorie en estimant le modèle statique issu de cette théorie à partir des données observées, car la relation d'équilibre théorique n'est pas vraie à chaque période. Il faut en fait estimer, sur la base de ces données, un modèle dynamique suffisamment riche pour prendre en compte toutes les inerties et délais d'ajustement, et vérifier que la relation entre les variables mises en jeu pour une situation d'équilibre est compatible avec la relation d'équilibre théorique. Pour qu'il en soit ainsi, on peut imposer aux paramètres du modèle dynamique général les contraintes ou restrictions nécessaires.

Un modèle dynamique général relie une variable dépendante à ses valeurs passées et aux valeurs présentes et passées de ses variables explicatives. Ce modèle décrit donc la trajectoire de la variable dépendante en fonction de la trajectoire de ses variables explicatives.

Exemple

Soit une variable dépendante $\ln(Y)$, et ses variables explicatives $\ln(X)$, $\ln(W)$ et $\ln(L)$. Si l'on ne prend qu'une valeur passée pour chaque variable, le modèle dynamique s'écrit comme suit, les deux formes étant équivalentes :

$$\begin{aligned} \ln Y_t &= \beta_1 + \beta_2 \ln X_t + \beta_3 \ln X_{t-1} + \beta_4 \ln W_t + \beta_5 \ln W_{t-1} \\ &\quad + \beta_6 \ln L_t + \beta_7 \ln L_{t-1} + \beta_8 \ln Y_{t-1} + u_t \\ (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) &= \beta_1 + \beta_2 (\ln X_t - \ln X_{t-1}) + (\beta_2 + \beta_3) \ln X_{t-1} + \beta_4 (\ln W_t - \ln W_{t-1}) \\ &\quad + (\beta_4 + \beta_5) \ln W_{t-1} + \beta_6 (\ln L_t - \ln L_{t-1}) + (\beta_6 + \beta_7) \ln L_{t-1} \\ &\quad + (\beta_8 - 1) \ln Y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

La solution d'équilibre stationnaire de ce modèle dynamique général est la relation entre les variables qui prévaut dans une situation où elles restent toutes constantes à chaque période, tout en respectant la relation décrite par le modèle dynamique général.

Exemple (suite)

Dans l'exemple précédent, la solution d'équilibre stationnaire est :

$$\ln \tilde{Y} = \beta_1 + \beta_2 \ln \tilde{X} + \beta_3 \ln \tilde{X} + \beta_4 \ln \tilde{W} + \beta_5 \ln \tilde{W} + \beta_6 \tilde{L} + \beta_7 \tilde{L} + \beta_8 \ln \tilde{Y}$$

ou encore :

$$\ln \tilde{Y} = \frac{(\beta_1) + (\beta_2 + \beta_3) \ln \tilde{X} + (\beta_4 + \beta_5) \ln \tilde{W} + (\beta_6 + \beta_7) \ln \tilde{L}}{1 - \beta_8}$$

La solution de croissance équilibrée d'un modèle dynamique général est la relation entre les variables qui prévaut dans une situation où elles croissent au même taux, tout en respectant la relation décrite par le modèle dynamique général.

Exemple (suite)

Dans l'exemple précédent, il faut donc imposer que les taux de croissance de Y , X , W et L , qui sont respectivement donnés par $\ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1})$, $\ln(X_t) - \ln(X_{t-1})$, $\ln(W_t) - \ln(W_{t-1})$ et $\ln(L_t) - \ln(L_{t-1})$, soient des constantes :

$$\begin{aligned} \ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1}) &= g_Y, \quad \forall t \\ \ln(X_t) - \ln(X_{t-1}) &= g_X, \quad \forall t \\ \ln(W_t) - \ln(W_{t-1}) &= g_W, \quad \forall t \\ \ln(L_t) - \ln(L_{t-1}) &= g_L, \quad \forall t \end{aligned}$$

La solution de croissance équilibrée est alors :

$$\begin{aligned} g_Y &= \beta_1 + \beta_2 g_X + (\beta_2 + \beta_3) \ln X_{t-1} + \beta_4 g_W + (\beta_4 + \beta_5) \ln W_{t-1} \\ &\quad + \beta_6 g_L + (\beta_6 + \beta_7) \ln L_{t-1} + (\beta_8 - 1) \ln Y_{t-1}, \quad \forall t \end{aligned}$$

ou encore :

$$\ln Y_t = \frac{(\beta_1 + \beta_2 g_X + \beta_4 g_W + \beta_6 g_L - g_Y) + (\beta_2 + \beta_3) \ln X_t + (\beta_4 + \beta_5) \ln W_t + (\beta_6 + \beta_7) \ln L_t}{1 - \beta_8}, \quad \forall t$$

Remarque

Parfois, même en croissance équilibrée, certaines variables ne peuvent avoir logiquement qu'une croissance nulle (comme en équilibre stationnaire). C'est généralement le cas des variables de taux, comme les taux d'intérêt.

Exemple (suite)

Si c'est le cas de L dans l'exemple précédent, alors $g_L = 0$ et

$$\ln Y_t = \frac{(\beta_1 + \beta_2 g_X + \beta_4 g_W - g_Y) + (\beta_2 + \beta_3) \ln X_t + (\beta_4 + \beta_5) \ln W_t + (\beta_6 + \beta_7) \ln \tilde{L}}{1 - \beta_8}, \quad \forall t$$

Parfois la théorie économique suggère qu'à long terme, la variable dépendante doit être proportionnelle à une variable explicative, c'est-à-dire avoir une élasticité unitaire par rapport à cette variable explicative. Il est alors aisé d'identifier les conditions nécessaires sur les coefficients du modèle dynamique général pour que ses solutions d'équilibre soient compatibles avec la théorie. Le mécanisme à correction d'erreur est le modèle qu'on obtient en imposant ces restrictions au modèle linéaire général.

