

**MODELISATION DE LA  
PROPAGATION  
QUASI-STATIQUE DE  
FISSURES**



## ***III. Table des Matières***

<b><i>III.1. Etude bibliographique</i></b>	<b>88</b>
<b>III.1.1. Critères d'amorçage</b>	<b>88</b>
<b>III.1.2. Critères de bifurcation</b>	<b>89</b>
<b>III.1.3. Critères de stabilité</b>	<b>90</b>
<b>III.1.4. Méthodes numériques utilisées</b>	<b>91</b>
<b><i>III.2. Amorçage d'une fissure</i></b>	<b>94</b>
<b>III.2.1. Les outils numériques nécessaires à la localisation et à l'amorçage d'une fissure</b>	<b>94</b>
<b>III.2.2. Amorçage en contrainte critique</b>	<b>96</b>
<b>III.2.3. Amorçage en endommagement critique</b>	<b>96</b>
<b>III.2.4. Application au compactage de coques</b>	<b>97</b>
<b><i>III.3. Propagation d'une fissure</i></b>	<b>99</b>
<b>III.3.1. Critère de la contrainte normale maximale</b>	<b>100</b>
<b>III.3.2. Critère de la densité d'énergie de déformation minimale</b>	<b>102</b>
<b>III.3.3. Critère du taux de restitution d'énergie maximal</b>	<b>104</b>
<b>III.3.4. Comparaison</b>	<b>105</b>
III.3.4.1. Plaque pré-fissurée de façon oblique – fissure débouchante	105
III.3.4.2. Epreuve trouée pré-fissurée	109
III.3.4.3. Temps de calcul	114
<b>III.3.5. Bilan</b>	<b>115</b>
<b><i>III.4. Applications et développements spécifiques</i></b>	<b>116</b>
<b>III.4.1. Plaque trouée pré-fissurée</b>	<b>116</b>
<b>III.4.2. Poutres en flexion et formation de débris</b>	<b>117</b>
III.4.2.1. Poutre en flexion 3 points	118
III.4.2.2. Poutre en flexion 4 points	118
III.4.2.3. Formation de débris	119
III.4.2.4. Bilan	120
<b>III.4.3. Procédés à fort cisaillement et contact matière-matière</b>	<b>121</b>
III.4.3.1. Usinage	121
III.4.3.2. Découpage de tôles	123
III.4.3.3. Le contact des lèvres d'une fissure	124
<b>III.4.4. Propagation dans les structures multimatériaux</b>	<b>125</b>
III.4.4.1. Mécanique de la rupture de structures multimatériaux	125
III.4.4.2. Epreuve bicouche pré-fissurée	129
III.4.4.3. Propagation dans un composite	132
<b><i>III.5. Conclusion</i></b>	<b>134</b>



## III.1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment la modélisation mécanique d'un milieu fissuré permet, d'une part de caractériser la singularité du champ des contraintes en fond de fissure à travers les facteurs d'intensité des contraintes, et d'autre part d'étudier de façon énergétique le solide fissuré à l'aide du taux de restitution d'énergie. Dans ce chapitre, nous allons voir que ces paramètres gouvernant la fissuration permettent également de prédire l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure.

L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèques au matériau, tels que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure, ou extrinsèques comme l'étendue de cette fissure ou la nature des charges appliquées. Tous ces paramètres doivent être pris en compte dans la simulation numérique, de façon à permettre l'étude de la propagation quasi-statique d'une ou de plusieurs fissures. On pourra alors se poser les questions suivantes : quand la fissure va-t-elle se propager, puis (si le chargement ou la géométrie de la structure n'est pas symétrique) dans quelle direction, et enfin, va-t-on aboutir à une propagation stable ou instable ? Pour répondre à ces questions, on définit respectivement des critères d'amorçage de fissures, des critères de bifurcation, et des critères de stabilité.

### III.1.1. Critères d'amorçage

Ces critères permettent de déterminer à quel moment et à quel endroit la fissure va s'amorcer. Ils sont généralement basés sur une comparaison des paramètres de fissuration ( $K$ ,  $G$ ,  $J$ , ...) à des valeurs critiques de ces paramètres.

Pour une approche locale, et en mode I pur, il y aura amorçage lorsque le paramètre  $K_I$  atteint une valeur critique  $K_{IC}$  appelée **ténacité** du matériau.

De même, au niveau énergétique, Griffith [Griffith 1920] a proposé une valeur limite du taux de restitution d'énergie, appelée **résistance à la fissuration** et notée  $G_C$ . Il y aura alors propagation lorsque  $G$  atteint la valeur critique  $G_C$  qui représente l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces libres en fond de fissure. Remarquons que pour un matériau élastique fragile,  $G_C$  ne dépend que de l'énergie superficielle intrinsèque  $2\gamma$  du matériau :  $G_C=2\gamma$ .

De même que pour  $G$  ou  $K$ , il existe une caractéristique intrinsèque du matériau  $\delta_C$ , qui représente l'ouverture de fissure critique (CTOD) que peut subir le matériau avant qu'il n'y ait propagation.

De son côté, Sih [Sih 1974] a introduit un critère basé sur la densité d'énergie de déformation  $N$  minimale. Après avoir déterminé l'angle  $\theta_0$  de bifurcation, il suppose que la propagation a lieu dans cette direction lorsque  $N_{min}$  atteint une valeur critique  $N_C$  caractéristique du matériau.  $N_C$  peut être reliée à  $K_{IC}$  en se plaçant en mode d'ouverture pur et en identifiant  $N=N_C$  à  $K_I=K_{IC}$ .

Yehia [Yehia et al. 1988] pour sa part, a exprimé le rayon  $r_p$  de la zone plastique confinée en fond de fissure. Puis, il a considéré que la propagation s'effectuait lorsque  $r_p$  atteignait une valeur critique caractéristique du matériau  $r_{pc}$ , appelée rayon critique.

Enfin, il est également possible de localiser l’amorçage à l’aide d’une approche basée sur l’endommagement. Lors d’un chargement, les lois d’endommagement permettent de modéliser la dégradation du matériau et de déterminer le lieu d’endommagement maximal. Il est alors possible de déterminer un endommagement critique, caractéristique au matériau étudié, et au-delà duquel une macro-fissure s’amorce.

### III.1.2. Critères de bifurcation

Lorsque le chargement ou la géométrie d’une structure n’est pas symétrique par rapport à l’axe de la fissure, la rupture se présente en mode mixte, et la fissure ne se propage pas de façon rectiligne. Il est alors nécessaire d’utiliser des critères de bifurcation, afin de déterminer la nouvelle direction de propagation.

- **Critère de la contrainte normale maximale** : Proposé par Erdogan et Sih [Erdogan et al. 1963], ce critère est basé sur les hypothèses suivantes :

↳ la fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte de traction circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale.

↳ l’accroissement de fissure se produit lorsque  $\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta\theta} = K_{IC}$ .

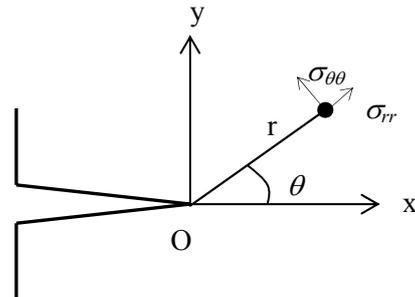


Figure III. 1. Fond de fissure

Finalement, l’angle de bifurcation de la fissure est solution du système :

$$K_I \sin(\theta) + K_{II} (3 \cos(\theta) - 1) = 0 \quad \text{sous les conditions} \quad \begin{cases} K_{II} \sin(\theta/2) < 0 \\ \theta \in ]-\pi; \pi[ \\ K_I > 0 \end{cases}$$

Ce critère permet également de montrer qu’il existe un angle limite, correspondant au cas du mode de cisaillement pur, au-delà duquel la fissure ne peut se propager :  $\theta_0 = \pm 70.54^\circ$ . Cette technique a été étendue aux matériaux anisotropes par Saouma et al. [Saouma et al. 1987].

Sa facilité de mise en œuvre, entièrement basée sur la notion de facteurs d’intensité de contraintes, le rend très utilisé. Il peut cependant paraître discutable dans la mesure où le champ de contraintes locales en fond de fissure est seulement un champ approché. De plus, l’existence d’une zone non élastique en fond de fissure modifie également la répartition de contraintes. Sa précision est donc fortement liée à la finesse du maillage en pointe de fissure, ainsi qu’à la plus ou moins bonne

modélisation de la zone élastoplastique par le code. C'est pourquoi les critères énergétiques, faisant intervenir des grandeurs globales au niveau de la structure, peuvent paraître plus appropriés.

**Remarque :** Il existe également un **critère basé sur la déformation maximale** [Maiti et al. 1984]. La propagation de la fissure se manifeste lorsque la déformation  $\varepsilon_\theta$  atteint une valeur critique  $\varepsilon_{\alpha_c}$  (déterminée en mode d'ouverture pure et reliée à  $K_{Ic}$ ).

- **Critère de la densité d'énergie de déformation minimale :** Dans ce critère énergétique, Sih [Sih et al. 1974] considère que l'énergie de déformation s'oppose à la croissance de la fissuration. Celle-ci cherchera donc à se propager dans la direction où la densité d'énergie de déformation  $N$  est minimale.

L'angle de déviation  $\theta_0$  est alors défini par :  $\left(\frac{\partial N}{\partial \theta}\right)_{\theta_0} = 0$  sous la condition  $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}\right)_{\theta_0} \geq 0$

- **Critère du Taux de restitution d'énergie maximal :** Parmi tous les accroissements virtuels et cinématiquement admissibles, l'accroissement réel est celui qui maximise le taux de restitution d'énergie. En calculant le taux de restitution d'énergie pour différentes directions de propagation éventuelles de fissure, on détermine celle pour laquelle  $G$  est maximal.

- **Comparaison :** Plusieurs études comparatives ont été effectuées sur ces différents critères [Maiti et al. 1984], [Elouard 1993]. Elles montrent une bonne corrélation au niveau de l'angle de déviation et du chargement critique. Maiti montre cependant que les chemins de fissuration instables peuvent différer pour des fissures inclinées et pour des chargements en cisaillement pur.

### III.1.3. Critères de stabilité

Il existe deux types de propagation :

- La **propagation stable** : après son amorçage, la fissure s'arrête, nécessitant plus d'énergie pour reprendre sa propagation<sup>1</sup>. Ce mode de propagation n'est a priori pas dangereux ;
- La **propagation instable** : après son amorçage, la fissure poursuit sa progression en l'absence de toute modification des paramètres de la sollicitation. Cette instabilité conduit alors à la ruine de la structure.

