
Modélisation de la poix

3.1	Viscoélasticité	54
3.1.1	Définition - mise en évidence expérimentale	54
3.1.2	Origine moléculaire	56
3.1.3	Influence de la température	57
3.2	État de l'art des connaissances sur la poix	58
3.2.1	Définition	58
3.2.2	Constituants et procédé de fabrication	58
3.2.3	Microstructure	59
3.2.4	Comportement	60
3.3	Caractérisation du comportement mécanique	61
3.3.1	Analyse mécanique dynamique	61
3.3.2	Principe de superposition temps – température	64
3.4	Résultats expérimentaux	65
3.4.1	Dispositif expérimental	65
3.4.2	Résultats	70
3.4.3	Analyse des résultats	73
3.5	Modélisation de la poix	79
3.5.1	Choix de la méthode de modélisation	79
3.5.2	La DEM et la plate-forme de calcul GranOO	80
3.5.3	Les liaisons cohésives viscoélastiques	84
3.5.4	Création d'éprouvettes numériques	93
3.5.5	Expérience numérique de torsion	94
3.5.6	Équivalence temps – température	98

3.6	Calibration du modèle	101
3.6.1	Calculs effectués	101
3.6.2	Méthodologie de calibration	104
3.6.3	Résultats de calibration	105
3.7	Conclusion et perspectives	106

3.1 VISCOÉLASTICITÉ

Cette section présente le concept de viscoélasticité et les notions permettant d'appréhender le comportement des matériaux viscoélastiques (aspect moléculaire, influence de la température).

3.1.1 Définition - mise en évidence expérimentale

On dit qu'un matériau est viscoélastique lorsqu'il présente lors de sa déformation à la fois des caractéristiques propres à un comportement de solide élastique hookéen et à un comportement de fluide visqueux newtonien (fluide parfait). Cela signifie que lors d'une déformation, une partie de l'énergie mécanique est stockée et restituable (composante élastique) tandis que l'autre partie est dissipée par frottements internes (composante visqueuse). Pour les petites déformations, on parle de viscoélasticité linéaire.

On peut mettre en évidence la viscoélasticité de manière simple par des expériences dites de fluage et de relaxation de contraintes. L'expérience de fluage consiste à appliquer une contrainte constante sur le matériau et d'observer l'évolution de sa déformation au cours du temps. L'expérience de relaxation de contraintes consiste à l'inverse à appliquer une déformation constante et observer l'évolution de la contrainte au cours du temps.

La Fig. 3.1 présente le résultat obtenu lors d'une expérience de fluage pour un matériau élastique, visqueux et viscoélastique. Pour le matériau élastique, la déformation est immédiate et entièrement réversible. Pour le matériau visqueux, la déformation croît linéairement avec le temps et la pente est définie par la viscosité du matériau. Pour le matériau viscoélastique, le mouvement se décompose en trois parties :

- une déformation γ_1 instantanée et réversible (élastique)
- une déformation γ_2 fonction du temps et réversible
- une déformation γ_3 fonction du temps et irréversible (visqueuse). Pour

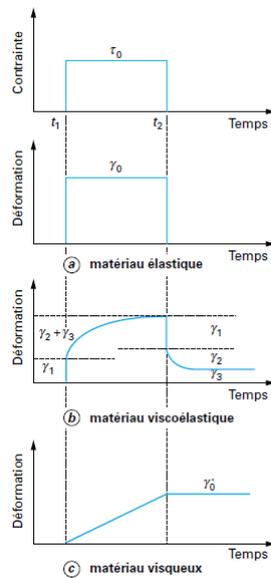


FIGURE 3.1 – Expérience de fluage pour trois types de matériaux : a) élastique, b) viscoélastique et c) visqueux.

une expérience de fluage à température donnée, on peut définir la complaisance du matériau comme :

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.1)$$

où ϵ est la déformation du matériau et σ_0 la contrainte constante appliquée. On peut tracer l'évolution de la complaisance en fonction du temps (Fig. 3.2) et on observe quatre zones principales :

- le plateau vitreux aux temps courts, caractérisé par une faible complaisance $J_g = 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
- la transition, dépendante d'un paramètre appelé temps de relaxation, dépendant de la température
- le plateau caoutchoutique caractérisé par une complaisance $J_N = 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$
- l'écoulement lorsque le polymère devient liquide.

Pour une expérience de relaxation de contraintes à température donnée,

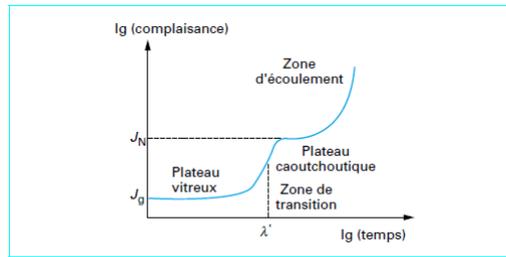


FIGURE 3.2 – Évolution de la complaisance d’un matériau viscoélastique pendant un essai de fluage.

on trace plutôt le module de relaxation :

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

On retrouve les 4 domaines observés précédemment (Fig. 3.3) : plateau vitreux de module $G_g = 10^9$ Pa, transition, plateau caoutchoutique de module $G_N = 10^6$ Pa et écoulement liquide.

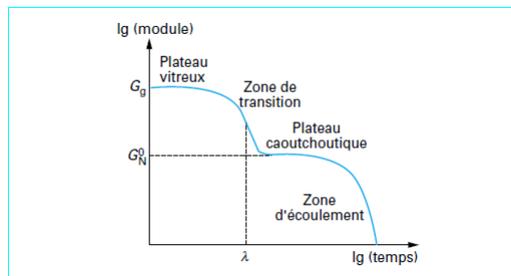


FIGURE 3.3 – Évolution du module de relaxation d’un matériau visco-élastique pendant un essai de relaxation de contraintes.

Ces différents comportements prennent leur source dans la microstructure des matériaux, et particulièrement les mouvements inter et intramoléculaires [79].

3.1.2 Origine moléculaire

On distingue quatre régions de comportements différents en fonction des mouvements à l’échelle atomique ou moléculaire dans le matériau :

1. Aux temps courts, seuls les mouvements à l'échelle atomique sont possibles et quelques changements de conformation locaux : le matériau a un comportement de solide élastique.
2. Dans la zone de transition, les chaînes moléculaires sont toujours immobiles et les changements de conformation globale des molécules deviennent possibles : le matériau a un comportement viscoélastique.
3. Dans le domaine caoutchoutique, les changements de conformation sont faciles et les chaînes moléculaires deviennent mobiles les unes par rapport aux autres mais sont enchevêtrées, limitant alors les déformations possibles : le matériau a un comportement hyperélastique.
4. Aux temps longs, les chaînes moléculaires deviennent indépendantes, très mobiles les unes par rapport aux autres, permettant ainsi l'écoulement.

Le temps de relaxation déterminant la zone de transition entre les domaines vitreux et caoutchoutique caractérise donc l'échelle temporelle des mouvements intramoléculaires : pour une excitation de durée inférieure au temps de relaxation, les mouvements intramoléculaires n'ont pas le temps de s'effectuer.

Le domaine caoutchoutique peut être absent dans le cas de polymères dont les chaînes sont courtes car les chaînes peuvent se désenchevêtrer très facilement, on passe alors directement dans le domaine d'écoulement. A l'inverse pour les polymères réticulés, la zone d'écoulement n'existe pas car des liens sont créés entre les chaînes et elles ne sont pas indépendantes les unes des autres. [80]

3.1.3 Influence de la température

Les comportements viscoélastiques sont fortement dépendants de la température. En effet le temps de relaxation varie avec la température et pour une même sollicitation, le matériau pourra se trouver dans chacun des quatre domaines possibles en fonction de la température. Ceci s'explique à l'échelle microscopique par l'agitation moléculaire induite par la température. Une augmentation de la température (apport d'énergie thermique) réduit ainsi les barrières énergétiques bloquant les différents mouvements qui génèrent la viscoélasticité : changements de conformations locales et globales, mobilité des chaînes.

Les courbes de complaisance ou de module (Fig. 3.2 et 3.3) peuvent aussi être tracées à temps constant et température variable : la forme des courbes obtenues est la même. Le temps de relaxation est alors remplacé par la température de transition vitreuse T_g .

La température a donc le même effet que le temps, on parle alors d'équivalence temps – température.

3.2 ÉTAT DE L'ART DES CONNAISSANCES SUR LA POIX

Cette section présente l'état des lieux des connaissances sur la poix utilisée comme matériau de polissage. Dans un premier temps, la définition de la poix est donnée puis l'état de l'art des connaissances sur la microstructure et le comportement des poix est présenté.

3.2.1 Définition

Selon la définition du dictionnaire Larousse, la poix est un "mélange mou et collant, à base de résines et de goudrons végétaux, obtenu par distillation de bois résineux ou de térébenthine" [81]. La définition plus précise de l'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) décrit la poix comme un "résidu de la pyrolyse de matériau organique ou de goudron, solide ou non à température ambiante et constitué d'un mélange complexe d'hydrocarbures principalement aromatiques et de composés hétérocycliques" [82]. En effet, il existe différents types de poix suivant la matériau d'origine. Toujours selon l'IUPAC, la poix peut ainsi provenir de pétrole, de charbon (houille) ou de résineux. Le point commun entre ces différentes poix est qu'après son obtention à haute température, la poix se solidifie sans cristalliser, elle est donc normalement amorphe. La diversité de ses origines entraîne cependant des constitutions différentes.

3.2.2 Constituants et procédé de fabrication

Le taux d'aromaticité (le nombre d'atomes d'hydrogène portés par une chaîne aromatique divisé par le nombre total d'atomes d'hydrogène) varie de 0.3 à 0.9 suivant les poix, traduisant la présence plus ou moins marquée de chaînes carbonées non aromatiques. Les poix les plus dures provenant de charbon ne sont pas utilisées en optique, les poix utilisées sont donc celles dont le taux d'aromaticité est faible. Ce faible taux d'aromaticité est du à la présence de chaînes alkyles et de cycloalcanes.

Les poix optiques sont donc obtenues à partir de distillation/pyrolyse de résineux ou de pétrole. La majorité des poix utilisée chez Reosc est d'origine résineuse. La suite de procédés permettant d'obtenir de la poix à partir de résineux est la suivante [83] :

- pyrolyse lente de copeaux de résineux, lavage des fumées et condensation afin d'obtenir du goudron de résineux
- distillation fractionnée sous vide de ce goudron pour obtenir un résidu de poix.

Les caractéristiques de la poix obtenues dépendent fortement des procédés, notamment de la durée de la distillation fractionnée, et des potentiels traitements ultérieurs. Il n'existe pas dans la littérature d'analyse détaillée des constituants de la poix d'origine résineuse. On travaille donc dans ce paragraphe par analogie avec les bitumes, dont la définition donnée dans [84] correspond sur de nombreux points avec celle de la poix (d'origine pétrolière), notamment concernant ses procédés d'obtention et la nature solide ou extrêmement visqueuse à température ambiante. Selon cet article présentant une synthèse des connaissances sur la constitution des bitumes, ces derniers sont constitués d'hydrocarbures aromatiques de type naphthalène (30-45% massique), d'hydrocarbures saturés (5-15% massique), de résines (30-45% massique) et d'asphaltènes (5-20% massique). Ces derniers amènent chacun une part du comportement des bitumes :

- les saturés et aromatiques, de faible et moyenne masse moléculaire, déterminent la température de transition vitreuse des bitumes
- les asphaltènes, de grande masse moléculaire, impactent la viscosité des bitumes
- les résines assurent la stabilité des asphaltènes.

Ces divers constituants s'organisent selon une microstructure qui participe elle aussi à donner un comportement particulier aux bitumes et poix.

3.2.3 Microstructure

Diverses hypothèses ont été émises sur la structure des bitumes. Dans un premier temps, des modèles "sol – gel" ont été postulés, suivant la dispersion ou l'agrégation de micelles d'asphaltènes. Les bitumes "sol" contenaient des micelles indépendantes générant un comportement newtonien et à l'inverse les bitumes "gel" ayant un comportement non newtonien contenaient des micelles interagissant entre elles. Des mo-

dèles considérant les bitumes comme un milieu homogène ont aussi été postulés. Cependant, le modèle le plus abouti décrit les bitumes comme des solutions colloïdales : les asphaltènes existent sous forme de micelles dans le bitume. La température de transition vitreuse du bitume étant proche de celles de ses composés aromatiques, on en déduit que les asphaltènes sont dispersés dans le bitume et ne participent donc pas directement à la transition. Le bitume est donc considéré comme une solution colloïdale d'asphaltènes dans une matrice de composés aromatiques de faible masse moléculaire et de résines empêchant l'agrégation des asphaltènes [84, 85].

⇒ Les similitudes de comportement et de constituants observées entre les bitumes et les poix permettent raisonnablement de postuler le même genre de microstructure.