Exemple (suite)

Soit le cas de figure suivant : selon la théorie économique, à long terme Y doit être proportionnel à X , et donc l'élasticité de long terme de Y à X doit être égale à 1. Pour que les solutions d'équilibre du modèle linéaire général soient compatibles avec cette théorie, il faut que $\beta_2 + \beta_3 = 1 - \beta_8$. Le **mécanisme à correction d'erreur** est alors le modèle qu'on obtient en imposant cette restriction au modèle linéaire général :

$$\begin{aligned} (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) = & \beta_1 + \beta_2 (\ln X_t - \ln X_{t-1}) + \beta_4 (\ln W_t - \ln W_{t-1}) + (\beta_4 + \beta_5) \ln W_{t-1} \\ & + \beta_6 (\ln L_t - \ln L_{t-1}) + (\beta_6 + \beta_7) \ln L_{t-1} + (\beta_8 - 1) (\ln Y_{t-1} - \ln X_{t-1}) + u_t \end{aligned}$$

Résumé

L'économétrie permet de vérifier l'existence de relations de dépendance entre des phénomènes et de mesurer les taux de réaction qui caractérisent ces relations, en utilisant des données observées. Pour réaliser ces objectifs, toute relation doit d'abord être exprimée mathématiquement au moyen d'une forme fonctionnelle appropriée. La linéarité ne se justifie que lorsqu'il est réaliste de supposer que l'impact d'une même variation d'une variable explicative sur la variable dépendante est toujours le même, quels que soient les niveaux des variables au départ. L'économétrie reconnaît d'emblée le caractère stochastique des phénomènes qu'elle étudie. Les variables observées sont ainsi considérées comme des réalisations de variables aléatoires et les modèles spécifiés sont perçus comme pertinents à un terme d'erreur aléatoire près. Il est souvent nécessaire de recourir à des modèles dynamiques pour rendre compte de l'inertie des comportements. Pour plus de détails sur la nature de l'économétrie et sur certains points développés dans ce chapitre, on peut se référer à Johnston et DiNardo [JOH 1997], Hendry [HEN 1995] et Spanos [SPA 1986].

Problèmes et exercices

EXERCICE 1 VENTES ET PUBLICITÉ

Énoncé

Les ventes V d'une entreprise sont une fonction croissante de ses dépenses de publicité PUB , mais au fur et à mesure que les dépenses de publicité augmentent, l'accroissement des ventes devient de plus en plus faible, d'autant plus que le niveau de départ des dépenses publicitaires est élevé.

La relation entre les ventes V et les dépenses de publicité PUB est-elle bien représentée par une des spécifications suivantes, et laquelle?

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 PUB_t, \quad \text{avec } \beta_1 > 0 \text{ et } \beta_2 > 0$$

$$V_t = \beta_1 PUB_t^{\beta_2}, \quad \text{avec } \beta_1 > 0 \text{ et } 0 < \beta_2 < 1$$

$$V_t = \ln(\beta_1 + PUB_t^{\beta_2}), \quad \text{avec } \beta_1 > 0 \text{ et } 0 > \beta_2 > -1$$

Solution

La deuxième spécification représente bien la relation entre ventes et dépenses publicitaires. La dérivée de V_t par rapport à PUB_t vaut en effet $\beta_1 \beta_2 PUB_t^{\beta_2-1}$ et cette dérivée diminue quand PUB_t augmente, parce que $\beta_1 > 0$ et $0 < \beta_2 < 1$.

EXERCICE 2 ÉLASTICITÉ DES VENTES AUX PRIX

Énoncé

Pour que l'élasticité des ventes V au prix P du produit soit en valeur absolue une fonction décroissante des dépenses de publicité PUB , il faut qu'une des relations suivantes prévale :

$$V_t = \beta_1 P_t^{-(\beta_2 + (\beta_3/PUB_t))}, \quad \text{avec } \beta_1 > 0 \text{ et } \beta_2 > 0 \text{ et } \beta_3 > 0$$

$$V_t = \beta_1 + \beta_2 PUB_t + \beta_3 P_t, \quad \text{avec } \beta_1 > 0 \text{ et } \beta_2 > 0 \text{ et } \beta_3 < 0$$

$$V_t = \beta_1 P_t^{\beta_2} PUB_t^{\beta_3}, \quad \text{avec } \beta_1 > 0 \text{ et } \beta_2 < 0 \text{ et } \beta_3 > 0$$

Parmi ces trois relations, laquelle est à retenir?

Solution

La première spécification est appropriée, puisque l'élasticité des ventes au prix vaut $-(\beta_2 + (\beta_3/PUB_t))$. Cette expression est négative puisque $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$, et $PUB_t > 0$ par définition. En valeur absolue, cette élasticité vaut donc $(\beta_2 + (\beta_3/PUB_t))$. Elle décroît si PUB_t augmente étant donné que PUB_t se trouve au dénominateur et que $\beta_3 > 0$.

