

3.1 Modélisation des matériaux hétérogènes par le modèle de Cosserat

Très tôt, certains auteurs ont proposé de remplacer un milieu composite par un milieu homogène de Cosserat afin d'améliorer la prévision de la réponse des structures à des sollicitations complexes (Besdo, 1985). Une telle procédure d'homogénéisation systématique a été proposée plus récemment par (Forest and Sab, 1998a). On a choisis de commencer par expliciter ces travaux car les développements de ma thèse en constituent une extension. Dans l'homogénéisation classique, un matériau hétérogène dont la micro-structure est périodique, est remplacé par un matériau homogène équivalent. Cependant, cette méthode n'est valable que dans le cas où la taille caractéristique de la micro-structure est très petite devant celle de la structure en considération. Il faut remarquer que le matériau hétérogène et son matériau homogène équivalent sont considérés en tant que milieux classiques autrement dit milieux de Cauchy ou brièvement milieu continu, qui est très connu dans les ouvrages de mécanique. Pour modéliser plus précisément le comportement des matériaux, on a donné autre modèles plus riches en terme de cinématique du point matériel. Dans ces modèles, les degrés de liberté à chaque point sont plus de trois (comme dans le milieu classique). Le nombre des degrés de liberté sont 6, 9, etc en fonction de modèle. Mais il y toujours les 3 ddls du milieu classique (le vecteur de déplacement) et de nouveaux degrés de liberté sont introduits.

Il y a aussi des travaux sur l'homogénéisation dans lesquels le matériau hétérogène initial et le matériau homogènes équivalent final sont tous modélisés par des modèles généralisés. Dans cette thèse, il ne sera pas question de ce type d'approches, cf. (Forest et al., 2001). Dans la référence (Forest and Sab, 1998a), les auteurs émettent l'idée de remplacer un matériau hétérogène qui est considéré comme un milieu classique, par un matériau équivalent qui est modélisé par un modèle de Cosserat. Pour bien illustrer leur idée, ils donnent un exemple de l'homogénéisation d'un matériau sandwich dont le cœur est beaucoup plus raide que les peaux. De plus, pour simplifier le problème, le schéma de l'homogénéisation est donné sur un problème plan. Nous détaillons cette approche dans la suite.

3.1.1 Cinématique

L'objet de l'article est de remplacer un matériau composite au niveau local par un *matériau homogène généralisé équivalent* (MHGE). Le modèle de remplacement choisi est celui de Cosserat homogène. Le matériau hétérogène est modélisé de façon classique avec toutes ses hétérogénéités au niveau local. Les degrés de liberté (ddls) connus dans la mécanique des milieux continus sont : $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$ dans le cadre des problèmes 2D. Ces ddls existent aussi dans le modèle de Cosserat à côté des nouveaux degrés de liberté : $\underline{\Phi} = \Phi_3 \underline{e}_3$ qui désigne la micro-rotation du point matériel, une seule composante en 2D. Pour remplacer le matériau composite par un MHGE de Cosserat, il faut trouver la relation entre les nouveaux ddls du matériau généralisé et les ddls classiques du milieu hétérogène. Le principe pour résoudre ce problème est de minimiser l'écart entre les champs locaux et globaux. Il se transforme en un problème de minimisation de l'intégrale :

$$\int_{x_1=X_1-\frac{l}{2}}^{x_1=X_1+\frac{l}{2}} \int_{x_2=X_2-\frac{l}{2}}^{x_2=X_2+\frac{l}{2}} | \underline{u}(\underline{x}) - \underline{U}(\underline{X}) - \underline{\Phi}(\underline{X}) \otimes (\underline{x} - \underline{X}) |^2 dx_1 dx_2 \quad (3.1)$$

où la cellule élémentaire, V_l , du matériau considéré comme périodique est supposée carrée de côté l . Cette formule indique que l'on approche le champ réel local dans la cellule, $\underline{u}(\underline{x})$ par un mouvement de corps rigide caractérisé par le déplacement macroscopique $\underline{U}$ et la rotation infinitésimale $\underline{\Phi}$ autour du centre de la cellule $\underline{X}$.

Les calculs simples nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \underline{U}(\underline{X}) &= \langle \underline{u} \rangle_{V_l(\underline{X})} \\
 \nabla_X \underline{U}(\underline{X}) &= \langle \nabla_x \underline{u} \rangle_{V_l(\underline{X})} \\
 \Phi(\underline{X}) &= \frac{6}{l^2} \langle (\underline{x} - \underline{X}) \otimes \underline{u} \rangle_{V_l(\underline{X})} \\
 \underline{K} &= \nabla \Phi \\
 &= \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \underline{e}_2 = \frac{6}{l^2} \langle \nabla_x ((\underline{x} \otimes \underline{u}) \cdot \underline{e}_3) \rangle_{V_l(\underline{X})} - \frac{6}{l^2} \nabla_X ((\underline{X} \otimes \underline{U}) \cdot \underline{e}_3)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

et les champs de déformation :

$$\begin{aligned}
 \underline{\varepsilon}(\underline{x}) &= \frac{1}{2} (\nabla_x \underline{u} + \nabla_x^t \underline{u})(\underline{x}) \\
 \underline{E}(\underline{X}) &= \frac{1}{2} (\nabla_X \underline{U} + \nabla_X^t \underline{U})(\underline{X}) \\
 \underline{\Omega} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_1} - \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \underline{e}_3 \right) = \Omega(\underline{X}) \underline{e}_3
 \end{aligned}$$

On voit que le déplacement macroscopique est la moyenne de déplacements sur la cellule élémentaire. La rotation de Cosserat est définie comme un moment de la distribution de déplacements dans la cellule. C'est une information indépendante de la moyenne de déplacement et non prise en compte en homogénéisation classique.

Nous étudions le cas d'un champ de déplacement polynomial d'ordre 3 par rapport aux variables $\tilde{x} = x/l$:

$$u_i = A_i + B_{i1}\tilde{x}_1 + B_{i2}\tilde{x}_2 + C_{i1}\tilde{x}_1^2 + C_{i2}\tilde{x}_2^2 + 2C_{i2}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{i1}\tilde{x}_1^3 + D_{i2}\tilde{x}_2^3 + 3D_{i3}\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2 + 3D_{i4}\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2 \quad (3.3)$$

Sous les conditions :

- Φ est affine par rapport à $\underline{X}$
- $\underline{E}(X) = \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{V_l}$ est en ordre 2. Cette condition est appelée la condition de l'invariance d'échelle.

L'expression du triplet est obtenue :

$$\begin{aligned}
 - \underline{E}(X) &= \langle \underline{\varepsilon}(X) \rangle_{V_l} \\
 - (\Phi - \Omega)(X) &= \frac{D_{12}}{10l} \\
 - \underline{K}(X) &= \frac{C_{21} - C_{13}}{l^2} \underline{e}_1 + \frac{C_{23} - C_{12}}{l^2} \underline{e}_2
 \end{aligned}$$

Dans ces expressions du triplet ($\underline{E}$, $\underline{\Omega}$, $\underline{\Phi}$, $\underline{K}$), les constantes dans l'expression de déplacement (3.3) ne sont pas toutes prises, autrement dit, elles sont indéterminées après l'application de condition de l'invariance d'échelle. Par conséquent, le champ de déplacement se réduit (Forest and Sab, 1998a) :

$$\begin{aligned}
 u_1^* &= B_{11}\tilde{x}_1 + B_{12}\tilde{x}_2 - C_{23}\tilde{x}_2^2 + 2C_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 + D_{12}(\tilde{x}_2^3 - 3\tilde{x}_1^2\tilde{x}_2). \\
 u_2^* &= B_{12}\tilde{x}_1 + B_{22}\tilde{x}_2 - C_{13}\tilde{x}_1^2 + 2C_{23}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - D_{12}(\tilde{x}_1^3 - 3\tilde{x}_1\tilde{x}_2^2).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1.2 Identification d'un milieu de substitution de Cosserat au niveau global

Dans l'homogénéisation classique, si nous prenons $\underline{c}$ comme le tenseur d'élasticité locale, le tenseur des propriétés élastiques effectives $\underline{C}$ est déterminé par l'équivalence énergétique, comme suit :

$$\frac{1}{2} \underline{E} : \underline{C} : \underline{E} = \min \frac{1}{2} \langle \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{c}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \rangle$$

avec $\underline{\mathbf{u}}$ est défini comme dans la suite :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{E}}.\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{u}}^{per}(\underline{\mathbf{x}})$$

Cette définition est étendue pour le cas de milieu de substitution de Cosserat :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^* + \underline{\mathbf{u}}^{per} \quad (3.5)$$

avec $\underline{\mathbf{u}}^*$ est le champ de déplacement dans la formulation (3.4) et $\underline{\mathbf{u}}^{per}$ est la fluctuation périodique. Nous avons des relations établies précédemment entre les ddls macroscopiques et les coefficients de la condition polynomiale :

$$\begin{aligned} B_{ij} &= lE_{ij}^* \\ \Theta^* &= \frac{D_{12}}{10l} + \frac{6}{l^2} \langle \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{u}}^{per} \rangle \\ K_1^* &= -\frac{2C_{13}}{l^2} + \frac{6}{l^2} \langle x_1 u_{2,1}^{per} \rangle \\ K_2^* &= \frac{2C_{23}}{l^2} - \frac{6}{l^2} \langle x_2 u_{1,2}^{per} \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

La densité d'énergie de milieu Cosserat est donc :

$$\Psi(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*) = \min \frac{1}{2} \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{u}}) \rangle \quad (3.7)$$

avec $\underline{\mathbf{u}}$ de la forme (3.5)

Enfin, pour trouver les propriétés élastiques effectives de milieu Cosserat, nous appliquons le schéma suivant :

- Le champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}^*$ décrit dans la formulation (3.4) est choisi.
- La procédure de minimization de l'énergie comme dans la formulation (3.7) est réalisée pour obtenir le champ de fluctuation $\underline{\mathbf{u}}^{per}$.
- Avec le champ de $\underline{\mathbf{u}}^{per}$ obtenu, le triplet caractéristique $(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*)$ du milieu de Cosserat est calculé suivant la formulation (3.6).
- Puis, les contraintes d'ordre supérieur sont calculées par la différenciation de l'énergie Ψ dans la formulation (3.7) en fonction de $(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*)$.
- Le tenseur $\underline{\mathbf{C}}$ est ainsi reproduit à partir des forces globales, les couples-contraintes et le triplet $(\underline{\mathbf{E}}^*, \Theta^*, K^*)$.

Ce schéma est illustré dans l'exemple de l'article.

3.1.3 Exemple d'homogénéisation d'un matériau multi-couches

Un matériau multi-couches est pris comme exemple de la méthodologie dans la référence (Forest and Sab, 1998a). Il est constitué de deux matériaux : A est rigide et B est beaucoup plus mou avec les propriétés élastiques suivantes :

$$E^A = 210000 \text{ MPa} \quad \nu^A = 0.3 \quad E^B = 1000 \text{ MPa} \quad \nu^B = 0.49$$

La fraction volumique de chaque composante est 50%. Il faut remplacer ce matériau hétérogène par un matériau homogène de Cosserat suivant le schéma précédent. Une procédure d'homogénéisation classique est aussi réalisée pour comparer l'efficacité des deux méthodes. Une structure multicouche soumise à un déplacement vertical à une extrémité et encastrée à l'autre est considérée. Les calculs de détermination du triplet sont réalisés sur une seule cellule avec l'application successive des termes du champ de déplacement (3.4). Le résultat est montré dans la figure 3.1

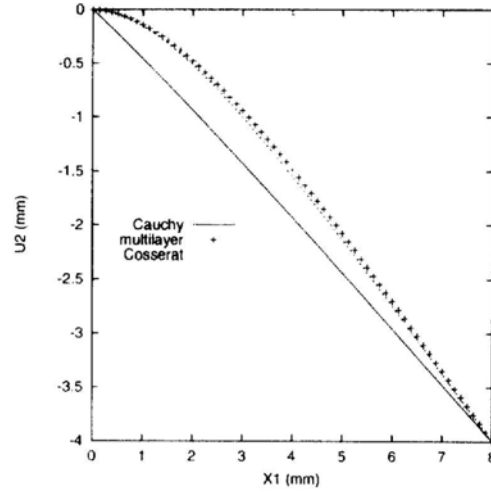


FIG. 3.1 – Comparaison entre les deux méthodes d’homogénéisation avec le calcul de référence dans l’article (Forest and Sab, 1998a)

3.2 Homogénéiser des matériaux hétérogènes en utilisant le modèle du second gradient comme MHGE

Nous nous intéressons ici à la contribution (Kouznetsova et al., 2002a). Pour commencer l’article, l’auteur a mentionné plusieurs méthodes d’homogénéisation et cite les points forts de la méthode d’homogénéisation basée sur des calculs élémentaires sur une cellule unitaire de milieu périodique :

- Ne pas demander une hypothèse préalable de la loi globale de comportement.
- Permettre d’intégrer les grandes déformations à tous les deux niveaux : microscopique et macroscopique.
- Permettre de prendre en compte n’importe quel comportement local du matériau, y compris les réponses non-linéaires ou dépendantes du temps.
- Etre capable d’introduire les informations détaillées sur la microstructure, inclus les évolutions géométriques et physiques de la micro-structure pour l’analyse macroscopique.
- Autoriser l’usage d’une technique quelconque de modélisation, *e.g* éléments finis, transformées de Fourier, méthodes de cellule Voronoi...

Les points faibles des techniques d’homogénéisation classique sont également montrés :

- Elle ne prend pas en compte de la taille absolue de la microstructure bien qu’elle prenne en compte la fraction volumique, la distribution et la morphologie des composantes microscopiques.
- Il est impossible d’appliquer cette méthode sans imposer l’hypothèse de séparation d’échelle. Cette dernière ne se présente pas dans de nombreux matériaux, comme indiqué dans l’article (Boutin, 1996a).

L’article mentionne également la comparaison entre deux schémas de l’homogénéisation : classique et second-ordre. Ils sont illustrés comme l’indique la figure 3.2, avec M, m désignant successivement l’échelle macroscopique et microscopique ; $\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{P}}, \underline{\underline{Q}}$ désignent successivement le tenseur de déformation et le tenseur d’ordre 3 du gradient de déformation, le premier tenseur des contraintes Piola-Kirchoff et le tenseur des contraintes à l’ordre supérieur.