L'analyse de la stabilité de propagation est fondée sur le bilan énergétique :

---

<sup>1</sup> La stabilité de la propagation dépend essentiellement du type de sollicitation. Ainsi, le problème de stabilité sous chargement quasi statique ne se pose, en pratique, que dans le cas d'un chargement imposé ; en déplacement imposé, la propagation de fissure est presque toujours stable.

$$I = W_{ext} + W_e + W_d \quad \text{où} \quad \begin{cases} I \text{ est l'énergie interne du système} \\ W_{ext} \text{ représente le travail des forces extérieures} \\ W_e \text{ est l'énergie de déformation} \\ W_d \text{ est l'énergie dissipée lors d'une extension de fissure} \end{cases}$$

Alors, pour une fissure de longueur  $a$  donnée, et un incrément de propagation  $da$ , la propagation sera

$$\begin{cases} \text{stable si} & \frac{d^2I}{da^2}(a) < 0 \\ \text{instable si} & \frac{d^2I}{da^2}(a) > 0 \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité d'une propagation de fissures, plusieurs méthodes ont été proposées. Parmi ces méthodes, la notion de courbe de résistance revient souvent.

La **courbe de résistance**, ou encore **courbe-R**, traduit l'évolution du taux critique de restitution de l'énergie (ou de  $J$ ) en fonction de la longueur de la fissure. Elle est déterminée de façon expérimentale, et permet de caractériser la propagation stable d'une fissure dans un matériau donné. Pour des matériaux fragiles, cette courbe (peu ou pas utilisée) est réduite à une droite (en déformation plane) puisque dans ce cas le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$ , ou plus précisément la ténacité  $K_{Ic}$ , ne dépend pas de la longueur de fissure (Cf. Annexe C).

La courbe-R, introduite plus particulièrement pour les matériaux ductiles, est une caractéristique intrinsèque du matériau. La condition de rupture fragile  $G \geq 2\gamma$  doit être remplacée par une condition de rupture ductile, prenant en compte le fait que la résistance du milieu fissuré est ici une fonction de la longueur de fissure  $a$  :

$$\begin{cases} G < G_c & \text{pas de propagation} \\ G = G_c \text{ et } \frac{\partial G}{\partial a} < \frac{\partial G_c}{\partial a} & \text{propagation stable} \\ G = G_c \text{ et } \frac{\partial G}{\partial a} \geq \frac{\partial G_c}{\partial a} & \text{propagation instable} \end{cases}$$

De même, Paris et al. [Paris et al. 1979] ont proposés d'étudier la stabilité de la propagation à travers un paramètre  $T$ , appelé **module de déchirement**, qui est la dérivée de l'intégrale  $J$  par rapport à la longueur de la fissure  $a$  (Cf. Annexe C).

### III.1.4. Méthodes numériques utilisées

De nombreuses méthodes ont été proposées et développées pour étudier la propagation d'une fissure : méthode des différences finies, équations intégrales (méthode des éléments frontière [Bush 1999]), puis méthode des éléments finis. Récemment, quelques auteurs ont proposé des méthodes novatrices.

On peut citer par exemple la méthode sans maillage (meshless) « Element-Free Galerkin Method » proposée par Belytschko et al. en 1994, et appliquée à la mécanique de la rupture par la suite [Belytschko et al. 1994]. Dans ces méthodes, l'interpolation est réalisée uniquement à l'aide de nœuds et de la surface de la pièce, ce qui offre l'avantage de propager des fissures sans nécessiter de remaillage. Rashid a également proposé une approche intéressante (Arbitrary Local Mesh Replacement Method [Rashid 1998]), basée sur la méthode des éléments finis, et consistant à superposer deux maillages. Un maillage de la pièce, qui ne prend pas en compte la fissuration, et un maillage circulaire centré sur la pointe de fissure, et qui va se déplacer en même tant qu'elle. Cette méthode s'avère être assez rapide, mais reste pour l'instant confinée aux matériaux élastiques, et pose des problèmes pour l'étude de plusieurs fissures.

La méthode des éléments finis reste finalement la méthode la plus utilisée, car son domaine d'application est beaucoup plus étendu : matériaux à comportement non-linéaire, problèmes de contact, grandes déformations, couplages thermo-mécaniques, etc... De nombreux auteurs l'ont utilisé dans le cadre de la mécanique de la rupture, et on peut distinguer trois catégories principales [Jirásek 1999] :

- Pour les **modèles continus**, le comportement du matériau est décrit par une relation contrainte-déformation. Les méthodes basées sur la notion d'**endommagement** [Gurson 1977], [Rousselier 1987] appartiennent à ces modèles. Des lois, basées sur des paramètres micro-mécaniques du matériau, sont liées à son comportement et permettent de modéliser la fissuration en faisant chuter les propriétés mécaniques dans la zone endommagée. Cependant, cette approche peut conduire à des dégénérescences importantes du maillage en grandes déformations. Les modèles « **smeared crack** », développés spécifiquement pour l'étude de pièces en béton sous tension, sont également basés sur une décomposition de la déformation totale en une partie élastique, et une partie inélastique [Rashid 1968]. Ces deux parties correspondent respectivement à la déformation élastique du matériau non fissuré, et à la déformation inélastique due à la fissuration. La partie élastique est gouvernée par une loi reliant contrainte et déformation élastique, comme la loi de Hooke. La partie inélastique correspond à la déformation due à l'ouverture de micro-fissures, ces dernières étant amorcées lorsque les contraintes atteignent une valeur critique. Ces modèles sont cependant affectés par un blocage en contrainte car une fois la micro-fissure introduite, son orientation est fixée. Les « **rotating crack model** », introduits par Gupta [Gupta et al. 1984], remédient à ce problème en autorisant un réajustement permanent de l'orientation de la fissure en fonction des sollicitations. On peut également citer les « **microplane models** » [Bazant et al. 1988], basés non pas sur des paramètres tensoriels, mais sur les projections des tenseurs (contrainte et déformation) sur des plans définis.
- Dans les **modèles mixtes**, on enrichit la description mécanique des milieux continus par des discontinuités de déplacement correspondant aux fissures macroscopiques. La partie continue du solide est décrite par une loi reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations, tandis que les discontinuités sont introduites à partir de critères d'amorçage et de propagation de fissures, propres à la mécanique de la rupture. Le « **fictitious crack model** » proposé par Hillerborg et al. [Hillerborg et al. 1976] définit une loi de traction-séparation qui traduit la décohéssion progressive le long de la fissure. L'**approche discrète**, quant à elle, consiste à modéliser les discontinuités en

propageant des fissures réelles à l'intérieur du maillage [Elouard 1993], [Červenka 1994], [Bouchard et al. 2000a]. Une telle approche permet de modéliser finement la propagation des fissures, mais nécessite plusieurs remaillages. Certains auteurs ont proposé récemment l'«**embedded crack approach**», consistant à introduire ces discontinuités à l'intérieur même des éléments [Dvorkin et al. 1990].

- Les **modèles discrets** (à ne pas confondre avec l'approche discrète présentée ci-dessus) ne sont pas basés sur une description continue du solide, mais sont plutôt constitués d'assemblages de barres, poutres ou ressorts. Ces entités élémentaires peuvent permettre de modéliser des structures complexes à partir d'éléments simplifiés, ou encore de représenter les liaisons à l'échelle microstructurale du matériau. La rupture est alors prise en compte par la rupture d'une de ces entités élémentaires.

Les outils développés à partir du mailleur de Forge2 Multimatériaux nous ont tout de suite orientés vers l'approche discrète, consistant à modéliser la propagation de la fissure concrètement à l'intérieur du maillage. Cette approche nécessite plusieurs remaillages, mais présente les avantages suivants :

- elle permet de modéliser le **chemin de propagation** d'une ou de plusieurs fissures même en grandes déformations ;
- le fait de remailler souvent la pièce nous permet de conserver des **éléments de bonne qualité** et de ne pas être bloqués par la dégénérescence du maillage comme pour l'approche endommagement ;
- les outils numériques développés autour du mailleur permettent de conserver une **grande précision en pointe de fissure** et donc sur les champs mécaniques calculés à cet endroit, quel que soit le chemin de propagation ;
- elle ne présente pas les problèmes liés au blocage en contrainte.

## III.2. AMORÇAGE D'UNE FISSURE

Comme nous l'avons vu dans le sous-chapitre précédent, les critères d'amorçage sont basés sur des paramètres critiques du matériau tels que la ténacité  $K_{Ic}$ , la résistance à la fissuration  $G_c$  ou encore l'ouverture de fissure critique  $\delta_c$ . Donc pour étudier l'amorçage, il nous faut calculer les FIC, le taux de restitution d'énergie, ou le CTOD. Or tous ces paramètres se calculent lorsqu'une pré-fissure existe. En fait, la plupart des codes de calcul en mécanique de la rupture étudient des pièces pré-fissurées, de façon à ne pas avoir à localiser le lieu d'amorçage de la fissure, mais également à cause des problèmes topologiques liés à la création d'une fissure dans un maillage.

Dans ce sous-chapitre, nous commencerons par déterminer les difficultés liées à la localisation puis à l'amorçage de fissures dans un maillage, et nous présenterons les outils numériques nécessaires pour y parvenir. Puis, nous étudierons un critère de localisation de l'amorçage en contrainte critique et en endommagement critique, avant de présenter un exemple d'application.

### III.2.1. Les outils numériques nécessaires à la localisation et à l'amorçage d'une fissure

En modélisation numérique de la mécanique de la rupture, la phase d'amorçage de fissures est une phase critique dans la mesure où il est difficile de localiser le lieu d'amorçage de la fissure. C'est pourquoi la majorité des codes évitent ce problème en étudiant des pièces pré-fissurées. Les principales difficultés que l'on rencontre sont les suivantes :

- Il est difficile de localiser le lieu exact d'amorçage d'une fissure dans un matériau car ce lieu dépend fortement des **inclusions** et des **micro-défauts** présents dans le matériau. Ces micro-défauts induisent des concentrations de contraintes locales qui provoquent l'apparition de micro-fissures puis de macro-fissures. Ces micro-défauts ne peuvent pas être pris en compte numériquement, du moins aux échelles où l'on se place dans notre travail. Il est donc nécessaire de supposer que le matériau est « parfait », ou d'imposer le lieu d'amorçage en pré-fissurant la pièce.
- L'amorçage d'une fissure dans un maillage entraîne des **modifications topologiques importantes** qui sont rarement supportées par les codes éléments finis. Notre technique de remaillage, présentée au chapitre I, est particulièrement bien adaptée à ce type de modifications puisqu'elle permet l'ajout de plusieurs contours sur lesquels le maillage vient s'appuyer. Ainsi, lorsque l'on connaît le lieu d'amorçage, la direction et la distance de propagation, l'amorçage est effectué en deux étapes :
  - Un contour interne, ouvert et non orienté est ajouté aux autres contours. Ce nouveau contour représente la fissure. Le remaillage est alors activé de façon à avoir un maillage coïncidant sur ce nouveau contour (Figure III.2.a).
  - Un dédoublement des nœuds appartenant à la fissure est effectué sur le nouveau maillage. Ainsi l'ouverture de la fissure est obtenue naturellement grâce aux contraintes locales appliquées aux lèvres de la fissure (Figure III.2.b).