3.2.4 Comportement

Le comportement mécanique de la poix de polissage est qualitativement connu depuis des années, cependant, peu d'informations quantitatives sont disponibles. la dernière revue conséquente date de 1977 [86]. La poix y est présentée à température ambiante comme un fluide viscoélastique linéaire. C'est à dire que la composante visqueuse des contraintes est proportionnelle à la vitesse de déformation et que la composante élastique est elle proportionnelle à la déformation. La viscosité aux basses fréquences de la poix et son module aux hautes fréquences sont caractérisés expérimentalement (Table 3.1, [86]). La viscosité est aussi trouvée dépendante de $e^{-\frac{1}{T}}$ avec T la température.

TABLE 3.1 – Propriétés mécaniques de quelques poix déterminées par Brown.

poix	densité	module HF (GPa)	module de Poisson	viscosité (MPa.s)
Gugolz 64	1.026	2.279	0.399	51.2 à 23.6°C
Gugolz 73	1.052	2.455	0.404	705 à 22.6°C

Les études menées par la suite se sont surtout intéressées à la caractérisation rapide de poix en atelier de façon à s'assurer de la qualité de la

poix utilisée. Il s'agit principalement de mettre en relation les résultats de polissage et la dureté Shore, le point de ramollissement de la poix ou une profondeur d'indentation [77, 78, 87] déterminés par des méthodes standardisées. Ces données, si elles sont très utiles pour un contrôle dans l'atelier ne sont malheureusement pas utilisables pour modéliser le comportement de la poix. Il n'existe par exemple aucune relation générale entre les essais de dureté et les paramètres intrinsèques d'un matériau : des comportements différents peuvent amener à une même dureté. Un modèle du comportement de la poix ne peut donc se baser sur des valeurs de dureté. De la même manière les mesures de viscosité ne prennent pas en compte l'aspect élastique aux petites échelles de temps du lissage. La poix est unanimement reconnue par les opticiens comme un matériau viscoélastique mais seul son comportement visqueux est analysé en détail.

La composition complexe des poix ainsi que la tendance de ces dernières à voir leurs propriétés évoluer au cours du temps (par oxydation) sont problématiques. Des poix synthétiques commencent à être développées. Ces poix ont une composition plus simple, sans composés volatiles et présentent une meilleure stabilité temporelle [88, 89]. Elles permettent de reproduire les caractéristiques de fluage des poix naturelles, mais là encore, les propriétés viscoélastiques aux échelles de temps des phénomènes de lissage ne sont pas documentées [90].

⇒ Une caractérisation mécanique plus complète est donc nécessaire pour connaître le comportement viscoélastique de la poix en cours de lissage.

3.3 CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE

Dans cette section, la méthode de caractérisation choisie du comportement mécanique de la poix est décrite. Le principe de l'Analyse Mécanique Dynamique est d'abord présenté ainsi que la géométrie d'étude choisie. L'outil permettant d'analyser les résultats expérimentaux, le principe de superposition temps – température, est alors décrit.

3.3.1 Analyse mécanique dynamique

On peut caractériser le comportement mécanique d'un matériau par analyse mécanique dynamique (Dynamic Mechanical Analysis, "DMA"). Cette technique consiste à appliquer à une éprouvette une déformation

(ou une contrainte) dynamique et à suivre l'évolution de la contrainte (ou la déformation) résultante afin de déterminer le module dynamique du matériau. La répétition de cette expérience à plusieurs fréquences et températures d'excitation permet d'obtenir l'évolution du module dynamique en fonction de la fréquence et de la température.

Choix de la géométrie d'étude

Suivant la température d'étude et le matériau, différentes géométries (cône-plan, plateaux parallèles, Couette. . .) et modes de sollicitation flexion, torsion . . .) sont envisageables [91, 92].

La structure de la poix ainsi que sa haute viscosité à la température du fluide de polissage (22°C) orientent vers le choix d'une géométrie "plateaux parallèles" et un mouvement de torsion. La géométrie traditionnelle cône-plan est ici écartée au profit des plateaux parallèles car même si elle donne dans l'absolu les meilleurs résultats, elle est plus difficile à mettre en œuvre et la méthode de préparation du matériau développée se combine plus aisément avec une géométrie plans parallèles. De plus, pour de faibles épaisseurs de matériau, des mesures avec des plans parallèles donnent des résultats quasiment identiques à ceux obtenus avec un ensemble cône-plan

Cas d'une déformation en torsion imposée

On applique à l'éprouvette une déformation sinusoïdale γ telle que

$$\gamma(t) = \gamma_0 \sin(\omega t) \quad (3.3)$$

avec ω la pulsation de l'excitation, et on mesure (en fait, on calcule à partir du couple mesuré) la contrainte résultante τ sur le rayon extérieur de l'éprouvette :

$$\tau(t) = \tau_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.4)$$

où ϕ est le déphasage entre la contrainte résultante et la déformation appliquée. Si le matériau est élastique pur, $\phi = 0$ et s'il est visqueux pur, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Pour un matériau viscoélastique, on a donc $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ et la contrainte est en avance de phase de ϕ par rapport à la déformation (Fig. 3.4).

On définit à partir de ces courbes le module de torsion dynamique (complexe) G^* comme étant le rapport entre la contrainte résultante et la déformation sinusoïdale appliquée. Ce module est constitué d'une partie

3.3. Caractérisation du comportement mécanique

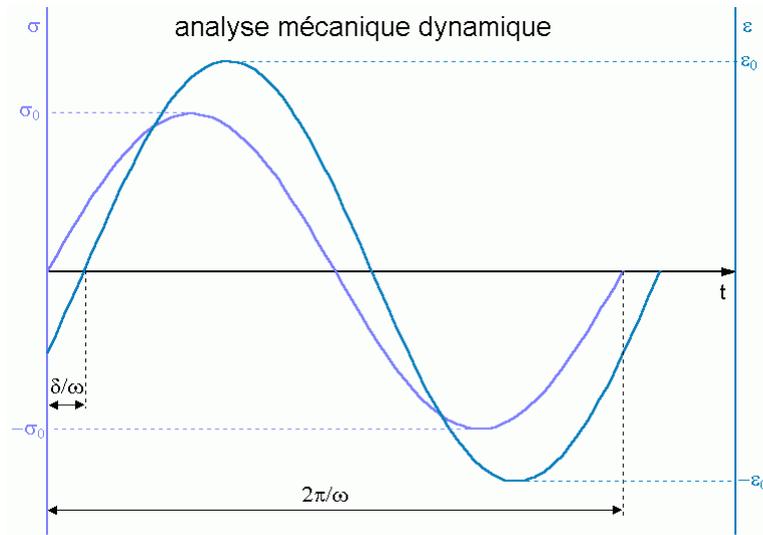


FIGURE 3.4 – Allure des courbes de déformation appliquée et de contrainte résultante lors d'une expérience de DMA.

réelle et d'une partie imaginaire :

$$G^* = G' + iG'' \quad (3.5)$$

représentant respectivement la composante élastique du module ("module de conservation") et sa composante visqueuse ("module de perte"). On peut relier les paramètres expérimentaux aux modules de conservation et de perte par les relations suivantes :

$$|G^*| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \sqrt{G'^2 + G''^2} \quad (3.6)$$

$$G' = |G^*| \cos \phi \quad (3.7)$$

$$G'' = |G^*| \sin \phi \quad (3.8)$$

$$\tan \phi = \frac{G''}{G'} \quad (3.9)$$

L'intégration du travail des composantes élastiques et visqueuses au cours d'un cycle fait apparaître un travail nul de la composante élastique

et un travail non nul de la composante visqueuse [93]. Physiquement, ceci signifie que l'énergie d'origine élastique est réversible et que celle d'origine visqueuse est irréversible. Le déphasage ϕ correspond alors à une dissipation d'énergie dans le matériau par frottement visqueux. Pour obtenir le comportement thermomécanique du matériau, il faut donc faire des essais à différentes fréquences et températures. Cependant, la gamme de fréquences accessible sur les machines de DMA est limitée, de l'ordre de 10^{-2} Hz à 10^2 Hz [91]. Afin de représenter le comportement du matériau sur une gamme de fréquence plus importante, on utilise le principe de superposition temps – température.

3.3.2 Principe de superposition temps – température

On a vu précédemment que l'impact du temps et de la température sont liés. Le principe de superposition temps – température (Time – Temperature Superposition Principle, "TTSP") [94] permet de quantifier cette équivalence. En pratique, il permet à partir de mesures sur une faible gamme de fréquences et à différentes températures d'obtenir une courbe maîtresse sur une large gamme de fréquences à une température de référence. Pour cela, on fait glisser les différentes courbes latéralement d'un facteur a_T de manière à les superposer (Fig. 3.5).

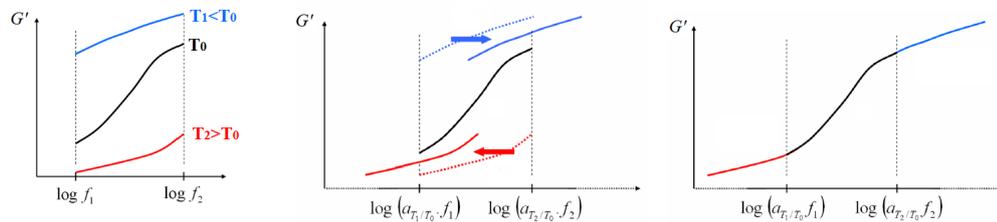


FIGURE 3.5 – Application du principe de superposition temps – température pour des mesures à trois températures $T_1 < T_0 < T_2$

Pour les matériaux amorphes, Williams, Landel et Ferry ont montré expérimentalement que pour des températures T proches de la température de transition vitreuse ($T > T_G$), les facteurs a_T suivent une loi de type [95] :

$$\log(a_T) = \frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \quad (3.10)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes liées au matériau et T_0 la température de référence choisie.

On utilise aussi parfois une dépendance de type Arrhenius lorsque les températures sont inférieures à la température de transition vitreuse :

$$\ln(a_T) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (3.11)$$

Ces outils permettent d'analyser les résultats expérimentaux de DMA présentés dans la section suivante.

3.4 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les résultats expérimentaux obtenus par DMA sont présentés dans cette section. Tout d'abord, le dispositif expérimental et la méthode de préparation des poix sont décrits puis les courbes de module dynamique obtenues sont listées. L'analyse de ces courbes est ensuite effectuée pour vérifier la validité de l'application de la superposition temps – température et déterminer les constituants des poix et leurs capacités de lissage de défauts.

3.4.1 Dispositif expérimental

Les poix ont été testées sur un rhéomètre Rheometric Scientific ARES (Fig. 3.6) au laboratoire Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux (PIMM, UMR CNRS 8005) de l'ENSAM.

Méthode de mesure

La méthode de test choisie est la déformation imposée pour des fréquences comprises entre 10^{-2} et 10^2 Hz (limite machine). Les températures d'étude sont choisies de manière à donner accès – à la température de l'atelier 22°C – à la fois au comportement de la poix dans le domaine hautes fréquences (10 - 100 Hz) pour étudier le lissage et aussi dans le domaine des basses voire très basses fréquences (< 0.01 Hz) pour avoir des informations sur le suivi de la forme et la mise en pression des outils.

La poix étant à température ambiante au-dessus de sa transition vitreuse et ayant tendance à s'écouler aux températures plus élevées ($40\text{-}50^\circ\text{C}$), la méthode d'analyse choisie est la torsion d'éprouvette cylindrique dans un système à plateaux parallèles (Fig. 3.7), à déplacement imposé. Un

3. MODÉLISATION DE LA POIX

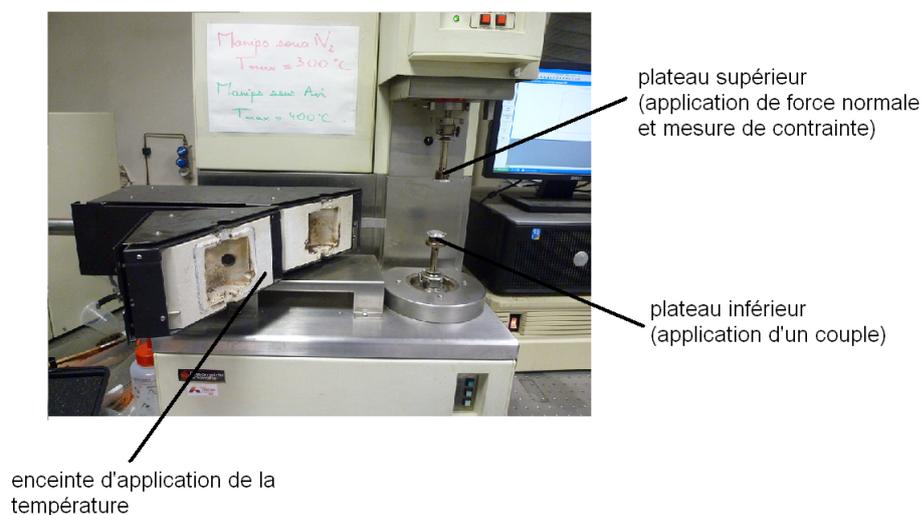


FIGURE 3.6 – Rheomètre Rheometric Scientific ARES utilisé.

système de torsion rectangulaire (Fig. 3.8) ne permettrait pas un maintien correct de la poix dans les mors (fluage, écoulement...).