EXERCICE 3 SPÉCIFICATION D'UNE FONCTION DE PRODUCTION

Énoncé

Soit une fonction de production, qu'on représente de la manière suivante, et en prenant comme hypothèse d'absence de progrès technique :

$$Y = f(K, L)$$

Y est la quantité produite, K est le capital et L l'emploi.

Parmi ces deux spécifications, laquelle est réaliste : $Y = \alpha + \beta K + \gamma L$ ou $Y = AK^\beta L^\gamma$?

Solution

Exprimer cette relation sous une forme linéaire, $Y = \alpha + \beta K + \gamma L$, revient à imposer arbitrairement que les productivités marginales sont constantes, donc qu'elles ne dépendent pas des quantités de facteurs. En effet, avec une telle spécification, $\beta = \frac{\partial Y}{\partial K}$ est la productivité marginale du capital et $\gamma = \frac{\partial Y}{\partial L}$ est la productivité marginale du travail. Ces productivités marginales sont supposées indépendantes des quantités de facteurs, puisqu'elles sont égales à des constantes β et γ . Par conséquent, en modélisant la production de cette manière, on ignore délibérément des caractéristiques bien connues de beaucoup de processus de production réels. On ne tient pas compte en particulier des deux phénomènes suivants : la productivité marginale du travail diminue quand la quantité de travail augmente et que le stock de capital reste à un niveau constant, et elle croît quand le stock de capital augmente et que la quantité de travail reste inchangée. Concrètement, ajouter l'un après l'autre des ouvriers supplémentaires à une équipe qui travaille sur une machine conduit en général à des accroissements de moins en moins importants de la production et devient au bout d'un certain temps contre-productif (on provoque une congestion qui diminue la production). Par contre, mieux équiper les ouvriers permet d'augmenter la contribution productive apportée par une éventuelle main-d'oeuvre supplémentaire. Une spécification linéaire de la fonction de production n'implique pas ces propriétés réalistes ; elle est donc inadéquate dans le cas d'une fonction de production.

Pour représenter correctement de telles caractéristiques, on utilise des formes fonctionnelles non linéaires comme la fonction de Cobb-Douglas :

$$Y = AK^\beta L^\gamma$$

La productivité marginale du travail se mesure alors par $\frac{\partial Y}{\partial L} = A\gamma K^\beta L^{\gamma-1} = \frac{\gamma Y}{L}$ et la productivité marginale du capital par $\frac{\partial Y}{\partial K} = A\beta K^{\beta-1} L^\gamma = \frac{\beta Y}{K}$. Cette fois, les productivités marginales ne sont pas constantes, mais varient en fonction du niveau déjà atteint par L et K . On peut vérifier qu'elles respectent les propriétés réalistes mises en évidence précédemment. En effet, quand K est inchangé, le supplément $\frac{\partial Y}{\partial L}$ de production induit par l'intervention d'un ouvrier supplémentaire diminue au fur et à mesure qu'augmente

le nombre d'ouvriers L déjà en place : $\frac{\partial \left(\frac{\partial Y}{\partial L} \right)}{\partial L} = A\gamma(\gamma-1)K^\beta L^{\gamma-2} = \frac{\gamma(\gamma-1)Y}{L^2}$ est

négalif à condition que γ soit inférieur à 1. Pour un nombre donné L d'ouvriers déjà à l'œuvre, augmenter le stock de capital K permet d'accroître le supplément de production apporté par un intervenant supplétif :

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial Y}{\partial L} \right)}{\partial K} = A\gamma\beta K^{\beta-1} L^{\gamma-1} = \frac{\gamma\beta Y}{LK} > 0$$

EXERCICE 4 FONCTION DE CONSOMMATION À PRIX COURANTS OU CONSTANTS ?

Énoncé

Soient c_t les quantités consommées et p_t leur prix, à la période t . La consommation réelle est donc c_t et la consommation nominale $C_t = p_t c_t$. Le revenu nominal est Y_t et le revenu réel est $y_t = Y_t/p_t$. En termes nominaux, la relation entre consommation et revenu est $C_t = a + bY_t$ tandis qu'en termes réels, elle s'écrit $c_t = a + by_t$.

La relation entre consommation et revenu doit-elle être spécifiée en termes réels ou nominaux ?

Solution

En termes nominaux, la relation est $C_t = a + bY_t$, et donc $p_t c_t = a + bY_t$, ce qui implique que $c_t = (a/p_t) + b(Y_t/p_t)$, c'est-à-dire $c_t = (a/p_t) + by_t$. Si les prix p_t et le revenu nominal Y_t doublent simultanément, le revenu réel y_t reste inchangé. Toutefois, le terme a/p_t change. La relation $C_t = a + bY_t$ implique donc que les quantités consommées c_t diminuent lorsque les prix et le revenu nominal doublent simultanément.

Logiquement, si les prix doublent et que le revenu nominal double aussi, cela ne change rien au pouvoir d'achat des consommateurs ; les quantités achetées devraient rester inchangées. La relation en termes nominaux ne reflète donc pas un comportement rationnel de la part des consommateurs. Il faut lui préférer la relation en termes réels : $c_t = a + by_t$.

EXERCICE 5 CONSOMMATION, REVENU DISPONIBLE ET SALAIRE

Énoncé

On ajoute à la relation $c = \alpha + \beta yd + \gamma r$ d'autres variables explicatives susceptibles de contribuer à déterminer l'évolution de la consommation, en l'occurrence le niveau moyen des salaires w – parce que « lorsque les salaires augmentent, le revenu disponible augmente et la consommation s'élève ». On formule une nouvelle relation linéaire de la forme :

$$c = \alpha + \beta yd + \gamma r + \lambda w \quad (a'')$$

Cette suggestion est-elle raisonnable ?

