

## **CHAPITRE IV**

### **MODELISATION DES MASSIFS ROCHEUX PAR LA METHODE DES ELEMENTS DISTINCTS**

## **1. Introduction :**

La fracturation d'un massif rocheux conduit à une discrétisation de ce dernier en un assemblage de blocs. Ces blocs sont en contact entre eux par les discontinuités (ou joints) de toutes sortes. La déformation du massif est alors déterminée par l'interaction entre l'ensemble des blocs et les joints du massif.

Dans le chapitre II nous avons présenté le modèle de Cundall qui détermine la déformation d'un massif constitué d'un assemblage de blocs soumis à des sollicitations dynamiques, et comment on peut, par des méthodes numériques, traiter des cas statiques.

Dans ce chapitre nous allons développer un modèle de calcul d'un assemblage de blocs en vue d'étudier la stabilité de massifs rocheux fissurés sollicités uniquement par des efforts statiques. La procédure de calcul numérique suivie est celle des éléments finis, en minimisant l'énergie potentielle du système étudié. Le code numérique correspondant s'appelle "BRIG3D".

Ce modèle correspond à celui développé à deux dimensions par T.Korini (1988, code numérique BRIG2D). Il est basé sur le fait que les contacts entre les blocs sont surfaciques (modèle de Belytschko 1984), au lieu des contacts ponctuels qui est la base du modèle développé par Cundall (1971).

## **2. Présentation du modèle :**

Dans la plupart des massifs rocheux fissurés la rigidité et la résistance des joints sont généralement faibles devant celles de la masse rocheuse, ce qui conduit souvent à supposer que les blocs qui constituent le massif sont rigides et que seuls les joints sont déformables.

Le code UDEC développé par Cundall et Lemos (1988), qui est basé sur le modèle initial de Cundall, considère que les blocs sont eux aussi déformables. UDEC permet de calculer la déformation des blocs qui sont discrétisés par éléments finis. Ce code est en fait un couplage entre éléments finis et éléments discrets.

La discrétisation des blocs n'est pas facile à réaliser, surtout en trois dimensions et lorsqu'on a un nombre important de blocs. Le nombre de degrés de liberté augmente rapidement et le temps de calcul devient très grand.

L'hypothèse des blocs très rigides par rapport aux joints permet de simplifier l'étude, de diminuer les degrés de liberté et de rendre le temps de calcul plus faible. Dans certains cas, cette approximation peut être peu réaliste.

### **2.1. L'interpénétration des blocs :**

L'interaction entre deux blocs ne se produit qu'à travers leur joint commun (fig.4.1). Puisque celui-ci est déformable, il se produit alors une "interpénétration" des deux blocs dans le joint. Celle-ci est tout à fait fictive et dérive uniquement du fait que la déformation normale du joint n'est pas représentée sur les sorties graphiques.

Les joints sont alors représentés fictivement par l'interpénétration entre les blocs, cet interpénétration correspondant à une déformation suivant les

lois du comportement mécanique des joints rocheux. Le massif est alors, représenté par un assemblage de blocs rigides dont les contacts peuvent se déformer suivant les lois mécaniques des fissures du massif.

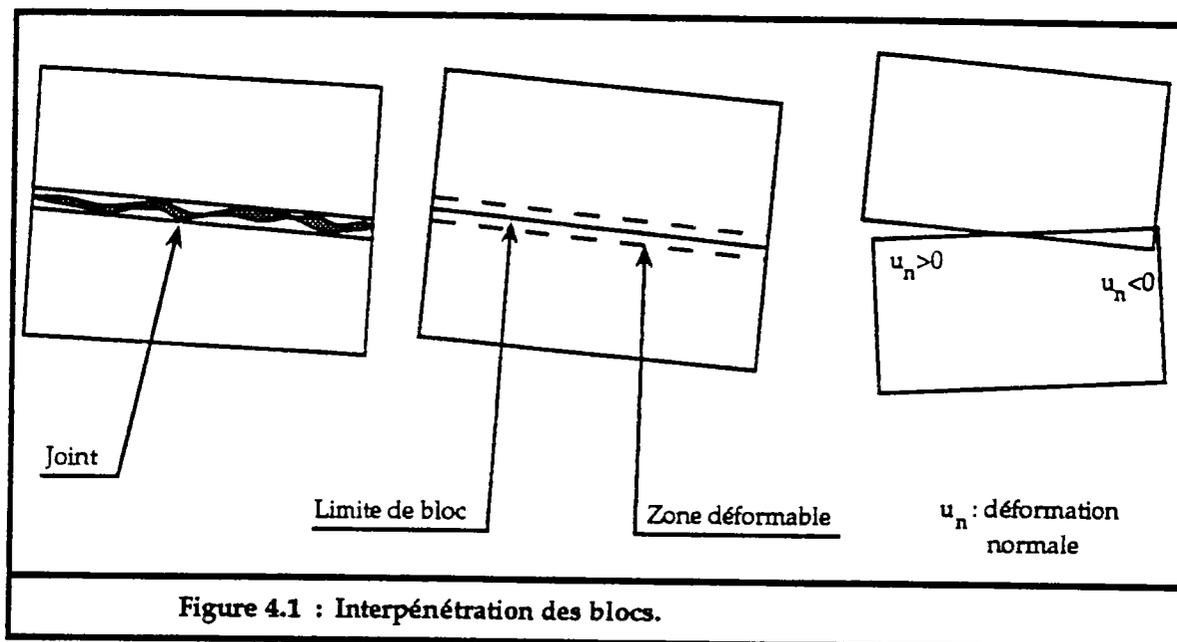


Figure 4.1 : Interpénétration des blocs.

## 2.2. Les lois de comportement des joints :

Les lois de comportement mécanique des joints que nous avons adoptées sont celles présentées au chapitre I : un comportement normal non linéaire (fonction hyperbolique) et un comportement tangentiel élastoplastique parfait.

### 2.2.1. Déformation normale :

La relation liant la contrainte et la déformation normale d'un joint est exprimée par (fig.4.2) :

$$\sigma_n = \frac{k_{ni} \cdot U_{max} \cdot U_n}{(-U_n + U_{max})} + \alpha \quad (4.1)$$

$$k_n(U_n) = \frac{k_{ni} \cdot U_{max}^2}{(-U_n + U_{max})^2}$$

avec :

$\sigma_n$  : contrainte normale, comptée négative en compression.

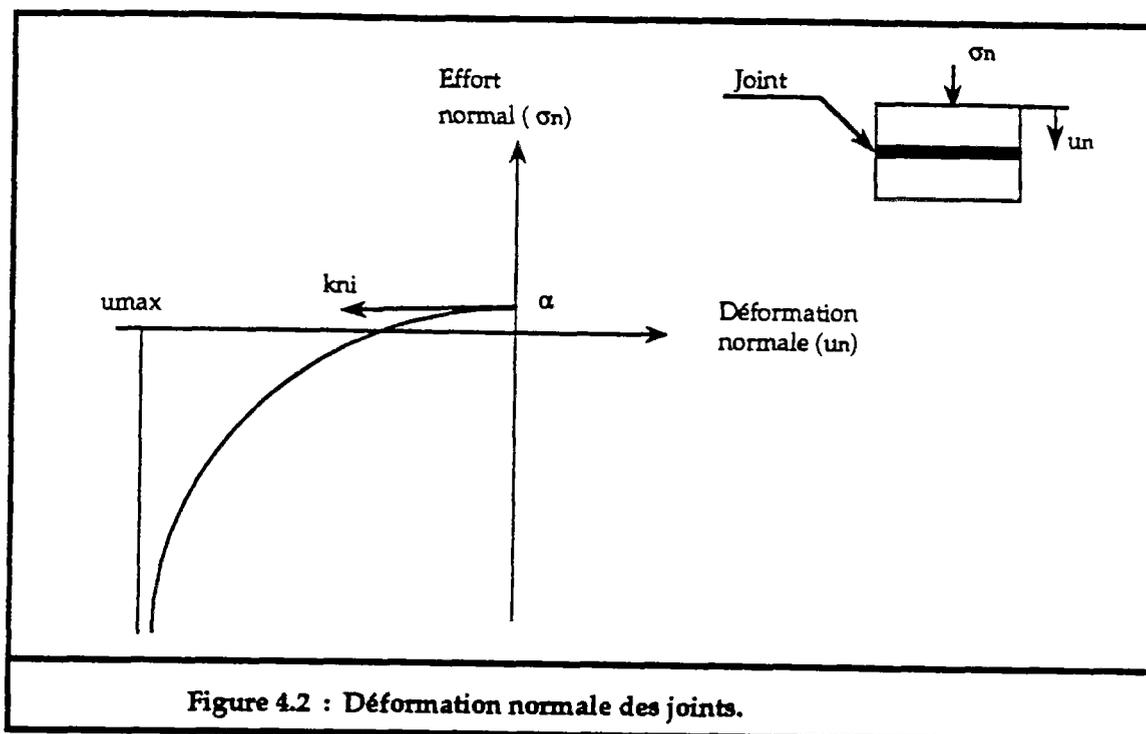
$U_n$  : déformation normale, comptée négative pour la fermeture du joint.

$U_{max}$  : fermeture maximale du joint.

$\alpha$  : contrainte d'ouverture du joint.