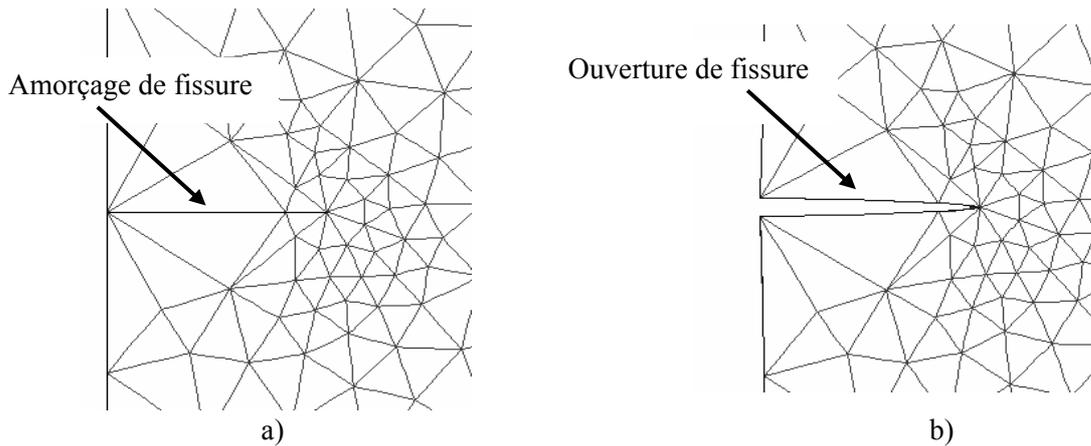


Figure III. 2. Amorçage d'une fissure a) ajout d'un contour – b) dédoublement des nœuds

- Le **temps CPU** peut également être un facteur limitant. En effet, à chaque pas de temps et en chaque nœud du maillage, il faut calculer une grandeur mécanique et la comparer à la grandeur critique correspondant au matériau étudié. Pour réduire ce temps CPU, nous avons envisagé trois cas en fonction du type d'application qui nous intéresse. L'option par défaut consiste à localiser l'amorçage sur la totalité du maillage. Une seconde option, moins coûteuse, consiste à déterminer des zones probables d'amorçage. La localisation de l'amorçage est alors restreinte à ces zones géométriques. Cette option est intéressante pour les applications où l'on peut facilement déterminer les lieux de fortes contraintes ou de forts endommagements (singularité, etc...). Enfin, la dernière option s'applique aux pièces pré-fissurées où l'on connaît le lieu d'amorçage et qui ne nécessite donc pas de recherche sur le reste de la pièce. La comparaison des paramètres mécaniques aux paramètres critiques du matériau peut alors s'effectuer uniquement en un point.

La technique ainsi proposée permet de propager une fissure de façon tout à fait automatique dans un maillage. Comme nous le verrons par la suite, certains critères déterminent la direction de propagation à partir des champs mécaniques locaux en pointe de fissure. Il est donc nécessaire que le maillage soit fin dans cette zone. Par contre, lorsque la fissure se propage, il est souhaitable de déraffiner le maillage dans les zones précédemment raffinées pour ne pas alourdir les calculs. Pour atteindre cet objectif, nous avons introduit un raffinement évolutif qui suit la pointe de fissure [Bouchard et al. 2000a], [Fourment et al. 2000] (Figure III.3.).

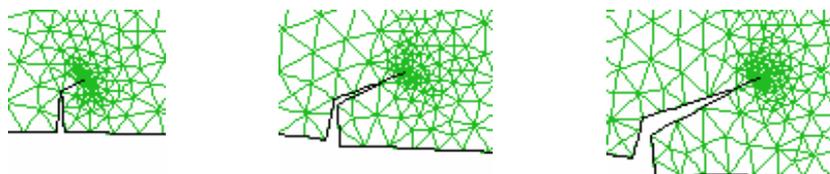


Figure III. 3. Raffinement évolutif en pointe de fissure

Pour étudier l'amorçage d'une pièce non pré-fissurée, il est impossible de se baser sur les FIC ou sur le taux de restitution d'énergie. Dans ce cas, nous proposons ici deux façons de déceler le lieu d'amorçage : la contrainte critique et l'endommagement critique.

### III.2.2. Amorçage en contrainte critique

Dans une simulation numérique, les contraintes sont calculées à chaque pas de temps (ou incrément de charge), et en chaque point d'intégration. Nous proposons ici de localiser l'amorçage en étudiant les contraintes maximales. Pour cela, nous évaluons à chaque pas de temps, et dans la zone d'amorçage définie (Cf. III.2.1.), la valeur de la contrainte maximale en chaque point d'intégration voisin de la frontière. Puis, nous comparons les valeurs obtenues à une contrainte critique caractéristique du matériau. Lorsque cette valeur critique est dépassée, une fissure est amorcée perpendiculairement à la contrainte maximale en ce point d'intégration. La détermination de cette direction est explicitée avec plus de précision au sous-chapitre III.3.1.

A chaque incrément de charge, nous n'autorisons qu'un seul amorçage de fissure. Cet amorçage apparaît au nœud ayant la plus forte contrainte. Cela permet d'éviter l'amorçage de plusieurs fissures dans une zone fortement contrainte à un instant donné. A l'incrément suivant, les contraintes se concentrent à la pointe de la fissure amorcée, si bien que l'on n'observe pas les autres amorçages initialement prévus dans cette zone.

Pour l'instant, nous n'étudions pas les amorçages de fissures internes (au sein même du matériau), mais uniquement les fissures débouchantes. C'est pourquoi les comparaisons des contraintes maximales s'effectuent uniquement sur des éléments attenants à la frontière du maillage.

Ce critère de localisation, facile à implémenter, donne de bons résultats pour des matériaux plutôt fragiles. Pour des matériaux plus ductiles, l'utilisation de lois d'endommagement serait certainement nécessaire.

### III.2.3. Amorçage en endommagement critique

Certains auteurs ont également proposé de coupler les approches micro et macro-mécanique [Könke 1995]. Cette méthode consiste à utiliser une loi d'endommagement pour localiser le lieu d'amorçage et la direction de propagation de la fissure, puis à propager la fissure à l'aide d'outils de mécanique de la rupture.

Une telle méthode nécessite à la fois de maîtriser les modèles d'endommagements et d'être capable de propager une fissure dans un maillage. On définit un paramètre d'endommagement  $D$ , qui croît avec la déformation plastique du matériau. Lorsque  $D$  atteint une valeur critique  $D_c$ , caractéristique du matériau, on amorce la fissure.

Récemment, Brokken [Brokken 1999] et Goijaerts [Goijaerts 1999] ont appliqué cette approche au découpage de tôles en utilisant le critère d'endommagement d'Oyane [Oyane et al. 1980]. Ce modèle, découplé<sup>2</sup>, définit la variable d'endommagement selon l'intégrale suivante :

$$D = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} \left( 1 + A \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right) d\bar{\varepsilon}^p$$

---

<sup>2</sup> L'endommagement du matériau ne modifie pas ses propriétés mécaniques.

où  $\bar{\varepsilon}^p$  représente la déformation plastique,  $\sigma_{eq}$  et  $\sigma_m$  sont respectivement la contrainte équivalente et la composante hydrostatique de la contrainte, et où  $A$  est un paramètre matériau à déterminer expérimentalement.

Cette approche est séduisante car elle propose d'utiliser les avantages des approches micro et macro-mécanique. Cependant, il est parfois difficile de sélectionner un modèle d'endommagement approprié, puis d'identifier les paramètres matériaux pour ce modèle.

#### III.2.4. Application au compactage de coques

Nous proposons ici un exemple d'application sur une pièce sans pré-fissure. Nous étudions le compactage d'une coque cylindrique, écrasée selon sa génératrice (Figure III.4.). Cet essai, proche de l'essai sur anneau proposé par Pineau [Bouyne 1995], présente l'avantage de permettre l'étude de l'amorçage et de la propagation fragile d'une fissure.

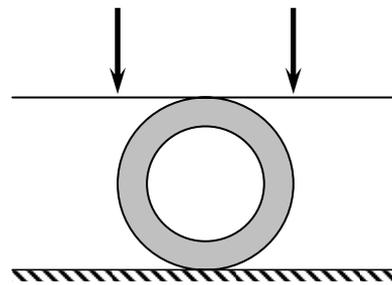


Figure III. 4. Compactage d'une coque horizontale

La recherche du lieu d'amorçage de fissure est effectuée sur la totalité de la pièce. Une contrainte critique, déterminée de façon expérimentale, est utilisée pour localiser l'amorçage (Figure III.5.).

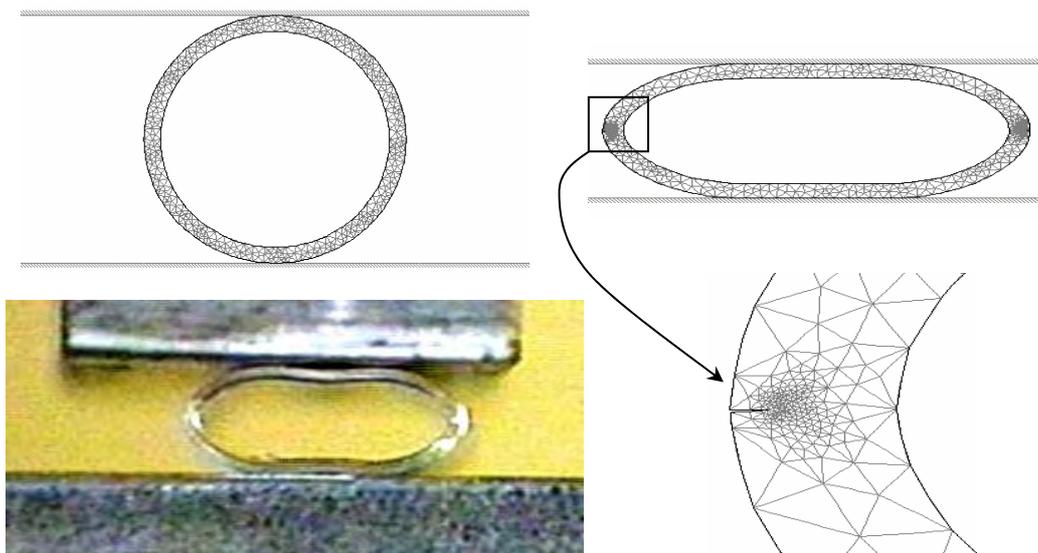
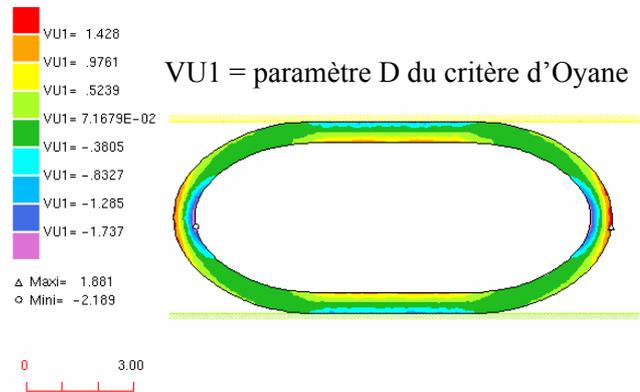


Figure III. 5 Localisation de l'amorçage lors de la simulation numérique de compactage d'une coque

Les résultats numériques sont en accord avec l'expérience puisque deux fissures s'amorcent simultanément sur les parties externes latérales de la coque. L'amorçage en contrainte critique apparaît donc comme étant un moyen simple et efficace pour localiser l'amorçage sur des pièces non pré-fissurées, du moins pour nos exemples.