Solution

Cette suggestion n'est pas fondée. Cette relation est redondante et n'est pas correctement spécifiée. Pourquoi ? Le coefficient λ est la dérivée partielle de c par rapport au salaire w . Il mesure donc la réaction de la consommation c à une variation des salaires w , le revenu disponible yd et le taux d'intérêt restant inchangés. Or on a voulu justifier l'apport de w en indiquant que ses variations provoquent une variation du revenu disponible yd ,

et par là même de c . Manifestement, λ ne mesure pas ce type d'effet, mais plutôt un impact direct hypothétique de w sur c , quand yd est inchangé (donc un effet de w sur c , qui ne passerait pas par yd). C'est tout à fait différent de l'effet indirect qu'on voulait (inutilement) mettre en évidence – w influence yd , qui lui-même influence c – et qui est déjà pris en compte à travers yd dans l'équation ; il n'est donc pas nécessaire d'ajouter w . Le coefficient β mesure l'impact sur c d'une variation de yd , quelles que soient les causes de ce changement, y compris une variation de w . Pour ajouter w à l'équation (a'), et donc utiliser (a''), il faut être sûr que, indépendamment de son effet indirect *via* son influence sur yd , w influence aussi directement c , pour une autre raison (c'est seulement cet autre effet qui sera mesuré par son coefficient). Dans l'exemple utilisé, il est difficile de justifier économiquement une telle hypothèse. Pour expliquer les variations de c , il est donc inutile d'ajouter la variable explicative w quand elle n'exerce qu'un effet indirect sur c . Mais quand l'intérêt de l'étude porte effectivement sur la mesure de l'effet indirect de w sur c , et non sur une explication des variations de c , comment mesurer cet effet indirect ? Il faut spécifier une nouvelle relation dans le modèle, qui explique yd en fonction de w et de ses autres déterminants qu'on représente ici par une variable x : par exemple, $yd = \rho + \phi w + \mu x$. L'effet indirect de w sur c est alors $\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{\partial c}{\partial yd} \frac{\partial yd}{\partial w} = \beta \phi$; il est obtenu à partir des coefficients de deux équations différentes.

EXERCICE 6 TAUX D'INTÉRÊT NOMINAL OU RÉEL ?

Énoncé

Le revenu nominal est Y_t à la période t , et Y_{t+1} à la période $t + 1$. Soient c_t les quantités consommées, et p_t leur prix, à la période t . Soient c_{t+1} les quantités consommées, et p_{t+1} leur prix, à la période $t + 1$. Les consommations nominales des deux périodes sont $C_t = p_t c_t$ et $C_{t+1} = p_{t+1} c_{t+1}$. Le taux d'intérêt nominal est R_t . Le taux d'intérêt réel est $r_t = ((1 + R_t)/(1 + I_t)) - 1$, où I_t est le taux d'inflation : $I_t = (p_{t+1} - p_t)/p_t$. Les consommateurs choisissent les quantités consommées c_t et c_{t+1} sous la contrainte budgétaire nominale intertemporelle $C_{t+1} = (Y_t - C_t)(1 + R_t) + Y_{t+1}$. On veut spécifier un modèle expliquant les quantités consommées c_t en fonction du revenu réel y_t , du revenu réel y_{t+1} et du taux d'intérêt.

Celui-ci doit-il être le taux d'intérêt nominal ou réel ?

Solution

La contrainte budgétaire nominale est encore $p_{t+1} c_{t+1} = (Y_t - p_t c_t)(1 + R_t) + Y_{t+1}$, ce qui implique la relation suivante entre les quantités consommées : $c_{t+1} = \left[\frac{(Y_t/p_t) - c_t}{(1 + R_t)/(p_{t+1}/p_t)} \right] + (Y_{t+1}/p_{t+1})$. Cette contrainte peut se réécrire ainsi : $c_{t+1} = \left[\frac{(Y_t/p_t) - c_t}{(1 + R_t)/(p_{t+1}/p_t)} \right] + (Y_{t+1}/p_{t+1})$. Elle devient donc $c_{t+1} = (y_t - c_t)/(1 + r_t) + y_{t+1}$, où $y_t = Y_t/p_t$ est le revenu réel à la période t , $y_{t+1} = Y_{t+1}/p_{t+1}$ est le revenu réel à la période $t + 1$, r_t est le taux d'intérêt réel, défini par $r_t = (1 + R_t)/(1 + I_t) - 1$ et I_t est le taux d'inflation défini par $I_t = (p_{t+1} - p_t)/p_t$. La contrainte budgétaire ainsi exprimée montre que les choix des quantités consommées aux périodes t et $t + 1$ sont influencés par les revenus réels aux périodes t et $t + 1$ et par le taux d'intérêt réel. C'est donc le taux d'intérêt réel, et non le taux d'intérêt nominal, qui doit intervenir dans une fonction explicative des quantités consommées.

EXERCICE 7 CHOIX DES DONNÉES

Énoncé

La fonction de consommation suivante explique les dépenses c en fonction du revenu disponible yd et du taux d'intérêt r :

$$c = \alpha + \beta yd + \gamma r$$

Vous voulez vérifier la pertinence de ce modèle, c'est-à-dire vous assurer qu'il peut rendre compte des données observées. Expliquez dans quels cas vous utilisez :

- des données en séries temporelles ;
- des données en coupe instantanée ;
- des données panel.