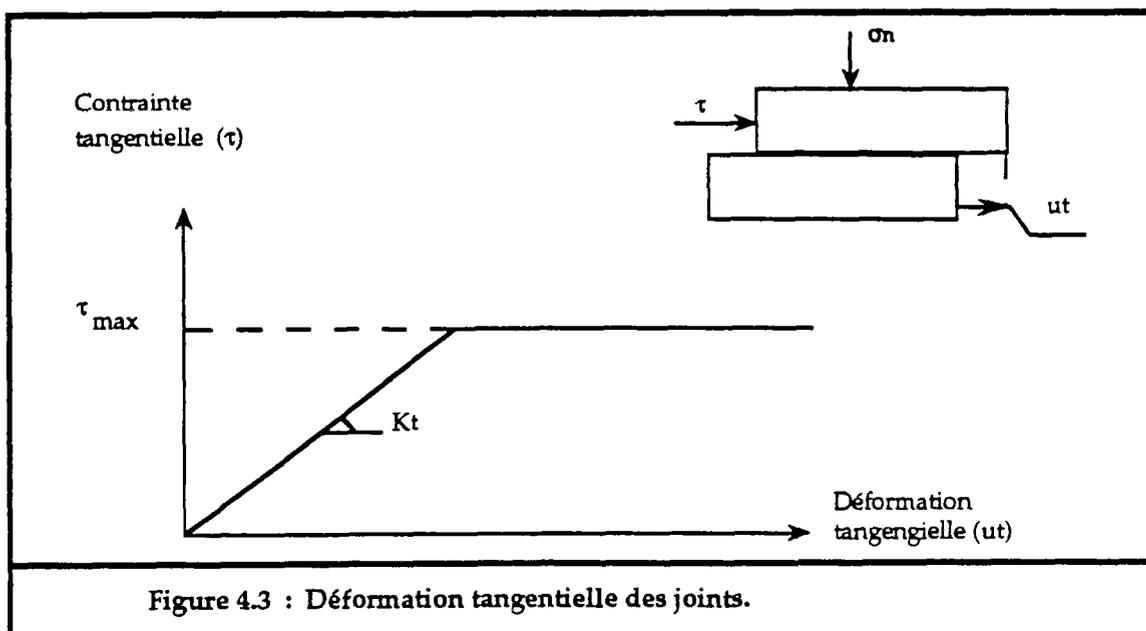
$k_{ni}$  : rigidité normale initiale du joint.

$k_n$  : rigidité normale, tangente à la courbe effort-déformation.



### 2.2.2. Déformation tangentielle :

La loi du comportement tangentiel adoptée est la loi élastique linéaire parfaitement plastique (fig.4.3). La linéarité du comportement rend le calcul rapide dans le domaine élastique. Les joints sont supposés non dilatants.



avec :

$\tau_{\max}$  : contrainte tangentielle maximale.

$k_t^0$  : rigidité tangentielle.

et :

si  $\tau \leq \tau_{\max}$  alors  $d\tau = k_t^0 \cdot du_t$ .

si  $\tau = \tau_{\max}$  alors  $k_t = 0$ .

Nous avons choisi  $\tau_{\max}$ , sous la forme suivante, pour représenter le critère de rupture de Barton :

$$\tau_{\max} = A + B \cdot \sigma_n \cdot \text{tg} \left[ C \cdot \log_{10} \left( \frac{D}{\sigma_n} \right) + E \right]$$

où A représente la cohésion, B peut représenter la tangente de l'angle de frottement avec C et E nuls, C représente le JRC, D représente le JCS et E représente l'angle de frottement de base. En prenant B égale à un et C égale à zéro on aura le critère de Mohr-Coulomb.

### 2.3. Procédure de résolution :

Un ensemble de blocs interagissant entre eux, sollicités par des forces extérieures, ne sont en état d'équilibre stable que si leur énergie potentielle totale est minimale. Sinon il vont se déplacer sous l'effet des forces extérieures et de leurs interactions réciproques vers un état d'équilibre stable qui minimisera l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle est composée de l'énergie de déformation des joints et du travail des forces extérieures. La minimisation de l'énergie potentielle totale, comme aux éléments finis, permet de lier les forces et les déplacements des blocs par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité.

L'énergie potentielle d'un joint dépend de son état de déformation et de son état de contrainte reliés par les lois du comportement mécanique présentées ci-dessus. La non-linéarité de ces lois conduit à une matrice de rigidité qui dépend de l'état de déformation des joints. On obtient alors, un système d'équations non linéaires. La procédure de résolution consiste à résoudre ce système par des incréments de forces successives jusqu'à l'effort total. Le résultat dépend du pas d'incrément choisi. Plus ce pas est faible, plus le résultat est correct.

Le choix du pas d'incrément est très difficile, un pas très faible augmente la précision des résultats mais augmente le temps de calcul, au contraire un pas très grand diminue le temps de calcul mais donne des résultats non fiables. BRIG3D laisse le soin à l'utilisateur de choisir lui-même le pas d'incrément.

### 3. Analyse de la déformation des joints par rapport aux déplacements des blocs :

Sous l'effet des forces extérieures et de leurs interactions, les blocs peuvent se déplacer dans l'espace. Leurs déplacements se traduisent par des déformations au niveau des joints. Dans ce paragraphe nous allons exprimer la déformation et la contrainte d'un joint en fonction des déplacements des blocs. Ceci est réalisé entre deux chargements successifs.

#### 3.1. Déplacement des blocs dans l'espace :

En trois dimensions et dans un référentiel R fixe (R:OXYZ), chaque bloc peut avoir trois composantes de translation, suivant les axes X, Y et Z, et trois composantes de rotation, autour de son centre de gravité suivant les axes X, Y et Z (fig.4.4).

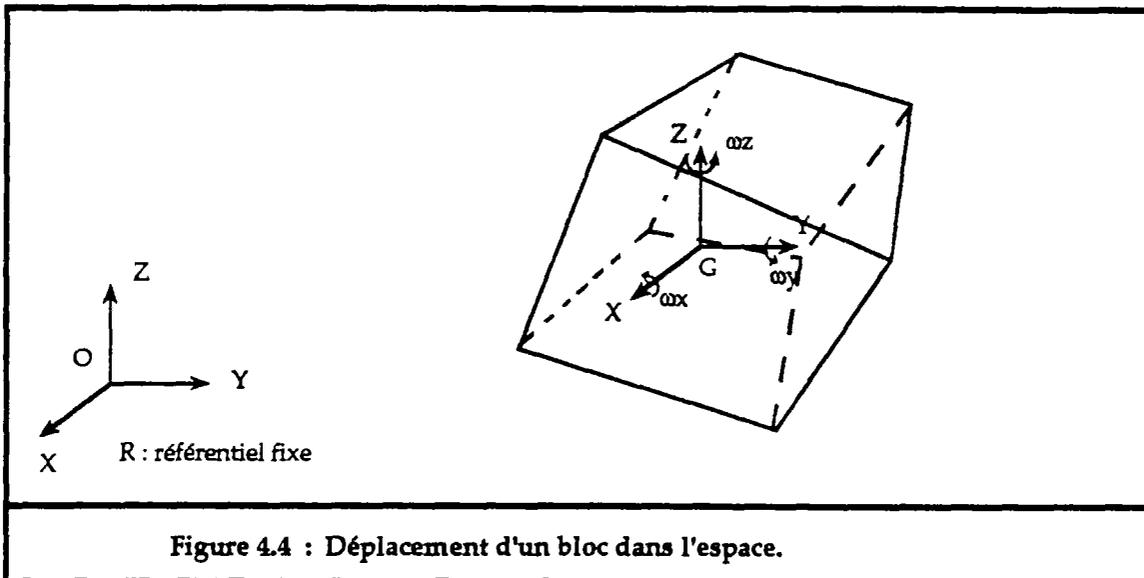


Figure 4.4 : Déplacement d'un bloc dans l'espace.

Soit entre deux chargements successifs  $k$  et  $k+1$ ,  $\delta\vec{u}_i(G)$  et  $\delta\vec{\omega}(G)$  respectivement le vecteur variation de translation et le vecteur variation de rotation du centre de gravité du bloc dans le repère R :

$$\delta\vec{u}_i(G) = \begin{Bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{Bmatrix}, \quad \delta\vec{\omega}(G) = \begin{Bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{Bmatrix}$$

Le déplacement d'un point quelconque M du bloc se déduit des deux vecteurs  $\delta\vec{u}_i(G)$  et  $\delta\vec{\omega}(G)$  par le théorème d'Huygens :

$$\delta\vec{u}_i(M) = \delta\vec{u}_i(G) + \delta\vec{\omega}(G) \wedge \overline{GM} \quad (4.2)$$

Dans ce qui suit on note  $\delta\vec{u}_i(G)$  le vecteur de six composantes constitué par les composantes de  $\delta\vec{u}_i(G)$  et celles de  $\delta\vec{\omega}(G)$ .

### 3.2. Déformations des joints :

Soit deux blocs  $B_i$  et  $B_j$  constituant un joint  $ij$  (fig.4.5).