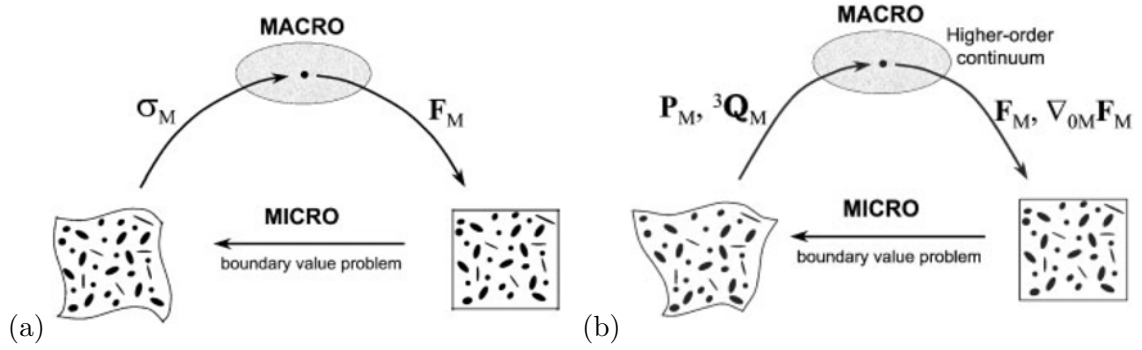


FIG. 3.2 – Schéma de l'homogénéisation classique (premier ordre) (a) Schéma de l'homogénéisation second-ordre(b)

3.2.1 Cinématique

La cinématique micro-macro est établie pour l'homogénéisation d'ordre supérieur. Le point de départ est l'extension du développement de Taylor :

$$\Delta \underline{x} = \underline{\tilde{F}}_M \cdot \Delta \underline{X} + \frac{1}{2} \Delta \underline{X} \cdot \underline{\tilde{G}}_M \cdot \Delta \underline{X} + \Delta \underline{w} \quad (3.8)$$

où le w représente le champ de perturbation microscopique, ajouté dans cette formulation afin de prendre en compte le champ de déplacement local qui est superposé sur le champ de déplacement global. A partir de (3.8), le gradient local de la transformation $\underline{\tilde{F}}_m$ est calculé :

$$\underline{\tilde{F}}_m = \underline{\tilde{F}}_M + \Delta \underline{X} \cdot \underline{\tilde{G}}_M + \nabla_m \Delta \underline{w} \quad (3.9)$$

Intégrons sur toute la cellule non déformée de VER et divisons par le volume V_0 de cette cellule la formulation (3.9), une égalité est obtenue :

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} \underline{\tilde{F}}_m dV_0 = \underline{\tilde{F}}_M + \left(\frac{1}{V_0} \int_{V_0} \Delta \underline{X} \right) dV_0 \cdot \underline{\tilde{G}}_M + \frac{1}{V_0} \int_{V_0} (\nabla_m \Delta \underline{w}) dV_0 \quad (3.10)$$

Une hypothèse fondamentale de la théorie d'homogénéisation classique est appliquée ensuite :

$$\underline{\tilde{F}}_M = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \underline{\tilde{F}}_m dV_0 \quad (3.11)$$

Son application sur la formulation (3.10) mène à deux égalités en même temps :

$$\left(\frac{1}{V_0} \int_{V_0} \Delta \underline{X} \right) dV_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{V_0} \int_{V_0} (\nabla_m \Delta \underline{w}) dV_0 = 0 = \frac{1}{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \Delta \underline{w} \cdot \underline{n} d\Gamma_0 = 0 \quad (3.13)$$

où le théorème de divergence a été utilisé pour transformer l'intégrale volumique en intégrale surfacique. La relation (3.12) est facilement satisfaite en mettant le centre géométrique du VER non-déformé à l'origine de la base cartésienne. Du point de vue physique, le centre de VER est considéré comme le point macroscopique où le $\underline{\tilde{F}}_M$ et son gradient $\underline{\tilde{G}}_M$ sont calculés. Le reste du VER est la proximité infiniment petite attachée à ce point. L'égalité (3.12) signifie simplement que la contribution des points, dont les distances avec le centre

sont égales, est uniformément pris en compte. Il faut noter aussi que dans l'homogénéisation classique, le VER est considéré infiniment petit. Pour cette raison, les distances au centre ne jouent aucun rôle. Ainsi, l'expression (3.12) n'est pas requise. Par contre, la relation (3.13) est plus compliquée et demande des considérations supplémentaires. En fait, il y a plusieurs façons de remplir cette condition. Trois moyens principaux sont souvent utilisés :

- $\Delta \underline{\mathbf{w}} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in V_0$. Cette hypothèse (connue dans l'homogénéisation classique comme l'hypothèse de Taylor), ne permet aucune perturbation microscopique et force le volume entier à se déformer exactement comme le $\underline{\mathbf{F}}_M$ et le $\underline{\mathbf{G}}_M$ appliqués.
- $\Delta \underline{\mathbf{w}} = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Gamma_0$. Cette condition prescrit le déplacement sur la frontière de VER, tandis qu'elle laisse libres les perturbations microscopiques à l'intérieur. C'est la condition KUBC (Kinematic uniform boundary condition) dans l'homogénéisation classique.
- $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ prend des valeurs égales aux points homologues de deux côtés opposés. Cette condition est dite condition périodique.

Dans cet article, la supposition périodique est utilisée parce que dans plusieurs recherches (Terada et al., 2000; van der Sluis et al., 2000), la perturbation périodique montre une meilleure estimation des propriétés globales que le KUBC. Il faut noter que dans le cas général, nous montrerons dans notre thèse que le gradient de déformation $\underline{\mathbf{G}}_M \neq 0$, peut mener à une fluctuation non-périodique, mais nous en restons ici à ma présentation des contributions de la littérature. Dans la suite de cette section, la cinématique du VER carré dans la figure 3.2 est considérée où les majuscules L, R, T, B désignent les côtés à gauche, à droite, en haut et en bas ; les vecteurs $\underline{\mathbf{N}}_i$ signifient les vecteurs normaux des côtés du VER ; les ξ, η sont les coordonnées locales dans le calcul par élément finis.

Appliquons l'équation (3.8) aux côtés gauche et droit de la cellule, en prenant en compte la condition périodique, qui est précisée dans le cas d'un VER carré avec s comme coordonnée locale :

$$\Delta \underline{\mathbf{w}}_L(s) = \Delta \underline{\mathbf{w}}_R(s), \quad \Delta \underline{\mathbf{w}}_T(s) = \Delta \underline{\mathbf{w}}_B(s) \quad (3.14)$$

et une relation cinématique est obtenue :

$$\underline{\mathbf{x}}_R = \underline{\mathbf{x}}_L + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{X}}_L + \underline{\mathbf{a}} \quad (3.15)$$

où :

$$\underline{\mathbf{A}} = W \underline{\mathbf{N}}_R \cdot \underline{\mathbf{G}}_M, \quad \underline{\mathbf{a}} = W \underline{\mathbf{F}}_M \cdot \underline{\mathbf{N}}_R + \frac{W^2}{2} \underline{\mathbf{N}}_R \cdot \underline{\mathbf{G}}_M \cdot \underline{\mathbf{N}}_R \quad (3.16)$$

Après des calculs tensoriels, les relations entre les champs macroscopiques et les champs microscopiques sont trouvées :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_M &= \langle \underline{\mathbf{F}}_m \rangle \\ \underline{\mathbf{G}}_M + \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{I}} : \underline{\mathbf{G}}_M^{RC})^{RC} &= \frac{6}{V_0 W^2} \left\{ \int_{\Gamma_0} (\underline{\mathbf{X}} \Delta \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{N}} \Delta \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{X}}) d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} (\underline{\mathbf{X}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{N}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{X}}) d\Gamma_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

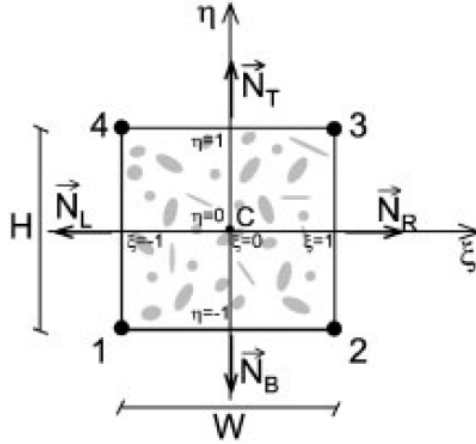
où $\underline{\mathbf{I}}$ est tenseur unitaire d'ordre 2, $\underline{\mathbf{G}}_M^{RC}$ (Right Conjugation) se compose de : $G_{ijk}^{RC} = G_{ikj}$. Elle mène ensuite à une nouvelle restriction :

$$\int_{\Gamma_0} (\underline{\mathbf{X}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{N}} \Delta \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{X}}) d\Gamma_0 = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.18)$$

Cette restriction et la condition périodique (3.14) sont vérifiées en même temps si (3.18) réduit à :

$$\int_{\Gamma_{0L}} \Delta \underline{\mathbf{w}}_L d\Gamma_0 = \underline{\mathbf{0}}, \quad \int_{\Gamma_{0B}} \Delta \underline{\mathbf{w}}_B d\Gamma_0 = \underline{\mathbf{0}} \quad (3.19)$$

Enfin, l'expression est généralisée et cela donne des conditions aux limites supplémentaires, dans le cas de VER carré :

FIG. 3.3 – VER carré : $W = H$

- La perturbation du déplacement aux quatres coins est fixée à zéro.
- La perturbation périodique est assurée sur les côtés opposés.

$$\underline{u}_R = \underline{u}_L + \frac{1}{2}(1 - \eta)(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) + \frac{1}{2}(1 + \eta)(\underline{u}_3 - \underline{u}_4) \quad (3.20)$$

$$\underline{u}_T = \underline{u}_B + \frac{1}{2}(1 - \xi)(\underline{u}_4 - \underline{u}_1) + \frac{1}{2}(1 + \xi)(\underline{u}_3 - \underline{u}_2) \quad (3.21)$$

- L'intégrale (3.19) sur la perturbation aux deux bords de la cellule est nulle. (3.19) se transforme par le vecteur de position déformée des points aux bords :

$$\int_{\Gamma_{OL}} \Delta \underline{x}_L d\Gamma_O = \underline{F}_M \cdot \int_{\Gamma_{OL}} \underline{X}_L d\Gamma_O + \frac{1}{2} \underline{G}_M^{RC} : \int_{\Gamma_{OL}} \underline{X}_L \otimes \underline{X}_L d\Gamma_O \quad (3.22)$$

$$\int_{\Gamma_{OB}} \Delta \underline{x}_B d\Gamma_O = \underline{F}_M \cdot \int_{\Gamma_{OB}} \underline{X}_B d\Gamma_O + \frac{1}{2} \underline{G}_M^{RC} : \int_{\Gamma_{OB}} \underline{X}_B \otimes \underline{X}_B d\Gamma_O \quad (3.23)$$

Les formulations du premier tenseur des contraintes Piola-Kirchoff et tenseur des contraintes d'ordre supérieur sont également trouvés ensuite :

$$\underline{P}_M = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_O} \underline{p} \otimes \underline{X} d\Gamma_O \quad (3.24)$$

$$\underline{Q}_M = \frac{1}{2V_O} \int_{\Gamma_O} \underline{X} \otimes \underline{p} \otimes \underline{X} d\Gamma_O \quad (3.25)$$

où $\underline{p} = \underline{n} \cdot \underline{P}_m$ est le vecteur de traction du tenseur des contraintes microstructurales $\underline{P}_m$, sur le bord du VER.

3.2.2 Exemples

Un exemple de calcul est donné afin d'illustrer la démarche proposée ci-dessus. Avec $\underline{F}_M$ et $\underline{G}_M$ donnés, les $\underline{P}_M$ et $\underline{Q}_M$ correspondants sont obtenus par la méthodologie détaillée ci-dessus. Le matériau considéré est l'aluminium poreux (la fraction volumique des porosités est $f = 12\%$) comme montré sur la figure 3.5(a), sa matrice est simulée par le modèle élasto-visco-plastique de Bodner-Partom (Bodner and Partom, 1975). La motivation de ce choix est

de montrer que cette méthodologie est applicable à des lois de comportement complexes. Les équations principales du modèle sont présentées rapidement :

$$\underline{\tau} = K(J - 1)\underline{I} + G\overline{\underline{B}}_e^d \quad (3.26)$$

où $\underline{\tau} = J\underline{\sigma}$ signifie le tenseur des contraintes Kirchoff, $J = \det(\underline{F})$, $\overline{\underline{B}}_e^d = \text{dev}(\overline{\underline{B}}_e)$ avec $\overline{\underline{B}}_e = J^{-2/3}\underline{B}_e$, $\underline{B}_e = \underline{F} \cdot \underline{F}^c$, K, G sont les modules de compressibilité et de cisaillement. La règle d'écoulement :

$$\underline{D}_p = \frac{\underline{\sigma}^{dev}}{2\eta} \quad (3.27)$$

où :

$$\eta = \frac{\sigma}{\sqrt{12}\Gamma_0} \exp\left(\frac{1}{2} \left[\frac{Z}{\sigma}\right]^{2n}\right)$$

où $\sigma = \sqrt{3/2(\underline{\sigma}^d : \underline{\sigma}^d)}$ est la contrainte équivalente de von Mises, $Z = Z_1 + (Z_0 - Z_1)\exp(-m\varepsilon_p)$. Z_0 et Z_1 sont successivement les bornes supérieure et inférieure de la résistance à l'écoulement plastique, m est un paramètre matériau.

Dans cet exemple, les propriétés de l'aluminium sont :

- paramètres élastiques : module de cisaillement $G = 2.6 \times 10^4 \text{MPa}$, module de compressibilité $K = 7.8 \times 10^4 \text{MPa}$
- paramètres de viscosité : $\Gamma_0 = 10^8 \text{s}^{-2}$, $m = 13.8$, $n = 3.4$, $Z_0 = 81.4 \text{MPa}$, $Z_1 = 170 \text{MPa}$.

Un exemple de flexion et traction combinées est présenté afin de montrer l'influence de $\underline{\underline{G}}_M$ sur le VER, autrement dit la différence de deux schémas d'homogénéisation (classique et généralisé). Le chargement sur l'éprouvette macroscopique est montré dans la figure 3.4, et les configurations déformées des VER correspondants sont présentés dans la figure 3.5.

Dans cet exemple, on peut remarquer que la flexion macroscopique est clairement visible dans le VER avec le schéma du second ordre où tous les deux tenseurs $\underline{\underline{F}}_M$ et $\underline{\underline{G}}_M$ sont prescrits, et la distribution locale des contraintes équivalentes dans le même schéma. Elles sont différentes des résultats prévus au premier ordre où le seul tenseur $\underline{\underline{F}}_M$ est prescrit sur le VER. Une différence importante de déformation locale est également montrée entre les deux méthodologies d'homogénéisation dans la figure 3.5, elle peut mener à des différences considérables de contraintes globales.

Un exemple de traction d'éprouvette entaillée est montré pour comparer l'usage de différents milieux homogènes généralisés équivalents dans l'homogénéisation au second ordre, modèle à couples de contraintes (ou Cosserat). Le même VER est encore considéré dans l'essai, l'éprouvette et le point de concentration de contrainte sont montrés dans la figure 3.6. L'essai consiste à appliquer sur le VER un tenseur $\underline{\underline{G}}_M$ entier ou seulement sa partie de rotation (sa partie anti-symétrique) :

$$\underline{\underline{G}}_M^A = \underline{\underline{G}}_M - \underline{\underline{G}}_M^S$$

où $\underline{\underline{G}}_M^S = \frac{1}{3}(G_{Mijk} + G_{Mjki} + G_{Mkij})$ est la partie symétrique de $\underline{\underline{G}}_M$. Cet exemple indique que le modèle à couples de contraintes (et aussi modèle de Cosserat) ne répond pas au cas où le mode de déformation est dominé par la gradient de l'extension. Il motive l'utilisation du gradient entier comme proposé au-dessous.