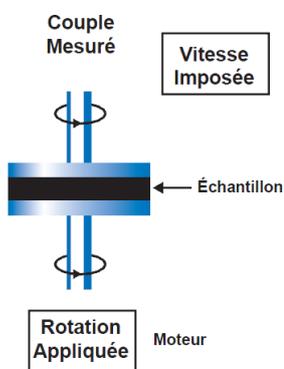


FIGURE 3.7 – Schéma du système à plateaux parallèles utilisé.

Préparation des éprouvettes

4 types de poix sont testés :

- poix naturelle N1
- poix naturelle N2 (nuance de poix plus dure que N1)

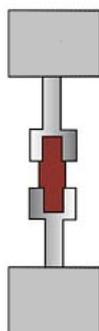


FIGURE 3.8 – Schéma du système rectangulaire de torsion.

- mélange 50% - 50% de poix N1 et N2
- poix synthétique S1 (supposée équivalente à la poix naturelle N2)

Le comportement mécanique de la poix est très dépendant de la manière dont elle est préparée. Il est donc nécessaire de suivre un protocole de fabrication identique pour toutes les éprouvettes de façon à éliminer l'histoire de l'éprouvette des variables influençant le comportement mécanique.

A température ambiante, la poix reste relativement dure et cassante, notamment pour les nuances élevées (poix N2 et plus, S1), il est donc difficile de mettre en forme une éprouvette alors qu'à haute température, tous les types de poix sont de très bons adhésifs et collent aux divers outils de mise en forme. Il est alors fastidieux et difficile de nettoyer les outils après chaque fabrication d'éprouvette.

Pour remédier à ce problème, les éprouvettes sont préparées directement sur un des plateaux du rhéomètre. Ceci permet de plus d'avoir un centrage parfait de l'éprouvette. Les plateaux utilisés sont de diamètre 25 mm et l'épaisseur finale à atteindre est de 1 mm. L'épaisseur initiale recherchée est de 1.3 mm, de manière à faire plusieurs mises en pression pour assurer la planéité de l'éprouvette avant de la placer sur le rhéomètre. Une masse de poix d'environ 0.6 mg est alors déposée sur le plateau circulaire entouré d'un adhésif.

L'éprouvette est ensuite placée dans une étuve à 100°C pendant 1h afin de faire ramollir les morceaux de poix. La poix fondue est mélangée régulièrement de façon à limiter le nombre de bulles d'air emprisonnées : elles perturbent l'homogénéité de comportement de l'éprouvette

3. MODÉLISATION DE LA POIX

et rendent le résultat inexploitable. Un premier contrôle visuel de la surface est donc effectué afin d'éliminer les éprouvettes pour lesquelles on suspecte la présence de nombreuses bulles d'air.

Après refroidissement à température ambiante pendant deux heures, l'adhésif est enlevé et les éprouvettes sont mises en pression pour aplanir la surface et amener son épaisseur à 1.1 mm. L'excès de matière en bord d'éprouvette est alors enlevé grâce à une lame de rasoir. Si l'éprouvette s'écaille lors de la découpe, il faut recommencer la mise en pression ou bien recouler une nouvelle éprouvette. Le pourtour de l'éprouvette est alors limé de manière à faire disparaître les irrégularités de géométrie. L'éprouvette est prête à être montée sur le rhéomètre (Fig. 3.9).



FIGURE 3.9 – Éprouvette de poix synthétique S1 prête à être montée sur le rhéomètre.

L'adhérence de la poix sur le deuxième plateau est difficile à obtenir à température ambiante. Une dernière mise en pression est donc effectuée pendant quelques minutes à 50°C entre les deux plateaux du rhéomètre pour ramener l'épaisseur finale à 1 mm (Fig. 3.10). Un premier déplacement sinusoïdal en torsion est réalisé afin d'améliorer l'adhérence, avant de démarrer les vrais essais de torsion.

Les essais débutent donc à 50°C, puis la température est diminuée entre chaque essai avec une durée de stabilisation thermique de 15 minutes avant chaque nouvel essai. La température étant mesurée par un thermocouple situé sous le cœur de l'échantillon (Fig. 3.11), ceci permet de s'assurer que la température est égale à la valeur de consigne et que l'uniformité de la température dans l'éprouvette est respectée.

Avant le début des expériences, un test préliminaire doit être effectué afin de s'assurer que les mesures sont bien réalisées dans la zone de viscoélasticité linéaire des poix. De plus, la validité du test en terme



FIGURE 3.10 – Éprouvette de poix synthétique S1 après une dernière mise en pression sur le rhéomètre.

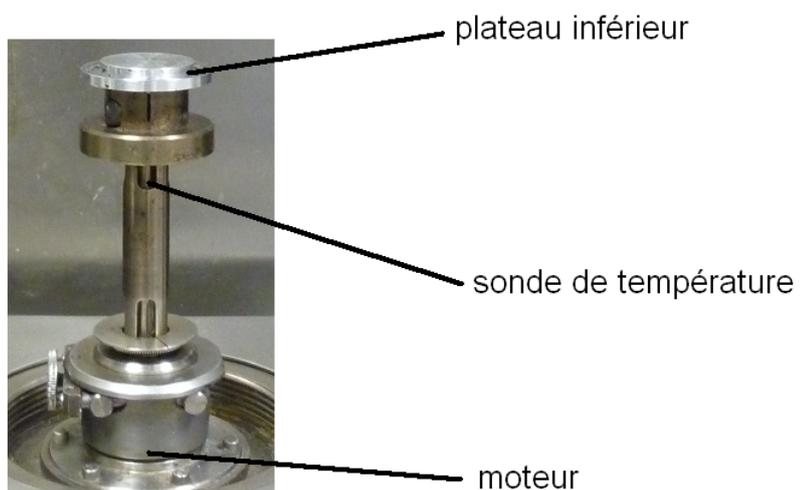


FIGURE 3.11 – Mesure de la température dans l'éprouvette.

3. MODÉLISATION DE LA POIX

d'adhérence est vérifiée après chaque essai : l'éprouvette, collée aux deux plateaux métalliques, est cassée (choc sur la tranche des plateaux après un passage sous l'eau froide pour rendre la poix plus cassante). Si l'éprouvette ne casse pas en son centre (Fig. 3.12), on peut suspecter une mauvaise adhérence sur l'un des plateaux et par précaution, les résultats obtenus ne sont pas conservés. L'essai doit alors être refait sur un autre échantillon. Les courbes de modules obtenues n'étant pas bruitées (voir section suivante), on peut donc raisonnablement affirmer qu'il n'y a pas de glissement important à l'interface poix – plateau.



FIGURE 3.12 – Adhérence de la poix sur les plateaux métalliques. (gauche) bonne adhérence et (droite) suspicion de mauvaise adhérence

Avant l'analyse DMA, la première étape est de déterminer la zone de viscoélasticité linéaire des différentes poix. En effet, il est impératif de rester dans la zone linéaire pour effectuer une analyse DMA et utiliser notamment l'équivalence temps – température.

3.4.2 Résultats

Test préliminaire : linéarité

À 1 Hz, on effectue un balayage en déformation et on regarde l'évolution du module dynamique calculé. On cherche ainsi à déterminer la zone de viscoélasticité linéaire des différentes poix dans laquelle les propriétés mécaniques sont constantes. Les résultats sont présentés Fig. 3.13. Les variations observées en petites déformations sont dues à la difficulté de contrôle de la déformation appliquée pour des rotations faibles du plateau inférieur, bien que le matériau soit vraisemblablement excité dans une zone de comportement linéaire.

⇒ La zone de linéarité s'étend de 0.02% à plus de 0.3% (la limite de déformation entraînant des non-linéarités n'a donc pas été observée).

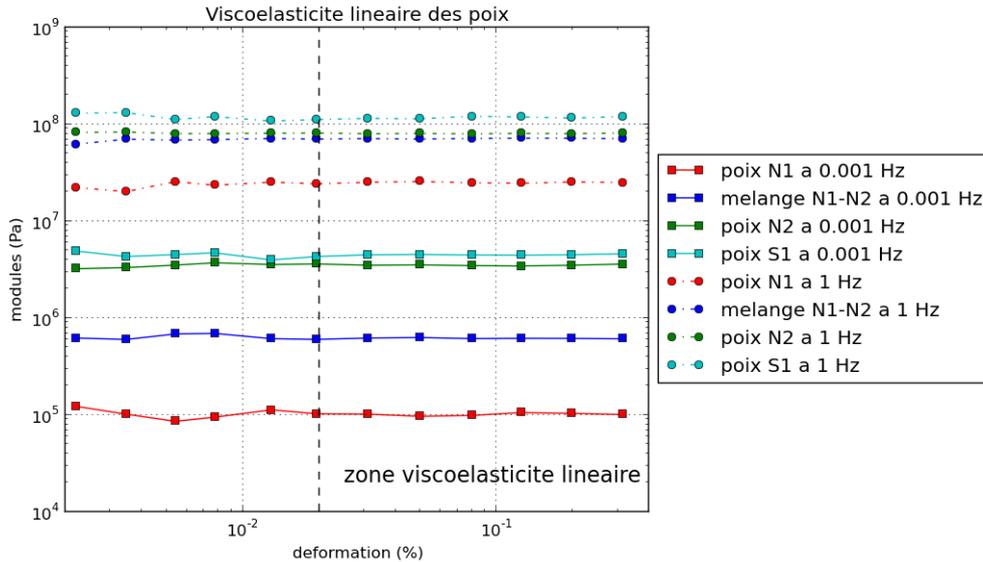


FIGURE 3.13 – Zone de viscoélasticité linéaire des poix testées.

On choisit une valeur de déformation constante pour toutes les poix et toutes les expériences : 0.1%.

Poix synthétique S1

La superposition obtenue sur une poix synthétique S1 est présentée Fig. A.1. Les facteurs de translation déduits sont présentés Fig. A.2.

En BF, le rapport entre la pente du module de conservation et la pente du module de perte est d'environ 2. De même le module de conservation atteint un pallier en HF. Associées, ces deux particularités sont caractéristiques d'un matériau de type Maxwell.

⇒ On peut dire que la poix synthétique S1 a un comportement proche de celui d'un matériau de Maxwell.

On vérifie que les valeurs de facteurs de translation suivent bien une loi de type WLF. Les valeurs obtenues étant proches de celles obtenues pour d'autres matériaux amorphes proches de leur température de transition vitreuse, on peut conclure que la poix synthétique S1 a un comportement "rhéologiquement simple" et qu'on peut effectivement lui appliquer la superposition temps – température.

3. MODÉLISATION DE LA POIX

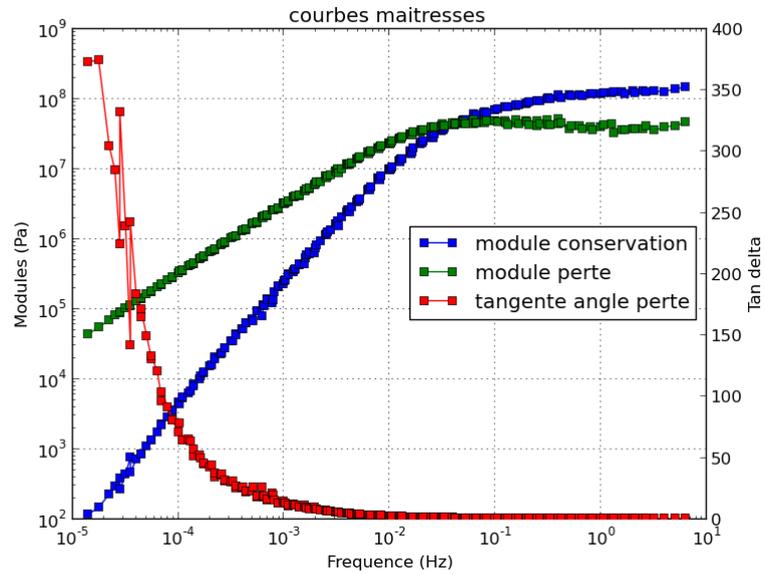


FIGURE 3.14 – Courbes maitresses de G' , G'' et $\tan \phi$ à 22°C pour une poix synthétique S1.

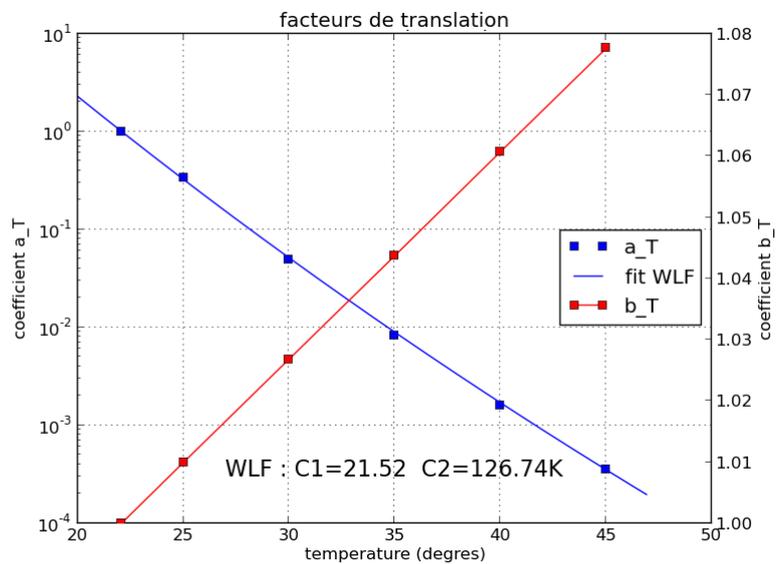


FIGURE 3.15 – Facteurs de translation calculés pour une poix synthétique S1 et fit avec la loi WLF.