Le critère d'Oyane a également été implémenté dans Forge2 Multimatériaux. Nous ne connaissons pas la valeur critique de l'endommagement pour notre matériau, mais nous pouvons repérer les zones où l'endommagement  $D$  est maximum (Figure III.6). Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus avec l'amorçage en contrainte critique, puisque les valeurs maximums de  $D$  sont repérées sur les parois latérales externes du tube.



**Figure III. 6. Endommagement selon le critère d'Oyane pour le compactage d'un tube**

### III.3. PROPAGATION D'UNE FISSURE

Une fois amorcée, la fissure peut continuer à se propager. Lorsque la géométrie ou le chargement ne sont pas symétriques, la fissure ne se propage pas de façon rectiligne, et il est nécessaire de déterminer les directions de propagation des fissures. De nombreux critères ont été proposés pour déterminer l'angle de bifurcation d'une fissure [Bouchard et al. 2000b]. Une fois cet angle déterminé, on propage la fissure dans le maillage sur une certaine distance  $\Delta a$ . Plus cette distance est petite, et plus on se rapproche de la solution exacte. Cependant, d'un point de vue numérique, il est nécessaire de déterminer cette distance de propagation.

Cela peut être fait en exprimant la vitesse de propagation<sup>3</sup> de la fissure  $\dot{a}$  en fonction du taux de restitution d'énergie [Elouard 1993]. Si  $\dot{G}$  est la dérivée du taux de restitution d'énergie, on a :

$$\begin{cases} \text{si } G < G_C & \text{on a } \dot{a} = 0 \\ \text{si } G = G_C & \text{on a } \dot{a} > 0 \end{cases} \quad \text{d'où la relation } \dot{G}\dot{a} = 0$$

En se rappelant la relation entre  $G$  et la dérivée de l'énergie potentielle  $W_p$ , on obtient l'expression de la vitesse de propagation :

$$\dot{a} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 W_p}{\partial a \partial u} \dot{u} \\ - \frac{\partial^2 W_p}{\partial a^2} \end{array} \right]^+ = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} \\ - \frac{\partial G}{\partial a} \end{array} \right]^+$$

où  $u$  est le déplacement,  $\dot{u}$  la vitesse, et où la notation  $[.]^+$  désigne la partie positive de l'expression. Cependant cette méthode nécessite le calcul de la dérivée du taux de restitution d'énergie, ce qui est assez complexe.

Il est possible également de définir un critère empirique, basé sur la différence du paramètre étudié (par exemple  $G$ ) par rapport au paramètre critique ( $G_c$ ). Plus cette différence sera élevée, et plus la distance de propagation sera grande.

Mais la plupart des auteurs préfèrent définir  $\Delta a$  comme étant un paramètre utilisateur, petit de préférence. D'après Červenka [Červenka 1994], ce paramètre ne doit pas excéder  $L/10$ , où  $L$  est la dimension caractéristique de la pièce étudiée. Pour notre part,  $\Delta a$  vaut une à trois fois la taille de maille en pointe de fissure, selon que l'on privilégie la précision ou le temps de calcul.

---

<sup>3</sup> Le temps étant une variable fictive de notre calcul, cette vitesse de propagation est utilisée par rapport à l'incrément de charge ou plutôt pour des propagations dynamiques.

Lorsque l'on étudie la propagation de plusieurs fissures, il peut être nécessaire (dans les cas non symétriques) de différencier les distances de propagation de chaque fissure. Pour cela, une méthode [Wang 1994] consiste à propager les fissures les unes après les autres. A chaque incrément :

- on calcule les facteurs d'intensité de contraintes (respectivement le taux de restitution d'énergie) pour chaque fissure ;
- on les compare à la ténacité  $K_c$  (respectivement la résistance à la fissuration  $G_c$ ) du matériau ;
- la fissure ayant le  $K_i$  maximal,  $K_i > K_c$  (resp.  $G_i, G_i > G_c$ ) est propagée. Il est possible d'en propager plusieurs à la fois.

Dans les applications complètement symétriques, on peut propager les fissures de la même distance à chaque incrément.

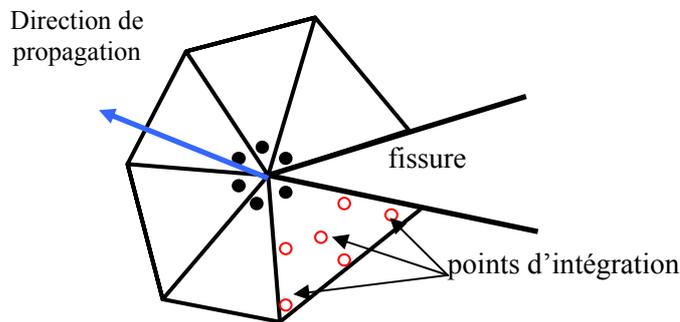
Nous présentons ici un critère local, basé sur le champ de contraintes en pointe de fissure, et deux critères énergétiques, basés sur la densité d'énergie de déformation et le taux de restitution d'énergie. Puis, nous comparons les chemins de propagation obtenus par les trois critères sur différents exemples.

### III.3.1. Critère de la contrainte normale maximale

Le critère de la contrainte normale maximale (ou critère de la contrainte circonférentielle maximale), introduit par Erdogan et Sih [Erdogan et al. 1963] est un critère local, basé sur la connaissance du champ des contraintes en pointe de fissure. Ce critère, présenté au §III.1.2., est l'un des plus utilisés. Cependant, la façon de l'implémenter conditionne fortement sa précision (Cf. Annexe D). En effet, le calcul de la direction de propagation peut être basé :

- soit sur les **contraintes principales** au voisinage de la pointe de fissure :
  - on repère les points d'intégration les plus proches de la pointe de fissure (Figure III.7.). Les contraintes étant calculées directement aux points d'intégration, c'est en ces points qu'elles seront les plus précises ;
  - pour chacun d'eux, on calcule les valeurs propres et vecteurs propres associés du tenseur des contraintes ;
  - le vecteur propre associé à la valeur propre maximale fournit la direction principale du champ de contraintes pour le point d'intégration traité. La fissure est appelée à se propager perpendiculairement à cette direction ;
  - la direction de propagation finale est obtenue par une moyenne pondérée (par rapport à la contrainte principale maximale et la distance à la pointe de fissure) de chacune des directions obtenues pour les différents points d'intégration.
- soit sur la **contrainte circonférentielle**  $\sigma_{\theta\theta}$  maximale :
  - on repère les points d'intégration les plus proches de la pointe de fissure (Figure III.7.) ;
  - pour chacun de ces points, on calcule la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  ;
  - on propage la fissure vers le point d'intégration pour lequel  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale.

Cette dernière technique présente cependant l'inconvénient de dépendre fortement de la finesse du maillage en pointe de fissure. Il est alors plus intéressant de faire une moyenne pondérée (par la valeur de  $\sigma_{\theta\theta}$ ) de deux ou trois directions correspondant aux valeurs maximales de  $\sigma_{\theta\theta}$  (Cf Annexe D).



**Figure III. 7. Détermination de la direction de propagation pour le critère de la contrainte normale maximale**

Enfin, une erreur fréquemment commise consiste à considérer que lorsque l'on se trouve au point d'intégration pour lequel la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale, la direction perpendiculaire à la contrainte principale maximale est confondue avec la direction correspondant à  $\sigma_{\theta\theta}$  maximale. On détermine alors la direction de propagation comme étant la direction perpendiculaire à la contrainte principale maximale au point d'intégration associé à  $\sigma_{\theta\theta}$  maximale. On montre dans l'Annexe D que cela peut s'avérer imprécis, dans la mesure où l'évaluation de  $\sigma_{\theta\theta}$  est réalisée de façon discrète (et non continue) en plusieurs points d'intégration. La valeur maximale de  $\sigma_{\theta\theta}$  au point d'intégration ainsi déterminé ne correspond donc pas forcément à la valeur maximale de la courbe  $\sigma_{\theta\theta}(\theta)$  continue. Dans ces conditions, la direction orthogonale à la contrainte principale maximale en ce point ne correspond pas à la bonne direction de propagation.

Pour une comparaison sur les précisions obtenues avec ces différentes techniques d'implémentation, le lecteur pourra se référer à l'Annexe D. Dans la suite de l'étude, nous utilisons la méthode basée sur les contraintes principales maximales calculées et moyennées en chacun des points d'intégration adjacents à la pointe de fissure.

Le critère est donc basé uniquement sur les contraintes locales à la pointe de fissure. La précision en pointe de fissure est donc primordiale, et l'utilisation d'un maillage concentrique et raffiné est indispensable pour prédire correctement la direction de propagation de la fissure. Notons également que ce critère, développé initialement en mécanique linéaire de la rupture, peut également être utilisé en mécanique non linéaire de la rupture [Bocca et al. 1991], [Baouch 1998].

Une propagation inter-élément a aussi été implémentée. Cette technique consiste à calculer la direction de propagation de la même façon, puis à choisir l'arête la plus proche de cette direction. On n'introduit pas alors de nouveau contour, et on se contente juste de doubler les nœuds de l'arête correspondante. Cette technique, présentée dans [Bouchard et al. 2000a] présente l'avantage de ne pas nécessiter de remaillages, mais elle comporte cependant plusieurs inconvénients :

- la propagation de la fissure est dépendante du maillage ;
- il est impossible de créer une rosette d'éléments en pointe de fissure, et on est donc parfois confrontés à des maillages grossiers en pointe de fissure.

Cependant, lorsqu'une grande précision sur le chemin de propagation n'est pas nécessaire, cette méthode s'avère intéressante et rapide.

### III.3.2. Critère de la densité d'énergie de déformation minimale

L'inconvénient des critères locaux tels que le critère de la contrainte normale maximale, est que notre connaissance des champs mécaniques au voisinage immédiat de la pointe de fissure est parfois approximative. Il pourrait être intéressant de se placer un peu plus loin du fond de fissure pour calculer la direction de propagation. Sih considère que l'énergie de déformation s'oppose à la croissance de la fissuration [Sih et al. 1974]. La fissure s'orientera donc dans la direction pour laquelle cette énergie est minimale.

Soit  $W_e$  l'énergie de déformation, qui peut se décomposer en une énergie de déformation volumique  $W_v$  (dilatation, contraction) et une énergie de distorsion  $W_d$  (cisaillement) :

$$\begin{cases} W_v = \frac{1}{3} \int_{\Omega} Tr(\sigma) Tr(\varepsilon) d\Omega \\ W_d = \int_{\Omega} (s : e) d\Omega \end{cases}$$

où  $s$  et  $e$  sont respectivement les parties déviatoriques du tenseur des contraintes  $\sigma$  et des déformations  $\varepsilon$ .

Soit  $N$  la densité d'énergie de déformation :  $N = \left( \frac{dW_e}{dV} \right)$ .