3.2.3 Effets de taille

La dépendance des contraintes de premier ordre Piola-Kirchoff et d'ordre supérieur par rapport à la taille de la micro-structure (dans ce cas le diamètre des vides dans VER), est

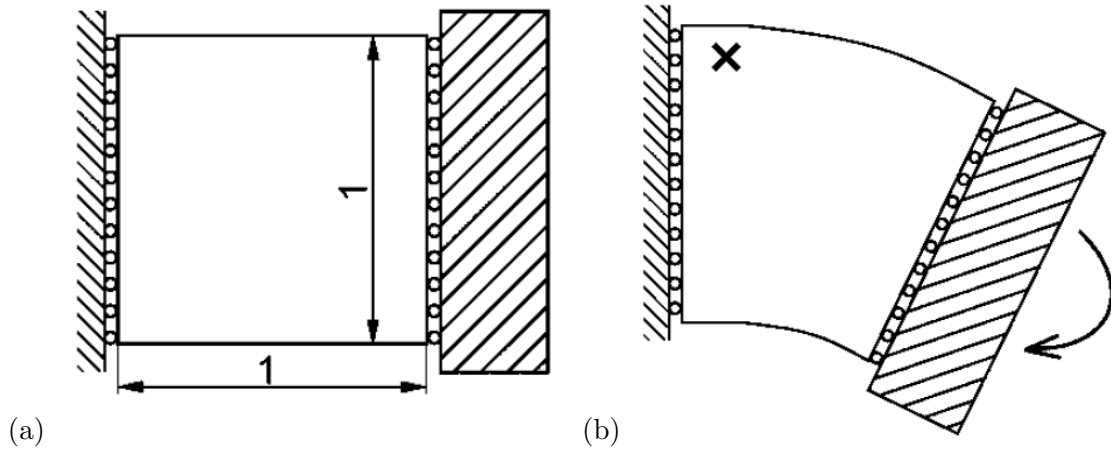


FIG. 3.4 – Représentation d’essai de flexion macroscopique sur le VER d’aluminium : la configuration initiale avec les dimensions en mm (a), et celle déformée avec le point en considération où le tenseur de déformation et son gradient sont enregistrés pour l’usage dans l’analyse de micro-structure (b).

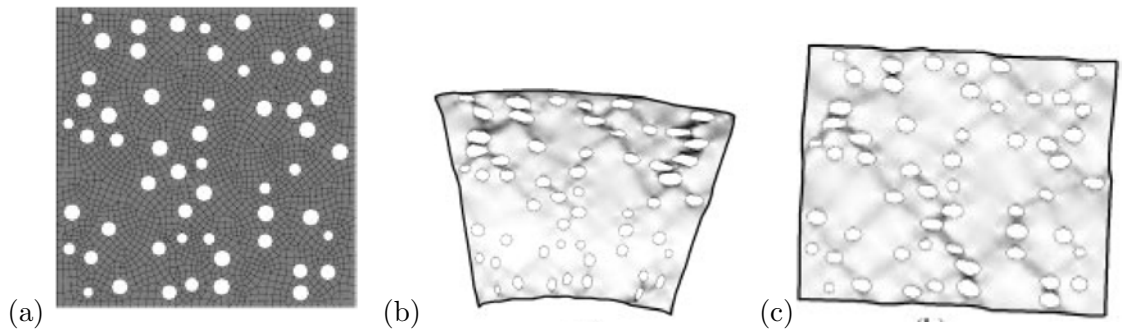


FIG. 3.5 – Le VER d’aluminium dans l’exemple de (Kouznetsova et al., 2002a) : le VER initial non-déformé (a), la configuration en déformation et la position du point considéré suivant l’homogénéisation au second ordre (b) et ceux suivant l’homogénéisation au premier ordre (c).

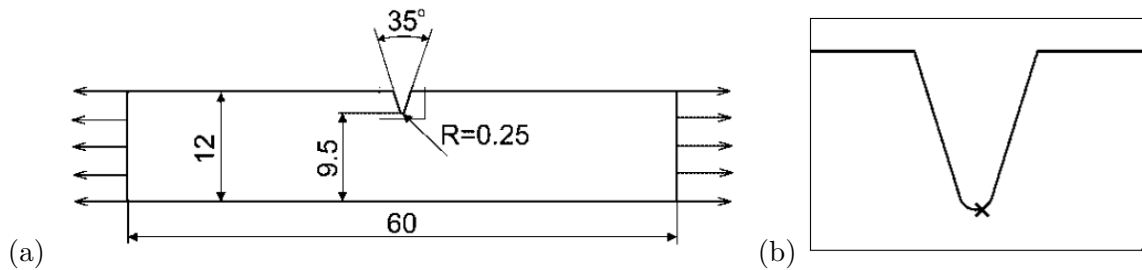


FIG. 3.6 – L’éprouvette entaillée dans l’essai de traction : dimensions de l’éprouvette (a) et la position du point particulier où le tenseur de déformation et son gradient sont enregistrés (b).

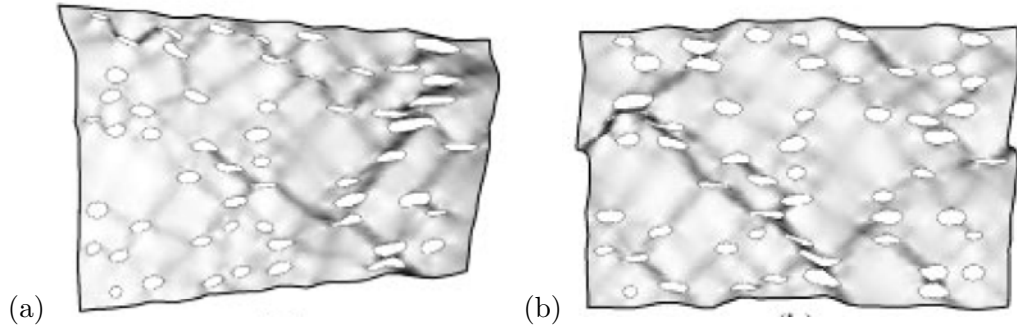


FIG. 3.7 – Le VER dans l'essai de traction déformé sous l'influence : du tenseur F_M et de tenseur G_M entier (a) du tenseur F_M et de la seule partie de courbue G_M^A (b).

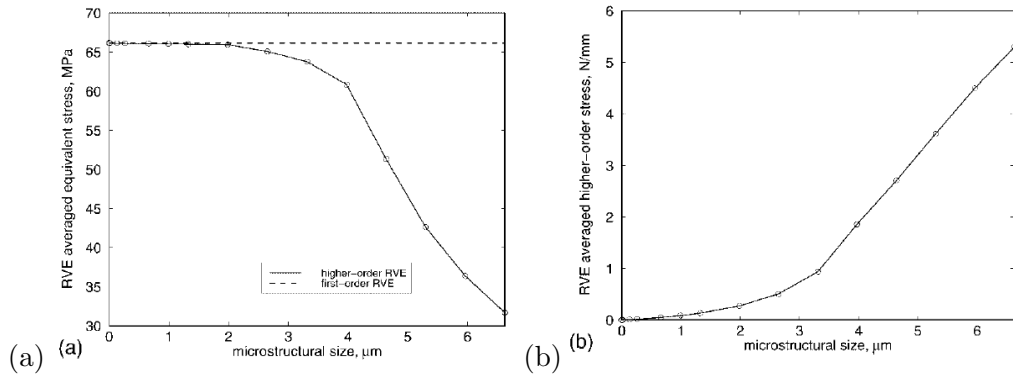


FIG. 3.8 – Mesure équivalente : du premier tenseur des contraintes Piola-Kirchhoff (a) et du tenseur des contraintes d'ordre supérieur (b) en fonction de la taille caractéristique de la micro-structure (la taille des vides en μm).

également montrée dans (Kouznetsova et al., 2002a). Une valeur scalaire est utilisée comme la mesure équivalente afin de simplifier le calcul :

$$P_M^{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2} \quad Q_M^{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$$

Cet effet est mentionné plus en détail dans l'article (Kouznetsova et al., 2004b). Le résumé de ce dernier est contenu dans le paragraphe 3.3.

3.3 La taille du VER dans l'homogénéisation au second ordre

Dans ce paragraphe, on fait un résumé sur le contenu de (Kouznetsova et al., 2004b), dans lequel l'auteur a remarqué le rôle intrinsèque du choix de la taille du VER dans l'homogénéisation au second ordre des milieux périodiques.

Le schéma d'homogénéisation dans (Kouznetsova et al., 2002a) est de nouveau utilisé dans cette contribution. Le rôle de la taille du VER dans l'homogénéisation classique est montré. Dans un milieu aléatoire, si un volume élémentaire ne contient pas suffisamment les informations microstructurales, sous différentes conditions aux limites, i.e condition de déplacement homogène (KUBC) ou conditions en contraintes, les propriétés globales trouvées

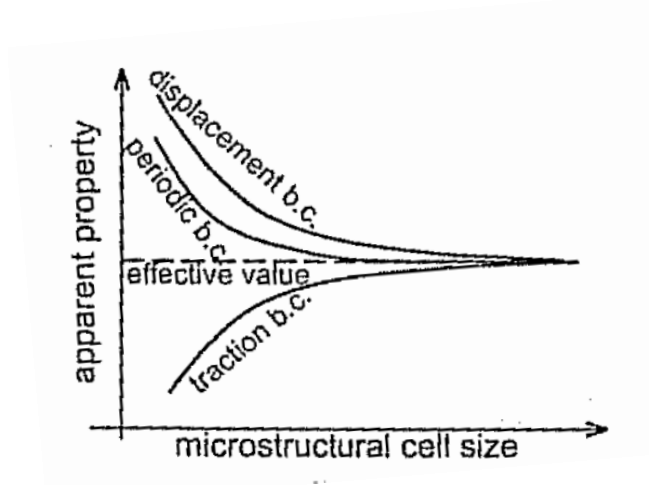


FIG. 3.9 – La convergence des propriétés mécaniques vers la valeur effective en fonction de la croissance de la taille de VER, sous différentes conditions aux limites.

sont définis “apparentes”. Si on augmente de plus en plus le nombre de cellules élémentaires contenues dans le volume sur lequel les propriétés effectives classiques sont évaluées, les propriétés apparentes obtenues pour différentes conditions, convergent à une valeur “effective” comme l’indique la figure 3.9. Dans cet article, l’auteur présente l’influence de la taille de VER via une micro-structure simple périodique. Le VER en considération est une cellule carrée avec un vide rond au centre. Mais d’abord une analyse par éléments finis sur un VER homogène modélisé par le milieu de Cauchy, met en évidence la relation entre sa taille de VER h et la longueur caractéristique l du milieu second-gradient homogène de substitution. Puis, le calcul par éléments finis sur le VER poreux est réalisée pour montrer l’influence du choix de la taille h non seulement dans le cas élastique mais aussi dans le cas élasto-plastique.

3.3.1 Le cas de VER homogène

Un calcul d’homogénéisation est réalisé, le but est de remplacer un VER composé de matériau homogène classique, par un matériau de substitution modélisé par le milieu du second gradient homogène. Un calcul par éléments finis est réalisé, avec un VER discrétisé comme un élément 8-nodes singles, comme le montre la figure 3.10. Ce calcul est limité au cas élastique. La relation entre contraintes et déformation dans le cadre d’élasticité linéaire est présentée ici :

- Contrainte de Piola-Kirchhoff I et déformation :

$$\begin{pmatrix} P_M^{11} \\ P_M^{22} \\ P_M^{12} \\ P_M^{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_M^{11} - 1 \\ F_M^{22} - 1 \\ F_M^{12} \\ F_M^{21} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

– Contraintes d'ordre supérieur et gradient de déformation :

$$\begin{pmatrix} Q_M^{111} \\ Q_M^{122} \\ Q_M^{112} \\ Q_M^{121} \\ Q_M^{211} \\ Q_M^{222} \\ Q_M^{212} \\ Q_M^{221} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{6}(\frac{\lambda}{2}) & \frac{h^2}{24}\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\lambda \\ \frac{h^2}{24}\lambda & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{12}\mu & \frac{h^2}{24}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & \frac{h^2}{24}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{24}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12}\mu & \frac{h^2}{24}\mu \\ \frac{h^2}{24}\lambda & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{24}\mu & \frac{h^2}{16}(\frac{\lambda}{3} + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_M^{111} \\ G_M^{221} \\ G_M^{211} \\ G_M^{121} \\ G_M^{112} \\ G_M^{222} \\ G_M^{212} \\ G_M^{122} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Il est possible de comparer le résultat obtenu ici avec le modèle de matériau Mindlin où le comportement élastique est proposé :

$$\underline{\underline{P}} = \lambda \text{trace}((\nabla \underline{\underline{u}})^S) \underline{\underline{I}} + 2\mu(\nabla \underline{\underline{u}})^S \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}} = & a_1(\underline{\underline{G}} : \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{G}}) + \frac{1}{2}a_2(\underline{\underline{G}}^{LC} : \underline{\underline{I}} + 2(\underline{\underline{G}} : \underline{\underline{I}})^{LC} + \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{G}}^{RC}) + 2a_3(\underline{\underline{G}}^{LC} : \underline{\underline{I}})^{LC} + \\ & + 2a_4\underline{\underline{G}} + a_5(\underline{\underline{G}}^{LC} + (\underline{\underline{G}}^{LC})^{RC}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $A_{ijk}^{LC} = A_{jik}, A_{ijk}^{RC} = A_{ikj}$.

La comparaison des formulations (3.28) et (3.29) avec (3.30) et (3.31) nous montre que le résultat analytique de l'homogénéisation de second-ordre est couvert par une classe de matériau Mindlin, pour laquelle, les paramètres du matériau sont choisis :

$$a_1 = \frac{1}{24}h^2\lambda, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{24}h^2\mu, a_5 = \frac{1}{24}h^2\mu \quad (3.32)$$

Un cas particulier de cette classe, qui est utilisé dans quelques contributions e.g dans (Amanatidou and Aravas, 2002), est mentionné ici, où un nouveau paramètre de matériau l est introduit :

$$a_1 = \frac{1}{2}l^2\lambda, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{2}l^2\mu, a_5 = \frac{1}{2}l^2\mu \quad (3.33)$$

La relation entre la longueur caractéristique l de ce matériau et la dimension de VER carré h est simple :

$$l^2 = \frac{h^2}{12} \quad (3.34)$$

Dans la suite, le comportement plasto-élastique est considéré.