Solution

- **Séries temporelles.** Si la fonction de consommation semble une bonne description de la manière dont la consommation agrégée d'un pays évolue d'une période à l'autre, en fonction de l'évolution temporelle du revenu et du taux d'intérêt, cette fonction peut être vue comme une relation stable et valable à toute période t . Soient c_t la consommation réelle agrégée durant la période t , yd_t le revenu disponible réel durant la période t , et r_t le taux d'intérêt moyen durant la période t . L'équation devient :

$$c_t = \alpha + \beta yd_t + \gamma r_t, \quad \text{pour tout } t$$

Les coefficients α , β , γ ne sont pas indicés par t , contrairement aux variables c_t , yd_t et r_t . On les suppose constants dans le temps. La relation économique théorique représentée par la fonction de consommation est vraisemblablement une loi économique stable dans le temps. C'est une hypothèse forte, mais dans la mesure où la théorie économique a une quelconque validité pour expliquer les phénomènes économiques, on peut supposer l'existence des relations stables. Pour les vérifier, il faut estimer leurs coefficients à partir des observations historiques de c , yd et r , appelées « séries temporelles ».

- **Données en coupe instantanée.** Si l'équation semble plutôt décrire la manière dont différents agents (ici les consommateurs) déterminent leur consommation particulière en fonction de leur revenu disponible personnel et du taux d'intérêt, durant une période donnée, elle peut être vue comme une relation commune aux différents agents. Soient c_i la consommation de l'agent i , yd_i le revenu disponible de l'agent i et r_i le taux d'intérêt auquel l'agent i peut prêter ou emprunter. Le modèle devient :

$$c_i = \alpha + \beta yd_i + \gamma r_i, \quad \text{pour tout } i$$

Les taux de réaction à ces variables, c'est-à-dire les coefficients β et γ , sont supposés les mêmes pour tous les agents, durant une période d'étude donnée. Pour vérifier cette relation, il faut la confronter à des observations concrètes de la consommation, du revenu et du taux d'intérêt pour un ensemble d'agents différents, durant une période précise. Ces observations sont les données en coupe instantanée. Remarque : quand le taux d'intérêt est le même pour tous les consommateurs, et prend donc une valeur r , son effet est dilué dans un terme constant commun représenté par $\alpha + \gamma r$ et le taux de réaction γ n'est pas identifiable.

- **Données panel.** Si l'équation semble décrire la manière dont la consommation varie d'une période à l'autre et diffère d'un agent à l'autre en fonction de l'évolution dans le temps du revenu et du taux d'intérêt et de leurs différences d'un agent à l'autre, la fonction de consommation peut être vue comme une relation stable et commune à tous, décrivant le comportement de tous les agents durant toutes les périodes. Soient c_{it} la consommation en termes réels de l'agent i durant la période t , $y d_{it}$ le revenu disponible réel de l'agent i durant la période t , et r_{it} le taux d'intérêt pour l'agent i durant la période t . L'équation devient :

$$c_{it} = \alpha + \beta y d_{it} + \gamma r_{it}, \quad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } t$$

On peut remplacer r_{it} par r_t quand on suppose que tous les agents ont le même taux d'intérêt. Pour mesurer et vérifier une telle relation, il faut la confronter à des observations du revenu et du taux d'intérêt pour un ensemble d'agents différents, sur des périodes différentes de la consommation. De telles données sont appelées « données panel ».

EXERCICE 8 SPÉCIFICATION D'UNE FONCTION DE CONSOMMATION DYNAMIQUE

Énoncé

Les théories macroéconomiques à fondements microéconomiques impliquent généralement que la consommation réelle agrégée est, à l'équilibre (à « long terme »), proportionnelle au revenu disponible réel agrégé et que la constante de proportionnalité est une fonction du taux de croissance d'équilibre du revenu disponible réel, du taux d'inflation d'équilibre et du taux d'intérêt d'équilibre. Spécifiez un modèle dynamique explicatif de la consommation agrégée, en veillant à ce que ses solutions d'équilibre respectent ce qui vient d'être dit.

Solution

La relation d'équilibre théorique peut se formuler ainsi :

$$C_t = A Y_t, \quad \text{avec } A = f(g_Y, g_P, R)$$

où

Y_t est le revenu disponible réel agrégé à la période t ;

g_Y est le taux de croissance d'équilibre du revenu disponible réel ;

g_P est le taux d'inflation d'équilibre (ou taux de croissance d'équilibre des prix) ;

R est la valeur d'équilibre du taux d'intérêt ;

C_t est la consommation réelle agrégée à la période t .

Cette relation théorique s'écrit :

$$\ln(C_t) = A' + \ln(Y_t), \quad \text{où } A' = \ln(A)$$

La théorie implique donc que, à l'équilibre, l'élasticité de la consommation au revenu est unitaire :

$$\frac{\partial C}{\partial Y} \frac{Y}{C} = \frac{\partial \ln(C)}{\partial \ln(Y)} = 1$$

Il faut commencer par estimer, à partir des données, un **modèle dynamique général** (MDG) qui contient les valeurs présentes et passées de chaque variable :

$$\ln C_t = \beta_1 + \beta_2 \ln Y_t + \beta_3 \ln Y_{t-1} + \beta_4 \ln P_t + \beta_5 \ln P_{t-1} + \beta_6 R_t + \beta_7 R_{t-1} + \beta_8 \ln C_{t-1} + u_t$$