$N$  est proportionnelle au carré d'une contrainte, et le champ des contraintes présente une singularité en  $1/\sqrt{r}$  en pointe de fissure. La densité d'énergie de déformation est donc singulière en  $1/r$ ,  $r$  représentant la distance à la pointe de fissure.

Pour éviter cette singularité, on introduit le **facteur de densité d'énergie de déformation**  $S = r.N$  qui reste borné, même lorsque  $r$  tend vers 0.

Nous utilisons deux méthodes pour calculer ce paramètre  $S$  :

- **Formulation analytique** : cette formulation consiste à exprimer la densité d'énergie de déformation en fonction des facteurs d'intensité des contraintes ou du champ des contraintes.

$$S = r N = r \left( \frac{1+\nu}{2E} \right) \left[ \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + 2\sigma_{12}^2 \right]$$

Il est donc possible de calculer  $S$  en chaque point d'intégration. De la même façon, Yehia et Shephard [Yehia et al. 1988] décomposent la densité d'énergie de déformation en fonction des facteurs d'intensité des contraintes et de l'angle  $\theta$  par rapport à la pointe de fissure.

Ce retour à l'approche locale permet d'exprimer explicitement la densité d'énergie de déformation. Cependant, pour profiter de l'intérêt d'un tel critère, il est conseillé d'utiliser uniquement des grandeurs globales.

- **Formulation numérique** : à chaque pas de calcul, et en chaque point d'intégration, le logiciel calcule la puissance de déformation  $P_\varepsilon$ . En intégrant cette puissance de déformation sur le temps, nous avons directement accès à l'énergie de déformation en chaque point d'intégration du

$$\text{maillage : } W_\varepsilon = \int_0^t P_\varepsilon dt, \text{ puis à la densité d'énergie de déformation } N.$$

Ces deux formulations nous permettent de calculer le paramètre  $N$ . Il nous suffit alors de déterminer l'angle  $\theta$  pour lequel cette densité d'énergie de déformation est minimale. Pour cela, nous proposons de nous servir de la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure définie au §II.3.1. Les éléments présents dans cette couronne donnent une bonne répartition angulaire  $\theta$  de la direction éventuelle de propagation de fissure. Pour chaque élément de la couronne d'intégration se trouvant dans le demi-plan de propagation, on calcule la densité d'énergie de déformation  $N$  en chaque point d'intégration. Puis on en fait une moyenne pour chacun des éléments. Il est alors possible de tracer la courbe  $N(\theta)$  pour en étudier le minimum (Figure III.8.).

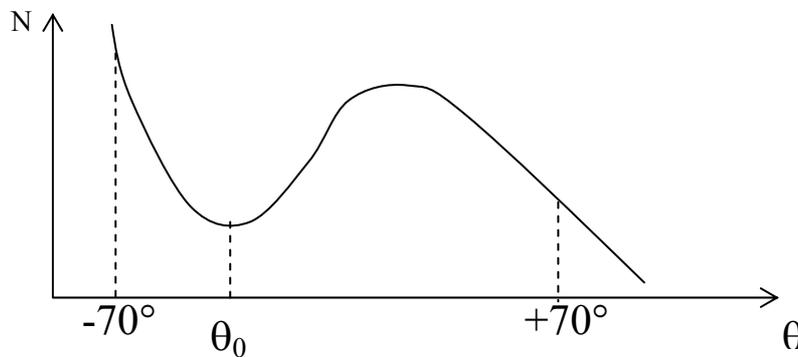


Figure III. 8. Densité d'énergie de déformation en fonction de l'angle  $\theta$

Il faut faire attention lors du calcul de  $N_{min}$ , car il s'agit du minimum local, c'est à dire de l'angle  $\theta_0$

$$\text{tel que : } \begin{cases} \left( \frac{\partial N}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} \geq 0 \end{cases} .$$

Le minimum global, bien souvent différent du minimum local (Figure III.8.), conduirait à des directions de propagation erronées, qui de plus pourraient ne pas appartenir à l'intervalle de propagation possible de la fissure  $[-70,54^\circ ; 70,54^\circ]$ .

La précision du calcul est liée au nombre d'éléments que l'on met dans la couronne d'intégration. Plus il y aura d'éléments, et moins il y aura d'écart entre chaque direction probable de propagation.

### III.3.3. Critère du taux de restitution d'énergie maximal

Tout comme pour le critère précédent, on s'éloigne du fond de fissure pour éviter les perturbations dues à la singularité, et on calcule le taux de restitution d'énergie sur la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure.

Nous avons vu au §II.2.4.4. qu'il existait de nombreuses méthodes de calcul du taux de restitution d'énergie. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode  $G\theta$  [Destuynder et al. 1983] qui est à la fois précise, rapide et facilement généralisable.

Selon le critère, la fissure se propagera dans la direction qui maximisera le taux de restitution

$$\text{d'énergie : } \begin{cases} \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_0} \leq 0 \end{cases}$$

Ce critère devrait nécessiter de faire un calcul dans chaque direction afin de déterminer celle pour laquelle le taux de restitution d'énergie est maximal. Pour éviter ce calcul fastidieux, nous avons utilisé les possibilités de la méthode  $G\theta$ . Le champ vectoriel  $\theta$  défini dans la méthode  $G\theta$  représente un champ virtuel cinématiquement admissible de la propagation de la fissure (§II.4.1.). Pour le calcul de  $G$ , ce champ virtuel est normalement orthogonal au front de fissure. Pour notre part, nous avons fait varier l'angle  $\theta$  entre  $-70.54^\circ$  et  $+70.54^\circ$  avec un pas de  $10^\circ$ ,  $5^\circ$  ou  $1^\circ$  et nous avons calculé le taux de restitution d'énergie pour chacun de ces angles. La courbe représentant  $G$  en fonction de  $\theta$  est très régulière (croissante puis décroissante), et permet donc facilement de calculer l'angle  $\theta_0$  qui maximise  $G$  (Figure III.9.) :

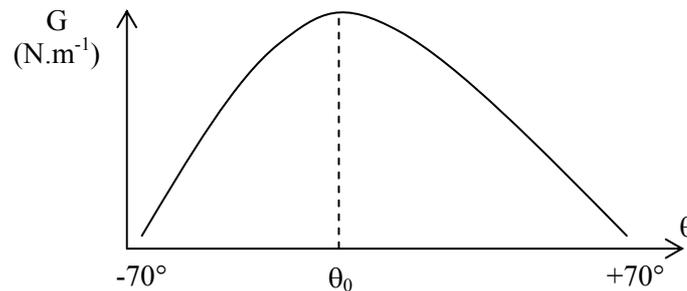


Figure III. 9. Courbe  $G(\theta)$  pour le calcul de la direction de propagation

La méthode  $G\theta$ , comme la plupart des méthodes d'intégrales de contour ou de surface pour le calcul de  $G$ , peut également être utilisée pour des matériaux élastoplastiques. Cependant, ces méthodes sont basées sur l'analogie entre le comportement élastoplastique et le comportement élastique non-linéaire (§ II.2.4.2.). Cette analogie n'est justifiée que lorsqu'il n'y a pas de déchargement. Or une propagation

de fissure correspond à un déchargement local en pointe de fissure. Par conséquent, lorsque  $G$  est calculé par une méthode intégrale, le critère du taux de restitution d'énergie maximal n'est valable, en élastoplasticité, que pour des fissures immobiles. Autrement dit, on peut prévoir la direction de propagation d'une fissure grâce au calcul de  $G$  ; cependant, le fait de la propager concrètement dans le maillage modifie le champ mécanique avoisinant la pointe de fissure de telle sorte à ce que l'on ne puisse plus faire l'analogie entre le comportement élastoplastique et le comportement élastique linéaire. Sans cette analogie, le calcul de  $G$  à l'aide des méthodes d'intégrale de contour ou de surface devient erroné.

### III.3.4. Comparaison

Les trois critères présentés précédemment ont été implémentés dans le code FORGE2 Multimatériaux [Bouchard et al. 2000b], et nous allons les illustrer ici sur des exemples d'applications suffisamment variés. Pour chacun de ces exemples, nous comparerons :

- le critère de la Contrainte Normale Maximale **CNM** ;
- le critère du Taux de Restitution d'Energie Maximal **TREM** ;
- le critère de la Densité d'Energie de Déformation minimale analytique **DEDma** et numérique **DEDmn**.

Pour chacun des exemples qui suivront, le matériau sera considéré purement élastique, et aura les caractéristiques suivantes :

- module d'Young  $E = 98000$  MPa ;
- coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

#### III.3.4.1. Plaque pré-fissurée de façon oblique – fissure débouchante

Il s'agit d'un essai de traction verticale sur une plaque carrée pré-fissurée de façon oblique :

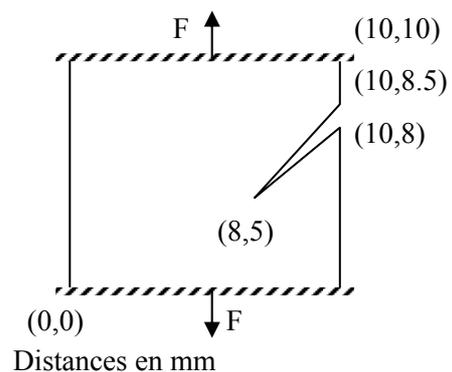


Figure III. 10. Plaque carrée pré-fissurée soumise à un essai de traction

- *Critère de la contrainte normale maximale*

Dans cet exemple, comme dans le suivant, le critère CNM est basé sur les contraintes principales maximales aux différents points d'intégration (Cf. §III.3.1). L'étude comparative par rapport aux différentes façons d'implémenter ce critère est proposée en Annexe D.

La distance de propagation correspond à trois fois la taille de maille en pointe de fissure. Cette distance sera la même pour les trois critères.

Comme attendu, la fissure se propage horizontalement (Figure III.11.), selon le mode I, et donc perpendiculaire à la contrainte maximale qui est verticale sur un tel essai. Le chemin de propagation est très régulier, et le raffinement évolutif permet de conserver une bonne précision en pointe de fissure.