3.3.2 Le cas d'un VER hétérogène

Cette analyse est réalisée sur les VERs hétérogènes qui sont présentés dans la figure 3.11 et dans la mode de flexion-traction.

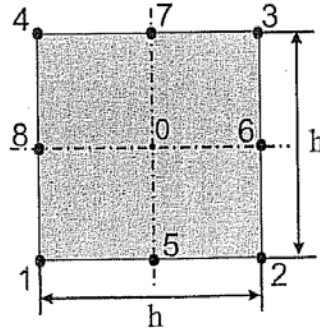


FIG. 3.10 – VER homogène pour l'analyse d'homogénéisation du second ordre de (Kouznetsova et al., 2004b).

Comportement élastique linéaire

Le résultat est présenté dans les schémas suivants, entre la déformation équivalente de Green-Lagrange $E_{eq} = (E_{Mij}E_{Mij})^{1/2}$ et les contraintes équivalentes de Piola-Kirchhoff I $P_{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2}$, entre le gradient équivalent de déformation $G_{eq} = (G_{Mijk}G_{Mijk})^{1/2}$ et les contraintes équivalentes à l'ordre supérieur $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$. On peut remarquer que dans l'homogénéisation classique où seul le tenseur $\tilde{\mathbf{E}}_M$ est appliqué, l'influence de la taille de VER n'est pas considérable, en particulier dans le cadre des petites déformations, les contraintes Piola-Kirchhoff $\tilde{\mathbf{P}}_M$ ne varie pas en fonction de la taille de VER ; dans le cadre des grandes déformations où le rôle de la non-linéarité devient plus important, un petit décalage se passe entre les courbes de P_{eq} comme l'indique la figure 3.12 (à gauche). Au contraire, en prenant en compte le gradient de la déformation, ou dans l'homogénéisation d'ordre supérieur, le rôle de la taille de VER joue un rôle important, les courbes de Q_{eq} sont très différentes non seulement dans le cadre des grandes déformations mais aussi avec l'hypothèse des petites déformations, comme l'indique la figure 3.12 (à droite). De plus, la relation entre la contrainte d'ordre supérieur équivalente et la taille normalisée de VER, comme dans la figure 3.13 est linéaire ou la relation entre Q_{eq} et h est quadratique. Ici, la taille de VER est normalisée par le taux $\frac{h^2}{d^2}$. Ces analyses nous donnent un résultat cohérent avec le calcul analytique dans la section 3.3.1 avec l'hypothèse de petite déformation.

Comportement élasto-plastique

Passant au cas élasto-plastique, des analyses similaires sont réalisées mais la matrice de VER n'est plus élastique. Le comportement du matériau est remplacé par un modèle élasto-plastique simple, la règle d'écoulement peut être consultée dans l'article (Kouznetsova et al., 2004b). Avec ce comportement, la dépendance entre contrainte d'ordre supérieur et gradient de déformation n'est plus quadratique. Elle devient plus compliquée comme dans la figure 3.14. Les relations contraintes-déformations sont montrées également dans la figure 3.15.

3.3.3 Problème de cisaillement aux bords

Cette technique d'homogénéisation est appliquée à un problème macroscopique de cisaillement. Un matériau hétérogène dont la micro-structure périodique se constitue comme la première cellule unitaire dans la figure 3.11, est considéré de nouveau. Le matériau de substitution est modélisé par le milieu du second gradient dont les propriétés sont calculées

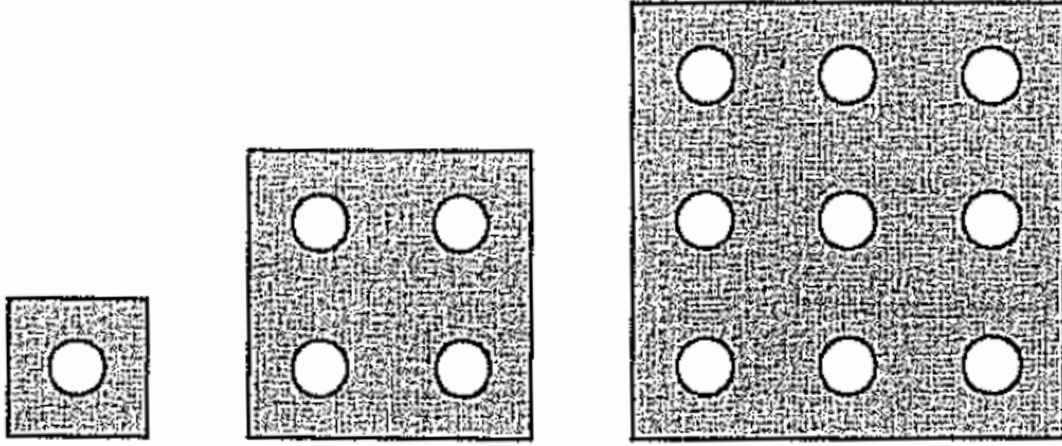


FIG. 3.11 – Les VERs utilisés dans l'analyse numérique de (Kouznetsova et al., 2004b).

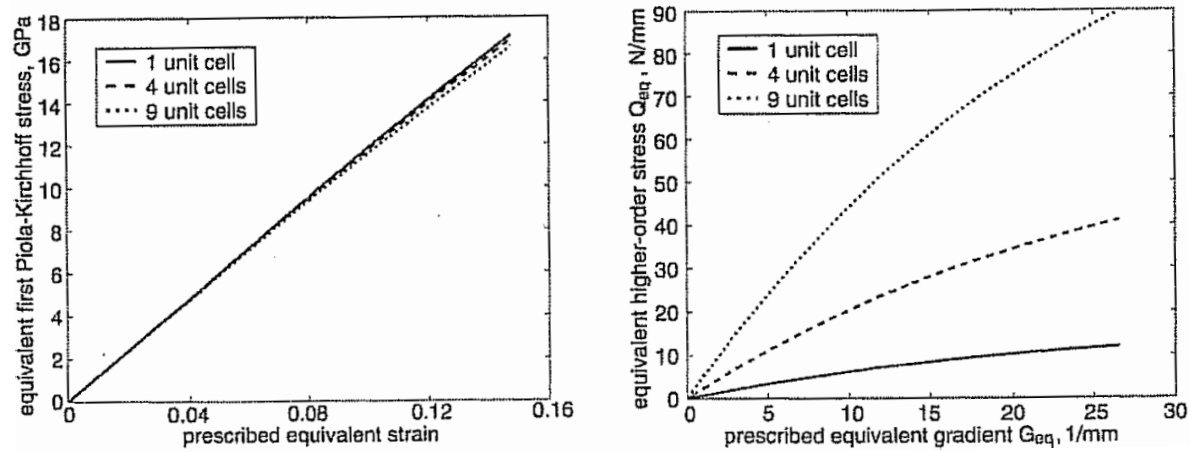


FIG. 3.12 – Relation entre : contrainte équivalente Piola-Kirchhoff $P_{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2}$ et déformation équivalente Green-Lagrange $E_{eq} = (E_{Mij}E_{Mij})^{1/2}$ (à gauche), contrainte équivalente d'ordre supérieur $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$ et gradient de déformation équivalent $G_{eq} = (G_{Mijk}G_{Mijk})^{1/2}$ (à droite).

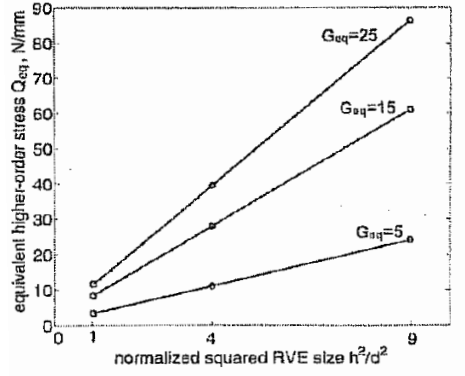


FIG. 3.13 – Relation linéaire entre la contrainte au second ordre équivalente $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$ et la taille normalisée $\frac{h^2}{d^2}$ de VER dans le cas de comportement élastique.

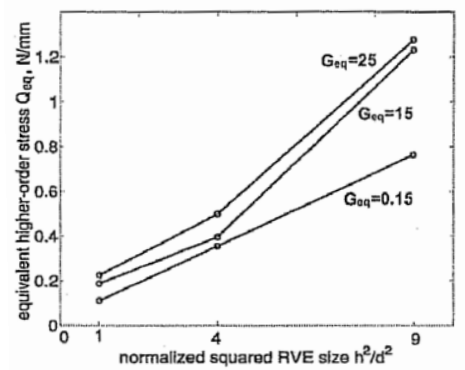


FIG. 3.14 – Relation entre la contrainte au second ordre équivalente $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$ et la taille normalisée $\frac{h^2}{d^2}$ de VER dans le cas du comportement élasto-plastique.

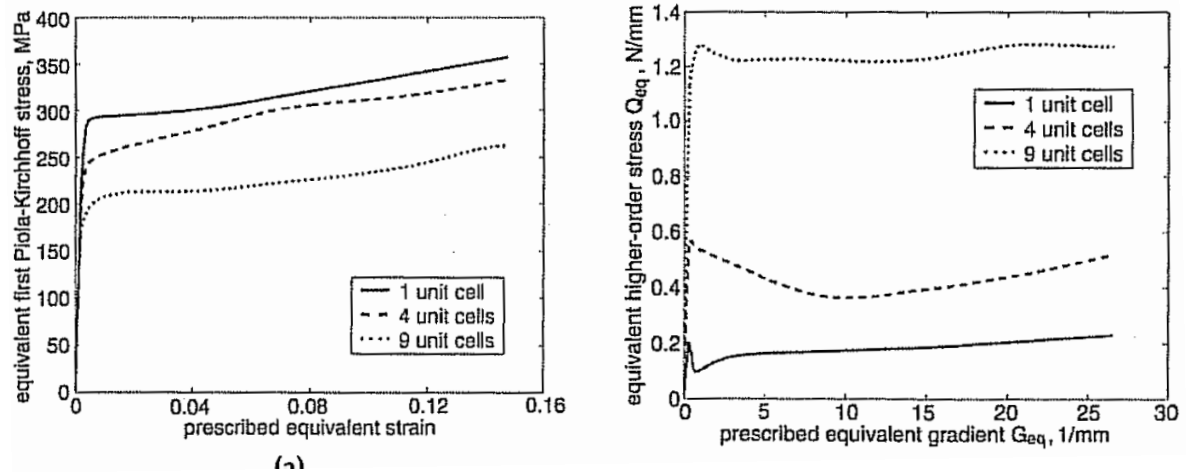


FIG. 3.15 – Relation entre : contrainte équivalente Piola-Kirchoff $P_{eq} = (P_{Mij}P_{Mij})^{1/2}$ et déformation équivalente Green-Lagrange $E_{eq} = (E_{Mij}E_{Mij})^{1/2}$ (à gauche), contrainte équivalente d'ordre supérieur $Q_{eq} = (Q_{Mijk}Q_{Mijk})^{1/2}$ et gradient de déformation équivalent $G_{eq} = (G_{Mijk}G_{Mijk})^{1/2}$ (à droite) dans le cas du comportement élasto-plastique.

par la technique d'homogénéisation au second ordre multi-échelle. A l'échelle microscopique, des VERs composés de 1,4,9... cellules unitaires sont tour à tour considérés, la taille correspondante de VER est $h = 0,1; 0,2; 0,3...$ mm. Le problème macroscopique est illustré dans la figure 3.16 avec les conditions aux limites :

$$\underline{u} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 1 \quad X_2 = 0 \quad (3.35)$$

$$u_1 = \gamma^*, \quad u_2 = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 1 \quad X_2 = H \quad (3.36)$$

où un gradient normal F_{22} est également imposé en plus du cisaillement γ^* . Un calcul analytique est réalisé et la fonction de contrainte de cisaillement normalisée par la contrainte prescrite est donnée par la formule :

$$\frac{\gamma(X_2)}{\gamma^*} = \frac{3H \left(-1 + \cosh \left[\frac{\sqrt{3}(H-2X_2)}{h} \right] \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{3}H}{h} \right] \right)}{-3H + \sqrt{3}h \tanh \left[\frac{\sqrt{3}H}{h} \right]} \quad (3.37)$$

Les courbes de $\frac{\gamma(X_2)}{\gamma^*}$ avec les différents paramètres de h (la taille de VER), sont tracées dans la figure 3.17. La distribution de contrainte de cisaillement F_{12} avec l'homogénéisation numérique est montrée dans la figure 3.18 pour le cas élastique, et dans la figure 3.19 dans le cas plastique. Dans les deux cas, le glissement F_{12} varie en fonction de la taille de VER, de plus, dans le cas du comportement élasto-plastique, F_{12} varie en fonction également du glissement prescrit γ^* .

Dans le cas élastique, le résultat obtenu par calcul numérique est proche de la solution analytique classique.

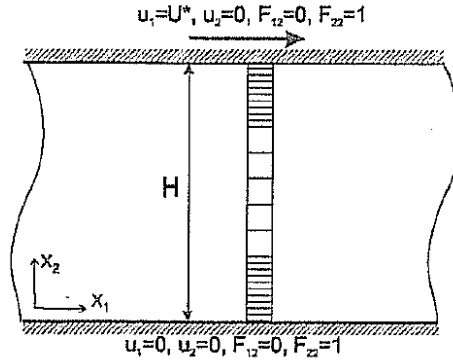


FIG. 3.16 – Géométrie , conditions aux limites et éléments finis pour le problème de cisaillement d'après (Kouznetsova et al., 2004b).

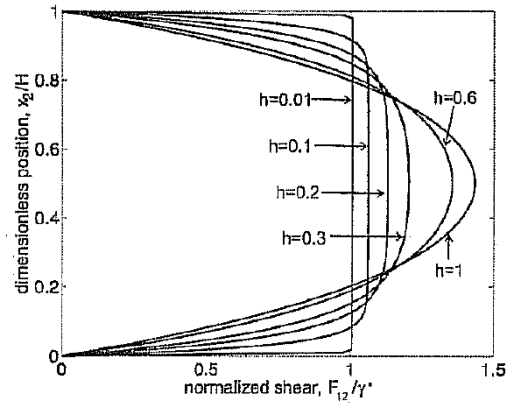


FIG. 3.17 – Plusieurs courbes de la solution analytique du problème de cisaillement correspondant à différentes valeurs de h , les formules analytiques correspondantes sont données par (3.37) d'après (Kouznetsova et al., 2004b).

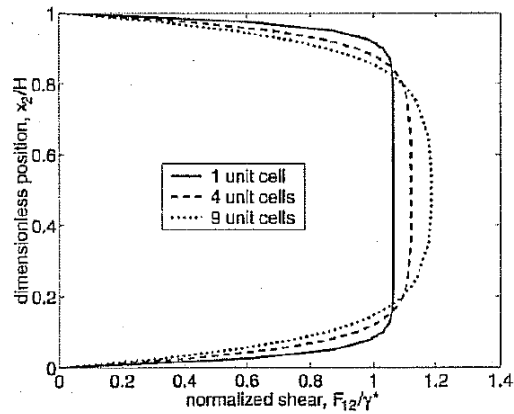


FIG. 3.18 – Résultat de l'homogénéisation numérique multi-échelle dans le cas de comportement élastique d'après (Kouznetsova et al., 2004b).