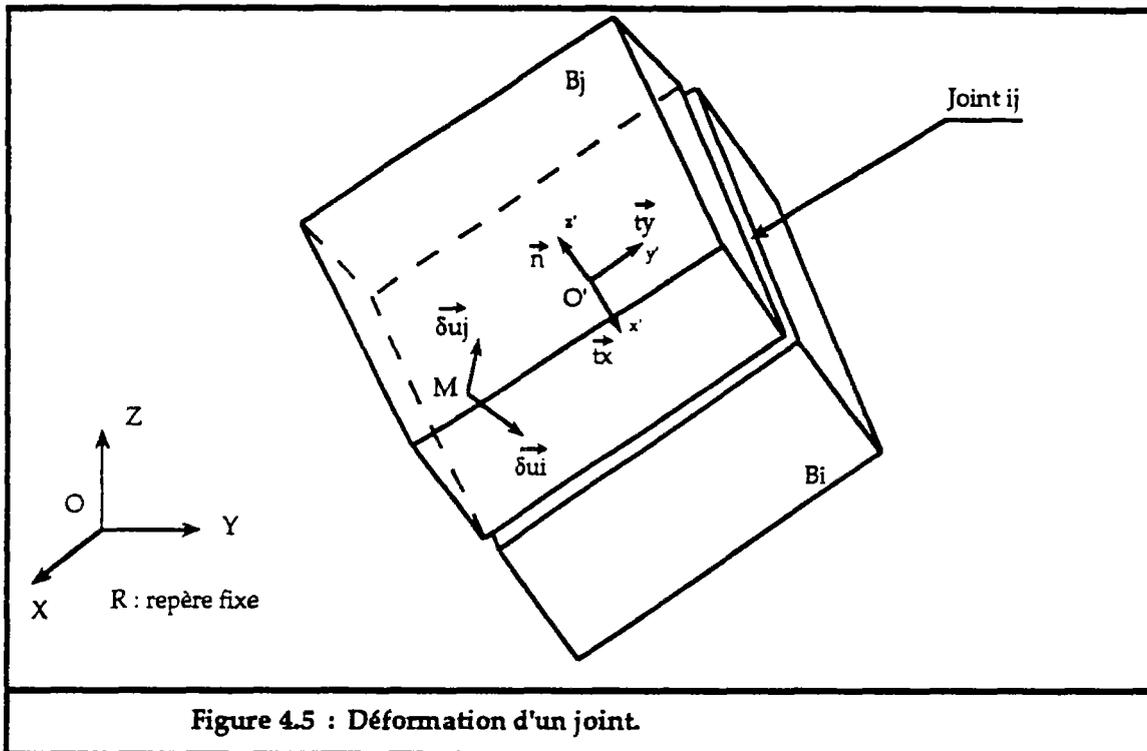


Figure 4.5 : Déformation d'un joint.

avec :

$\vec{n}$  : vecteur normal au joint  $ij$ .

$(\vec{t}_x, \vec{t}_y)$  : vecteurs orthogonaux à  $\vec{n}$  et tangents au joint  $ij$ .

$O'$  : centre de gravité du joint  $ij$ .

$R'=(O',X',Y',Z')$  repère local lié au joint  $ij$ .

$R=(O,X,Y,Z)$  référentiel fixe.

Sous l'influence du chargement, les blocs  $B_i$  et  $B_j$  subissent des déplacements dont les valeurs au niveau du joint  $ij$ , pour chaque point  $M$  du joint, peuvent être définis par les vecteurs  $\delta\vec{u}_i(M)$  et  $\delta\vec{u}_j(M)$ , avec :

$\delta\vec{u}_i(M)$  : déplacement du point  $M$  lié au bloc  $B_i$  dans le repère  $R'$ .

$\delta\vec{u}_j(M)$  : déplacement du point  $M$  lié au bloc  $B_j$  dans le repère  $R'$ .

Ainsi le déplacement relatif au point  $M$ , dans le repère  $R'$ , est :

$$d\vec{u}(M)=\delta\vec{u}_j(M)-\delta\vec{u}_i(M)$$

On projette ce vecteur dans le repère local et on obtient les déplacements normal et tangentiel au point  $M$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} du_n(M) = (\delta \vec{u}_j(M) - \delta \vec{u}_i(M)) \cdot \vec{n} \\ du_{tx}(M) = (\delta \vec{u}_j(M) - \delta \vec{u}_i(M)) \cdot \vec{t}_x \\ du_{ty}(M) = (\delta \vec{u}_j(M) - \delta \vec{u}_i(M)) \cdot \vec{t}_y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{déplacement normal.} \\ \text{déplacements tangentiels.} \\ du_t = \sqrt{du_{tx}^2 + du_{ty}^2} \end{array}$$

On note  $d\vec{u}_{ij}(M) = [du_n(M), du_{tx}(M), du_{ty}(M)]$  l'incrément de déplacement du joint ij, au point M, entre deux chargements successifs k et k+1.

Le vecteur  $d\vec{u}_{ij}(M)$  peut être exprimé en fonction des déplacements du centre de gravité du joint ij.

Soit dans le repère local  $R'(O', X', Y', Z')$  :

- $\delta \vec{u}_i = [\delta \dot{u}_{xi}, \delta \dot{u}_{yi}, \delta \dot{u}_{zi}, \delta \dot{\omega}_{xi}, \delta \dot{\omega}_{yi}, \delta \dot{\omega}_{zi}]$  le vecteur déplacement du centre de gravité du joint ij lié au bloc  $B_i$  dans le repère local  $R'$ .
- $\delta \vec{u}_j = [\delta \dot{u}_{xj}, \delta \dot{u}_{yj}, \delta \dot{u}_{zj}, \delta \dot{\omega}_{xj}, \delta \dot{\omega}_{yj}, \delta \dot{\omega}_{zj}]$  le vecteur déplacement du centre de gravité du joint ij lié au bloc  $B_j$  dans le repère local  $R'$ .

En appliquant l'équation (4.2), on obtient :

$$\delta \vec{u}_i(M) = \begin{Bmatrix} \delta \dot{u}_{xi} \\ \delta \dot{u}_{yi} \\ \delta \dot{u}_{zi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \dot{\omega}_{xi} \\ \delta \dot{\omega}_{yi} \\ \delta \dot{\omega}_{zi} \end{Bmatrix} \wedge \vec{OM}_i \quad (4.3)$$

et

$$\delta \vec{u}_j(M) = \begin{Bmatrix} \delta \dot{u}_{xj} \\ \delta \dot{u}_{yj} \\ \delta \dot{u}_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \dot{\omega}_{xj} \\ \delta \dot{\omega}_{yj} \\ \delta \dot{\omega}_{zj} \end{Bmatrix} \wedge \vec{OM}_j$$

d'où, si  $x', y', z'$  sont les coordonnées du point M dans  $R'$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} du_n(M) = (\delta \dot{u}_{zj} - \delta \dot{u}_{zi}) + (\delta \dot{\omega}_{xj} - \delta \dot{\omega}_{xi}) \cdot y' + (\delta \dot{\omega}_{yi} - \delta \dot{\omega}_{yj}) \cdot x' \\ du_{tx}(M) = (\delta \dot{u}_{xj} - \delta \dot{u}_{xi}) + (\delta \dot{\omega}_{zi} - \delta \dot{\omega}_{zj}) \cdot y' + (\delta \dot{\omega}_{yj} - \delta \dot{\omega}_{yi}) \cdot z' \\ du_{ty}(M) = (\delta \dot{u}_{yj} - \delta \dot{u}_{yi}) + (\delta \dot{\omega}_{zj} - \delta \dot{\omega}_{zi}) \cdot x' + (\delta \dot{\omega}_{xi} - \delta \dot{\omega}_{xj}) \cdot z' \end{array} \right. \quad (4.4)$$

soit sous forme matricielle :

$$d\vec{u}_{ij}(M) = [B] \cdot \delta \vec{u}'_{ij}$$

avec :

$$\delta \vec{u}'_{ij} = [\delta \dot{u}_{xi}, \delta \dot{u}_{yi}, \delta \dot{u}_{zi}, \delta \dot{\omega}_{xi}, \delta \dot{\omega}_{yi}, \delta \dot{\omega}_{zi}, \delta \dot{u}_{xj}, \delta \dot{u}_{yj}, \delta \dot{u}_{zj}, \delta \dot{\omega}_{xj}, \delta \dot{\omega}_{yj}, \delta \dot{\omega}_{zj}]$$

vecteur déplacement du centre de gravité du joint ij dans le repère local  $R'$ .

et :

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -y' & x' & 0 & 0 & 0 & 1 & y' & -x' & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -z' & y' & 1 & 0 & 0 & 0 & z' & -y' \\ 0 & -1 & 0 & z' & 0 & -x' & 0 & 1 & 0 & -z' & 0 & x' \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $\delta\vec{u}_{ij}'$  peut être exprimé aussi, en fonction des déplacements des centres de gravités des blocs  $B_i$  et  $B_j$ , dans le repère fixe  $R$  :

$$\delta\vec{u}_{ij}' = [T_{ij}] \cdot \delta\vec{u}_{ij}$$

avec :

$$- \delta\vec{u}_{ij} = [\delta u_{xi}, \delta u_{yi}, \delta u_{zi}, \delta \omega_{xi}, \delta \omega_{yi}, \delta \omega_{zi}, \delta u_{xj}, \delta u_{yj}, \delta u_{zj}, \delta \omega_{xj}, \delta \omega_{yj}, \delta \omega_{zj}]$$

vecteur déplacement du centre de gravité des blocs  $B_i$  et  $B_j$  dans le repère fixe  $R$ .