Poix naturelles

Les résultats détaillés obtenus pour les poix naturelles sont présentés en annexe.

Si le comportement qualitatif global reste le même que pour la poix synthétique, on ne retrouve pas pour les poix naturelles les caractéristiques des matériaux de type Maxwell qui ont été observées pour la poix synthétique. Les poix naturelles étant constituées d'une multitude de molécules différentes, on pouvait en effet s'attendre à ce que leur comportement s'écarte des comportements idéaux.

Cependant, on peut toutefois noter que les poix naturelles semblent elles aussi atteindre un pallier de module en HF et que leur T_g semble plus faible que celle de la poix synthétique : elles atteignent ce pallier plus loin en fréquence.

3.4.3 Analyse des résultats*Équivalence temps – température*

Les résultats de l'application du principe de superposition temps – température sont présentés Table 3.2.

TABLE 3.2 – Application du principe de superposition temps – température aux différentes poix. Comparaison avec les paramètres universels de Williams, Landel et Ferry.

poix	C_1	C_2 (°C)
N1 22°C	18.58	119.45
N2 22°C	17.11	101.53
mélange N1-N2 22°C	22.98	139.34
S1 22°C	21.52	126.74
WLF universel T_g	17.44	51.6

Toutes les poix génèrent des valeurs proches des valeurs attendues pour des matériaux amorphes. L'écart entre la valeur de la température de référence choisie (température de l'atelier) et la valeur de la température de transition vitreuse généralement utilisée comme référence est responsable des valeurs de paramètres relativement élevées par rapport aux paramètres "universels" normalement obtenus pour une température de référence égale à la T_g .

3. MODÉLISATION DE LA POIX

⇒ On peut cependant donc appliquer la loi WLF à la poix de polissage : c'est un matériau amorphe "rhéologiquement simple" pour lequel le concept d'équivalence temps – température est bien applicable.

Courbes de synthèse

Le module dynamique pour chaque poix est tracé Fig. 3.16. Le module de conservation et de perte sont présentés respectivement Fig. 3.17 et Fig. 3.18. La partie HF du module de perte n'est pas significative, la superposition géométrique n'étant pas vérifiée. Si le module dynamique possède la même forme générale quelle que soit la poix, la répartition entre composante visqueuse et élastique est différente entre la poix naturelle et la poix synthétique. La principale différence entre les poix synthétiques et naturelles est alors le module de conservation en BF : là où le module de conservation de la poix synthétique prend une allure de type Maxwell, celui des poix naturelles subit une inflexion, l'écartant ainsi d'un modèle idéal.

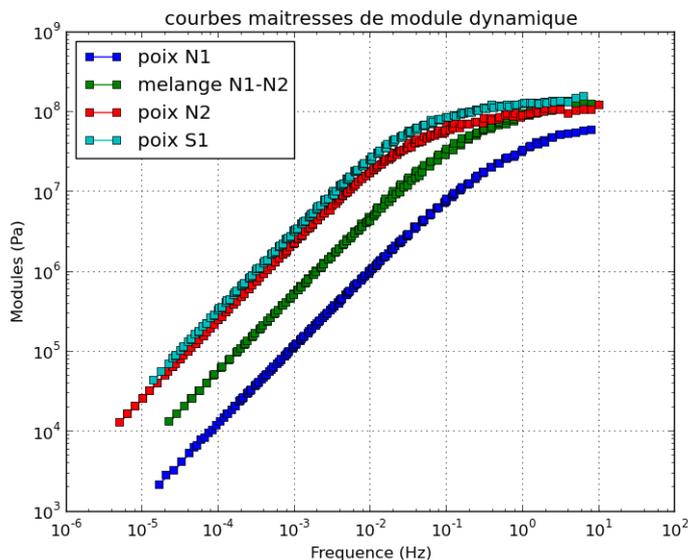


FIGURE 3.16 – Courbes maîtresses de module dynamique à 22°C pour les différentes poix.

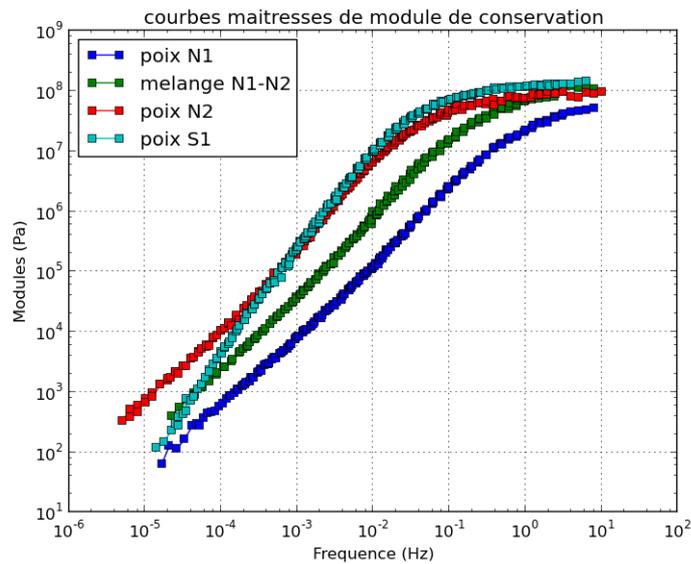


FIGURE 3.17 – Courbes maitresses de module de conservation à 22°C pour les différentes poix.

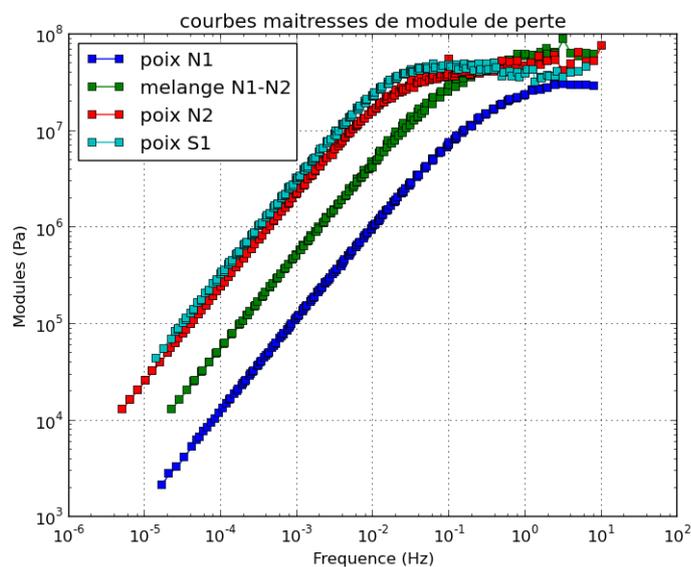


FIGURE 3.18 – Courbes maitresses de module de perte à 22°C pour les différentes poix.

Constitution des poix

On remarque qu'aucune des courbes ne présente de vrai plateau caoutchoutique, seule une légère inflexion dans la courbe indique l'existence d'une zone caoutchoutique, négligeable. Si on se réfère à l'analyse moléculaire effectuée précédemment, cela signifie donc que les chaînes moléculaires sont très peu enchevêtrées. La poix est donc très peu polymérisée, constituée de petites molécules relativement mobiles les unes par rapport aux autres. Ceci semble donc conforter l'hypothèse de la poix colloïdale : de grosses molécules ("asphaltènes") baignant dans une matrice de plus petites molécules ("aromatiques", "résines").

En extrapolant les courbes de module sur quelques décades, on peut estimer que les valeurs maximales atteintes sont identiques pour les différentes poix, seule la fréquence à laquelle ce maximum est atteint change. Cela signifie que les constituants de la poix sont les mêmes pour les différentes nuances, seule la concentration des diverses molécules varie en fonction des conditions de fabrication. Cela provient probablement d'une durée ou d'une température de distillation différentes.

Dans le cas de la poix S1, on sait [68] que cette dernière est faite de deux constituants s'apparentant aux "petites" et "grosses" molécules. Il n'y a pas d'inflexion dans la courbe de mesure : le plateau caoutchoutique est complètement absent, on est en présence d'un mélange de molécules sans polymérisation.

Capacités de lissage

Les paramètres intéressants en terme de lissage dans le comportement de la poix sont la pente BF de la courbe de module, la valeur du module maximal et la fréquence de coupure à partir de laquelle le module n'augmente (presque) plus. La pente BF est la pente de la courbe de module avant l'apparition du plateau. Elle est exprimée en décades de module par décade de fréquence (décade Pa / décade Hz). La fréquence de coupure est déterminée par l'intersection de la droite symbolisant la pente BF et la droite horizontale symbolisant le module maximal estimé de 154 MPa.

L'évolution de ces paramètres est présentée dans la Table 3.3.

La valeur de fréquence de coupure varie très fortement en fonction de la nuance de poix utilisée. On remarque ainsi un facteur 11 entre la fréquence de coupure de la poix N1 et la poix N2. De même, la poix

TABLE 3.3 – Capacités de lissage des différentes poix.

type de poix	pente BF (d. Pa/d. Hz)	fréq. coupure (Hz)
N1	0.95	1.35
N2	0.88	0.12
N1-N2	0.93	0.72
S1	0.95	0.09

S1 supposée être un équivalent de poix N2 présente une fréquence de coupure légèrement différente. On note cependant que les pentes sont toutes à peu près égales et qu'on peut donc s'attendre à une évolution qualitative similaire des capacités de lissage de ces poix.

Comme attendu, les capacités de lissage de la poix la plus "molle" sont moindres sur les fréquences plus faibles : la largeur du spectre fréquentiel sur lequel cette poix a son maximum d'efficacité est plus faible. Cependant, un décalage fréquentiel de la courbe vers les HF signifie aussi que cette poix travaille à une température plus éloignée de sa transition vitreuse, elle est donc aussi normalement moins sensible aux variations de température pouvant avoir lieu lors de l'interaction entre l'outil, le fluide abrasif et la pièce.

Dans le cas d'une poix naturelle, on peut aussi tracer la courbe d'évolution de la fréquence de coupure en fonction du pourcentage de poix N1 (Fig. 3.19). En prenant en compte les incertitudes sur la mesure de la fréquence de coupure, on voit que la fréquence évolue linéairement avec le pourcentage de poix N1 (ou N2). Une formule permet alors de calculer la fréquence de coupure pour un mélange de poix donné, ou bien au contraire de déterminer le mélange de poix pour une fréquence de coupure donnée.

⇒ On peut optimiser simplement un mélange en fonction de la fréquence de coupure souhaitée.

Comportement aux très hautes fréquences – perspectives

Le matériel utilisé ne permet pas en l'état d'analyser correctement le comportement des poix à très haute fréquence. La faible épaisseur de l'éprouvette rend l'angle de torsion appliqué important, entraînant l'apparition rapide de problèmes d'adhérence lorsque la fréquence d'excitation augmente : la poix devient très dure et cassante et n'adhère plus

3. MODÉLISATION DE LA POIX

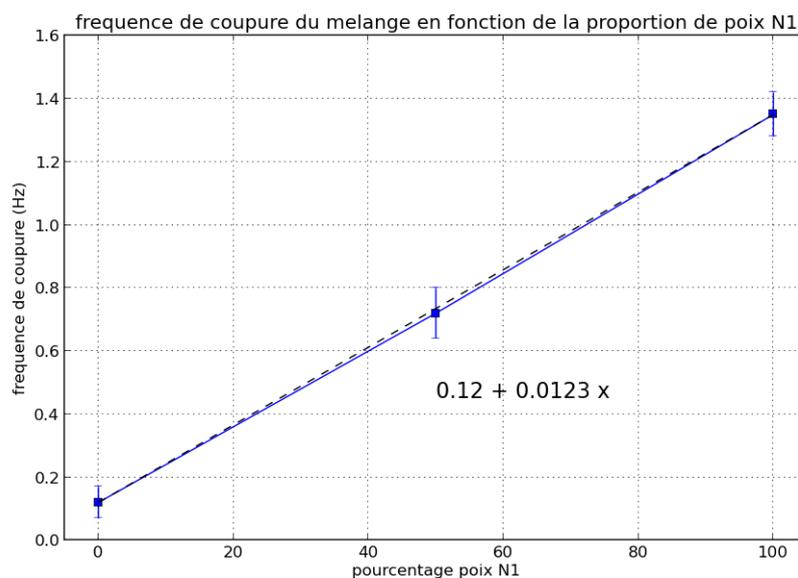


FIGURE 3.19 – Évolution de la fréquence de coupure du mélange N1-N2 en fonction du pourcentage de poix N1.

correctement aux plateaux. L'application d'une forte contrainte verticale pour faciliter l'adhérence entraîne la rupture du matériau, de même qu'un travail à température plus faible génère plus facilement une rupture. Cependant, une géométrie plus allongée n'était pas envisageable avec les systèmes de fixation par mors à cause du fluage qu'ils génèreraient aux points de serrage.