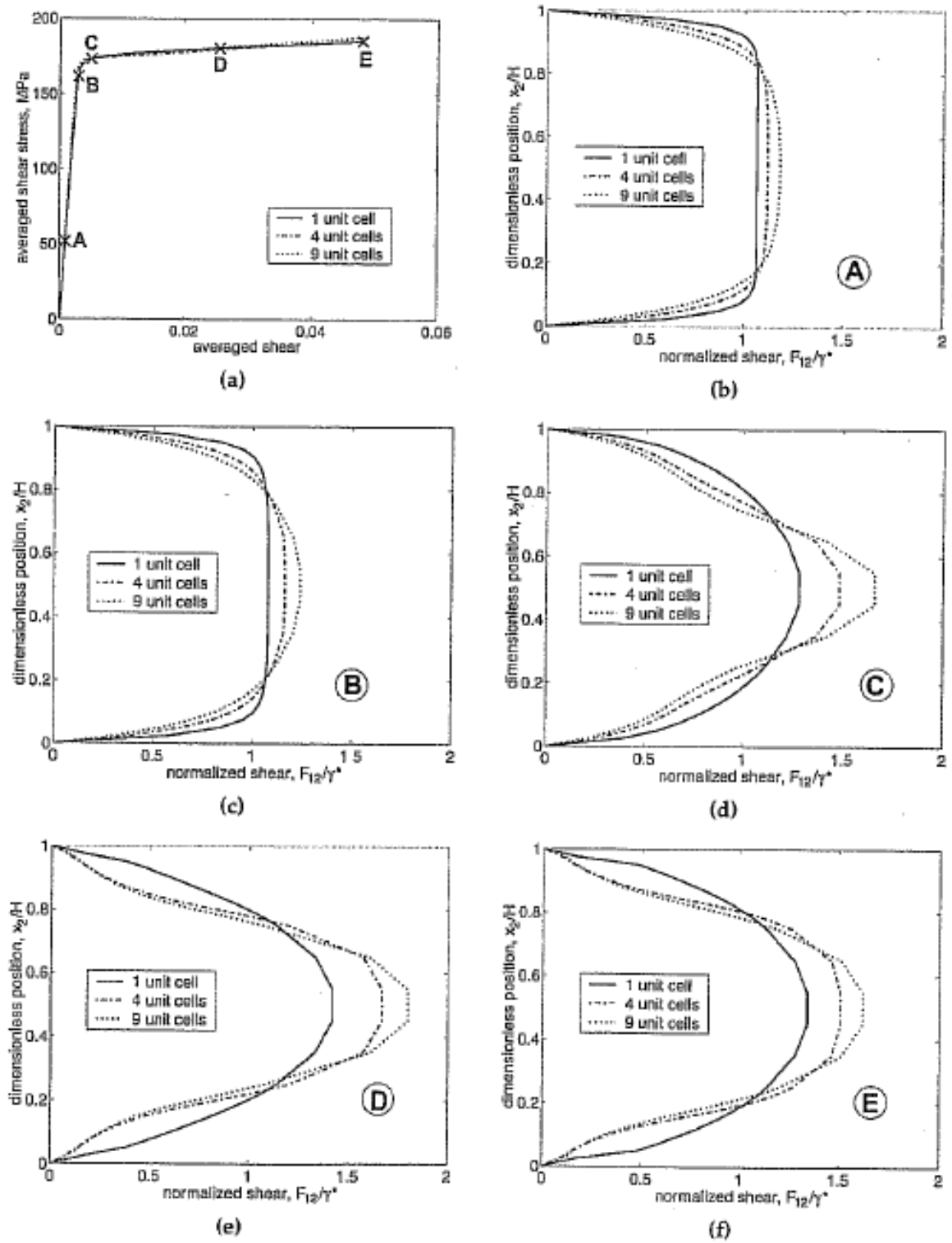


FIG. 3.19 – Résultat de l'homogénéisation numérique multi-échelle dans le cas du comportement élasto-plastique : la relation globale de déformation de glissement F_{12} et la valeur prescrite γ^* (a), et la distribution de F_{12} avec différente valeur de γ^* : $\gamma^* = 0.0009$ (b) $\gamma^* = 0.0029$ (c) $\gamma^* = 0.005$ (d) $\gamma^* = 0.0255$ (e) $\gamma^* = 0.048$ (f).

3.4 Application du modèle à couples de contraintes pour homogénéiser un composite biphasé

Dans cette section, nous allons présenter une contribution sur l'application du modèle à couples de contrainte à l'homogénéisation d'ordre supérieur. Les articles mentionnés sont une série de trois articles des mêmes auteurs : (Ostoja-Starzewski et al., 1999a; Bouyge et al., 2001b; Bouyge et al., 2002a).

3.4.1 Premiers essais dans (Ostoja-Starzewski et al., 1999a)

Comme dans d'autres contributions abordées dans ce chapitre de l'état de l'art, le but de cette recherche est de remplacer un matériau hétérogène par un matériau de substitution homogène équivalent. Le matériau hétérogène dans cette recherche est un composite périodique se constituant d'une cellule unitaire de deux phases (une inclusion et sa matrice), comme dans la figure 3.20(a). Chaque phase au niveau local (niveau de la cellule unitaire ou microscopique) est modélisé par le modèle de milieu continu classique (milieu de Cauchy) avec le comportement élastique isotrope. Comme mentionné au-dessus, la phase d'inclusion (i) et la phase de matrice (m) ont successivement le module de Young et le coefficient de Poisson E^i, E^m, ν^i, ν^m . En variant la fraction $\frac{E^i}{E^m}$, on peut modéliser une grande gamme de matériaux. A deux extrémités de la gamme, ∞ et 0 , on a successivement des modèles de matériau à noyau rigide et de matériau poreux. De plus, à l'extrémité où $\frac{E^i}{E^m} = 0$, en faisant monter la fraction volumique de l'inclusion (ou le vide), on peut modéliser le système du réseau des poutres comme 3.20(b); ou dans le cas contraire, la propriété de matrice est très molle tandis que l'inclusion est rigide, on peut approcher à la modélisation d'un milieu en granulat.

La question est posée du choix du motif de la cellule élémentaire périodique. Un tel choix est sans incidence dans le cas de l'homogénéisation classique. Ce n'est pas le cas à l'ordre supérieur d'après les études présentées dans ce chapitre.

Afin de calculer les modules de rigidité généralisés, cette contribution se concentre sur un problème 2D. Dans l'analyse du milieu micro-polaire ou milieu Cosserat, il y a deux problèmes plans :

- Premier problème est la généralisation du problème élastique classique dans le plan avec :

$$\underline{u} = (u_1, u_2, 0), \quad \underline{\varphi} = (0, 0, \varphi_3)$$

- Second problème est la généralisation du problème élastique classique en dehors du plan avec :

$$\underline{u} = (0, 0, u_3) \quad \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, 0)$$

Dans cet article, le premier problème est abordé. Le modèle à couples de contraintes, qui est le cas restrictif du milieu micro-polaire, est utilisé. Sa cinématique est présentée rapidement dans la section suivante.

Cinématique

Les champs de déplacement :

$$u_1, u_2, \quad \varphi_3 = (u_{2,1} - u_{1,2})/2 \quad (3.38)$$

Les champs de déformation correspondant aux champs de déplacement :

$$\gamma_{ij}, \quad \kappa_{i3} \quad (3.39)$$

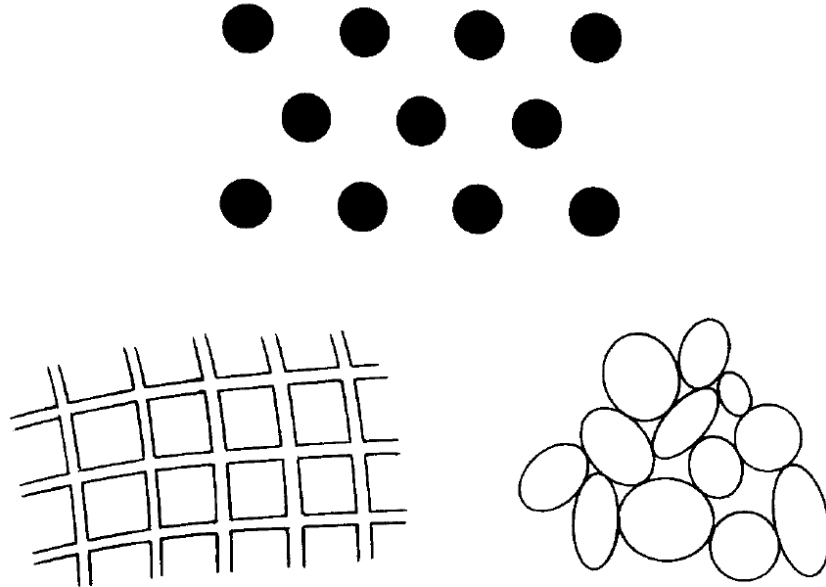


FIG. 3.20 – Quelques types de milieux modélisés par (Ostoja-Starzewski et al., 1999a) : composite périodique de deux phases (a), système des poutres(b), milieu granulat (c), d'après (Ostoja-Starzewski et al., 1999a).

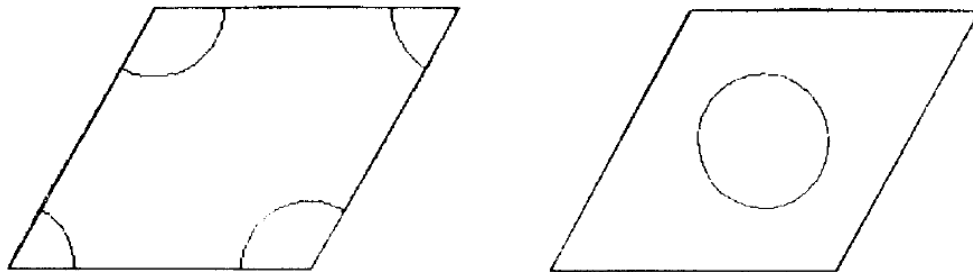


FIG. 3.21 – Deux possibilités de choix de VER suivant où l'inclusion se situe : aux quatre coins de la cellule (a) au centre de la cellule(b), d'après (Ostoja-Starzewski et al., 1999a).

Les champs de contrainte correspondant aux champs de déformation :

$$\sigma_{ij}, \quad \mu_{i3} \quad (3.40)$$

Parce que le composite considéré ici est centrosymétrique, il n'y a pas donc de couplage entre γ_{ij} et κ_{i3} . Le comportement du modèle couple-contrainte implique ainsi deux rigidités $C_{ijkl}^{(1)}$ et $C_{i3k3}^{(2)}$ suivant (Nowacki, 1986), et les contraintes sont déterminées par :

$$\gamma_{ij} = S_{ijkl}^{(1)} \sigma_{kl} \quad \kappa_{i3} = S_{i3k3}^{(2)} \mu_{k3} \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (3.41)$$

Avec la disposition des inclusions sur un réseau triangulaire équilatéral, l'auteur se concentre sur le cas isotrope :

$$S_{ijkl}^{(1)} = \frac{1}{4} [S(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (A - S)\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad S_{i3k3}^{(2)} = \delta_{ik}M \quad (3.42)$$

où A, S, M compose un ensemble défini par l'auteur dans (Ostoja-Starzewski and Jasiuk, 1995), dans laquelle la longueur caractéristique l est introduite et définie par :

$$l = \sqrt{\frac{S}{4M}} = \sqrt{\frac{S_{1212}^{(1)}}{S_{1313}^{(2)}}} \quad (3.43)$$

Formulation du problème

La condition périodique sur le bord du VER :

$$u_i(x + L) = u_i(x) + \gamma_{ij}L_j \quad t_i(x + L) = -t_i(x) \quad \forall x \in \delta B \quad (3.44)$$

de plus, il y a la relation simplifiée du modèle de Cosserat au modèle couple-contrainte :

$$\gamma_{11} = u_{1,1} \quad \gamma_{22} = u_{2,2} \quad \phi_3 = (u_{2,1} - u_{1,2})/2 \quad \kappa_{13} = \phi_{3,1} \quad (3.45)$$

Après des calculs simplifiés, la formulation (3.44) nous donne :

$$u_1(x + L) = u_1(x) - x_1x_2\kappa_{13} \quad u_2(x + L) = u_2(x) + \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \quad \forall x \in \delta B \\ t_i(x_1 + L) = -t_i(x_1) \quad (3.46)$$

On doit noter que la condition au-dessus est seulement quasi-périodique, parce que la traction n'est que périodique à la gauche et à la droite de la cellule (voir 3.46). Sous l'influence de cette condition, nous allons trouver les modules effectifs du milieu équivalent couple-contrainte via les équations :

$$U^{cell} = U^{couple-stress} = \frac{V}{2} [\gamma_{ij}C_{ijmn}^{(1)}\gamma_{mn} + \kappa_{i3}C_{i3k3}^{(2)}\kappa_{k3}] \quad (3.47)$$

On prescrit successivement les conditions (3.44) avec γ_{22} , γ_{11} , γ_{12} et on garde d'abord $\kappa_{13} = 0$:

$$U^{cell} = U^{couple-stress} = \frac{V}{2} (\gamma_{ij}C_{ijmn}^{(1)}\gamma_{mn}) \quad (3.48)$$

On peut calculer ainsi $C_{2222}^{(1)}$, $C_{1122}^{(1)}$, $C_{1212}^{(1)}$. Pour $C_{1313}^{(2)}$, on doit imposer toute la condition (3.46) et obtenir l'expression :

$$U^{cell} = U^{couple-stress} = \frac{V}{2} [\gamma_{11}C_{1111}^{(1)}\gamma_{11} + \kappa_{13}C_{1313}^{(2)}\kappa_{13}] \quad (3.49)$$