-  $[T_{ij}]$  est la matrice de passage du repère  $R$  au repère  $R'$  :

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} [T_{ij}] & [0] \\ [0] & [T_{ij}] \end{bmatrix}$$

telle que :

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & (l_z \Delta Y_i - l_y \Delta Z_i) & (l_x \Delta Z_i - l_z \Delta X_i) & (l_y \Delta X_i - l_x \Delta Y_i) \\ m_x & m_y & m_z & (m_z \Delta Y_i - m_y \Delta Z_i) & (m_x \Delta Z_i - m_z \Delta X_i) & (m_y \Delta X_i - m_x \Delta Y_i) \\ n_x & n_y & n_z & (n_z \Delta Y_i - n_y \Delta Z_i) & (n_x \Delta Z_i - n_z \Delta X_i) & (n_y \Delta X_i - n_x \Delta Y_i) \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$$

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z & (l_z \Delta Y_j - l_y \Delta Z_j) & (l_x \Delta Z_j - l_z \Delta X_j) & (l_y \Delta X_j - l_x \Delta Y_j) \\ m_x & m_y & m_z & (m_z \Delta Y_j - m_y \Delta Z_j) & (m_x \Delta Z_j - m_z \Delta X_j) & (m_y \Delta X_j - m_x \Delta Y_j) \\ n_x & n_y & n_z & (n_z \Delta Y_j - n_y \Delta Z_j) & (n_x \Delta Z_j - n_z \Delta X_j) & (n_y \Delta X_j - n_x \Delta Y_j) \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$$

avec :

$\vec{n}$  :  $(n_x, n_y, n_z)$  vecteur normal au joint  $ij$ .

$\vec{t}_x$  :  $(l_x, l_y, l_z)$  } vecteurs orthogonaux à  $\vec{n}$  et tangents au joint  $ij$   
 $\vec{t}_y$  :  $(m_x, m_y, m_z)$  }

$$\begin{aligned}
\Delta X_i &= X_{O'} - X_{G_i} \\
\Delta Y_i &= Y_{O'} - Y_{G_i} \\
\Delta Z_i &= Z_{O'} - Z_{G_i} \\
\Delta X_j &= X_{O'} - X_{G_j} \\
\Delta Y_j &= Y_{O'} - Y_{G_j} \\
\Delta Z_j &= Z_{O'} - Z_{G_j}
\end{aligned}$$

Où :

$(X_{O'}, Y_{O'}, Z_{O'})$  : coordonnées du centre de gravité du joint ij dans le repère R.

$(X_{G_i}, Y_{G_i}, Z_{G_i})$  : coordonnées du centre de gravité du bloc Bi dans le repère R.

$(X_{G_j}, Y_{G_j}, Z_{G_j})$  : coordonnées du centre de gravité du bloc Bj dans le repère R.

L'incrément de déplacement du joint ij au point M, entre deux chargements successifs, peut être exprimé ainsi :

$$d\vec{u}_{ij}(M) = [B] \cdot [T_{ij}] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \quad (4.5)$$

### 3.3. Contraintes des joints :

Si entre deux chargements successifs k et k+1, on suppose que les rigidités du joint sont constantes, on a alors une relation linéaire entre la variation de déplacement et la variation de contrainte, soit au point M du joint ij :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_{n_{k+1}}(M) = \sigma_{n_k}(M) + k_n \cdot du_n(M) \\
\sigma_{tx_{k+1}}(M) = \sigma_{tx_k}(M) + k_t \cdot du_{tx}(M) \\
\sigma_{ty_{k+1}}(M) = \sigma_{ty_k}(M) + k_t \cdot du_{ty}(M)
\end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{contrainte normale} \\ \text{contraintes tangentielles} \end{array}$$

où

$k_n$  : la rigidité normale du joint.

$k_t$  : la rigidité tangentielle du joint.

Soit :

-  $\vec{\sigma}_{ij}(M)_k = [\sigma_n(M), \sigma_{tx}(M), \sigma_{ty}(M)]_k$  vecteur contrainte du joint au point M à l'incrément de charge k.

-  $\vec{\sigma}_{ij}(M)_{k+1} = [\sigma_n(M), \sigma_{tx}(M), \sigma_{ty}(M)]_{k+1}$  vecteur contrainte du joint au point M à l'incrément de charge k+1.

$\sigma_n$  est la contrainte normale au joint suivant la normale  $\vec{n}$ ,  $\sigma_{tx}$  et  $\sigma_{ty}$  sont les contraintes tangentielles au joint suivant les vecteurs  $\vec{t}_x$  et  $\vec{t}_y$ .

Sous forme matricielle on obtient :

$$\vec{\sigma}_{ij}(M)_{k+1} = \vec{\sigma}_{ij}(M)_k + [k_{ij}] \cdot d\vec{u}_{ij}(M)$$

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix}$$

Et d'après l'équation (4.5), on obtient :

$$\vec{\sigma}_{ij}(M)_{k+1} = \vec{\sigma}_{ij}(M)_k + [k_{ij}] \cdot [B] \cdot [T_{ij}] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \quad (4.6)$$

#### 4. Energie potentielle du système de blocs :

L'énergie potentielle totale du système de blocs est fonction de l'énergie de déformation des joints, du travail des forces extérieures et des contraintes initiales. Entre deux incréments successives les contraintes initiales, pour chaque joint, sont égales à  $\vec{\sigma}_{ijk}$ .

##### 4.1. L'énergie potentielle de déformation d'un joint :

L'énergie potentielle de déformation d'un joint ij s'exprime par :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \int_{S_{ij}} d\vec{u}_{ij}(M) \cdot d\vec{\sigma}_{ij}(M)_{k+1} \cdot ds \quad \dagger$$

Soit :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \int_{S_{ij}} d\vec{u}_{ij}(M) \cdot [k_{ij}] \cdot d\vec{u}_{ij}(M) \cdot ds$$

$S_{ij}$  est la surface du joint. D'après l'équation (4.6), on obtient :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \int_{S_{ij}} \delta \vec{u}_{ij} \cdot [T_{ij}] \cdot [B] \cdot [k_{ij}] \cdot [B] \cdot [T_{ij}] \cdot \delta \vec{u}_{ij} \cdot ds$$

Soit en simplifiant :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \delta \vec{u}_{ij} \cdot [K_{eij}] \cdot \delta \vec{u}_{ij}$$

avec :

$$[K_{eij}] = \int_{S_{ij}} [T_{ij}] \cdot [B] \cdot [k_{ij}] \cdot [B] \cdot [T_{ij}] \cdot ds$$

$[K_{eij}]$  est la matrice de rigidité élémentaire du joint ij.

†

l'exposant t représente la transposée d'une matrice.

#### 4.2. Travail des forces de chargement :

Soit  $\vec{F}_{ex}$  une force appliquée sur un bloc  $B_i$  qui se déplace de  $\delta\vec{u}_i$ . Le travail de cette force s'exprime par :

$$E_{\vec{F}_{ex}} = \delta\vec{u}_i \cdot \vec{F}_{ex}$$

avec le vecteur  $\vec{F}_{ex} = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]$  formé de trois composantes de translation (forces) et trois composantes de rotation (moments).

Toutes les forces sont rapportées aux centres de gravité des blocs sur lesquels elles sont respectivement appliquées.

#### 4.3. Travail des contraintes initiales :

Pour chaque joint  $ij$  le travail des contraintes  $\vec{\sigma}_{ijk}$ , de l'incrément de forces précédent, est égale à :

$$E_{\sigma_{ij_k}} = \int_{S_{ij}} d\vec{u}_{ij}(M) \cdot \vec{\sigma}_{ij}(M)_k \cdot ds$$

Soit :

$$E_{\sigma_{ij_k}} = \int_{S_{ij}} \delta\vec{u}_{ij} \cdot [T_{ij}]^t [B]^t \vec{\sigma}_{ij}(M)_k \cdot ds$$

Soit en simplifiant :

$$E_{\sigma_{ij_k}} = \delta\vec{u}_{ij} \cdot [f_{ij}^0]$$

$$[f_{ij}^0] = \int_{S_{ij}} [T_{ij}]^t [B]^t \vec{\sigma}_{ij}(M)_k \cdot ds$$

#### 4.4. Energie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale s'obtient par une sommation des énergies des joints et du travail des forces de chargement :

$$\mathcal{E}_T = \sum_{\text{joints}} E_{ij} - \sum_{\text{forces extérieures}} E_{\vec{F}_{ex}}$$

Soit :

$$\mathcal{E}_T = \frac{1}{2} [\delta U]^t [KG] \cdot [\delta U] - [\delta U]^t \cdot ([F_{ex}] - [F_0])$$

avec :

$[\delta U]$  =  $[\delta u_{x1}, \dots, \delta \theta_{zN}]$  vecteur global de déplacement des blocs.  
 $[F_0]$  : assemblage des vecteurs  $[f_{ij}]$ .  
 $[KG]$  : assemblage des matrices de rigidités élémentaires.  
 $[F_{ex}]$  : assemblage des vecteurs forces appliquées sur les blocs sollicités.