Pour accéder aux très hautes fréquences (>10 Hz), il faut combiner un refroidissement de l'enceinte à l'utilisation d'un autre type de géométrie. On peut par exemple positionner une plaque mince de poix entre deux plaques d'un matériau parfaitement caractérisé. Le fluage de la poix peut être considéré comme faible si la surface de poix est suffisamment grande. Les plaques sont serrées entre des mors et la longueur de l'éprouvette étant beaucoup plus grande, l'angle effectif de torsion diminue et on peut espérer atteindre des fréquences plus élevées sans problèmes d'adhérence/glisement. Le deuxième matériau étant connu, on peut déterminer la composante due à la plaque de poix et ainsi obtenir le comportement de la poix aux très hautes fréquences. Ce dispositif

expérimental n'a pas pu être calibré dans le cadre de cette thèse mais fournirait le surplus d'information manquant pour caractériser la poix sur un domaine extrêmement large couvrant toutes les fréquences.

L'étude expérimentale en torsion fournit cependant suffisamment de renseignements pour pouvoir valider un modèle de poix. La deuxième partie de cette étude est donc la calibration d'un modèle permettant de simuler la poix de polissage, afin d'implémenter son comportement dans un modèle de lissage.

3.5 MODÉLISATION DE LA POIX

Cette section présente la méthode de modélisation choisie pour la poix. Dans un premier temps, le choix de la méthode DEM est justifié. La plate-forme de développement GranOO utilisée lors de la modélisation est ensuite présentée, ainsi que les diverses possibilités permettant d'intégrer des comportements viscoélastique dans le modèle de matériau amorphe et isotrope existant : le concept de lien cohésif poutre viscoélastique est introduit et quelques types de poutres viscoélastiques sont présentées, parmi lesquelles un type de lien est choisi pour modéliser la poix. L'expérience numérique de torsion servant de base pour comparer les résultats numériques et expérimentaux est décrite et divers moyens de réduction du temps de calcul sont introduits.

3.5.1 Choix de la méthode de modélisation

Même s'il n'existe actuellement pas de modèle général de poix, il existe de nombreux modèles de viscoélasticité analytiques ou numériques à base d'éléments finis adaptables aux poix de polissage [85]. Ils s'adaptent cependant plus ou moins bien suivant les différents types de matériaux. On utilise ici des matériaux ayant différentes origines avec des comportements possiblement tous différents. Il est difficile d'imaginer qu'un seul modèle suffise à décrire les comportements des différentes poix étudiées. Il faut donc disposer d'un modèle facilement adaptable, modifiable pour pouvoir sur la même base décrire des physiques différentes. La modification de la physique locale dans le cadre d'un modèle par éléments finis entraîne la nécessité de reformuler les lois de comportements à l'aide d'outils mathématiques lourds. Ce genre de modèle est donc peu adapté à ce type d'étude.

De plus, la modélisation de la poix n'est qu'un intermédiaire pour une modélisation plus globale de l'interface outil – pièce en cours de lissage. L'objectif de cette modélisation est à terme de simuler l'enlèvement de matière dynamique à la surface de la pièce. Cet enlèvement de matière, de par sa nature discrète, est difficile à modéliser dynamiquement par la méthode des éléments finis. Encore une fois, une modélisation par éléments finis se révèle peu adaptée à long terme.

La méthode par éléments discrets (Discrete Element Method, "DEM"), si elle est limitée par les longs temps de calcul qu'elle implique, permet de modifier facilement la physique locale choisie sans changer l'architecture de calcul. Elle est de plus bien adaptée aux phénomènes de tribologie, frottements et enlèvement matière. C'est une technique déjà utilisée pour modéliser l'enlèvement de matière dans la silice en cours d'ébauchage et doucissage [96, 97, 40]. Elle présente donc un bon potentiel pour offrir une solution de modélisation complète de l'interface outil – pièce. Elle n'a cependant pas encore démontré sa capacité à simuler des matériaux continus viscoélastiques comme la poix.

La méthode de modélisation choisie est donc la DEM, afin d'offrir l'adaptabilité aux différents matériaux de polissage existants et de valider la possibilité d'une méthode unique pour l'étude locale de l'interface outil viscoélastique – pièce. Le développement des modèles est effectué sur la base de la plate-forme de calcul "GranOO" (Granular Object Oriented)¹ développée à l'I2M.

L'objectif de cette section est dans un premier temps de démontrer la capacité de la DEM à modéliser des comportements viscoélastiques, et ensuite de calibrer un modèle de façon à retrouver les comportements expérimentaux obtenus en DMA.

3.5.2 La DEM et la plate-forme de calcul GranOO

Principe de la DEM

Contrairement aux méthodes par éléments finis qui considèrent la matière continue, la DEM considère la matière comme un ensemble d'éléments discrets (souvent sphériques et indéformables) interagissant entre eux. Un matériau continu est donc en DEM un continuum d'éléments discrets reliés entre eux par des liaisons cohésives (Fig. 3.20). Ce

1. <http://www.granoo.org>

sont ces dernières qui sont responsables du comportement du matériau. C'est donc l'équivalent DEM des lois de comportements.

Chaque élément discret est d'abord défini par deux paramètres physiques, son rayon et sa masse. Il est aussi défini par trois paramètres cinétiques, sa position (position de son centre et orientation de son repère), sa vitesse et son accélération (en translation et rotation).

Les éléments sont reliés à leurs plus proches voisins par des liaisons cohésives, traduites mathématiquement par des relations exprimant la force et le moment appliqués sur les éléments en fonctions de leurs positions et vitesses respectives.

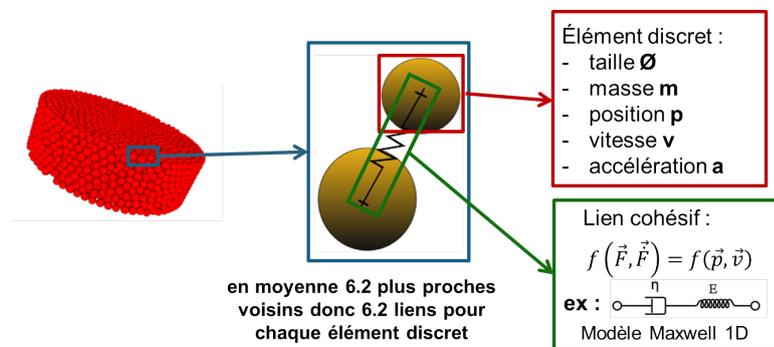


FIGURE 3.20 – Constitution d'un modèle DEM de matériau continu.

En DEM, à chaque pas de temps et pour chaque élément discret, le calcul est basé sur la suite d'opérations suivantes (Fig. 3.21) :

1. connaissance de la position, l'orientation et la vitesse
2. détermination des forces et moments appliqués grâce aux lois d'interactions entre éléments (liaisons cohésives, contacts...)
3. calcul de l'accélération en sommant les forces et moments appliqués (2^{me} loi de Newton)
4. calcul de la nouvelle position, orientation et vitesse par intégration numérique

La plate-forme GranOO

Composants de base. La plate-forme de calcul GranOO est développée à l'I2M. Elle offre les bases nécessaires au calcul DEM en dynamique explicite. Elle est conçue suivant l'approche orientée objet et constituée

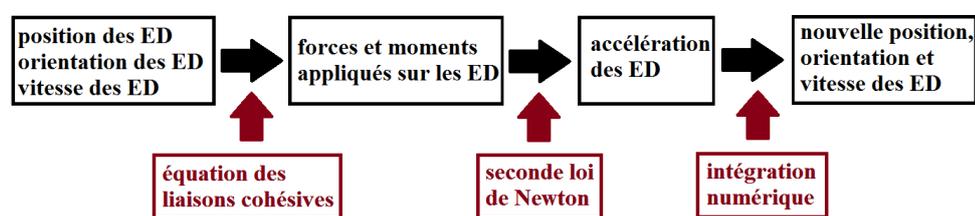


FIGURE 3.21 – Enchaînement des étapes de calcul lors d'un pas de temps de simulation DEM viscoélastique. En rouge sont présentées les étapes de calcul et en noir les entrées et sorties des calculs.

de trois bibliothèques C++ :

- la libGeometrical fournit les classes liées aux aspects géométriques 3D des calculs DEM (vecteurs, repères... et notamment les quaternions, représentant toutes les rotations 3D)
- la libDEM gère la représentation des concepts liés aux aspects éléments discrets (éléments, liaisons cohésives...)
- la libUtil contient les accessoires nécessaires au calcul DEM (lectures de fichiers XML, gestion de l'ajout de modules personnels...)

L'utilisateur peut développer ses propres plugins et les "brancher" sur la distribution GranOO pour y ajouter les fonctionnalités souhaitées.

Simulation GranOO. Une simulation GranOO se déroule en plusieurs étapes. Tout d'abord, on génère un exécutable contenant la distribution GranOO de base et les plugins (développés en C++) éventuellement nécessaires. On réalise ensuite le ou les domaines discrets que l'on souhaite étudier par l'intermédiaire du "discrete domain cooker". On écrit ensuite un fichier input qui contient tous les paramètres de la simulation. Il est alors possible d'exécuter le programme GranOO à l'aide du fichier input et des fichiers de domaine discret afin de réaliser un calcul DEM. Les données de sortie peuvent alors être visualisées, et traitées par un programme Python pour le tracé de courbes... (Fig. 3.22, [96]).

GranOO contient ainsi toutes les briques de base nécessaires à un calcul DEM. Pour faire un calcul DEM avec viscoélasticité, il suffit d'implémenter :

- les liaisons cohésives permettant de représenter le comportement sou-

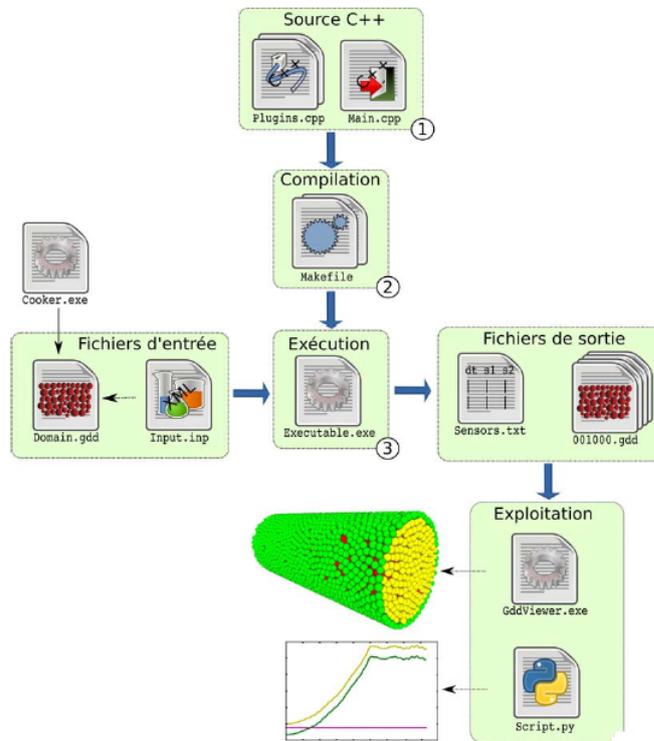


FIGURE 3.22 – Organisation d'un calcul DEM avec GranOO.

haité

- les conditions aux limites voulues.

Résolution dynamique explicite

Le schéma d'intégration utilisé dans GranOO est un algorithme explicite Verlet – vitesses :

$$\vec{p}(t + dt) = \vec{p}(t) + dt \vec{\dot{p}}(t) + \frac{dt^2}{2} \vec{\ddot{p}}(t) \quad (3.12)$$

$$\vec{\dot{p}}(t + dt) = \vec{\dot{p}}(t) + \frac{dt}{2} (\vec{\ddot{p}}(t) + \vec{\ddot{p}}(t + dt)) \quad (3.13)$$

$$q(t + dt) = q(t) + dt \dot{q}(t) + \frac{dt^2}{2} \ddot{q}(t) \quad (3.14)$$

$$\dot{q}(t + dt) = \dot{q}(t) + \frac{dt}{2} (\ddot{q}(t) + \ddot{q}(t + dt)) \quad (3.15)$$

où t est le temps et dt le pas de temps d'intégration. \vec{p} et q sont respectivement le vecteur position de l'élément discret et le quaternion représentant son orientation par rapport au repère global (\dot{q} est reliée à la vitesse de rotation de l'élément).

Le choix d'un algorithme explicite implique une limitation du pas de temps numérique pour des raisons de stabilité. En fonction des paramètres choisis, il existe un pas de temps critique au-delà duquel la stabilité du domaine n'est plus assurée [40]. Les calculs DEM pouvant être très longs, une fonctionnalité de GranOO permet de calculer ce pas de temps critique pour s'en rapprocher le plus possible.