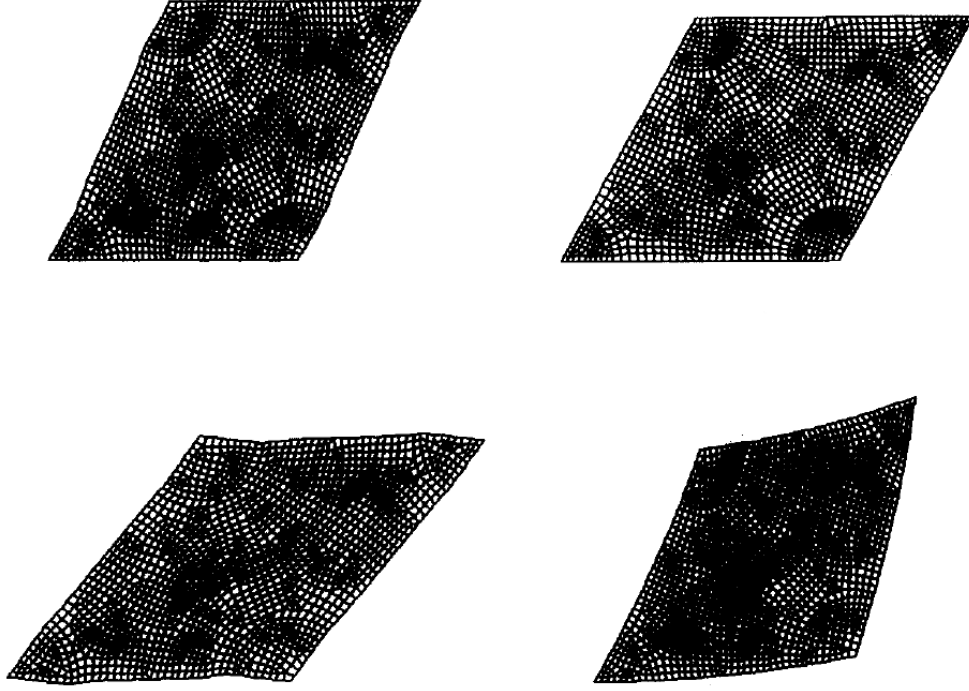


FIG. 3.22 – Quatre chargements afin de déterminer les modules effectifs du milieu de substitution à couples de contrainte : $C_{2222}^{(1)}$, $C_{1122}^{(1)}$, $C_{1212}^{(1)}$ et $C_{1313}^{(2)}$, d'après (Ostoja-Starzewski et al., 1999b).

avec $C_{1111}^{(1)}$ obtenu (qui est égal à $C_{2222}^{(1)}$), le C_{1313} est ensuite déterminé. La figuration de quatre chargements pour la détermination des coefficients mentionnés au-dessus est présentée sur la figure 3.22 : avec les modules de rigidité obtenus, l'inverse des modules, les souplesses, sont calculées :

$$S_{1111}^{(1)} = \frac{C_{1111}^{(1)}}{[C_{1111}^{(1)}]^2 - [C_{1122}^{(1)}]^2} \quad S_{1212}^{(1)} = \frac{1}{4C_{1212}^{(1)}} \quad (3.50)$$

$$S_{1122}^{(1)} = \frac{C_{1122}^{(1)}}{[C_{1122}^{(1)}]^2 - [C_{1111}^{(1)}]^2} \quad S_{1313}^{(2)} = \frac{1}{C_{1313}^{(2)}} \quad (3.51)$$

$$(3.52)$$

et puis, le triplet A, S, M est trouvé à partir de (3.42) et la longueur caractéristique l est trouvée à partir de (3.43).

Résultats numériques

Les auteurs ont présenté respectivement les résultats sous formes de diagrammes : $C_{1111}^{(1)}$, $C_{1122}^{(1)}$, $C_{1212}^{(1)}$ et $C_{1313}^{(2)}$. Le coefficient de Poisson de la matrice est $\nu^m = 0.24$ et le coefficient de l'inclusion est $\nu^i = 0.24; 0.48$. Le diagramme de chaque composante couvre trois fractions volumiques ($f = 3.6\%, 18.4\% \text{ and } 58\%$). La longueur interne est aussi tracée dans la figure 3.24.

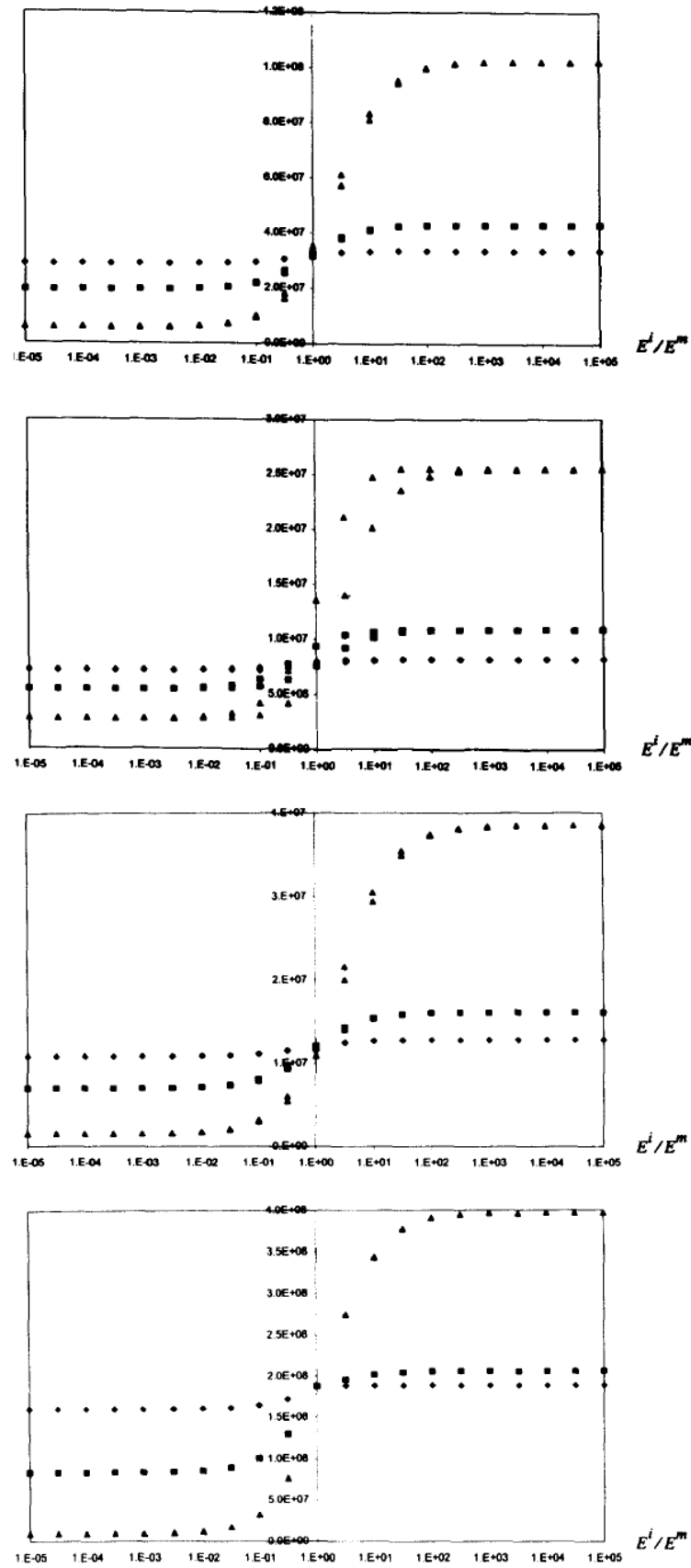


FIG. 3.23 – Les modules de rigidité en fonction des taux $\frac{E^i}{E^m}$: $C_{2222}^{(1)}$, $C_{1122}^{(1)}$, $C_{1212}^{(1)}$ et $C_{1313}^{(2)}$, d'après (Ostoja-Starzewski et al., 1999b).

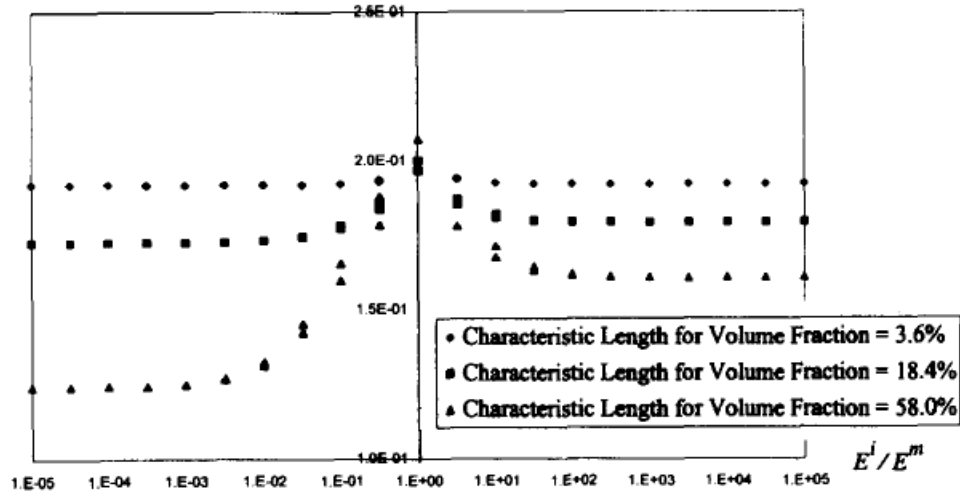


FIG. 3.24 – La longueur interne en fonction du contraste E^i/E^m .

3.4.2 Les améliorations et développements dans (Bouyge et al., 2001a)

Dans cet article, la même théorie et la même classe de matériaux que (Ostoja-Starzewski et al., 1999a) sont considérées. D'autres conditions aux limites sont abordées. Les deux VER "jumeaux" comme l'indique la figure 3.21 à la page 49 sont pris en considération. Les différentes conditions aux limites utilisées dans l'homogénéisation au second ordre sont formulées dans les sections suivantes. Les trois types de conditions suivantes sont choisies :

- Conditions aux limites en déplacement imposé.
- Conditions aux limites périodiques.
- Conditions aux limites en efforts imposés.

Chaque condition mène à trois essais : l'extension uniaxiale, le cisaillement simple et la flexion sur le VER choisi.

Conditions aux limites en déplacement

1. Extension uniaxiale :

$$u_1(x) = 0 \quad u_2(x) = \gamma_{22}x_2 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.53)$$

2. Glissement simple :

$$u_1(x) = \gamma_{12}x_2 \quad u_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.54)$$

3. Flexion

$$u_1(x) = -x_1x_2\kappa_{13} \quad u_2(x) = \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \quad \forall x \in \delta B \quad (3.55)$$

Conditions aux limites périodiques

La condition périodique est "spécifique" et dépend du chargement considéré. La frontière de la cellule est décomposée en deux bords horizontaux δB_d et les deux bords restants $\delta B_p = \delta B - \delta B_d$.

1. Extension uniaxiale :

$$u_i(x + Le_1) = u_i(x) \quad t_i(x + Le_i) = -t_i(x) \quad \forall x \in \delta B_p \quad (3.56)$$

$$u_1(x) = 0 \quad u_2(x) = \gamma_{22}x_2 \quad \forall x \in \delta B_d \quad (3.57)$$

2. Cisaillement simple

$$u_i(x + Le_1) = u_i(x) \quad t_i(x + Le_i) = -t_i(x) \quad \forall x \in \delta B_p \quad (3.58)$$

$$u_1(x) = \gamma_{12}x_2 \quad u_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B_d \quad (3.59)$$

3. Flexion

$$u_1(x + Le_1) = u_1(x) - x_1x_2\kappa_{13} \mid_{\delta B_p} \quad (3.60)$$

$$u_2(x + Le_1) = u_2(x) + \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \mid_{\delta B_p} \quad \forall x \in \delta B_p \quad (3.61)$$

$$u_1(x) = -x_1x_2\kappa_{13} \quad u_2(x) = \frac{x_1^2}{2}\kappa_{13} \quad \forall x \in \delta B_d \quad (3.62)$$

$$t_i(x + Le_1) = -t_i(x) \quad (3.63)$$

Les conditions de périodicité ne sont donc que partielles.

Conditions de contraintes imposées

1. Traction uniaxiale

$$t_1(x) = \tau_{11}n_1 \quad t_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.64)$$

qui produit $S_{1111}^{(1)} = 2U^{*cell}/V$.

2. Cisaillement et traction simple :

$$t_1(x) = \tau_{12}n_2 \quad t_2(x) = \tau_{12}n_1 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.65)$$

qui produit $S_{1212}^{(1)} = 2U^{*cell}/V$

3. Flexion

$$t_1(x) = \sigma_{11}n_1 = cx_2n_1 \quad t_2(x) = 0 \quad \forall x \in \delta B \quad (3.66)$$

qui produit $S_{1313}^{(2)} = 2U^{*cell}/V$ quand l'origine du système de coordonnées est au centre de la cellule. avec $c = M_B/I$ (M_B étant le moment et $I = 2bh^3/3$ étant le moment d'inertie)

Les essais sur deux VER sous différents chargements

L'image de la configuration déformée des VER est présentée de la figure 3.25 à la figure 3.27, dans lesquelles la colonne à gauche (droite) correspond au cas où l'inclusion se situe aux coins (au centre).

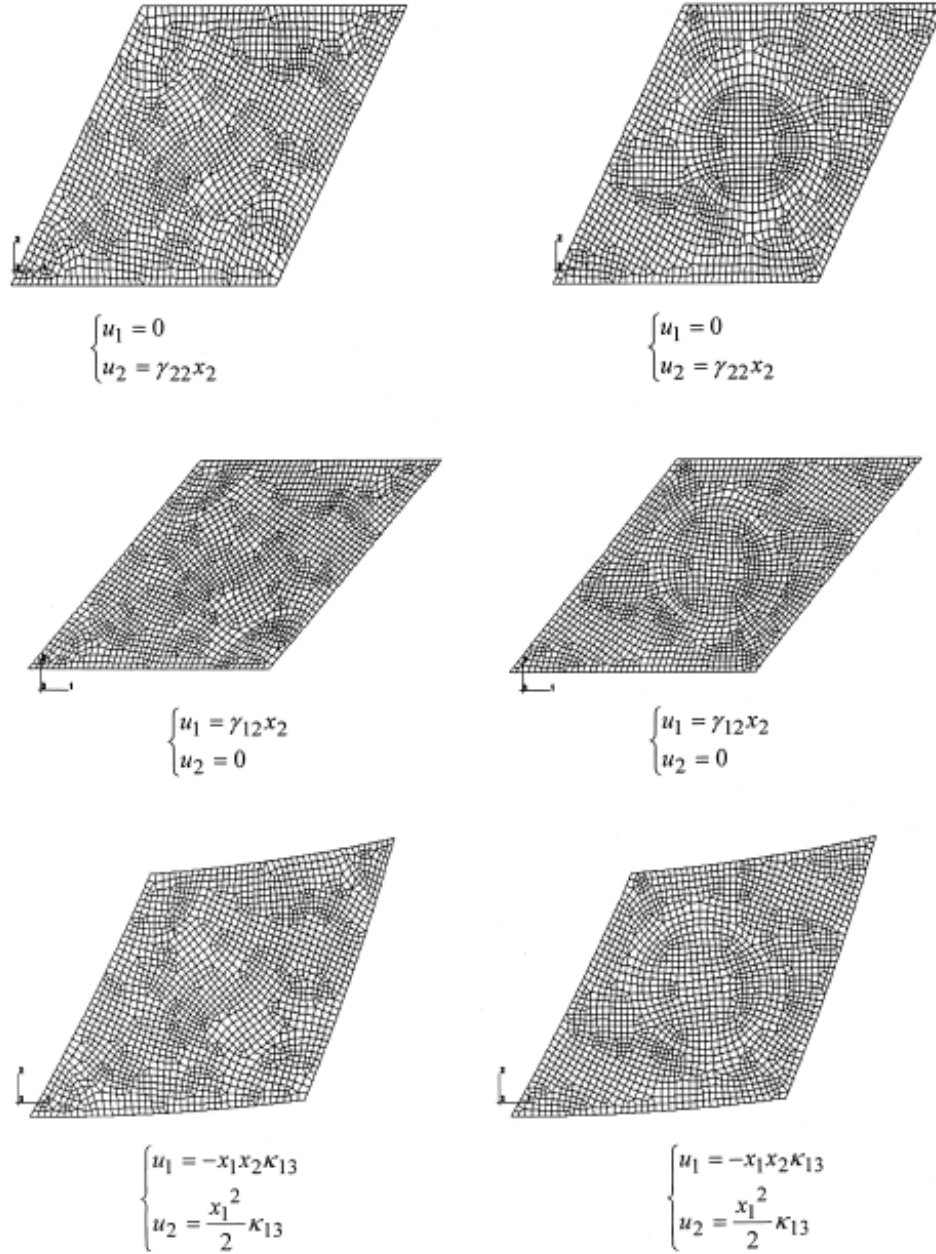


FIG. 3.25 – Les essais numériques sous la condition aux limites en déplacement : l'extension uniaxiale (en haut), le cisaillement simple (au milieu), la flexion (en bas), d'après (Bouyge et al., 2001a).