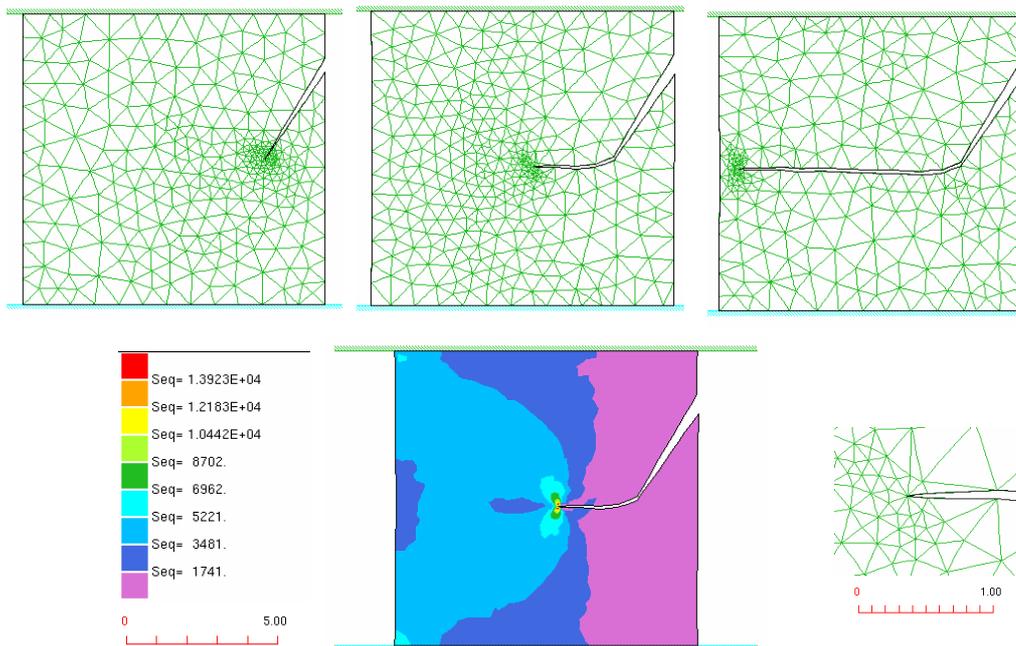


Figure III. 11. Propagation d'une fissure dans une plaque pré-fissurée, selon le critère CNM

- *Critère de la densité d'énergie de déformation minimale*

Pour ce critère, la précision est fortement liée au nombre d'éléments présents dans la couronne d'intégration entourant la pointe de fissure. La densité d'énergie de déformation est calculée pour chaque élément de cette couronne, puis le minimum est déterminé à l'aide de la courbe  $N(\theta)$ . Donc plus on aura d'éléments, plus l'allure de la courbe  $N(\theta)$  sera précise et plus le choix de directions possibles sera étendu.

Cependant, il apparaît une petite différence, lors du calcul de  $N$ , entre les éléments contigus à la partie interne de la couronne (*int* sur la figure III.12.a) et ceux contigus à la partie externe (*ext* sur la figure III.12.a). Ce léger écart, que l'on peut observer sur la figure III.12.b, rend la détermination du minimum local difficile.

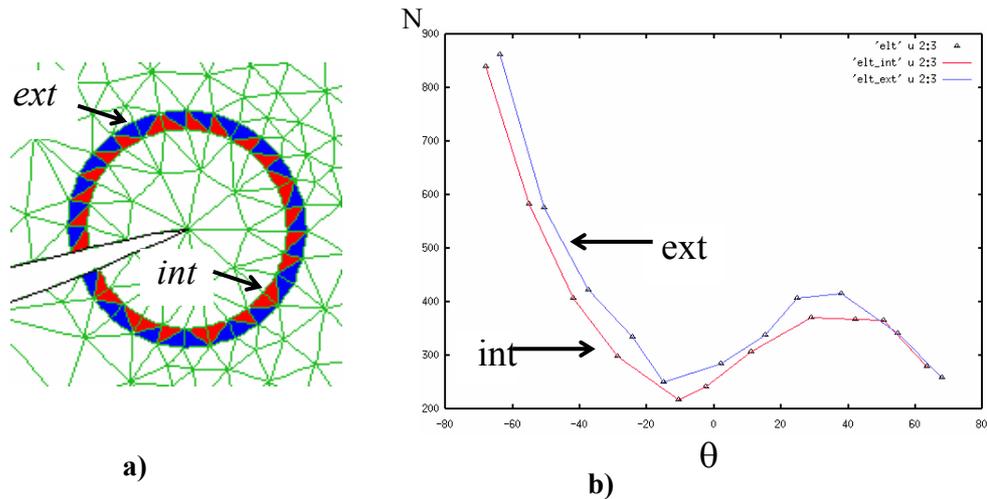


Figure III. 12. a) couronne d'éléments – b) courbe  $N(\theta)$  pour le critère DEDm

Pour illustrer cette remarque, nous avons appliqué le critère DEDma à notre exemple d'application, en prenant en compte tous les éléments de la couronne d'intégration. Le chemin de propagation (Figure III.13.) est globalement identique, mais il n'est pas très régulier. Si cela n'a pas d'incidence sur un exemple aussi simple, nous verrons que cela devient plus problématique lorsque nous étudions des exemples dont la géométrie ou le chargement sont plus complexes.

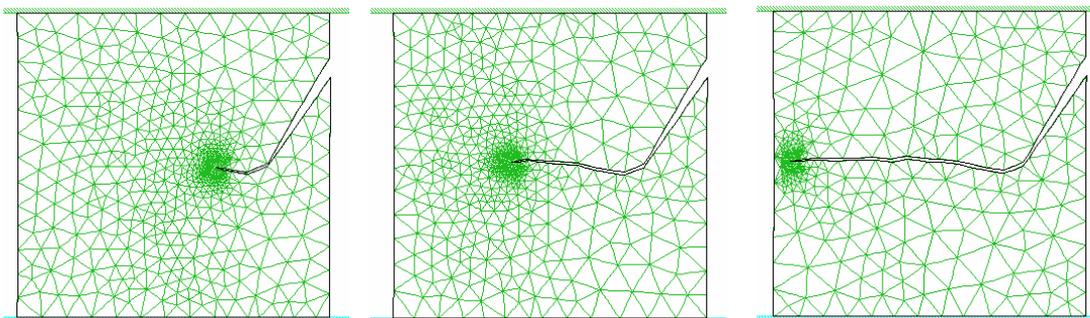


Figure III. 13. Chemin de propagation à partir du critère DEDma

C'est pourquoi il est recommandé de différencier les valeurs provenant des éléments internes, et celles provenant des éléments externes de la couronne. Dans la suite, nous effectuerons les calculs uniquement sur les éléments internes de la couronne.

Enfin, pour avoir plus de précision quant à la position exacte du minimum, nous sélectionnons le minimum local ainsi que ses deux voisins. L'angle de propagation  $\theta_0$  est alors déterminé en recherchant le minimum de la parabole passant par ces 3 points. La figure III.14.a montre le chemin de propagation obtenu avec le critère DEDmn couplé à la méthode de la parabole ainsi définie. La propagation est cette fois-ci tout à fait régulière. Nous pouvons également observer la concentration de l'énergie de déformation sur la figure III.14.b, ainsi que la valeur minimale obtenue pour la direction horizontale.

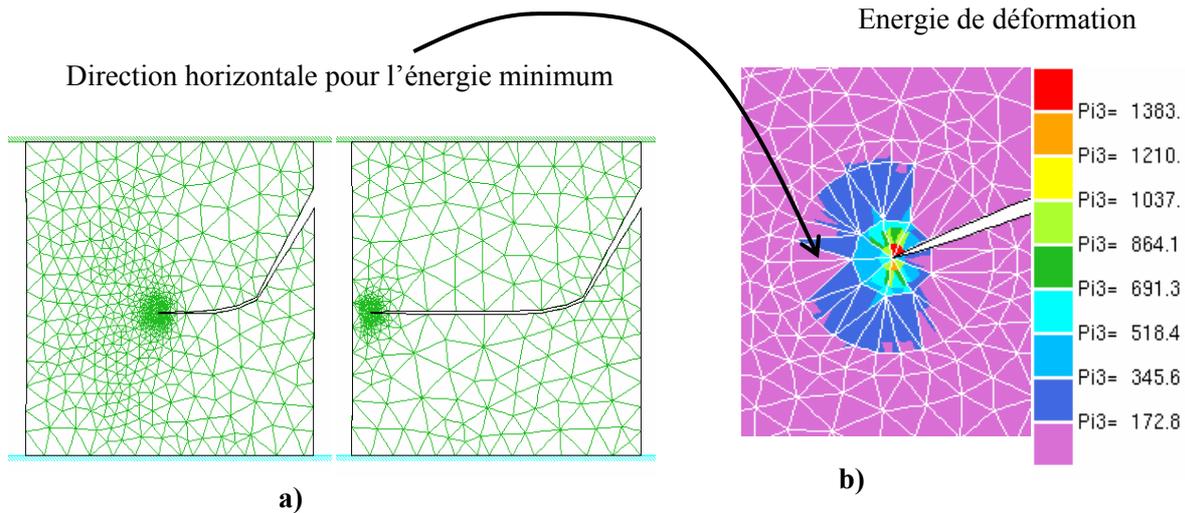


Figure III. 14. a) chemin de propagation avec le critère DEDmn – b) énergie de déformation

La formulation numérique du critère est donc plus précise que la formulation analytique. Ce résultat était prévisible, puisque la formulation analytique utilise justement le champ de contrainte local dont on voulait s'affranchir en passant à un critère énergétique. De plus, le découplage des éléments internes et externes, ainsi que la détermination du minimum par une parabole sont des outils indispensables pour une bonne précision sur la trajectoire de la fissure.

- *Critère du taux de restitution d'énergie maximal*

Si ce critère utilise également la couronne d'intégration comme le critère DEDm, il est cependant insensible au nombre d'éléments qui la constitue. Cela est dû essentiellement à la grande précision de la méthode  $G\theta$  utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie. La précision du calcul dépend par contre du nombre de directions pour lesquelles nous allons calculer le taux de restitution d'énergie. La figure III.15. représente la propagation de la fissure pour un balayage de  $10^\circ$  (a), de  $1^\circ$  (b) et la comparaison des deux trajectoires (c).

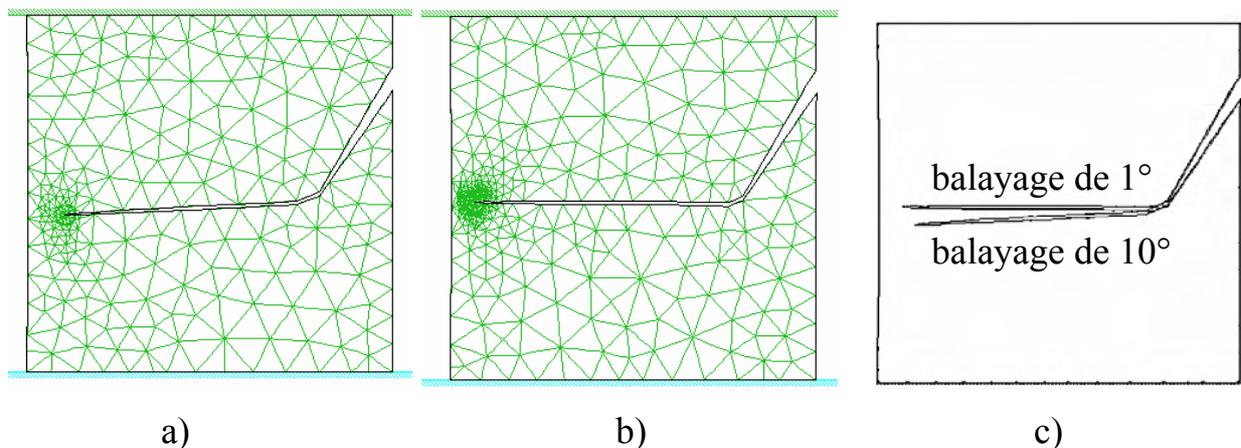


Figure III. 15. Critère TREM pour un balayage de  $10^\circ$  (a) de  $1^\circ$  (b) et comparaison des trajectoires (c)

La fissure se réoriente bien suivant le mode d'ouverture pure comme pour les deux autres critères. Cependant la trajectoire obtenue pour un balayage de  $10^\circ$  n'est pas tout à fait horizontale. Cela vient du fait qu'une fois amorcée, la seule possibilité pour que la fissure se réoriente horizontalement serait qu'elle bifurque de  $10^\circ$ , ce qui est trop dans ce cas précis. Donc un petit écart dans le premier incrément de propagation peut entraîner une différence non négligeable sur la trajectoire finale de la fissure.