Ce modèle dynamique capte tous les délais d'ajustement, effets d'habitude et autres inerties, tous les déséquilibres de court terme qui font que la consommation n'est pas, à chaque période, en relation d'équilibre avec ses déterminants. On peut écrire ce modèle dynamique général d'une autre manière, sachant que l'égalité se maintient si l'on soustrait la même quantité à gauche et à droite :

$$\ln C_t - \ln C_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 \ln Y_t + \beta_3 \ln Y_{t-1} + \beta_4 \ln P_t + \beta_5 \ln P_{t-1} + \beta_6 R_t + \beta_7 R_{t-1} + (\beta_8 - 1) \ln C_{t-1} + u_t$$

Le membre de droite est évidemment inchangé si on ajoute et soustrait en même temps les mêmes éléments :

$$\begin{aligned} \ln C_t - \ln C_{t-1} &= \beta_1 + \beta_2 \ln Y_t - \beta_2 \ln Y_{t-1} + \beta_2 \ln Y_{t-1} + \beta_3 \ln Y_{t-1} \\ &+ \beta_4 \ln P_t - \beta_4 \ln P_{t-1} + \beta_4 \ln P_{t-1} + \beta_5 \ln P_{t-1} \\ &+ \beta_6 R_t - \beta_6 R_{t-1} + \beta_6 R_{t-1} + \beta_7 R_{t-1} \\ &+ (\beta_8 - 1) \ln C_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

Cela peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \ln C_t - \ln C_{t-1} &= \beta_1 + \beta_2 (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) + (\beta_2 + \beta_3) \ln Y_{t-1} \\ &+ \beta_4 (\ln P_t - \ln P_{t-1}) + (\beta_4 + \beta_5) \ln P_{t-1} \\ &+ \beta_6 (R_t - R_{t-1}) + (\beta_6 + \beta_7) R_{t-1} + (\beta_8 - 1) \ln C_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

On obtient donc le **modèle dynamique général reparamétré** (MDGR) :

$$\begin{aligned} \ln C_t - \ln C_{t-1} &= \beta'_1 + \beta'_2 (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) + \beta'_3 \ln Y_{t-1} + \beta'_4 (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \\ &+ \beta'_5 \ln P_{t-1} + \beta'_6 (R_t - R_{t-1}) + \beta'_7 R_{t-1} + \beta'_8 \ln C_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

Les relations entre les paramètres des deux équations MDG et MDGR sont :

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= \beta_1, & \beta'_2 &= \beta_2, & \beta'_3 &= \beta_2 + \beta_3, & \beta'_4 &= \beta_4, \\ \beta'_5 &= \beta_4 + \beta_5, & \beta'_6 &= \beta_6, & \beta'_7 &= \beta_6 + \beta_7, & \beta'_8 &= (\beta_8 - 1) \end{aligned}$$

Les équations MDG et MDGR ne sont pas deux modèles différents, mais deux écritures, deux représentations différentes du même modèle dynamique. L'une implique l'autre !

Il faut ensuite rechercher la **solution d'équilibre stationnaire** du modèle dynamique, qui est une propriété de ce modèle. Elle se présente sous la forme d'une relation entre les variables qu'il implique lorsqu'elles sont constantes dans le temps, lorsqu'elles sont en équilibre stationnaire. Dans cet exercice, la solution d'équilibre stationnaire du modèle dynamique est la relation entre les variables impliquées simultanément par l'équation MDG (ou MDGR) et les hypothèses de stationnarité suivantes :

$$\begin{aligned} C_t &= C_{t-1} = \tilde{C}, & \forall t \\ Y_t &= Y_{t-1} = \tilde{Y}, & \forall t \\ R_t &= R_{t-1} = \tilde{R}, & \forall t \\ P_t &= P_{t-1} = \tilde{P}, & \forall t \end{aligned}$$

Pour trouver cette solution, il suffit donc d'intégrer ces hypothèses de stationnarité dans l'équation MDG. On obtient :

$$\ln \tilde{C} = \beta_1 + \beta_2 \ln \tilde{Y} + \beta_3 \ln \tilde{Y} + \beta_4 \ln \tilde{P} + \beta_5 \ln \tilde{P} + \beta_6 \tilde{R} + \beta_7 \tilde{R} + \beta_8 \ln \tilde{C}$$

Cela implique :

$$\ln \tilde{C} = \frac{(\beta_1) + (\beta_2 + \beta_3) \ln \tilde{Y} + (\beta_4 + \beta_5) \ln \tilde{P} + (\beta_6 + \beta_7) \tilde{R}}{1 - \beta_8}$$

Ce résultat est la solution d'équilibre stationnaire du modèle dynamique⁽¹⁾. Il s'agit de la relation (et non d'un nouveau modèle) qu'il implique dans le cas particulier d'une situation d'équilibre stationnaire. Pour tester sur les données la théorie, il faut estimer le modèle dynamique et vérifier que ses coefficients sont tels que sa solution d'équilibre stationnaire est compatible avec la relation d'équilibre de la théorie. Celle-ci est donc vérifiée si les hypothèses suivantes ne sont pas rejetées :

$$\frac{(\beta_4 + \beta_5)}{1 - \beta_8} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{(\beta_2 + \beta_3)}{1 - \beta_8} = 1$$