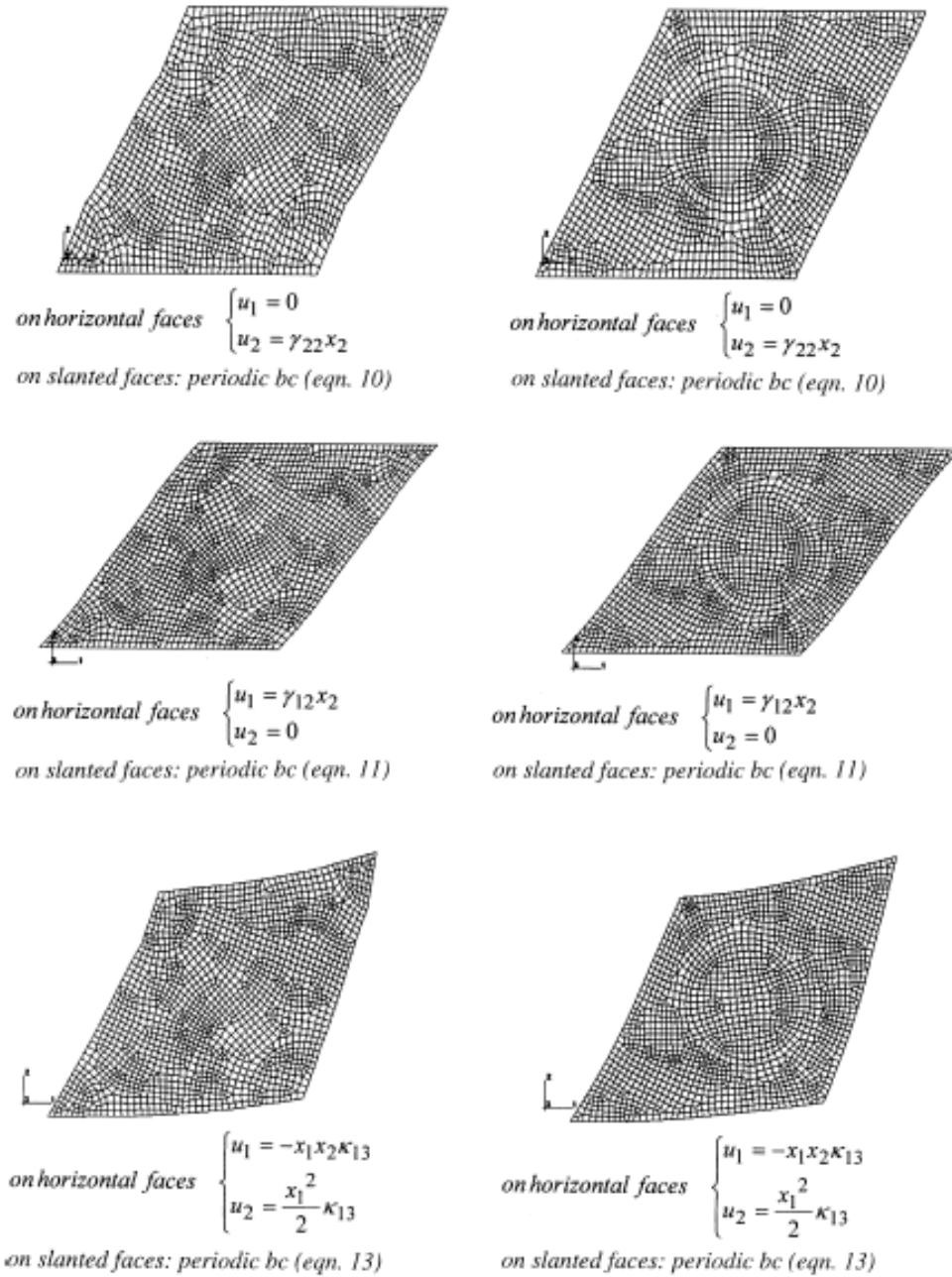


FIG. 3.26 – Les essais numériques sous les conditions périodiques : l'extension uniaxiale (en haut), le cisaillement simple (au milieu), la flexion (en bas), d'après (Bouyge et al., 2001a).

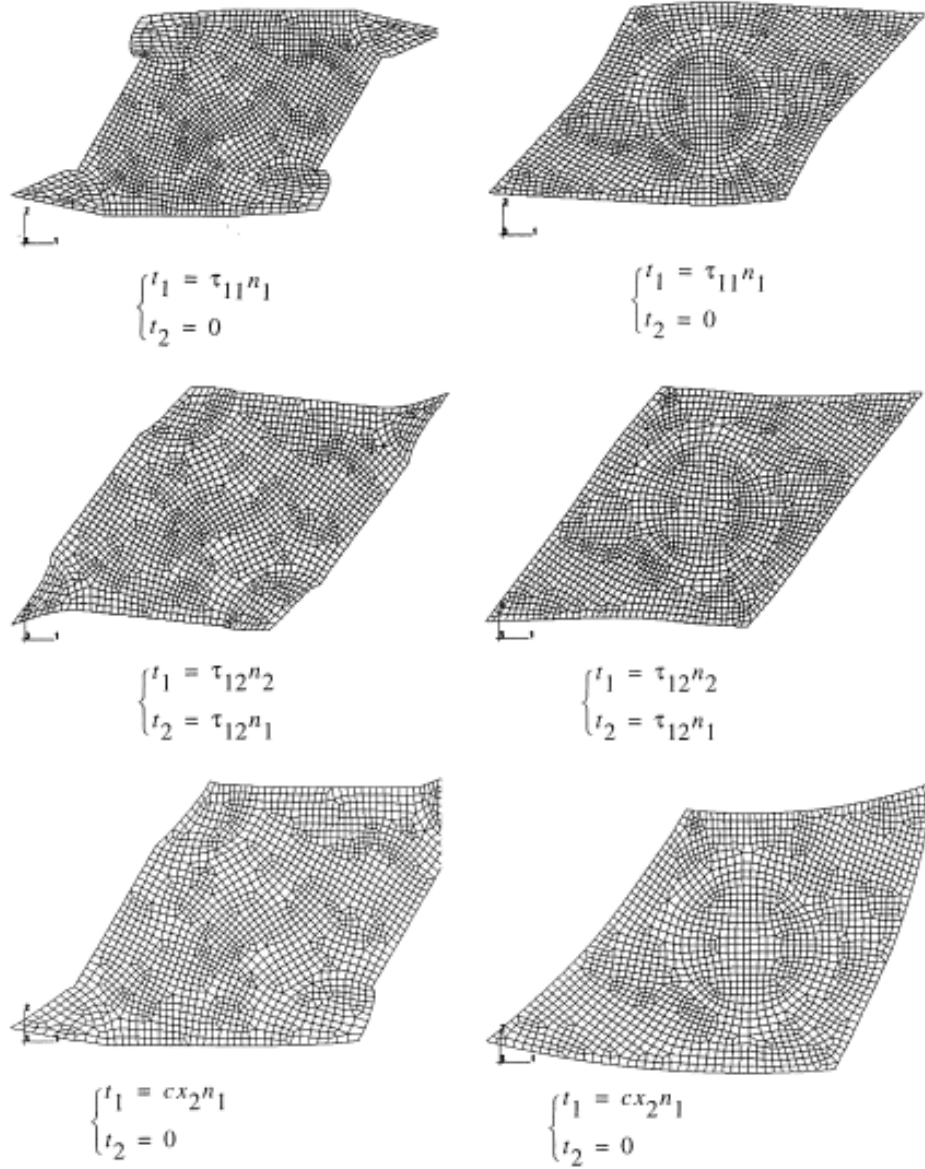


FIG. 3.27 – Les essais numériques sous la condition aux limites en contrainte imposée : l'extension uniaxiale (en haut), le cisaillement simple (au milieu), la flexion (en bas), d'après (Bouyge et al., 2001a).

3.5 Stratégie de modélisation multi-échelles numérique pour le milieu micromorphe

L'article de (Jänicke et al., 2009) a pour objectif de construire un milieu homogène équivalent de type micromorphe par une méthode d'homogénéisation d'ordre supérieur. Il s'agit donc d'étendre les approches précédentes à un milieu plus riche que les modèles de Cosserat et du second gradient. La cinématique du modèle micromorphe est connue actuellement comme le milieu le plus général présenté dans la section 3.5.1. Les matériaux ciblés sont les matériaux cellulaires (comme le tissu biologique, le polymère ou la mousse métallique) dont le comportement mécanique est complexe à fort contraste et donc sujet à de nombreux effets d'échelles. Il y a essentiellement trois méthodes de modélisation des matériaux cellulaires :

- Modéliser totalement la microstructure par élément finis. Il peut prendre en compte l'effet de micro-topologie. Mais le prix “numérique” est très “coûteux”.
- Modéliser le matériau seulement au niveau macro-scopique où le matériau est modélisé par le milieu généralisé en ajoutant les nouveaux degrés de liberté. Cependant, cette méthode demande d'introduire de nombreux paramètres supplémentaires du matériau qu'il est encore difficiles d'identifier.
- Combiner deux méthodes (modélisation EF²) où le comportement au niveau macro est remplacé par un calcul EF au niveau micro. Cette méthode mixte est encore “coûteuse” numériquement.

Dans cet article, un schéma d'homogénéisation est proposé se basant sur l'attache d'un milieu de Cauchy hétérogène microscopique à un point matériel au niveau macroscopique. Le problème au niveau micro sur le VER est un problème de mécanique des milieux continus classiques. Donc, il n'y pas de nouveaux ddls à ce niveau. Les contraintes d'ordre supérieur sont estimées au niveau macro par une procédure de moyenne adaptée.

La procédure d'homogénéisation est réalisée suivant le schéma suivant : les quantités de déformation *i.e* le gradient de déformation, la micro-déformation et le gradient de micro-déformation sont calculés à chaque point macroscopique et sont projetés sur les bords d'un micro-volume élémentaire. La règle de projection est un développement polynômial. Les coefficients de ce polynôme sont déterminés par la minimisation de la moyenne volumique de l'écart entre le déplacement macroscopique et le déplacement microscopique. A l'aide d'une condition aux limites de Dirichlet au niveau micro, le problème est résolu et les contraintes microscopiques sont transférées au niveau macroscopique. L'homogénéisation est complétée ensuite par l'estimation de la condition Hill-Mandel étendue. C'est une relation d'équivalence de la densité de l'énergie au niveau macro et de l'énergie de déformation attachée à un micro-volume.

3.5.1 Cinématique

Cette contribution se positionne d'emblée dans le cadre des grandes déformations. Dans la cinématique micromorphe, on attache à chaque point matériel X un triplet de vecteurs Ξ caractérisant la microstructure sous-jacente. La microdéformation χ caractérise alors la déformation de ce triplet, indépendamment de la déformation matérielle. Les fonctions caractérisant cette transformation sont :

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}(X, \underline{\Xi}, t) \quad (3.67)$$

où les petites lettres font référence à la configuration actuelles et les majuscules à la configuration de référence. Ces équations conduisent à :

$$d\underline{x} = \underline{F}.d\underline{X} \quad \underline{\xi} = \underline{\chi}(X, t).\underline{\Xi} \quad (3.68)$$

où $\underline{\chi}$ est le tenseur du second ordre de micro-déformation et il est possible de le découper grâce à la décomposition polaire :

$$\underline{\chi} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} \quad (3.69)$$

où : $\underline{\mathbf{R}}$ et $\underline{\mathbf{U}}$ sont successivement tenseur de micro-rotation et micro-déformation pure. Ces deux tenseurs sont respectivement orthogonaux et symétriques, définis positifs. La propriété de $\underline{\mathbf{R}}$ $\underline{\mathbf{U}}$:

$$\underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{I}} \quad \det \underline{\mathbf{R}} = 1 \quad \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}^T$$

On peut découper encore $\underline{\mathbf{U}}$ et obtenir :

$$\underline{\chi} = \bar{j} \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}}^* \quad (3.70)$$

où $\det \underline{\mathbf{U}}^* = 1$.

Cette décomposition peut conduire à deux autres modèles de milieux généralisés :

- $\underline{\chi} = \underline{\mathbf{R}}$: milieu micropolaire/Cosserat.
- $\underline{\chi} = \bar{j} \underline{\mathbf{I}}$: milieu à micro-dilatation. où $\bar{j}$ est la micro-dilatation volumique scalaire du milieu.

Mesures de déformation

Trois mesures de déformation sont nécessaires pour établir la loi de comportement du milieu micromorphe :

$$\underline{\mathbf{F}}, \quad \underline{\chi}, \quad \underline{\chi} \otimes \nabla$$

Contraintes

- Contraintes de Piola-Kirchhoff : $\underline{\mathbf{P}} = (\det \underline{\mathbf{F}}) \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\mathbf{F}}^{T-1}$ vérifie l'équation :

$$\underline{\mathbf{P}} \cdot \nabla + \rho \underline{\mathbf{b}} = 0 \quad (3.71)$$

où $\rho \underline{\mathbf{b}}$ est la force volumique.

- Contraintes de second-ordre et de troisième ordre $\underline{\mathbf{S}}$ et $\underline{\mathbf{Q}}$ vérifiant l'équation :

$$\underline{\mathbf{Q}} \cdot \nabla + (\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^T + \rho \underline{\mathbf{c}} = 0 \quad (3.72)$$

où $\rho \underline{\mathbf{c}}$ est le tenseur des couples volumiques.