Cependant, la courbe  $G(\theta)$  (Figure III.16.) est bien plus régulière que la courbe  $N(\theta)$ , et il est donc plus facile de calculer le maximum avec précision. La méthode de la parabole peut encore être utilisée et donne de bons résultats, même pour un balayage de  $10^\circ$ .

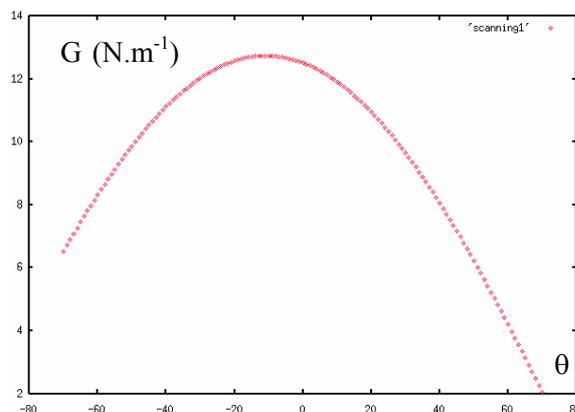


Figure III. 16. Courbe  $G(\theta)$  pour le critère TREM

- **Bilan**

Les trois critères donnent donc de bons résultats sur cet exemple d'application relativement simple. Nous avons cependant noté que le critère DEDm était dépendant du nombre d'éléments dans la couronne d'intégration, et que le critère TREM dépendait de la précision du balayage choisi. Dans l'exemple suivant, Nous allons donc appliquer ces trois critères à un exemple plus complexe, de façon à faire ressortir ces dépendances. Nous en profiterons également pour comparer leurs temps de calcul respectifs et pour étudier leur dépendance vis-à-vis de la finesse du maillage.

### III.3.4.2. Eprouvette trouée pré-fissurée

Dans [Bouchard et al. 2000a], nous avons montré comment la présence d'une cavité pouvait influencer la propagation d'une fissure. En créant une dépression de contrainte, la cavité attire la fissure, puis celle-ci se réoriente horizontalement une fois la cavité dépassée.

Nous considérons ici une éprouvette trouée à deux extrémités, et pré-fissurée en deux endroits, soumise à un essai de traction :

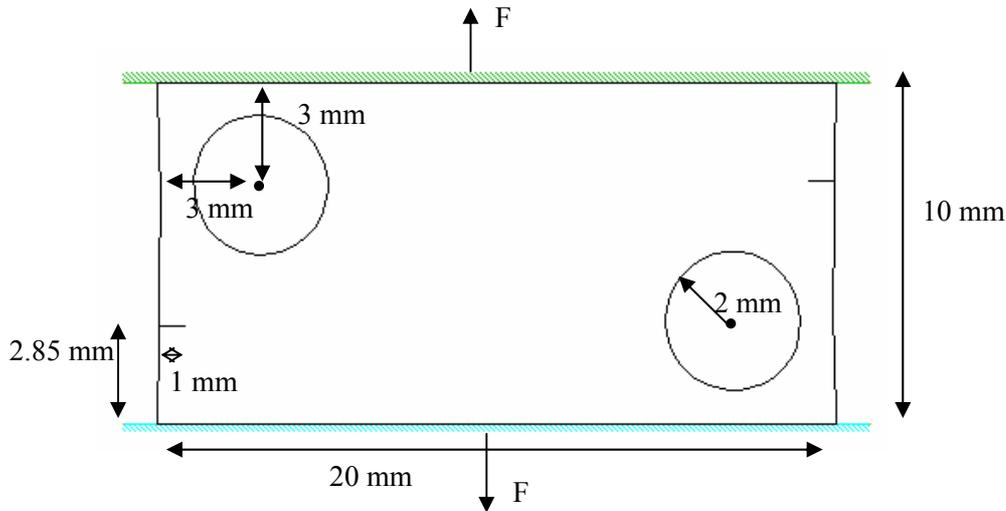
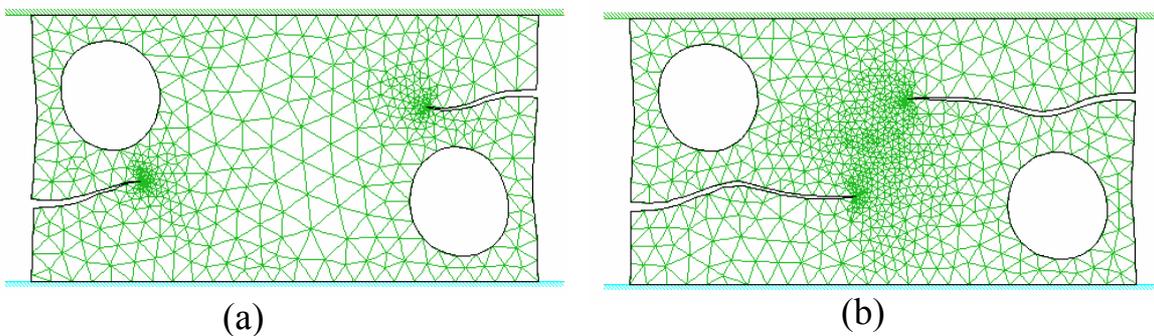


Figure III. 17. éprouvette trouée pré-fissurée

- *Critère de la contrainte normale maximale*

Les deux fissures s'orientent tout d'abord vers la cavité la plus proche (Figure III.18.a). Ceci vient du fait que les cavités créent une « dépression » de contrainte qui va modifier la contrainte principale maximale de façon à ce que la fissure s'oriente vers la cavité. Une fois la cavité passée, les fissures se réorientent en mode I pur, et elles s'éloignent très légèrement de la cavité (Figure III.18.b). Puis, dès qu'elles commencent à avoir une influence l'une par rapport à l'autre, elles vont se rapprocher l'une de l'autre (Figure III.18.c). Cela est dû au fait que chacune d'entre elle crée une dépression de contraintes, attirant ainsi la fissure opposée. En fin de propagation, les fissures sont « piégées » par la cavité sur laquelle elles débouchent (Figure III.18.d). Sur la figure III.18.e, on peut visualiser le champ de contrainte équivalente de Von Mises, et on se rend bien compte de l'influence de chaque fissure sur son opposée.



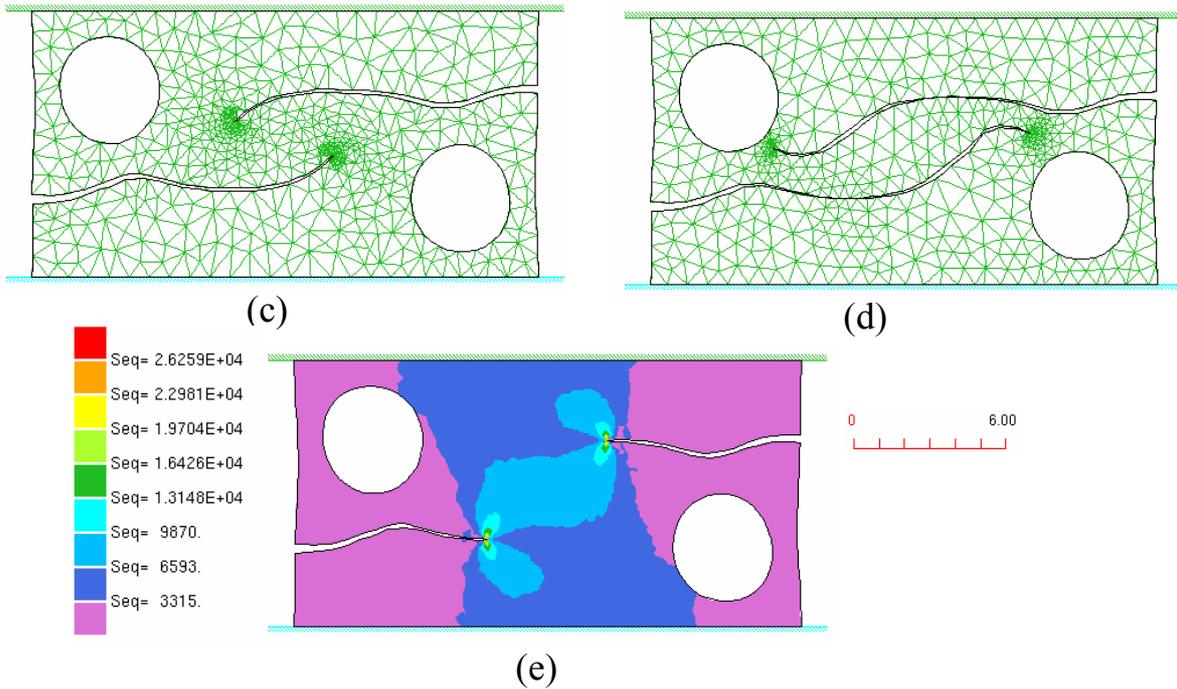


Figure III. 18. Trajectoire de deux fissures à l'aide du critère CNM dans une plaque pré-fissurée contenant deux cavités

- *Critère de la densité d'énergie de déformation minimale*

Sur cet exemple, on va pouvoir se rendre compte de l'influence de la couronne d'intégration par rapport au résultat pour le critère DEDm. Pour cela, nous effectuons la même simulation avec des tailles de couronnes différentes en pointe de fissure:

- Cas 1 : **couronne éloignée**  
rayon interne = 0,3 mm  
rayon externe = 0,4 mm  
distance de propagation = 0,65 mm

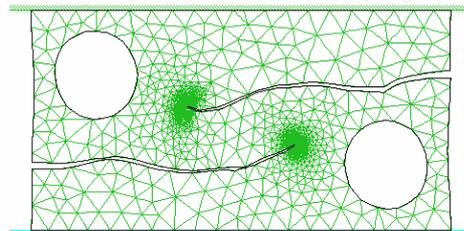


Figure III. 19. Propagation à l'aide du critère DEDm et avec une couronne éloignée

Dans ce cas, on retrouve une trajectoire très proche de celle obtenue avec le critère CNM.