N : nombre total des blocs.

## 5. Minimisation de l'énergie potentielle totale :

La minimisation de l'énergie potentielle totale consiste à annuler sa dérivée par rapport aux déplacements des blocs. L'introduction des conditions aux limites, nécessite l'utilisation de la méthode de Lagrange qui permet de minimiser une fonction à plusieurs variables sous des conditions imposées.

### 5.1. Conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont prises sous forme linéaire, soit :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ g_j([\delta U]) = \sum_{i=1}^{n_j} c_i \cdot \delta u_i - v_j = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$j=1, N_c$  ( $N_c$  est le nombre de conditions aux limites)

où dans chaque condition aux limites, il y a  $n_j$  degrés de libertés liés par des coefficients  $c_i$ .

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda_j$ ), la fonction à minimiser est :

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}_T - \sum_{j=1}^{N_c} \lambda_j \cdot g_j$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial [\delta U]} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_j} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} [KG] \cdot [\delta U] + [C] \cdot [\lambda] = [F_{ex}] - [F_0] \\ [C] \cdot [\delta U] = [v] \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{bmatrix} [KG] & [C] \\ [C] & [0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\delta U] \\ [\lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{ex}] - [F_0] \\ [v] \end{bmatrix}$$

On obtient alors le système d'équation :

$$[K^*] \cdot [\delta U^*] = [F^*] \quad \text{Système (S)}$$

[c] : est la matrice contenant les coefficients  $c_i$ .

[v] : est le vecteur contenant les valeurs  $v_j$ .

Le système (S) est constitué par des équations non linéaires, puisque les rigidités sont en fonction des déformations. On est amené à utiliser un processus itératif pour déterminer les rigidités et les déformations qui minimisent l'énergie potentielle totale.

### 5.2. Résolution du système-Processus itératif :

Le processus itératif consiste à chercher, pour chaque incrément de force, l'ensemble des déplacements des blocs qui sera compatible avec l'ensemble des rigidités des joints et qui minimiseront l'énergie potentielle totale.

Au début de chaque processus itératif (fig.4.6), on résout le système (S) en utilisant les rigidités de l'incrément de force précédent, avec les déplacements obtenus on recalcule les nouvelles rigidités des joints grâce à leurs lois de comportement mécanique, et on résout de nouveau le système (S), ceci jusqu'à ce que l'énergie potentielle soit minimale. Les déplacements convergent alors vers l'état recherché.

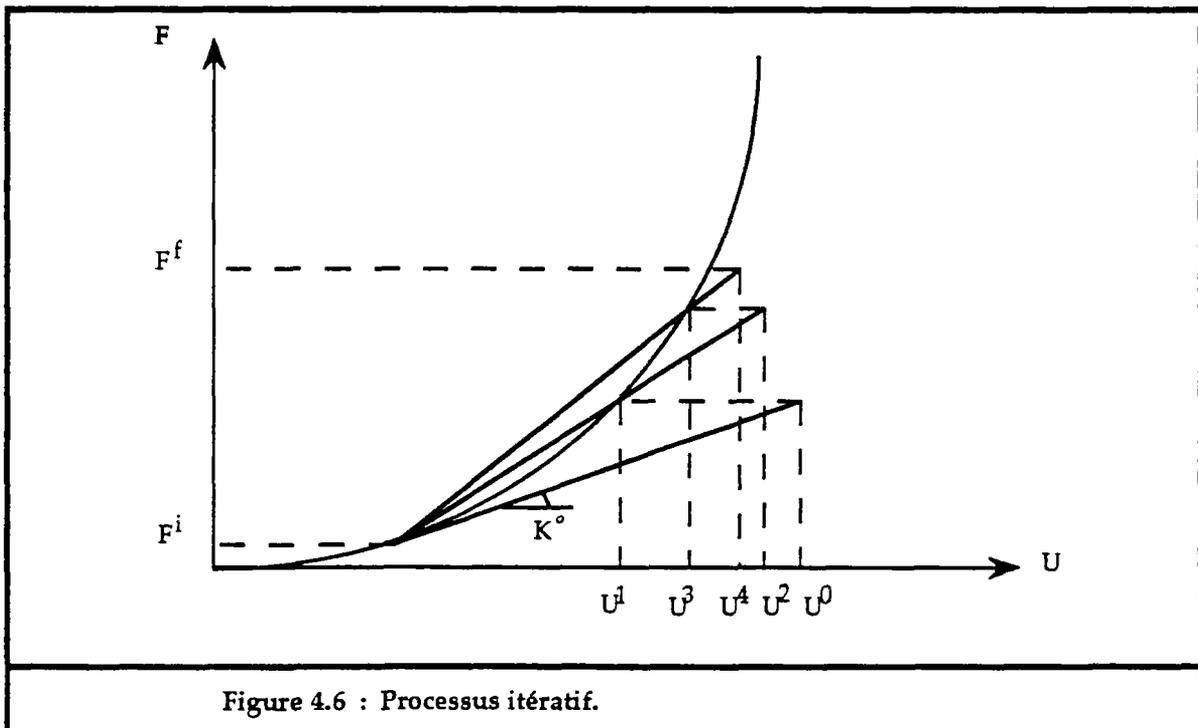


Figure 4.6 : Processus itératif.

Pour le test de convergence du processus itératif, on peut utiliser soit :

- la norme du maximum, qui est un critère très sévère et qui augmente le temps de calcul :

$$\text{CRITERE} = \text{Max}_j |\delta u_j^{l+1} - \delta u_j^l|$$

- la norme de la somme des différences absolues :

$$\text{CRITERE} = \frac{1}{N} \cdot \sum_j |\delta u_j^{l+1} - \delta u_j^l|$$

avec :

$j$  représente l'indice des composantes du vecteur  $[\delta u]$ .

$l$  et  $l+1$  représentent deux itérations successives ( $N$  est la dimension du vecteur  $[\delta u]$ ).

Le processus itératif est arrêté lorsque la valeur CRITERE est inférieure à une valeur fixée à l'avance.

L'organigramme du processus se fait de la manière suivante :

0. - Incrémentation des forces appliquées sur les blocs (étape  $k+1$ ).
  - Et calcul des rigidités de chaque joint en fonction des données de l'étape ( $k$ ).
1. - Construction de la matrice de rigidité globale et résolution du système (S).
2. - Calcul des rigidités des joints en fonction des déplacements obtenus.
3. - Test de convergence :
  - si oui : arrêt du processus itératif.
  - si non : retour en 1.

Le calcul des rigidités des joints passe par le calcul des surfaces des joints, c'est-à-dire le contact réel entre les blocs.

## **6. Calcul des surfaces et des rigidités des joints :**

### **6.1. Détermination des surfaces de contacts des joints :**

La surface de contact de deux blocs détermine le joint d'un point de vue physique. Cette surface est définie par l'ensemble des points qui ont une déformation normale négative et correspond à "l'interpénétration" des deux blocs.

Pour déterminer l'interpénétration des deux blocs qui limitent le joint, on procède ainsi (fig.4.7) :

- dans le repère local du joint, on calcule les déplacements des deux faces qui forment le joint, ceci en calculant les déplacements de leurs sommets correspondants d'après l'équation (4.3).

- on projette les deux faces sur le plan (X',Y') et on détermine leur intersection qui sera un polygone (puisque les faces aussi sont des polygones).
- dans ce polygone on calcule les déformations normales par l'équation (4.4), et on cherche dans ce polygone l'ensemble des points qui ont une déformation normale négative, cet ensemble constituera alors le joint formé par les deux blocs à l'incrément (k+1). Pour déterminer cet ensemble, on calcule les déformations normales de tous les sommets du polygone puis on compare les déformations de chaque couple de sommets qui se suivent (fig.4.8), on garde uniquement les sommets de déformations négatives.

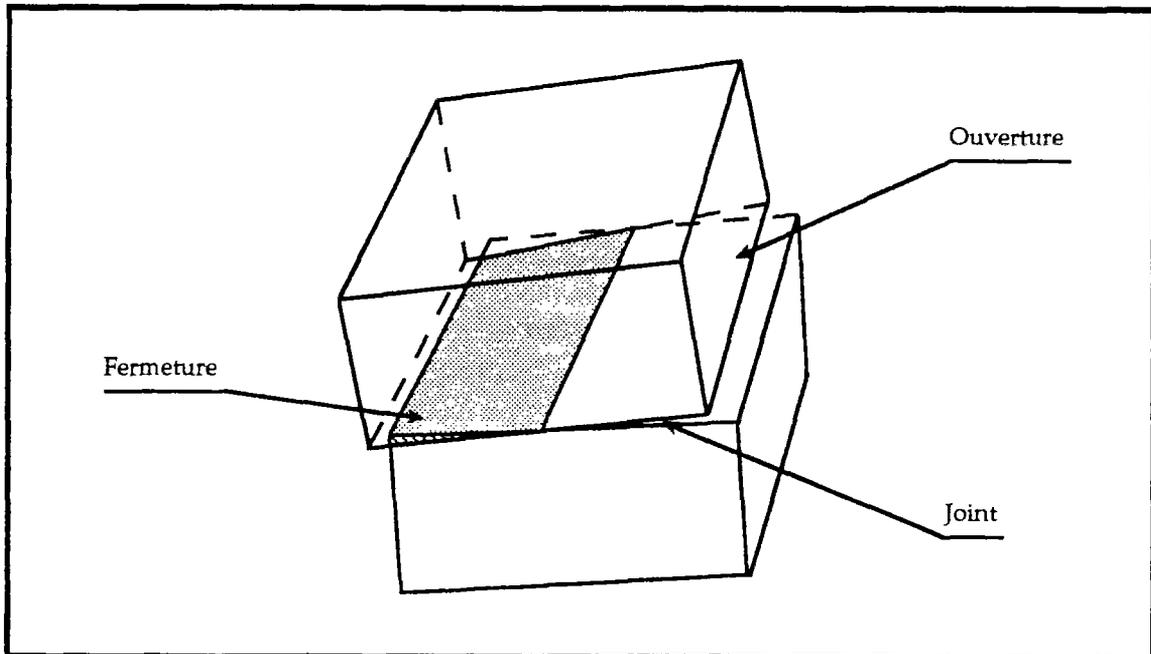


Figure 4.7 : Interpénétration des blocs formant le joint.