Energie

L'énergie interne est égale à l'énergie de déformation :

$$\rho_0 \dot{\epsilon} = \underline{\mathbf{P}} : \underline{\dot{\chi}} \otimes \nabla - ((\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{S}}) \cdot \underline{\mathbf{F}}^T) : \underline{\dot{\nu}} + \underline{\mathbf{Q}} : \underline{\dot{\nu}} \otimes \nabla \quad (3.73)$$

où $\underline{\dot{\nu}} = \dot{\underline{\chi}} \cdot \underline{\chi}^{-1}$ est le tenseur de vitesse de micro-déformation.

3.5.2 Définition des ddls à partir de la microstructure

On cherche à exprimer les déplacements et microdéformations du milieu macroscopique en fonction des déplacements au sein de la cellule élémentaire du matériau composite.

De manière similaire au cas de Cosserat considéré plus haut, on cherche à approcher le champ réel sur la cellule élémentaire, $\underline{\mathbf{u}}_m$, par une transformation homogène, qui généralise

le mouvement de corps rigide considéré pour Cosserat. Pour ce faire on minimise l'intégrale :

$$\left(\frac{1}{V_m} \int_{V_m} (\underline{\mathbf{u}}_m - \underline{\mathbf{u}}_M - \underline{\chi}_M \cdot (\underline{\mathbf{X}}_m - \underline{\mathbf{X}}_M)) dV \right)^2 \quad (3.74)$$

Après quelques transformations, la relation entre les champs globaux et locaux sont obtenus :

$$\underline{\mathbf{u}}_M = \langle \underline{\mathbf{u}}_m \rangle \quad (3.75)$$

$$\underline{\chi} = \frac{12}{l^2} \langle \underline{\mathbf{u}}_m \otimes (\underline{\mathbf{X}}_m - \underline{\mathbf{X}}_M) \rangle \quad (3.76)$$

$$\underline{\mathbf{F}}_M = \langle \underline{\mathbf{F}}_m \rangle \quad (3.77)$$

$$\underline{\chi} \otimes \nabla_M = \frac{12}{l^2} (\langle (\underline{\mathbf{u}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m) \otimes \nabla_m \rangle - (\underline{\mathbf{u}}_M \otimes \underline{\mathbf{X}}_M) \otimes \nabla_M) \quad (3.78)$$

La variable micromorphe apparaît donc comme le premier moment de la distribution du déplacement au sein de la cellule élémentaire.

Ensuite, les auteurs supposent une forme polynomiale de degré 3 du champ de déplacement microscopique :

$$\underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{A}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) + (\underline{\mathbf{B}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) - \underline{\mathbf{I}}) \cdot \underline{\mathbf{X}}_m + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{C}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) : (\underline{\mathbf{X}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m) + \frac{1}{6} \underline{\mathbf{D}}_M(\underline{\mathbf{X}}_M) \vdots (\underline{\mathbf{X}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m \otimes \underline{\mathbf{X}}_m) \quad (3.79)$$

Les coefficients dans $\underline{\mathbf{A}}_M$, $\underline{\mathbf{B}}_M$, $\underline{\mathbf{C}}_M$, $\underline{\mathbf{D}}_M$ dépendent de la position du point macroscopique $\underline{\mathbf{X}}_M$, donc les coefficients sont constants sur le micro-volume. Pour calculer 3 mesures de déformation F_M , $\underline{\chi}_M$, $\underline{\chi} \otimes \nabla_M$, l'équation (3.79) est introduite dans les équations de (3.77-3.78).

- Si $\underline{\mathbf{u}}_m$ est constant, le triplet des mesures de déformation F_M , $\underline{\chi}_M$, $\underline{\chi} \otimes \nabla_M$ est nul $\longrightarrow A_M^1 = 0$.
- Si $\underline{\mathbf{u}}_m$ est linéaire, on trouve que :

$$\underline{\mathbf{B}}_M = \underline{\mathbf{F}}_M$$

- Si $\underline{\mathbf{u}}_m$ est un polynôme second-order, on trouve que :

$$\underline{\mathbf{C}}_M = \underline{\chi}_M \otimes \nabla$$

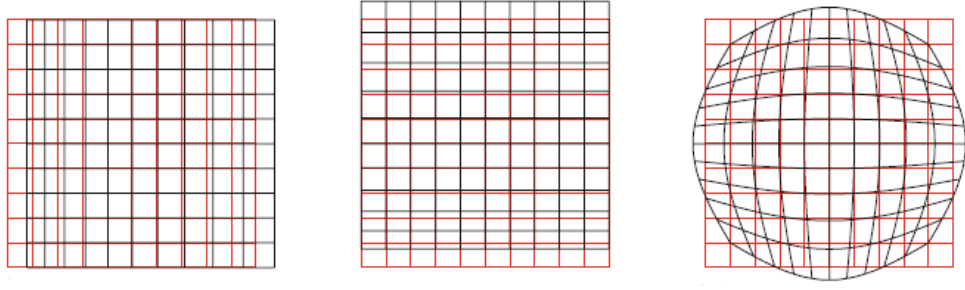
- Si $\underline{\mathbf{u}}_m$ est polynôme d'ordre 3, on trouve que

$$\underline{\mathbf{D}}_M = \frac{60}{l^2} \underline{\chi}_M \cdot \underline{\mathbf{E}}$$

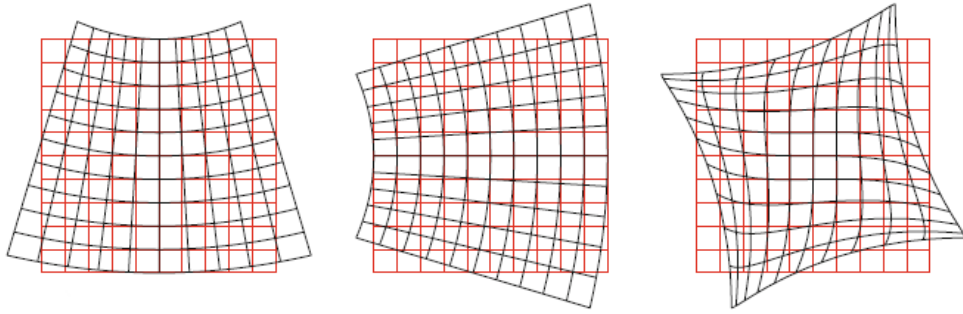
où le tenseur d'ordre 4 de permutation $\underline{\mathbf{E}}$ est une projection de $\underline{\chi}_M$ à $\underline{\mathbf{D}}_M$.

On a $\underline{\mathbf{x}}_m = \underline{\mathbf{u}}_m + \underline{\mathbf{X}}_m$, la position évolue selon :

$$\begin{aligned} x_{m1} = & F_{M11}X_{m1} + F_{M12}X_{m2} + \frac{1}{2} \left(\underline{\chi}_{M11,1}X_{m1}^2 + 2\underline{\chi}_{M12,1}X_{m1}X_{m2} + \underline{\chi}_{M12,2}X_{m2}^2 \right) \\ & + \frac{10}{l^2} \left[\chi_{M11}^*(3X_{m1}X_{m2}^2 - X_{m1}^3) + \chi_{M12}^*(3X_{m1}^2X_{m2} - X_{m2}^3) \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$



4 Quadratic and cubic deformation modes of the isotropic microstretch continuum:



5 Quadratic and cubic deformation modes of the micropolar continuum:

FIG. 3.28 – Les modes de déformations sous condition polynômiale second–ordre (a,b) et d’ordre trois dans l’article de (Jänike and Diebels, 2009).

et

$$\begin{aligned}
 x_{m2} = & F_{M21}X_{m1} + F_{M22}X_{m2} + \frac{1}{2} \left(\chi_{M21,1}X_{m1}^2 + 2\chi_{M21,2}X_{m1}X_{m2} + \chi_{M22,2}X_{m2}^2 \right) + \\
 & + \frac{10}{l^2} \left[\chi_{M21}^*(3X_{m1}X_{m2}^2 - X_{m1}^3) + \chi_{M22}^*(3X_{m1}^2X_{m2} - X_{m2}^3) \right]
 \end{aligned}$$

Le champ de déplacement (3.80) est établi pour le cas du milieu micromorphe. Il est à noter que les auteurs ne font pas intervenir de fluctuation par rapport à ce champ qui représente donc une approximation du champ réel généralement non polynomial. On obtient les cas particuliers du milieu micropolaire/Cosserat lorsque $\chi_M = \mathbf{R}_M$, et pour le cas du milieu micro-dilatation lorsque $\mathbf{j}_M = (\det \mathbf{U}_M)^{1/2} = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{U}_M$. Quelques configurations déformées d’un VER (pris homogène pour l’illustration) sont données pour différents choix des coefficients des polynômes précédents, sur la figure 3.28.

Les auteurs montrent également des exemples de validation qui seront repris dans notre thèse.

3.6 Méthode de correction des modules homogénéisés d’ordre supérieur

Dans l’article de (Li, 2011), l’homogénéisation des matériaux pour lesquels la supposition de séparation d’échelle n’est plus valable est considérée. L’auteur a proposé une méthodologie

d'homogénéisation d'ordre supérieur utilisant le milieu du second gradient comme milieu équivalent. Cette méthodologie se compose de deux étapes :

- Homogénéisation sur une seule cellule unitaire.
- Transition des propriétés homogénéisées localement aux propriétés de la structure homogène entière.

Cette article a le mérite de mettre en évidence la nécessité de corriger les modules effectifs généralisés obtenus selon les méthodes précédentes pour les appliquer au calcul de structures homogénéisés. La deuxième étape est nouvelle par rapport aux contributions précédentes.

Les hypothèses principales. La procédure d'homogénéisation est basée sur les remarques et les hypothèses suivantes :

- Une cellule unitaire n'est pas infinitésimale, elle a une dimension finie. La structure Ω se compose d'un nombre fini de cellules $\Omega^{(m)}$. Les $\Omega^{(m)}$ constituent un recouvrement de Ω sans chevauchement.
- Les phases du matériau hétérogène au niveau microscopique sont considérées comme élastiques classiques.
- Le développement Taylor du déplacement microscopique en fonction des coordonnées macroscopiques x et microscopiques y :

$$u_i^m(x, y) = \frac{\partial u_i^m(x)}{\partial x_j} y_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_i^m(x)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u_i^m(x)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} y_j y_k y_l + o(y^4) \quad (3.81)$$

est réécrit en fonction de la moyenne de gradient de déplacement :

$$u_i^{(m)} = \bar{u}_{i,j}^{(m)} y_j + \frac{1}{2} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} y_j y_k + \frac{1}{6} \bar{u}_{i,jkl}^{(m)} y_j y_k y_l - 3\bar{I}_{kl} + \dots \quad (3.82)$$

où

$$\bar{u}_{i,j}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\Omega^{(m)}} u_{i,j}^{(m)}(y) dV \quad \bar{u}_{i,jk}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\Omega^{(m)}} u_{i,jk}^{(m)}(y) dV \quad \bar{I}_{kl} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\Omega^{(m)}} y_k y_l dV \quad (3.83)$$

L'homogénéisation sur une seule cellule unitaire. La procédure d'homogénéisation proposée est basée sur des contraintes imposées au contour de la cellule élémentaire. Les contraintes imposées ont un profil affine. Elle conduit à la définition de la moyenne de densité d'énergie de déformation sur une cellule $U^{(m)}$ de la forme :

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\bar{\sigma}_{ij}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} + \bar{\sigma}_{ijk}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \right) \quad (3.84)$$

où

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\partial\Omega^{(m)}} t_i^{(m)} y_j dS \quad \bar{\sigma}_{ijk}^{(m)} = \frac{1}{V^{(m)}} \int_{\partial\Omega^{(m)}} t_i^{(m)} y_j y_k dS \quad (3.85)$$

avec $\underline{t}$ est le vecteur de traction et le théorème de Green est appliqué pour établir les relations (3.85) et (3.84) en partant de la moyenne de l'énergie élastique sur la cellule. Les contraintes σ_{ijk} sont les hypercontraintes du milieu du second gradient. Attention : dans cette section, l'exposant (m) indique le numéro de la cellule élémentaire et ne fait pas référence au mot "microscopique".

Transition la rigidité locale à la structure entière. La procédure de transition commence par l'application de la condition Hill-Mandel généralisée :

$$U^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} \bar{u}_{p,q}^{(m)} + \bar{D}_{ijkpqr}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \bar{u}_{p,qr}^{(m)} \right) \quad (3.86)$$

où

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} \quad \bar{\sigma}_{i,jk} = \bar{D}_{ijkpqr}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \quad (3.87)$$

Les $\bar{D}_{ijkpqr}^{(m)}$ sont les modules élastiques généralisés du second gradient déterminés sur chaque cellule $\Omega^{(m)}$. L'énergie totale $\int_{\Omega} U dV$ de la structure Ω est discrétisée en cellules $\Omega^{(m)}$:

$$\int_{\Omega} U dV = \sum_m V^{(m)} U^{(m)} = \frac{1}{2} \sum_m V^{(m)} \left(\bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{i,j}^{(m)} \bar{u}_{p,q}^{(m)} + \bar{D}_{ijkpqr}^{(m)} \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \bar{u}_{p,qr}^{(m)} \right) \quad (3.88)$$

Puis, en considérant l'égalité :

$$\int_{\Omega} u_{i,j} \bar{C}_{ijkl} u_{k,l} dV = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} u_{i,j}^{(m)} \bar{C}_{ijkl}^{(m)} u_{p,q}^{(m)} dV \quad (3.89)$$

qui se transforme en :

$$\int_{\Omega} u_{i,j} \bar{C}_{ijkl} u_{k,l} dV = \sum_m V^{(m)} \left(\bar{u}_{i,j}^{(m)} \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{p,q}^{(m)} + \bar{u}_{i,jk}^{(m)} \bar{C}_{ijkl}^{(m)} \bar{u}_{p,qr}^{(m)} \bar{I}_{kr}^{(m)} \right) \quad (3.90)$$

où un terme $\bar{C}_{ijkl}^{(m)}$ est lié au terme de gradient de déplacement $u_{i,jk}$. Cela permet d'améliorer le module de rigidité d'ordre supérieur $\bar{D}_{ijkpqr}^{(m)}$ en introduisant (3.90) à (3.88). Les modules d'ordre supérieur de rigidité de la structure entière sont donc modifiés :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U dV &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{i,j} \bar{C}_{ijpq} u_{p,q} + u_{i,jk} (\bar{D}_{ijkpqr} - \bar{C}_{ijpq} \bar{I}_{kr}) u_{p,qr}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{i,j} \bar{C}_{ijpq} u_{p,q} + u_{i,jk} D_{ijkpqr} u_{p,qr}) dV \end{aligned} \quad (3.91)$$

où

$$C_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl} \quad D_{ijkpqr} = \bar{D}_{ijkpqr} - \bar{C}_{ijpq} \bar{I}_{kr} \quad (3.92)$$

Un exemple numérique est réalisé pour illustrer cette procédure d'homogénéisation. L'exemple montre en particulier qu'avec cette correction, les modules homogénéisés d'ordre supérieur s'annulent si le milieu composite est homogène. C'est une propriété souhaitée du schéma d'homogénéisation.