On peut objecter que, sur des données macroéconomiques caractérisées par une croissance continue, le concept d'équilibre stationnaire est peu pertinent. On peut aussi rechercher la solution de croissance équilibrée du modèle dynamique qui est une autre de ses propriétés. Cette solution est la relation entre les variables que le modèle implique lorsque toutes celles qui représentent le flux, les stocks et les prix croissent à un taux constant dans le temps (elles sont en croissance équilibrée) et que les variables relatives aux taux sont constantes dans le temps (elles sont en équilibre stationnaire puisqu'il est insensé qu'un taux d'intérêt augmente à un taux de croissance constant indéfiniment). Dans cet exercice, la solution de croissance équilibrée du modèle dynamique est la relation entre les variables impliquées simultanément par l'équation MDG (ou MDGR) et les hypothèses de croissance équilibrée suivantes :

$$\ln(C_t) - \ln(C_{t-1}) = g_C, \quad \forall t$$

$$\ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1}) = g_Y, \quad \forall t$$

$$R_t = R_{t-1} = \tilde{R}, \quad \forall t$$

$$\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = g_P, \quad \forall t$$

Pour trouver cette solution, il est préférable d'utiliser la représentation MDGR du modèle dynamique. Si l'on intègre ces hypothèses de croissance équilibrée dans l'équation MDG, on trouve :

$$g_C = \beta'_1 + \beta'_2 g_Y + \beta'_3 \ln Y_{t-1} + \beta'_4 g_P + \beta'_5 \ln P_{t-1} + \beta'_7 R_{t-1} + \beta'_8 \ln C_{t-1}, \quad \forall t$$

Cela implique :

$$\ln C_{t-1} = \frac{g_C - \beta'_1 - \beta'_2 g_Y - \beta'_3 \ln Y_{t-1} - \beta'_4 g_P - \beta'_5 \ln P_{t-1} - \beta'_7 R_{t-1}}{\beta'_8}, \quad \forall t$$

Et donc :

$$\ln C_t = \frac{g_C - \beta'_1 - \beta'_2 g_Y - \beta'_4 g_P - \beta'_3 \ln Y_t - \beta'_5 \ln P_t - \beta'_7 R_t}{\beta'_8}, \quad \forall t$$

1. On trouve exactement la même solution en substituant les hypothèses de stationnarité dans l'équation MDGR. C'est logique puisque MDG et MDGR sont deux représentations différentes du même modèle.

Ou, de manière équivalente :

$$\ln C_t = \frac{(\beta_1 + \beta_2 g_Y + \beta_4 g_P - g_C) + (\beta_2 + \beta_3) \ln Y_t + (\beta_4 + \beta_5) \ln P_t + (\beta_6 + \beta_7) \tilde{R}}{1 - \beta_8}, \quad \forall t$$

Ce résultat est la solution de croissance équilibrée du modèle dynamique. Il s'agit de la relation qu'il implique dans le cas particulier d'une situation de croissance équilibrée. Pour tester sur les données la théorie, il faut estimer le modèle dynamique et vérifier que ses coefficients sont tels que sa solution de croissance équilibrée est compatible avec le postulat de relation d'équilibre théorique. Cette relation est donc vérifiée si les restrictions ou hypothèses suivantes ne sont pas rejetées :

$$\frac{(\beta_4 + \beta_5)}{1 - \beta_8} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{(\beta_2 + \beta_3)}{1 - \beta_8} = 1$$

Pour s'assurer que le modèle dynamique général respecte la théorie, c'est-à-dire pour que ses solutions d'équilibre stationnaire et de croissance équilibrée soient compatibles avec la relation d'équilibre de la théorie économique, il suffit d'imposer ces contraintes à ses paramètres. Si l'on procède ainsi, le modèle dynamique général devient le mécanisme à correction d'erreur, en l'occurrence :

$$\begin{aligned} \ln C_t - \ln C_{t-1} &= \beta_1 + \beta_2 (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) + (1 - \beta_8) (\ln Y_{t-1} - \ln C_{t-1}) \\ &\quad + \beta_4 (\ln P_t - \ln P_{t-1}) + \beta_6 (R_t - R_{t-1}) + (\beta_6 + \beta_7) R_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

On peut calculer ses solutions d'équilibre stationnaire et de croissance équilibrée :

$$\begin{aligned} \ln C_t &= \frac{(\beta_1) + (\beta_6 + \beta_7) \tilde{R}}{1 - \beta_8} + \ln Y_t \\ \ln C_t &= \frac{(\beta_1 + (\beta_2 - 1) g_Y + \beta_4 g_P) + (\beta_6 + \beta_7) \tilde{R}}{1 - \beta_8} + \ln Y_t \end{aligned}$$

Elles sont bien compatibles avec la théorie macroéconomique. Quand C est proportionnel à Y , $g_C = g_Y$.

EXERCICE 9 SPÉCIFICATION D'UN MODÈLE DYNAMIQUE DE TAUX DE CHANGE

Énoncé

La théorie de la parité des pouvoirs d'achat implique qu'à l'équilibre, le taux de change entre deux devises s'ajuste de manière à égaliser le coût d'acquisition d'un panier de biens dans les deux pays concernés, lorsque les biens sont exprimés dans une même devise. À court terme, le taux de change fluctue également en fonction d'autres variables, tel le différentiel de taux d'intérêts nominaux entre les deux pays. Spécifiez un modèle explicatif de l'évolution du taux de change e_{ij} entre les devises de deux pays i et j , qui soit approprié à court terme tout en étant compatible avec la théorie de la parité des pouvoirs d'achat à long terme. Supposez que les périodes sont annuelles et que la dynamique peut se réduire à des retards d'une période.