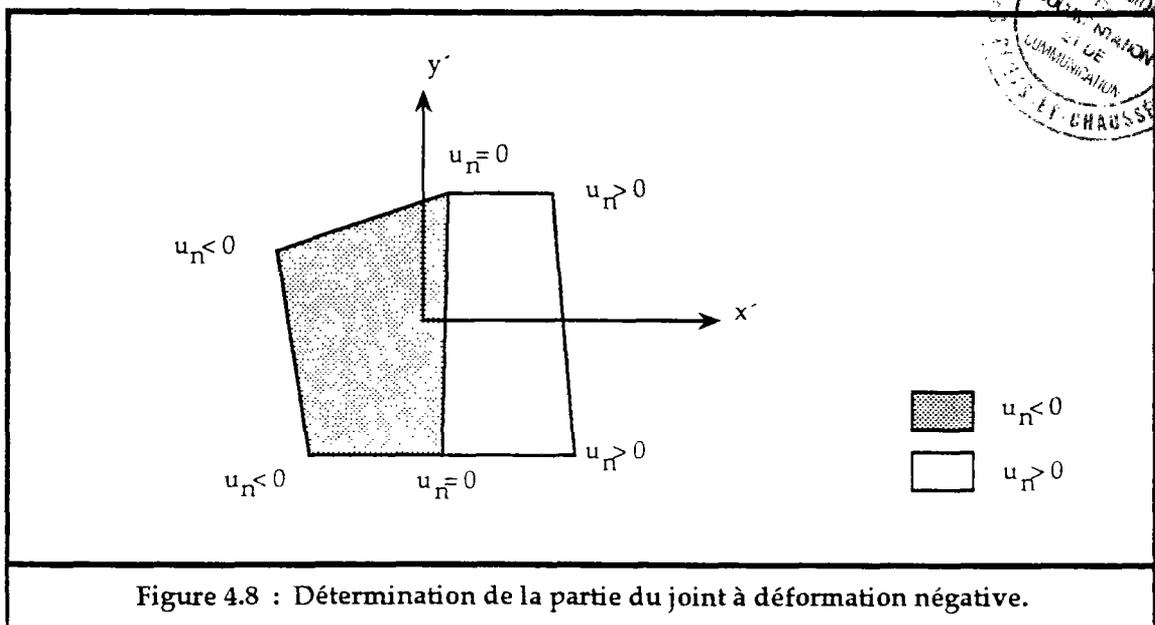


Figure 4.8 : Détermination de la partie du joint à déformation négative.

## 6.2. Détermination des rigidités des joints :

Les déformations des joints se calculent à partir des déplacements des blocs. Les rigidités des joints permettent alors d'en déduire les contraintes.

### 6.2.1. Calcul des déformations moyennes des joints :

Pour chaque joint on calcule les déplacements par l'équation (4.4) :

$$d\vec{u}_{ij}(M) = \begin{cases} du_n(M) = (\delta\dot{u}_{zj} - \delta\dot{u}_{zi}) + (\delta\dot{\omega}_{xj} - \delta\dot{\omega}_{xi}) \cdot y' + (\delta\dot{\omega}_{yi} - \delta\dot{\omega}_{yj}) \cdot x' \\ du_{tx}(M) = (\delta\dot{u}_{xj} - \delta\dot{u}_{xi}) + (\delta\dot{\omega}_{zi} - \delta\dot{\omega}_{zj}) \cdot y' + (\delta\dot{\omega}_{yj} - \delta\dot{\omega}_{yi}) \cdot z' \\ du_{ty}(M) = (\delta\dot{u}_{yj} - \delta\dot{u}_{yi}) + (\delta\dot{\omega}_{zj} - \delta\dot{\omega}_{zi}) \cdot x' + (\delta\dot{\omega}_{xi} - \delta\dot{\omega}_{xj}) \cdot z' \end{cases}$$

Les déformations moyennes sont calculées par une intégration sur la surface du joint ij, soit :

$$d\vec{u}_{ij} = \frac{\int_{S_{ij}} d\vec{u}_{ij}(M) \cdot ds}{\int_{S_{ij}} ds}$$

soit :

$$d\vec{u}_{ij} = \begin{cases} du_n = (\delta\dot{u}_{zj} - \delta\dot{u}_{zi}) + (\delta\dot{\omega}_{xj} - \delta\dot{\omega}_{xi}) \cdot \frac{S_y}{S} + (\delta\dot{\omega}_{yi} - \delta\dot{\omega}_{yj}) \cdot \frac{S_x}{S} \\ du_{tx} = (\delta\dot{u}_{xj} - \delta\dot{u}_{xi}) + (\delta\dot{\omega}_{zi} - \delta\dot{\omega}_{zj}) \cdot \frac{S_y}{S} + (\delta\dot{\omega}_{yj} - \delta\dot{\omega}_{yi}) \cdot \frac{S_z}{S} \\ du_{ty} = (\delta\dot{u}_{yj} - \delta\dot{u}_{yi}) + (\delta\dot{\omega}_{zj} - \delta\dot{\omega}_{zi}) \cdot \frac{S_x}{S} + (\delta\dot{\omega}_{xi} - \delta\dot{\omega}_{xj}) \cdot \frac{S_z}{S} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec :

$$S_x = \int_{S_{ij}} x' \cdot ds, \quad S_y = \int_{S_{ij}} y' \cdot ds, \quad S_z = \int_{S_{ij}} z' \cdot ds, \quad S = \int_{S_{ij}} ds$$

### 6.2.2. Calcul des contraintes et rigidités normales :

Suivant les rigidités des joints, les déformations calculées par le mouvement des blocs, devront être compatibles avec les lois de comportement mécaniques. Donc à chaque fois, il faut corriger les rigidités choisies pour que les déformations et contraintes soient bien liées par les lois de comportement mécanique des joints (cf §.5.2).

Au début de chaque processus itératif, la rigidité normale est prise égale à la tangente de la courbe effort-déformation normale (équation 4.1).

$$k_n^o(u_n) = \frac{\partial \sigma_n(u_n)}{\partial u_n} = \frac{k_{ni} \cdot u_{max}^2}{(-u_n + u_{max})^2}$$

Pour l'incrément initial, la contrainte initiale d'un joint est prise égale par défaut à  $\alpha$ . Si le joint possède déjà une contrainte initiale  $\sigma^o$  ( $\neq \alpha$ ), on effectue alors un changement de repère suivant l'axe des déformations à  $u_o$  :

$$u_o = \frac{u_{max} \cdot (\sigma^o - \alpha)}{\sigma^o - \alpha + k_{ni} \cdot u_{max}}$$

A ce moment le joint ne serait ouvert que si  $u_n$  est supérieur à  $u_o$ .

Donc pour chaque itération (l+1), on calcule la déformation normale du joint  $du_n$  par l'équation (4.7).

a/ si  $du_n$  est négatif (fig.4.9) :

On admet que la contrainte normale  $\sigma_n$  calculée par la rigidité  $k_n^1$ , de l'itération précédente, est correcte et on calcule la valeur réelle de  $du_n^{l+1}$  par la loi du comportement normale en effort-déformation, soit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n_{k+1}}^{l+1} = \sigma_{n_k} + k_n^1 \cdot du_n \quad \dagger \\ du_n^{l+1} = \frac{u_{max}^2 \cdot k_{ni} \cdot (\sigma_{n_{k+1}}^{l+1} - \sigma_{n_k})}{(\sigma_{n_{k+1}}^{l+1} - \alpha + k_{ni} \cdot u_{max}) \cdot (\sigma_{n_k} - \alpha + k_{ni} \cdot u_{max})} \end{array} \right.$$

La nouvelle rigidité normale est calculée par :

$$k_n^{l+1} = \frac{\sigma_{n_{k+1}}^{l+1} - \sigma_{n_k}}{du_n^{l+1}}$$

Et on recommence le calcul pour l'itération suivante jusqu'à la convergence.