On souhaite implémenter dans GranOO la possibilité de simuler des matériaux viscoélastiques. Un état des lieux de la viscoélasticité dans les modèles par éléments discrets est donc effectué.

3.5.3 Les liaisons cohésives viscoélastiques

État de l'art

La viscoélasticité est un phénomène peu étudié en DEM et est rarement le phénomène central que l'on souhaite observer. Un modèle de liaisons cohésives de type ressort et amortisseur en série est utilisé par Tavarez et Plesha [98] pour l'étude 2D de la transition solide – granulaire.

Des liaisons cohésives de type Burger (Fig. 3.23) tangentielles et normales ont été implémentées dans un code par éléments discrets afin de modéliser en 3D la viscoélasticité des mélanges d'asphalte constitués de goudron et agrégats [99]. Le fluage [100] et la réponse fréquentielle [99, 101] ont ainsi pu être correctement modélisées pour un matériau hétérogène complexe. Les modèles micromécaniques avec composante normale et tangentielle ne permettent pas d'avoir un comportement local complet 3D (traction-compression, torsion, flexion). Un modèle de liaison cohésive poutre [96] a permis de modéliser un matériau élastique fragile amorphe [97]. Pour un modèle micromécanique complet de poix amorphe, il faut donc introduire de la viscosité dans le modèle de liaison cohésive poutre.

On liste dans un premier temps les modèles rhéologiques 1D existants, avant de repérer qualitativement lesquels sont adaptés à la viscoélasticité de la poix.

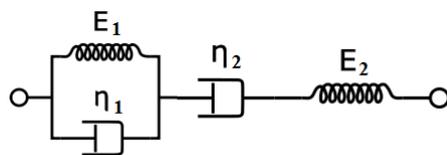


FIGURE 3.23 – Modèle de Burger.

Modèles rhéologiques 1D de viscoélasticité

Modèles de base. Dans le cadre de l'élasticité et la viscosité linéaires, les deux modèles rhéologiques de base sont le ressort de module de Young E et l'amortisseur visqueux de module visqueux η (Fig. 3.24). Les équations d'un ressort et d'un amortisseur sont respectivement $\sigma = E\epsilon$ et $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$.



FIGURE 3.24 – Modèles de bases : ressort et amortisseur.

Modèles à deux paramètres. Il existe deux types de modèles : série et parallèle. Le modèle parallèle est appelé "modèle de Kelvin – Voigt" (Fig. 3.25). Son équation contraintes – déformation est :

$$\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon} \quad (3.16)$$

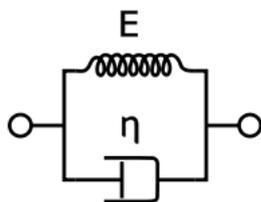


FIGURE 3.25 – Modèle de Kelvin – Voigt.

3. MODÉLISATION DE LA POIX

Le modèle en série est appelé "modèle de Maxwell" (Fig. 3.26). Son équation contraintes – déformation est :

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma = E\dot{\epsilon} \quad (3.17)$$

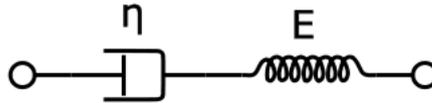


FIGURE 3.26 – Modèle de Maxwell.

où $\tau = \frac{\eta}{E}$ est le temps de relaxation du modèle.

Modèle à trois paramètres. Un modèle à trois paramètres classique est le modèle du Solide Linéaire Standard (Standard Linear Solid, "SLS") ou modèle de Zener (Fig. 3.27). Son équation contraintes – déformation est :

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau}\sigma = (E_1 + E_2)\dot{\epsilon} + \frac{E_1}{\tau}\epsilon \quad (3.18)$$

où $\tau = \frac{\eta}{E_2}$ temps de relaxation de la composante Maxwell du modèle.

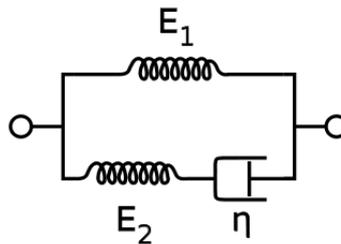


FIGURE 3.27 – Modèle SLS (modèle de Zener).

Modèle à quatre paramètres. Le modèle de Burger présenté Fig. 3.23 a pour équation contraintes – déformation :

$$\ddot{\sigma} + \left(\frac{E_2}{\eta_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} \right) \dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \sigma = E_2 \ddot{\epsilon} + \frac{E_2}{\tau_1} \dot{\epsilon} \quad (3.19)$$

où $\tau_1 = \frac{\eta_1}{E_1}$ et $\tau_2 = \frac{\eta_2}{E_2}$.

Tous ces modèles ont des comportements fréquentiels différents, plus ou moins adaptés à certains types de matériaux.

Comportements associés aux différents modèles. Les équations associées à chaque modèle peuvent être résolues simplement par passage à la notation complexe. Le module dynamique $\frac{\sigma}{\epsilon}$ est alors séparé en une partie réelle E' et une partie imaginaire E'' . Leur expression en fonction de la pulsation ω est présentée dans la Table 3.4.

TABLE 3.4 – Expression du module de conservation et du module de perte pour les modèles de Maxwell, Kelvin-Voigt et Zener.

modèle	E'	E''
Kelvin – Voigt	E	$\eta\omega$
Maxwell	$\frac{E\tau^2\omega^2}{1+\tau^2\omega^2}$	$\frac{E\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$
SLS (Zener)	$\frac{(E_1+E_2)\tau^2\omega^2}{1+\tau^2\omega^2}$	$\frac{E_2\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$

Les courbes de module dynamique (plus précisément le module du module dynamique complexe G^*) associées à chaque modèle sont présentées Fig. 3.28.

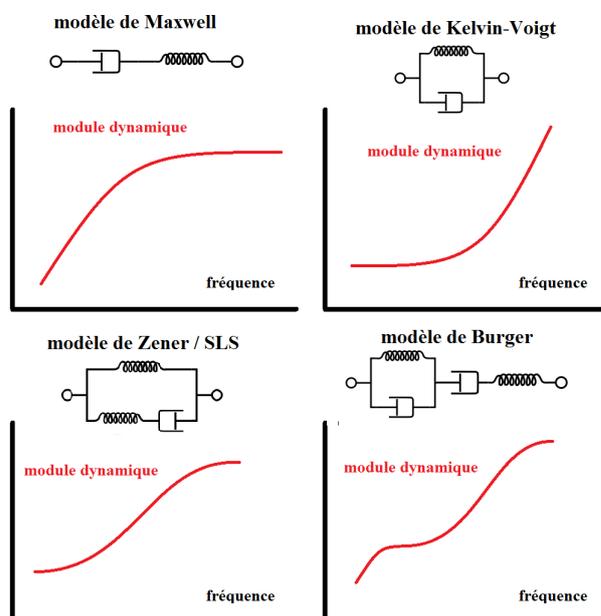


FIGURE 3.28 – Allure des modules dynamiques pour les quatre modèles présentés.

Dans les cas Maxwell, Zener et Burger, on peut remarquer que lorsqu'on fait tendre la fréquence vers l'infini, le module maximal atteint en HF ne dépend que du paramètres E . Le paramètre η n'a donc pas d'impact sur le module maximal atteint, il n'intervient que dans la fréquence de coupure. Lors d'une variation de température, la composante élastique E ne varie pas. Seul le coefficient visqueux est impacté par un changement de température. Ceci se retrouve expérimentalement : si on fait varier la température, on décale la courbe latéralement en fréquence, mais les valeurs min et max atteignables restent inchangées.

La viscosité est introduite en 1D par un amortisseur dont la "raideur dynamique" – à la pulsation ω , elle vaut $\eta\omega$ (en N/m) – varie en fonction de la fréquence (et la température). Le matériau qu'on souhaite modéliser a un comportement 3D, donc pour reproduire ce comportement à l'échelle des liens cohésifs, on travaille alors en 3D avec des poutres visqueuses.

Concept de la poutre visqueuse

Poutre élastique. Le modèle viscoélastique s'appuie sur le modèle de poutre élastique précédemment développé [96]. Les poutres ont un comportement suivant la théorie d'Euler – Bernoulli. Les orientations des repères locaux sont présentées Fig. B.1 [97]. Le repère $F_1 (O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ est lié à l'élément discret 1. Son orientation est définie par le quaternion permettant de transformer le repère global en repère F_1 . De même, le repère $F_2 (O_2, X_2, Y_2, Z_2)$ est lié à l'élément discret 2. À chaque pas de temps de calcul, on construit à partir de la connaissance de F_1 le repère $F (O_1, X, Y, Z)$ lié à la poutre et c'est dans ce dernier que sont exprimés les forces et moments appliqués sur chaque élément discret.

On peut alors écrire [97] :

$$\vec{F}_{DE_1} = E_\mu S_\mu \frac{\Delta L_\mu}{L_\mu} \vec{X} - \frac{6E_\mu I_\mu}{L_\mu^2} ((\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Y} + (\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Z}) \quad (3.20)$$

$$\vec{F}_{DE_2} = -E_\mu S_\mu \frac{\Delta L_\mu}{L_\mu} \vec{X} + \frac{6E_\mu I_\mu}{L_\mu^2} ((\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Y} - (\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Z}) \quad (3.21)$$

$$\vec{M}_{DE_1} = \frac{G_\mu I_{0\mu}}{L_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x}) \vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{L_\mu} ((\theta_{2y} + 2\theta_{1y}) \vec{Y} - (\theta_{2z} + 2\theta_{1z}) \vec{Z}) \quad (3.22)$$

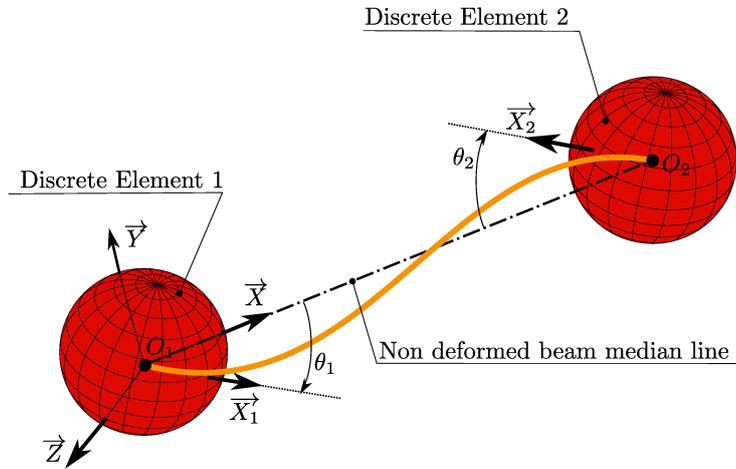


FIGURE 3.29 – Schéma de la géométrie d'une poutre élastique en charge.

$$\vec{M}_{DE_2} = \frac{-G_\mu I_{0\mu}}{L_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x}) \vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{L_\mu} ((2\theta_{2y} + \theta_{1y}) \vec{Y} + (2\theta_{2z} + \theta_{1z}) \vec{Z}) \quad (3.23)$$

avec E_μ et G_μ respectivement le module de Young et le module de cisaillement de la poutre. I_μ , $I_{0\mu}$ sont respectivement le moment d'inertie selon les axes Y ou Z et le moment d'inertie polaire de la poutre. S_μ et L_μ sont la surface et la longueur initiale de la poutre. θ_1 et θ_2 sont les angles de rotation (suivant les 3 axes) de la poutre en O_1 et O_2 .

Par la suite afin de faciliter la lecture, on ne présentera que les forces et moments appliqués sur l'élément discret 1. Les équations complètes sont présentées en annexe.

Poutre visqueuse. Pour une poutre visqueuse, on travaille par analogie avec le modèle de poutre élastique d'Euler – Bernoulli : les paramètres élastiques deviennent des paramètres visqueux (indiqués par le symbole $\dot{}$) et les angles et positions se transforment en leurs dérivées temporelles (vitesses de rotation et vitesses linéaires dans le repère associé à la

3. MODÉLISATION DE LA POIX

poutre). On peut donc écrire :

$$\vec{F}'_{DE_1} = E'_\mu S_\mu \frac{\Delta \dot{L}_\mu}{L_\mu} \vec{X} - \frac{6E'_\mu I_\mu}{L_\mu^2} ((\dot{\theta}_{2z} + \dot{\theta}_{1z}) \vec{Y} + (\dot{\theta}_{2y} + \dot{\theta}_{1y}) \vec{Z}) \quad (3.24)$$

$$\vec{M}'_{DE_1} = \frac{G'_\mu I_{0\mu}}{L_\mu} (\dot{\theta}_{2x} - \dot{\theta}_{1x}) \vec{X} - \frac{2E'_\mu I_\mu}{L_\mu} ((\dot{\theta}_{2y} + 2\dot{\theta}_{1y}) \vec{Y} - (\dot{\theta}_{2z} + 2\dot{\theta}_{1z}) \vec{Z}) \quad (3.25)$$

Une combinaison de poutres élastiques et visqueuses permet donc de créer des poutres viscoélastiques basées sur les modèles rhéologiques 1D classiques : Kelvin – Voigt, Maxwell et SLS. Ces modèles doivent permettre de modéliser divers comportements viscoélastiques, notamment celui de la poix.