Solution

Soit e_{ij} le taux de change défini comme le prix d'une unité de devise i exprimé en unités de devise j . Les variables explicatives suggérées par l'énoncé sont :

p_i , l'indice des prix dans le pays i , en devises du pays i ;

p_j , l'indice de prix dans le pays j , en devise du pays j ;

R_i , le taux d'intérêt nominal à court terme pour la devise du pays i ;

R_j , le taux d'intérêt nominal à court terme pour la devise du pays j .

En données annuelles, on suppose que la dynamique peut se réduire à une période. On spécifie le modèle dynamique général :

$$\begin{aligned}\ln(e_{ijt}) = & \beta_1 + \beta_2 R_{it} + \beta_3 R_{it-1} + \beta_4 \ln(p_{it}) + \beta_5 \ln(p_{jt}) + \beta_6 \ln(p_{jt-1}) + \beta_7 \ln(p_{it-1}) \\ & + \beta_8 R_{jt} + \beta_9 R_{jt-1} + \beta_{10} \ln(e_{ijt-1}) + u_t\end{aligned}$$

Cela peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}(\ln(e_{ijt}) - \ln(e_{ijt-1})) = & \beta_1 + \beta_2(R_{it} - R_{it-1}) + (\beta_2 + \beta_3)R_{it-1} + \beta_4(\ln(p_{it}) - \ln(p_{it-1})) \\ & + \beta_5(\ln(p_{jt}) - \ln(p_{jt-1})) + (\beta_5 + \beta_6) \ln(p_{jt-1}) \\ & + (\beta_4 + \beta_7) \ln(p_{it-1}) + \beta_8(R_{jt} - R_{jt-1}) \\ & + (\beta_8 + \beta_9)R_{jt-1} + (\beta_{10} - 1) \ln(e_{ijt-1}) + u_t\end{aligned}$$

La théorie de la parité des pouvoirs d'achat suggère qu'à l'équilibre :

$$p_{it} e_{ijt} = k p_{jt}$$

où k est un facteur de proportionnalité tenant compte de différences éventuelles dans la composition et le choix de l'année de base des indices de prix des deux pays. Cette relation d'équilibre s'écrit encore :

$$\ln(e_{ijt}) = A + \ln(p_{it}) - \ln(p_{jt})$$

où $A = \ln(k)$. La solution d'équilibre stationnaire du modèle dynamique général est :

$$\begin{aligned}\ln(e_{ijt}) = & (\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)R_{it} + (\beta_4 + \beta_7) \ln(p_{it}) \\ & + (\beta_5 + \beta_6) \ln(p_{jt}) + (\beta_8 + \beta_9)R_{jt}) / (1 - \beta_{10})\end{aligned}$$

puisque $R_{it} = R_{it-1}$, $R_{jt} = R_{jt-1}$, $e_{ijt} = e_{ijt-1}$, $p_{it} = p_{it-1}$ et $p_{jt} = p_{jt-1}$. La solution de croissance équilibrée s'écrit :

$$\begin{aligned}\ln(e_{ijt}) = & ((\beta_1 + \beta_4 g_i + \beta_5 g_j - g_e) + (\beta_2 + \beta_3)R_{it} + (\beta_4 + \beta_7) \ln(p_{it}) \\ & + (\beta_5 + \beta_6) \ln(p_{jt}) + (\beta_8 + \beta_9)R_{jt}) / (1 - \beta_{10})\end{aligned}$$

où $g_e = \ln(e_{ijt}) - \ln(e_{ijt-1})$, $g_i = \ln(p_{it}) - \ln(p_{it-1})$, $g_j = \ln(p_{jt}) - \ln(p_{jt-1})$, $R_{it} = R_{it-1}$ et $R_{jt} = R_{jt-1}$. Pour être compatibles avec la relation théorique $\ln(e_{ijt}) = A + \ln(p_{it}) - \ln(p_{jt})$, les coefficients de ces solutions d'équilibre doivent être contraints de sorte que $(\beta_5 + \beta_6)/(1 - \beta_{10}) = (\beta_4 + \beta_7)/(1 - \beta_{10}) = 1$. À l'équilibre, la relation théorique $\ln(e_{ijt-1}) = A + \ln(p_{it}) - \ln(p_{jt})$ implique aussi que $g_e = g_j - g_i$. En imposant ces restrictions au modèle dynamique général, on obtient le mécanisme à correction d'erreur :

$$\begin{aligned}(\ln(e_{ijt}) - \ln(e_{ijt-1})) = & \beta_1 + \beta_2(R_{it} - R_{it-1}) + (\beta_2 + \beta_3)R_{it-1} + \beta_4(\ln(p_{it}) - \ln(p_{it-1})) \\ & + \beta_5(\ln(p_{jt}) - \ln(p_{jt-1})) \\ & + (\beta_5 + \beta_6)(\ln(p_{jt-1}) - \ln(p_{it-1}) - \ln(e_{ijt-1})) \\ & + \beta_8(R_{jt} - R_{jt-1}) + (\beta_8 + \beta_9)R_{jt-1} + u_t\end{aligned}$$

Références bibliographiques

- [JOH 1997] J. Johnson, J. DiNardo, *Econometric Methods*, McGraw Hill, 1997.
- [HEN 1995] D. Hendry, *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press, 1995.
- [SPA 1986] A. Spanos, *Statistical Foundations of Econometric Modelling*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.