- Cas 2 : **couronne intermédiaire**  
rayon interne = 0,22 mm  
rayon externe = 0,29 mm  
distance de propagation = 0,65 mm

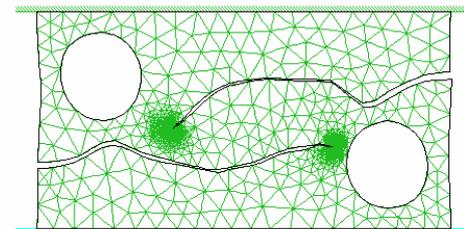
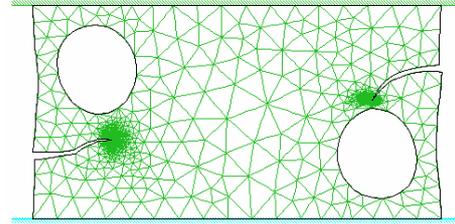


Figure III. 20. Propagation à l'aide du critère DEDm et avec une couronne intermédiaire

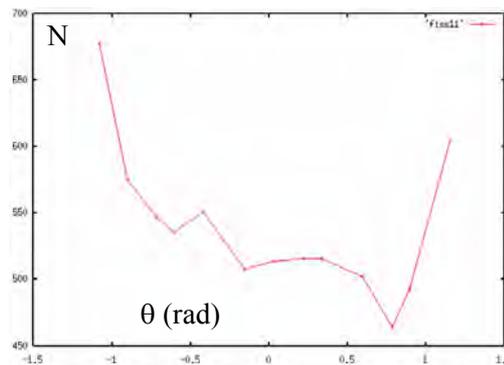
Avec une couronne intermédiaire, le chemin de propagation reste globalement le même, mais il semble plus perturbé par les cavités.

- Cas 3 : **couronne proche**  
 rayon interne = 0,18 mm  
 rayon externe = 0,24 mm  
 distance de propagation = 0,65 mm



**Figure III. 21. Propagation à l'aide du critère DEDm et avec une couronne proche**

Lorsque la couronne est très proche de la pointe, les fissures s'orientent plus brutalement vers les cavités, si bien que l'une d'entre elles ne peut se réorienter horizontalement et se trouve « piégée » par cette cavité. Cela vient du fait que les champs mécaniques, très perturbés dans un voisinage proche de la pointe de fissure, ne permettent pas d'obtenir une courbe  $N(\theta)$  suffisamment régulière pour calculer correctement le minimum local (Figure III.22.).



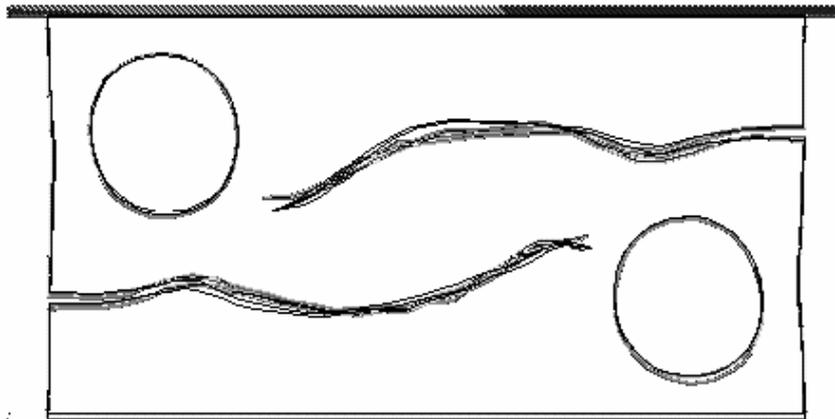
**Figure III. 22. Courbe  $N(\theta)$  pour une couronne proche du fond de fissure**

On peut cependant noter que la distance de propagation choisie pour ces trois exemples est assez élevée. Une distance de propagation plus faible, plus proche de la réalité, permet aux fissures de se réorienter horizontalement avant d'atteindre la cavité.

Dans certains cas assez complexes comme celui-ci, la fissure passe dans un voisinage proche d'une cavité ou d'un contour extérieur. Une légère imprécision sur l'angle de bifurcation peut alors l'amener à suivre un chemin différent. De même, la distance de propagation de la fissure à chaque incrément peut également être un facteur d'imprécision. Plus elle sera petite, plus le résultat sera précis, mais plus le calcul sera long. Cette influence, pénalisante pour le critère DEDm, ne se retrouve pas avec le critère TREM.

- **Critère du taux de restitution d'énergie maximal**

Le critère TREM a également été utilisé avec un balayage de  $10^\circ$ , et pour les trois tailles de couronne définies pour le critère DEDm. La même distance de propagation est utilisée. Cependant, les courbes  $G(\theta)$  utilisées pour calculer le maximum sont très régulières, même lorsque la fissure passe dans un voisinage proche d'une cavité. Les trajectoires des fissures sont donc très régulières elles aussi. De plus, ce critère s'avère complètement indépendant de la taille de la couronne (et donc du maillage) comme le montre la figure III.23. où l'on a superposé les 3 trajectoires obtenues avec les trois tailles de couronnes différentes.



**Figure III. 23. Superposition des trajectoires obtenues pour trois maillages différents**

Cette indépendance vis-à-vis du maillage provient de la bonne précision de la méthode  $G\theta$  utilisée pour calculer le taux de restitution d'énergie. En effet, nous avons déjà remarqué au §II.4.3. que la méthode  $G\theta$  n'était pas influencée par la finesse du maillage.

- **Bilan**

Sur cet exemple plus complexe, on observe des différences entre les trois critères développés. Le critère DEDm dépend fortement du maillage, et les trajectoires obtenues par ce critère peuvent donc être mises en doute. Pour un même maillage, la figure III.24.a montre la bonne superposition des trajectoires obtenues pour ce critère et pour le critère TREM. Ce dernier est intéressant, car il est indépendant du maillage et donne des trajectoires très régulières. C'est également le cas pour le critère CNM. En effet, le raffinement évolutif ainsi que la couronne concentrique en pointe de fissure permettent de calculer précisément la direction de propagation. D'ailleurs, pour des maillages aussi fins, il n'est pas nécessaire d'utiliser les éléments singuliers pour calculer précisément les directions de propagation. La figure III.24.b compare les trajectoires du critère CNM et du critère TREM. Si les chemins de propagation sont globalement similaires, on observe que le critère CNM semble plus influencé par les cavités que le critère TREM. Par contre, le critère CNM présente l'avantage de pouvoir également être utilisé pour des matériaux élastoplastiques [Bocca et al. 1991], [Baouch 1998].

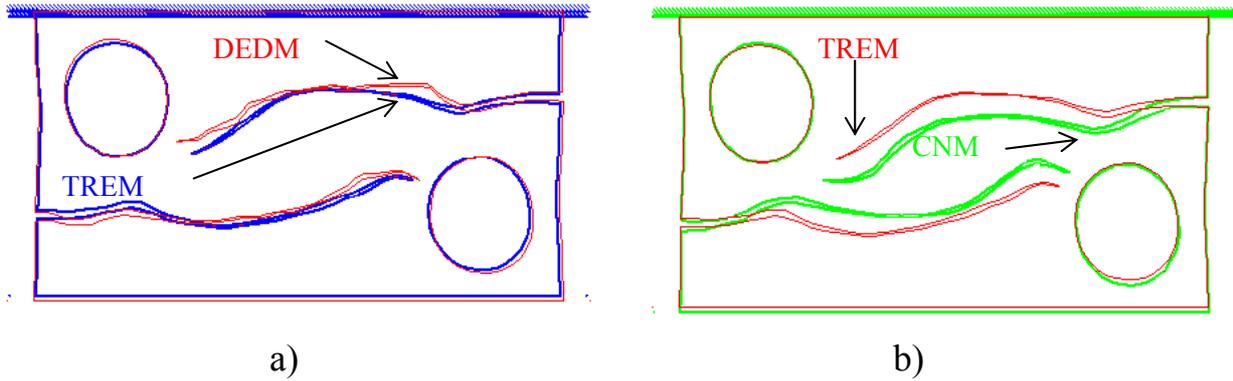


Figure III. 24. Comparaison de trajectoires de fissures

### III.3.4.3. Temps de calcul

Pour chacun des trois critères, nous comparons ici les temps de calcul jusqu'à propagation complète des fissures pour l'exemple de la pièce pré-fissurée, et contenant deux cavités.

Pour des paramètres de remailage identiques, le critère CNM nécessitera moins de nœuds car il n'utilise pas de couronne d'intégration en pointe de fissure. C'est ce que l'on peut observer sur la figure III.25. où l'on représente le nombre de nœuds à chaque remailage pour les trois critères utilisés. Si les deux méthodes énergétiques sont équivalentes, la méthode locale nécessite beaucoup moins de nœuds pour un résultat équivalent. L'augmentation importante du nombre de nœuds pour ce critère en milieu de calcul correspond à l'interaction des deux fissures en vis-à-vis, et qui entraîne une concentration de nœuds. Le paramètre *taux de raffinement* (Annexe A) est responsable de ce phénomène puisqu'il définit l'évolution de la taille des éléments de la frontière vers le centre de la pièce. Pour un taux de raffinement plus élevé, on n'observe plus cette concentration de nœuds due à la proximité des deux pointes de fissures.

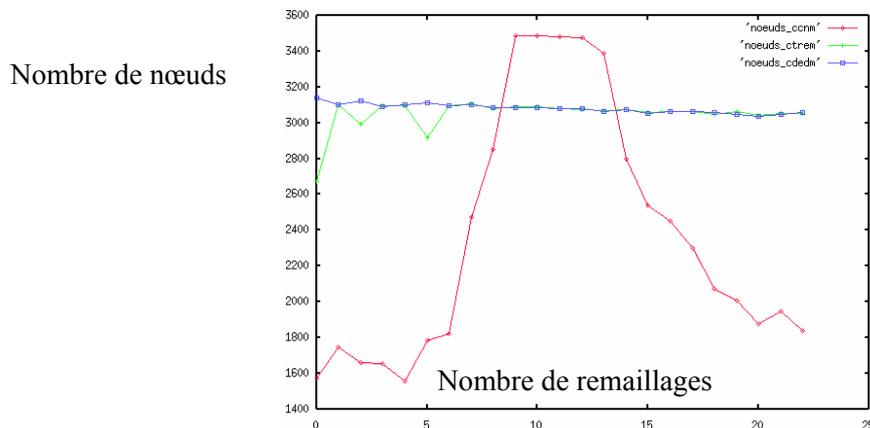


Figure III. 25. Nombre de nœuds au cours des remailages pour les trois critères

Le temps de calcul associé au critère CNM sera alors plus intéressant. Cependant, si on compare ces temps pour des maillages comportant approximativement le même nombre de nœuds (tableau III.1.), on observe que le calcul lié au critère basé sur la densité d'énergie de déformation est plus long que les deux autres critères. Ces deux derniers étant quasiment équivalents en temps de calcul.

Critère	CNM	TREM	DEDm
Nombre de nœuds	3053	3186	3075
Temps de calcul	t	1,08t	1,3t

**Tableau III. 1. Comparaison des temps de calcul pour les trois critères de propagation**

#### **III.3.5. Bilan**

Un critère local, CNM, et deux critères globaux (ou énergétiques) TREM, DEDm ont été testés sur deux exemples. Dans l'ensemble, les 3 critères donnent des résultats très satisfaisants. Pour des applications complexes, le critère de la contrainte normale maximale et le critère du taux de restitution d'énergie maximal sont les critères les plus précis, tandis que le critère de la densité d'énergie de déformation minimale reste assez dépendant du maillage. Si le critère local est plus rapide, il semble plus sensible aux cavités ou aux conditions aux limites du problème que le critère TREM.