Poutres viscoélastiques

Poutre de Kelvin – Voigt.

$$\vec{F}'_{KV_{DE_1}} = \vec{F}'_{DE_1} + \vec{F}'_{DE_1} \quad (3.26)$$

$$\vec{M}'_{KV_{DE_1}} = \vec{M}'_{DE_1} + \vec{M}'_{DE_1} \quad (3.27)$$

La création de liaisons viscoélastiques de type Kelvin – Voigt 3D est réalisée dans GranOO par la ligne de commande présentée Fig. 3.30.

```
<!-- Conversion des liens en poutre de type Kelvin-Voigt 3D -->
<PlugIn Id="ConvertBondToViscoBeamVoigt" Bond3DSet="nom de l'ensemble de liens à convertir"
YoungModulus="module élastique de la poutre"
ViscousYoungModulus="module visqueux de la poutre"
RadiusRatio="rapport entre le rayon de l'élément et la poutre"
PoissonRatio="coefficient de poisson élastique"
ViscousPoissonRatio="coefficient de poisson visqueux"
FailureStress="contrainte à rupture" />
```

FIGURE 3.30 – Création de liens cohésifs viscoélastiques de type Kelvin – Voigt 3D sous GranOO.

Poutre de Maxwell.

$$\vec{F}'_{M_{DE_1}} + \frac{1}{\tau} \vec{F}'_{M_{DE_1}} = E_\mu S_\mu \frac{\Delta \dot{L}_\mu}{L_\mu} \vec{X} - \frac{6E_\mu I_\mu}{L_\mu^2} ((\dot{\theta}_{2z} + \dot{\theta}_{1z}) \vec{Y} + (\dot{\theta}_{2y} + \dot{\theta}_{1y}) \vec{Z}) \quad (3.28)$$

$$\vec{M}_{MDE_1} + \frac{1}{\tau} \vec{M}_{MDE_1} = \frac{G_\mu I_{0\mu}}{L_\mu} (\dot{\theta}_{2x} - \dot{\theta}_{1x}) \vec{X} - \frac{2E_\mu I_\mu}{L_\mu} ((\dot{\theta}_{2y} + 2\dot{\theta}_{1y}) \vec{Y} - (\dot{\theta}_{2z} + 2\dot{\theta}_{1z}) \vec{Z}) \quad (3.29)$$

Il n'y a pas de relation directe entre les forces et moments et les positions et vitesses des éléments discrets. Il faut passer par la résolution d'une équation différentielle du premier ordre. Le schéma d'intégration RK-4,4 est sélectionné car étant d'ordre élevé, il est suffisamment précis. Cette précision est nécessaire car ces calculs sont répétés un grand nombre de fois, l'erreur induite par le schéma d'intégration doit donc être minimisée. Pour chacune des 6 composantes totales de la force et du moment, on résout donc l'équation suivante.

$$C_i(t + dt) = C_i(t) + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.30)$$

où C représente soit une force ou un moment et i le numéro de l'élément discret dans la liaison ($i = 1$ ou $i = 2$), et

$$k_1 = dt \left(f(\dot{\epsilon}, t) - \frac{1}{\tau} C_i(t) \right) \quad (3.31)$$

$$k_2 = dt \left(f\left(\dot{\epsilon}, t + \frac{dt}{2}\right) - \frac{1}{\tau} \left(C_i\left(t + \frac{dt}{2}\right) + \frac{k_1}{2} \right) \right) \quad (3.32)$$

$$k_3 = dt \left(f\left(\dot{\epsilon}, t + \frac{dt}{2}\right) - \frac{1}{\tau} \left(C_i\left(t + \frac{dt}{2}\right) + \frac{k_2}{2} \right) \right) \quad (3.33)$$

$$k_4 = dt \left(f(\dot{\epsilon}, t + dt) - \frac{1}{\tau} (C_i(t + dt) + k_3) \right) \quad (3.34)$$

Ici, $f(\dot{\epsilon}, t)$ désigne la fonction qui permet d'exprimer la dérivée de la force (du moment) à l'instant t en fonction de la déformation à l'instant t .

Il faut alors dans ce cas estimer la vitesse au pas de temps intermédiaire $t + \frac{dt}{2}$ et au pas de temps $t + dt$ qui est inconnue. On n'est pas dans le cas d'un problème de Cauchy où l'évolution de la fonction f est connue. On estime donc ces valeurs par des développements de Taylor à l'ordre 1 grâce à la connaissance de l'accélération :

$$V_i\left(t + \frac{dt}{2}\right) = V_i(t) + \frac{dt}{2} A_i(t) \quad (3.35)$$

3. MODÉLISATION DE LA POIX

$$V_i(t + dt) = V_i(t) + dtA_i(t) \quad (3.36)$$

avec V vitesse et A accélération.

⇒ L'introduction de ces valeurs à l'ordre 1 dégrade l'ordre d'intégration du schéma numérique mais en pratique, comme montré dans la suite de cette section, cette méthode plus rapide donne cependant des résultats satisfaisants.

La création de liaisons viscoélastiques de type Maxwell 3D est réalisée dans GranOO par la ligne de commande présentée Fig. 3.31.

```
<!-- Conversion des liens en poutre de type Maxwell 3D -->
<PlugIn Id="ConvertBondToViscoBeamMaxwell" Bond3DSet="nom de l'ensemble de liens à convertir"
YoungModulus="module élastique de la poutre"
ViscousYoungModulus="module visqueux de la poutre"
RadiusRatio="rapport entre le rayon de l'élément et la poutre"
PoissonRatio="coefficient de poisson élastique"
ViscousPoissonRatio="coefficient de poisson visqueux"
Integrator="type d'intégrateur choisi"
FailureStress="contrainte à rupture" />
```

FIGURE 3.31 – Création de liens cohésifs viscoélastiques de type Maxwell 3D sous GranOO.

Poutre solide linéaire standard.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{S_{DE_1}} + \frac{1}{\tau} \vec{F}_{S_{DE_1}} &= \left((E_{1\mu} + E_{2\mu}) S_\mu \frac{\Delta \dot{L}_\mu}{L_\mu} + \frac{E_1 S}{\tau} \frac{\Delta L_\mu}{L_\mu} \right) \vec{X} \\ &- \left(\frac{6 (E_{1\mu} + E_{2\mu}) I_\mu}{L_\mu^2} (\dot{\theta}_{2z} + \dot{\theta}_{1z}) + \frac{6 E_{1\mu} I_\mu}{\tau L_\mu^2} (\theta_{2z} + \theta_{1z}) \right) \vec{Y} \\ &- \left(\frac{6 (E_{1\mu} + E_{2\mu}) I_\mu}{L_\mu^2} (\dot{\theta}_{2y} + \dot{\theta}_{1y}) + \frac{6 E_{1\mu} I_\mu}{\tau L_\mu^2} (\theta_{2y} + \theta_{1y}) \right) \vec{Z} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{S_{DE_1}} + \frac{1}{\tau} \vec{M}_{S_{DE_1}} = & \left(\frac{(G_{1\mu} + G_{2\mu}) I_{0\mu}}{L_\mu} (\dot{\theta}_{2x} - \dot{\theta}_{1x}) + \frac{G_{1\mu} I_{0\mu}}{\tau L_\mu} (\theta_{2x} - \theta_{1x}) \right) \vec{X} \\
& - \left(\frac{2(E_{1\mu} + E_{2\mu}) I_\mu}{L_\mu} (\dot{\theta}_{2y} + 2\dot{\theta}_{1y}) + \frac{2E_{1\mu} I_\mu}{\tau L_\mu} (\theta_{2y} + 2\theta_{1y}) \right) \vec{Y} \\
& + \left(\frac{2(E_{1\mu} + E_{2\mu}) I_\mu}{L_\mu} (\dot{\theta}_{2z} + 2\dot{\theta}_{1z}) + \frac{2E_{1\mu} I_\mu}{\tau L_\mu} (\theta_{2z} + 2\theta_{1z}) \right) \vec{Z}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Comme dans le cas des poutres de Maxwell, il faut résoudre une équation différentielle pour obtenir les forces et moments. Le même schéma explicite RK-4,4 peut être utilisé.

La création de liaisons viscoélastiques de type SLS (Zener) 3D est réalisée dans GranOO par la ligne de commande présentée Fig. 3.32.

```

<!-- Conversion des liens en poutre de type SLS (Zener) 3D -->

<PlugIn Id="ConvertBondToViscoBeamZener" Bond3DSet="nom de l'ensemble de liens à convertir"
YoungModulus1="module élastique de la partie de poutre élastique pure"
YoungModulus2="module élastique de la partie de poutre Maxwell"
ViscousYoungModulus="module visqueux de la partie de poutre Maxwell"
RadiusRatio="rapport entre le rayon de l'élément et la poutre"
PoissonRatio="coefficient de poisson élastique"
ViscousPoissonRatio="coefficient de poisson visqueux"
Integrator="type d'intégrateur choisi"
FailureStress="contrainte à rupture" />

```

FIGURE 3.32 – Création de liens cohésifs viscoélastiques de type SLS (Zener) 3D sous GranOO.

Si on ajoute une deuxième poutre visqueuse dans le modèle, on passe alors à des équations d'ordre 2 qui sont encore un peu plus longues à résoudre. Ces modèles ne sont donc pas abordés dans le cadre de cette thèse.

⇒ L'expérience montre que la poix présente un comportement plutôt typé Maxwell, c'est donc ce modèle qui sera choisi pour modéliser la poix.

3.5.4 Création d'éprouvettes numériques

La première étape d'un calcul DEM est la création d'un domaine discret constitué d'une multitude d'éléments discrets. On utilise la fonc-

tionnalité de GranOO permettant de créer des domaines évitant de faire apparaître des organisations cristallines privilégiées et générant donc un matériau amorphe présentant un comportement isotrope [97].

Un domaine discret est ainsi préparé en plusieurs étapes :

- délimitation du volume englobant le domaine discret par des murs
- ajout d'éléments discrets au hasard dans le volume sans contact avec les éléments déjà présents
- lorsque ceci n'est plus possible, le bourrage des éléments commence. Les éléments sont ajoutés et les contacts entre éléments et murs sont effectués
- lorsque le nombre de coordination des éléments atteint en moyenne 6.2, le bourrage est stoppé
- une étape facultative de relâchement des contraintes peut avoir lieu afin de limiter les contraintes internes initiales dues aux interpénétrations des éléments. Comme dans cette étude le comportement du matériau est assuré par des liens cohésifs, les contacts ne sont pas utilisés et donc l'interpénétration initiale des éléments n'a pas d'influence sur le comportement global.

À l'issue de cette étape, les domaines discrets peuvent être utilisés pour les expériences numériques de torsion correspondant à l'étude expérimentale menée en DMA.

3.5.5 Expérience numérique de torsion

Description

L'objectif est de reproduire le mouvement de torsion appliqué en DMA. Un mouvement de torsion à fréquence donnée est donc appliqué aux deux extrémités d'une éprouvette numérique cylindrique (Fig. 3.33). La torsion est réalisée autour de l'axe reliant les centres de gravité des surfaces aux extrémités de la poutre. Les centres de masse des surfaces supérieure et inférieure sont déterminés. Un axe de torsion est alors créé entre ces deux points. La torsion est ensuite réalisée en faisant tourner les surfaces inférieure et supérieure autour de cet axe.

Le couple (et la contrainte sur le rayon extérieur de l'éprouvette) résultant est calculé sur la partie supérieure de l'éprouvette, ce qui permet de récupérer le déphasage entre déformation appliquée et contrainte résultante ainsi que l'amplitude maximale du couple. On peut ensuite calculer les modules de conservation et de perte à la fréquence choisie.

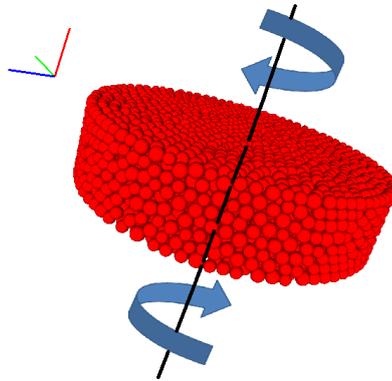


FIGURE 3.33 – Expérience de torsion réalisée.

Un balayage fréquentiel permet alors de reconstruire des courbes de module dynamique (Fig. 3.34).