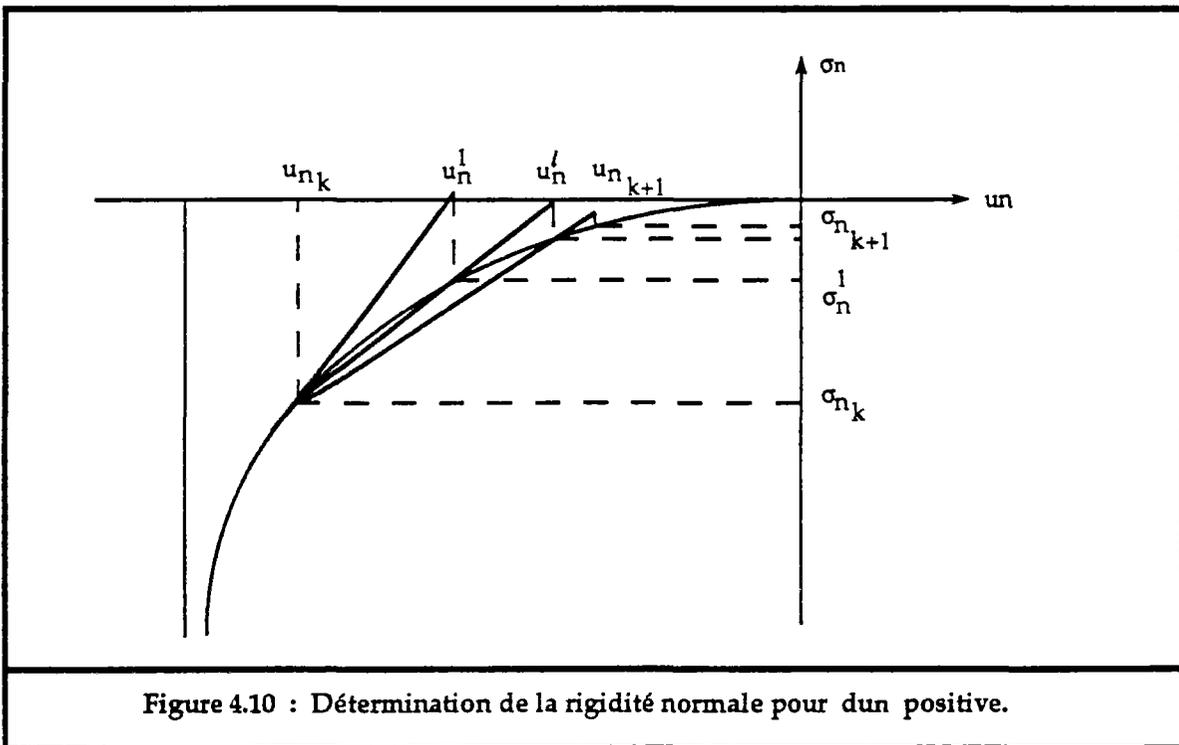
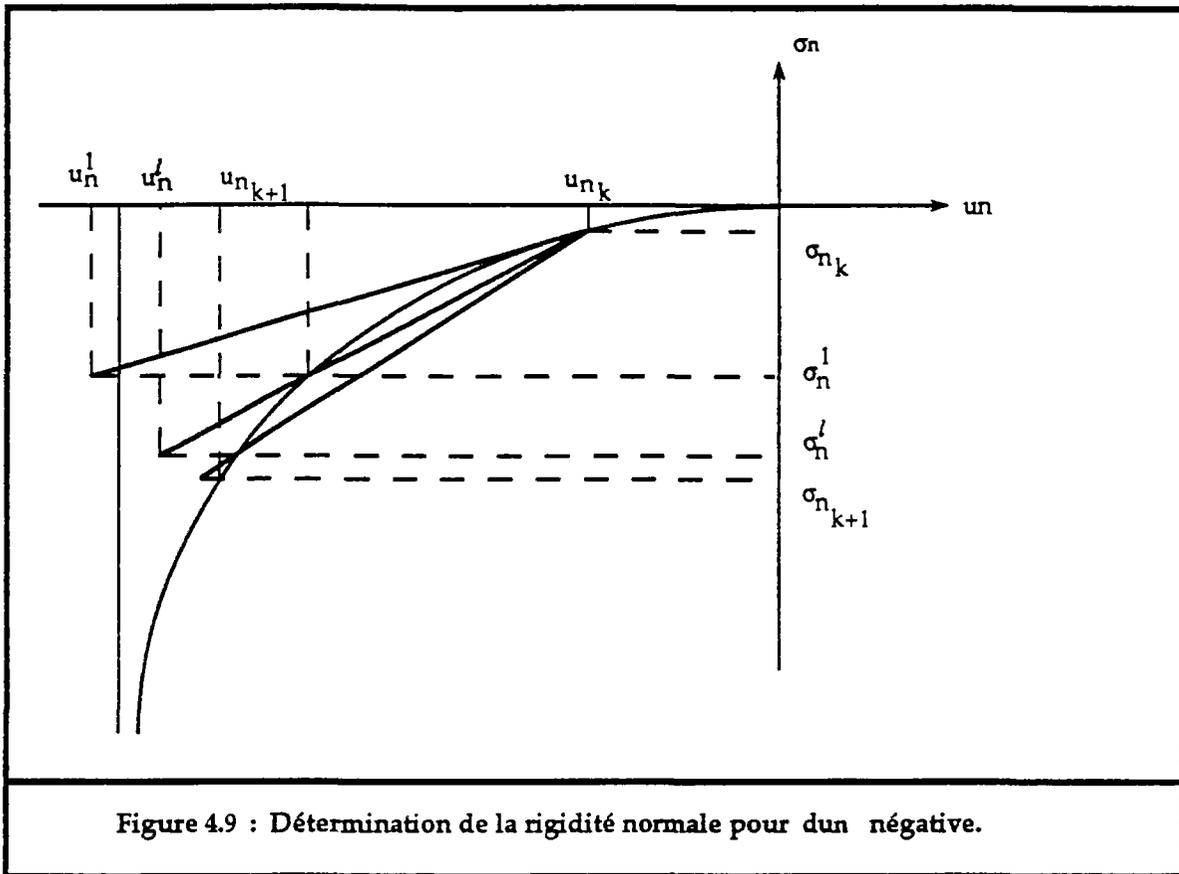
b/ si  $du_n$  est positif (fig.4.10) :

Dans ce cas, on suppose que la déformation normale  $du_n$  est correcte et on calcule la contrainte réelle par la loi du comportement normal (équation 4.1):

$$\sigma_{n_{k+1}}^{l+1} = \frac{k_{ni} \cdot u_{max} \cdot (u_{n_k} - u_o)}{(-u_{n_k} - du_n + u_o + u_{max})} + \alpha$$

†

(l est relatif aux itérations et k aux incréments de forces.)



La nouvelle rigidité normale est calculée par :

$$k_n^{l+1} = \frac{\sigma_n^{l+1} - \sigma_n^k}{du_n}$$

c/ si  $u_n$  est supérieur à  $u_0$  :

Dans ce cas, le joint est ouvert et il n'y a plus de contact entre les deux blocs qui le constituent, les rigidités sont alors annulées.

Au cours des itérations, il faut vérifier si le joint est toujours ouvert, s'il se referme, alors tous ses paramètres mécaniques sont réinitialisés par défaut :

$$u_n = u_0$$

$$\sigma_n = \alpha$$

$$k_n = k_{ni}$$

$$k_t = k_t^0$$

### 6.2.3. Calcul des contraintes et rigidités tangentielles :

La rigidité tangentielle est toujours prise égale à  $k_t^0$  au début du processus itératif. Les contraintes tangentielles du joint sont calculées par :

$$\begin{cases} \sigma_{tx_{k+1}} = \sigma_{tx_k} + k_t \cdot du_{tx}(M) \\ \sigma_{ty_{k+1}} = \sigma_{ty_k} + k_t \cdot du_{ty}(M) \end{cases}$$

et

$$\tau_{k+1} = \sqrt{\sigma_{tx_{k+1}}^2 + \sigma_{ty_{k+1}}^2}$$

$$du_t = \sqrt{du_{tx}^2 + du_{ty}^2}$$

$$\tau_{max} = A + B \cdot \sigma_n \cdot \text{tg} \left[ C \cdot \log_{10} \left( \frac{D}{\sigma_n} \right) + E \right]$$

a/ si  $\tau_{k+1}^{l+1}$  est inférieur à  $\tau_{max}$  :

Alors les contraintes et déformations tangentielles sont vraies et la rigidité tangentielle reste égale à  $k_t^0$ .

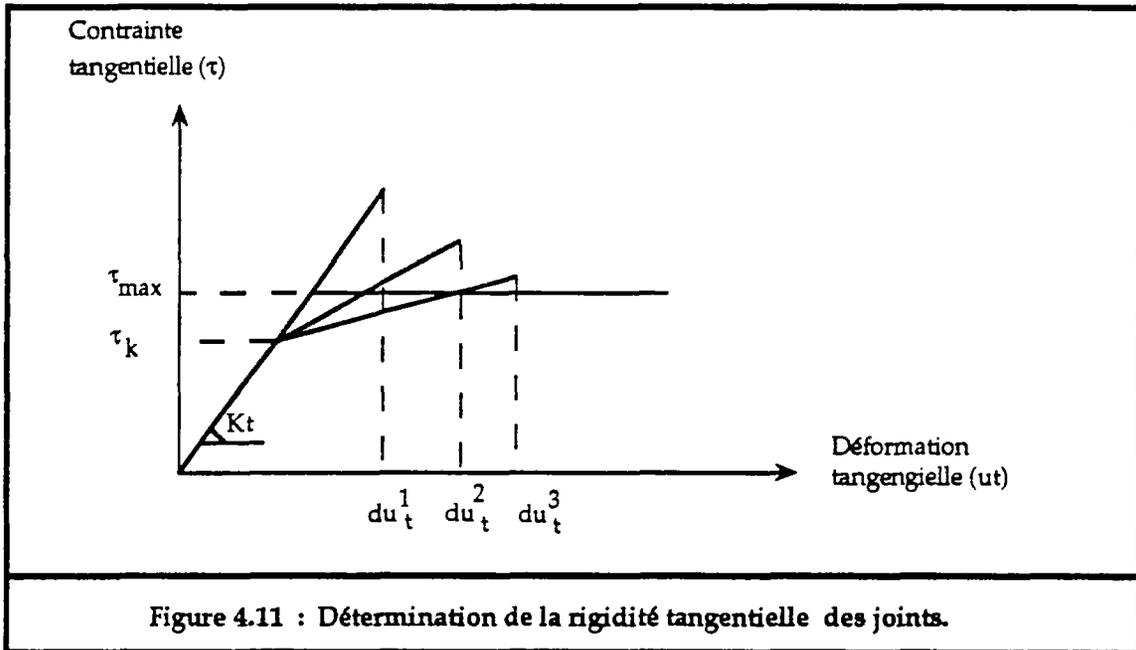
b/ si  $\tau_{k+1}^{l+1}$  est supérieur à  $\tau_{max}$  (fig.4.11) :

Dans ce cas le joint entre en déformation plastique, alors on ramène la contrainte à  $\tau_{max}$  et la nouvelle rigidité tangentielle se calcule par :

$$\tau_{k+1}^{l+1} = \tau_{\max}$$

$$k_t^{l+1} = \frac{(\tau_{\max} - \tau_k)}{du_t}$$

A partir de cette incrémentation, si  $\tau$  est supérieur ou égale à  $\tau_{\max}$ , la rigidité du joint est annulée.



## 7. Chute des blocs :

Certains blocs peuvent subir des grands déplacements qui se traduisent par l'ouverture totale ou par la rentrée en plasticité des déformations tangentielles de leurs joints. Ils influent alors sur l'énergie potentielle totale et le processus itératif ne converge plus.

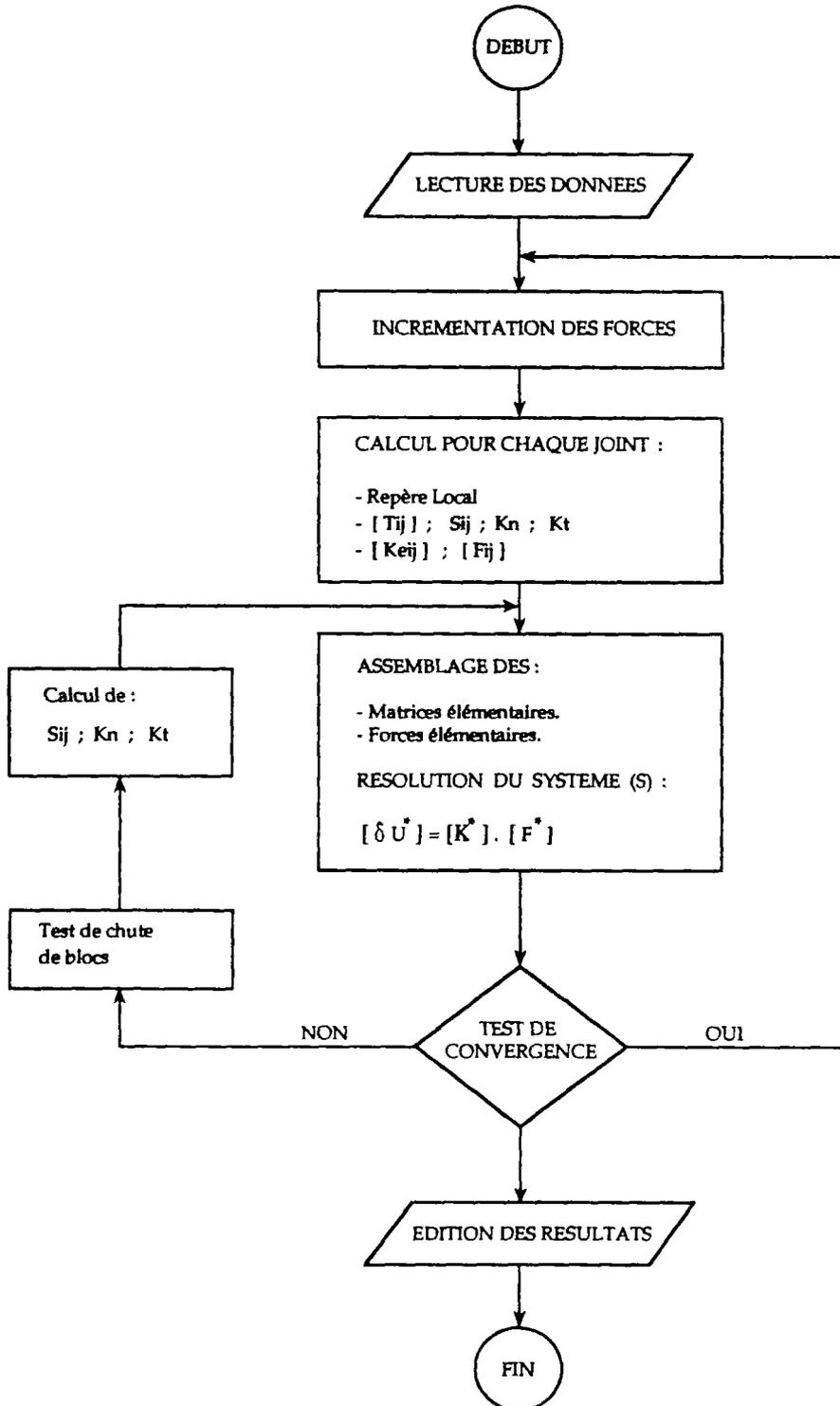
Pour cette raison il faut éliminer ces blocs. On peut considérer qu'ils se détachent de la structure composée de l'ensemble des blocs. On définit alors, à l'avance, l'ensemble  $\mathcal{B}_i$  des blocs qui sont susceptibles de chuter et de se détacher de la structure : par exemple ceux situés sur le flanc d'un talus rocheux ou sur le mur et le toit d'une galerie souterraine.

Au fur et à mesure qu'on élimine ces blocs, d'autres se mettent en position d'avoir un grand déplacement, alors on les introduit dans l'ensemble  $\mathcal{B}_i$ .

Le seuil de déplacement de chute de blocs est fixé soit en fonction de la taille des blocs, représentée par le diamètre moyen de chaque bloc, soit en fonction des résultats des essais de cisaillement des joints, en prenant 5 à 10 fois la limite de déformation élastique.

## 8. L'organigramme du modèle :

L'organigramme du code "BRIG3D" est alors :



Le test de chute de blocs se fait dans le processus itératif à partir d'un certain nombre d'itérations.

## **9. Conclusion :**

Le calcul de stabilité des ouvrages miniers, que ce soit des talus en mine à ciel ouvert ou des galeries souterraines, par la méthodes des blocs rigides permet de rendre compte des déformations générées au niveau des joints à travers l'interaction réciproque des blocs. Ces déformations, qui peuvent devenir importantes et entraîner l'instabilité de l'ouvrage, ne peuvent être mises en évidence que par un tel calcul par rapport aux méthodes classiques.

La méthode des éléments finis, très performante dans les milieux homogènes, devient délicate à utiliser dans les milieux fissurés. D'où la nécessité de développer une autre méthode de calcul qui s'adapte aux milieux constitués par assemblage d'éléments qui interagissent entre eux à travers leurs contacts mutuels. Ce fut l'idée de Cundall en 1971. Depuis, cette méthode n'a cessé de se développer pour modéliser au mieux les milieux rocheux fissurés.

La méthode que nous venons d'exposer ci-dessus présente le seul inconvénient que chaque bloc est supposé interagir avec les mêmes blocs. Or il se peut qu'au cours des déplacements des blocs, il y ait création de nouveaux contacts qui peuvent avoir une influence sur la déformation du massif. Mais dans le cas où la rupture s'obtient pour des déformations assez faibles, cette hypothèse peut être considérée comme peu restrictive.

Le problème qui se pose à ce niveau, c'est qu'il est très difficile et très lourd de rechercher l'existence de nouveaux contacts. Théoriquement, il faut tester tous les blocs deux à deux, et pour chaque couple de blocs il faut tester leurs faces deux à deux aussi. On imagine le temps de calcul nécessaire pour un système de quelques centaines de blocs, alors qu'il faut réaliser ce test pour chaque incrément de forces et pour chaque itération du processus de convergence.

Mais si on peut au départ, dénombrer tous les nouveaux contacts possibles qui pourront se réaliser au cours du chargement du système de blocs, ce problème n'apparaîtra pas.

Finalement, comme nous allons voir au chapitre VI, avec "BRIG3D" nous pouvons résoudre beaucoup de problèmes qui sont liées à la déformation d'un ensemble de blocs agissant entre eux.