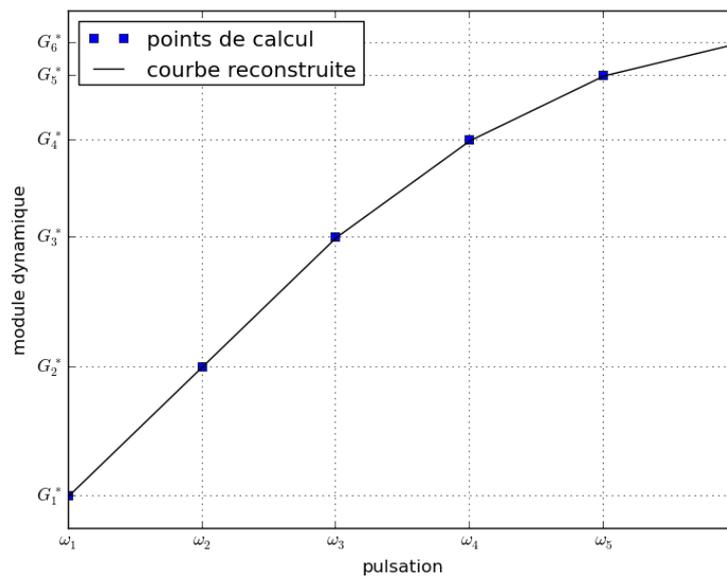


FIGURE 3.34 – Reconstruction des courbes en fréquence.

Effet du rayon de l'éprouvette numérique

Les éprouvettes expérimentales ont un rapport rayon / épaisseur important (= 12.5 mm) et sont difficiles à obtenir avec un nombre raisonnable d'éléments discrets. En effet, on considère qu'il faut environ une dizaine de couches d'éléments afin de réduire l'effet de la discrétisation dans l'épaisseur. Cela implique donc des éléments ayant un rayon de l'ordre de 50 microns. Pour remplir un cylindre de rayon 12.5 mm et épaisseur 1 mm, il faudrait environ 900000 éléments et cela générerait alors des temps de calculs prohibitifs. Pour pouvoir travailler avec des éprouvettes numériques ayant des rayons permettant des calculs DEM, on étudie donc l'évolution du moment de torsion calculé aux extrémités du cylindre en fonction du rayon de l'éprouvette. Cela permet de déterminer une loi reliant les valeurs de moment obtenues numériquement sur des éprouvettes de dimensions réduites et les résultats expérimentaux. Expérimentalement, on sait que dans le cas d'une géométrie plan – plan, le moment de torsion Γ varie avec la puissance quatrième du rayon R :

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \nu \frac{\Omega}{h} R^4 \quad (3.39)$$

avec Ω la vitesse angulaire du mouvement, h l'épaisseur de l'éprouvette et ν la viscosité apparente du matériau.

Cette variation est retrouvée numériquement (Fig. 3.35), confirmant ainsi la possibilité de travailler avec des domaines discrets réduits mais toujours représentatifs de la réalité expérimentale. La pente de la courbe dépend des conditions aux limites choisies.

⇒ Un bon compromis est de travailler avec des éprouvettes numériques de rayon 2 mm et épaisseur 1 mm.

Convergence en fonction du nombre d'éléments discrets

Les calculs par éléments discrets pouvant être très longs, on détermine dans un premier temps le nombre d'éléments discrets minimum nécessaire pour un calcul fiable et répétable. Pour cela, on effectue un calcul de torsion à une fréquence donnée (10 kHz) pour des éprouvettes numériques de même dimension constituées d'un nombre différent d'éléments discrets (Fig. 3.36).

Pour chaque nombre d'éléments, trois éprouvettes différentes sont réalisées afin d'étudier la répétabilité du calcul (Table 3.5). Les éprouvettes numériques sont des cylindres de diamètre 4 mm et épaisseur 1 mm.

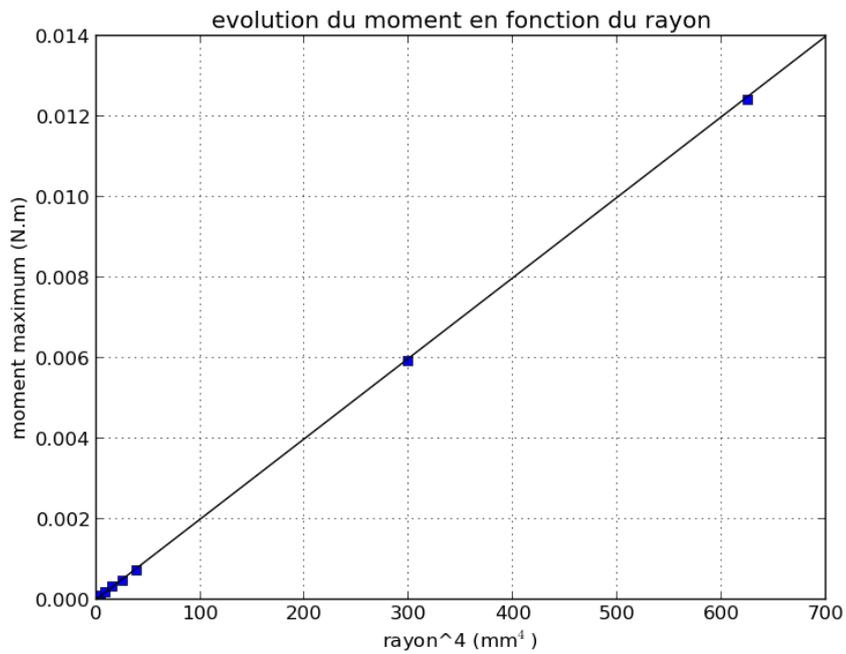


FIGURE 3.35 – Évolution du moment aux extrémités de l'éprouvette en fonction du rayon.

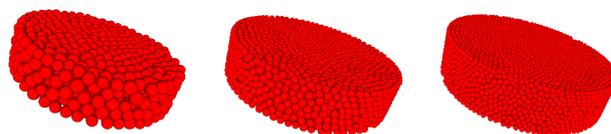


FIGURE 3.36 – Exemples de domaines discrets créés. (gauche) 1000 éléments, (centre) 5000 éléments, (droite) 15000 éléments.

TABLE 3.5 – Étude de convergence sur éprouvette cylindrique 4 x 1 mm.

éprouvette	nombre d'éléments	rayon moyen des éléments μm
1 – 3	1000	123
4 – 6	3000	86
7 – 9	5000	72
10 – 12	7000	67
13 – 15	9000	59
16 – 18	11000	56
19 – 21	13000	53
22 – 24	15000	50

Les résultats de l'étude de convergence sont présentés Fig. 3.37. On constate une stabilisation des valeurs à partir de 5000 éléments discrets dans une fourchette de $\pm 7.5\%$ autour de la moyenne.

⇒ Une fois que les valeurs des paramètres des liaisons cohésives sont fixées, la valeur du module dynamique macroscopique est indépendante du nombre d'éléments discrets constituant l'éprouvette numérique. Cela confirme les résultats obtenus sur les poutres élastiques [97]. Le modèle général de poutre semble donc permettre *naturellement* une indépendance des paramètres macroscopiques par rapport au nombre d'éléments, tout en permettant une précision au moins égale à celle d'autres modèles élastiques ou viscoélastiques [99] nécessitant parfois le calcul systématique de paramètres correcteurs [102].

Les calculs sont par la suite réalisés avec 5000 éléments discrets.

3.5.6 Équivalence temps – température

Numériquement, l'équivalence temps – température peut être utilisée pour diminuer les temps de calcul nécessaires [103]. Augmenter la température à fréquence constante revient à diminuer la fréquence à température constante. Cela signifie aussi que si on obtient un module dynamique pour une fréquence et une température donnée, on peut retrouver exactement le même module en diminuant la température et augmentant la fréquence.

⇒ Dans les modèles linéaires présentés, seul le coefficient visqueux dépend de la température, l'équivalence temps – température devient alors une "superposition temps – viscosité".

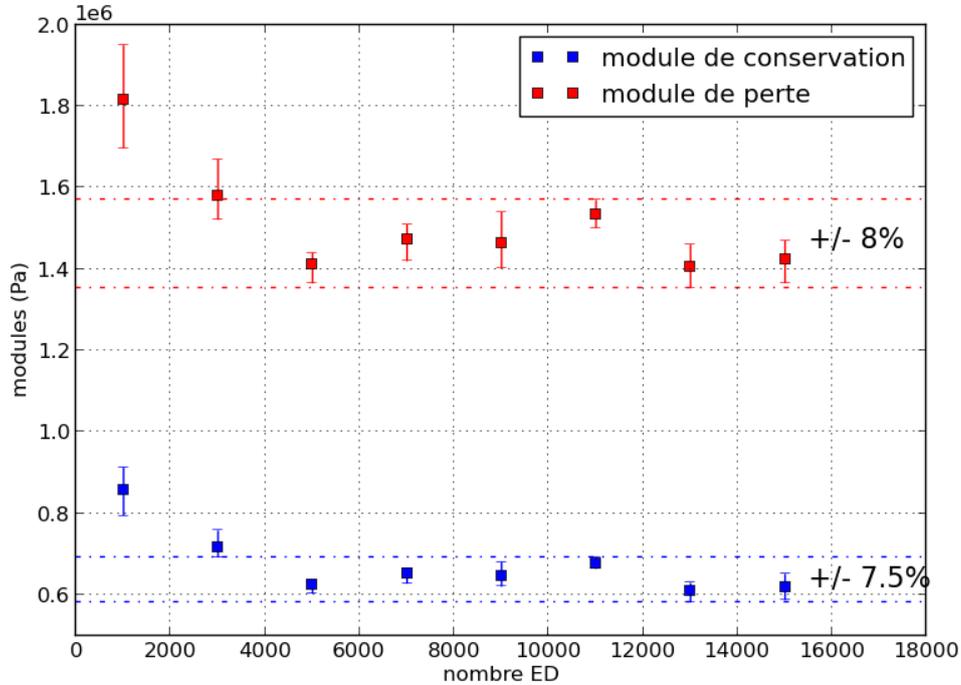


FIGURE 3.37 – Évolution des modules en fonction du nombre d'éléments discrets.

Pour un même nombre de périodes d'oscillations simulées, le temps de calcul diminue linéairement avec la fréquence d'excitation. L'équivalence temps – viscosité permet de relier le comportement à une fréquence et viscosité donnée avec le comportement à une fréquence et viscosité différentes. L'objectif est de créer une expérience numérique à une fréquence supérieure à la fréquence initiale (expérimentale), qui va cependant permettre d'obtenir le même module dynamique qu'à la fréquence initiale. Pour cela on fait varier la viscosité des liaisons cohésives. L'analyse des équations de module des liaisons Maxwell montre bien cette interdépendance viscosité – fréquence, que l'on retrouve aussi sur les modèles de Zener et de Burger :

$$E' = \frac{E_\mu (\tau\omega)^2}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (3.40)$$

3. MODÉLISATION DE LA POIX

$$E'' = \frac{E_\mu (\tau\omega)}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (3.41)$$

Si on multiplie la pulsation (fréquence) par un facteur a , il faut multiplier le coefficient visqueux par le facteur $\frac{1}{a}$ pour conserver les mêmes valeurs de modules. Cela revient simplement à effectuer une simulation à une température supérieure.

⇒ On retrouve bien la formulation expérimentale de l'équivalence temps – température.

Afin de valider cette méthode, on calcule numériquement l'évolution du module dynamique en fonction d'une variation inverse de fréquence et de coefficient visqueux. Un premier calcul est effectué avec une viscosité η_0 à une fréquence de 100 Hz. La fréquence est progressivement augmentée et le module visqueux diminué de manière inverse. On observe que le résultat est toujours compris dans une fenêtre de 4.2% autour d'une valeur moyenne (Fig. 3.38).

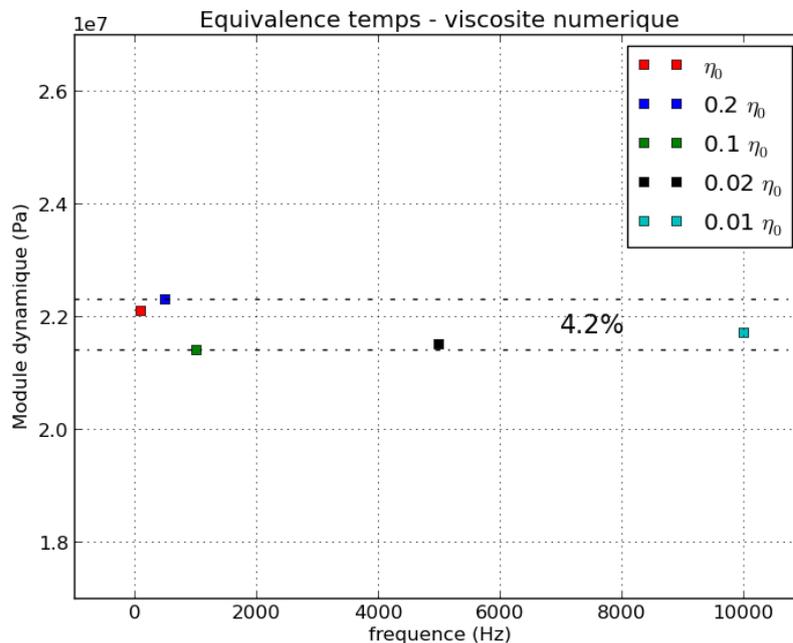


FIGURE 3.38 – Illustration du principe d'équivalence temps – viscosité numérique.