

Modélisation de la machine à induction polyphasée

2.1 Modélisation analytique et réduction de dimensions

2.1.1 Représentation généralisée par les équations de tension

La machine à induction est généralement représentée par ses équations de tensions [56]. Ces équations permettent de modéliser les grandeurs électriques liées au bobinage statorique et à la cage rotorique, elles sont exprimées dans « la base naturelle » comme suit :

$$\underline{V}_s = \underline{R}_s \cdot \underline{I}_s + \frac{d\underline{\phi}_s}{dt}, \quad 2-1$$

$$\underline{V}_r = 0 = \underline{R}_r \cdot \underline{I}_r + \frac{d\underline{\phi}_r}{dt}, \quad 2-2$$

$$\underline{\phi}_s = \underline{L}_{ss} \cdot \underline{I}_s + \underline{L}_{sr}(\theta) \cdot \underline{I}_r, \quad 2-3$$

$$\underline{\phi}_r = \underline{L}_{rr} \cdot \underline{I}_r + \underline{L}_{rs}(\theta) \cdot \underline{I}_s, \quad 2-4$$

Tel que :

- \underline{V}_s est le vecteur de tension statorique dans la base naturelle (dimension = nombre de phases statoriques N_{ph}) ;
- \underline{V}_r est le vecteur de tension rotorique dans la base naturelle (dimension = nombre de barres rotoriques N_{bar}) ;
- $\underline{\phi}_s$ est le vecteur de flux statorique dans la base naturelle (dimension = N_{ph}) ;
- $\underline{\phi}_r$ est le vecteur de flux rotorique dans la base naturelle (dimension = N_{bar}) ;
- \underline{I}_s est le vecteur de courant statorique dans la base naturelle (dimension = N_{ph}) ;
- \underline{I}_r est le vecteur de courant rotorique dans la base naturelle (dimension = N_{bar}) ;
- \underline{R}_s est la matrice de résistance statorique dans la base naturelle (dimensions = $N_{ph} \times N_{ph}$) ;
- \underline{R}_r est la matrice de résistance rotorique dans la base naturelle (dimensions = $N_{bar} \times N_{bar}$) ;
- \underline{L}_{ss} est la matrice d'inductance statorique dans la base naturelle (dimensions = $N_{ph} \times N_{ph}$) ;
- \underline{L}_{rr} est la matrice d'inductance rotorique dans la base naturelle (dimensions = $N_{bar} \times N_{bar}$) ;
- $\underline{L}_{rs}(\theta)$ est la matrice d'inductance mutuelle stator-rotor dans la base naturelle, dont les éléments varient en fonction de la position du rotor « θ » (dimensions = $N_{ph} \times N_{bar}$).

Au niveau du stator, les deux matrices de résistance et d'inductance s'écrivent comme suit :

$$\underline{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_s & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_s \end{bmatrix}, \quad 2-5$$

$$\underline{L}_{SS} = \begin{bmatrix} L_{s11} + L_{ls} & L_{s12} & \dots & \dots & L_{s1N_{ph}} \\ L_{s1N_{ph}} & L_{s11} + L_{ls} & L_{s12} & \dots & L_{s1(N_{ph}-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{s12} & \dots & \dots & L_{s1N_{ph}} & L_{s11} + L_{ls} \end{bmatrix}, \quad 2-6$$

La matrice \underline{R}_s est donc une matrice diagonale, avec R_s : la valeur de la résistance d'une phase du stator (les phases statoriques sont considérées identiques).

La matrice \underline{L}_{SS} est composée des éléments :

- L_{s11} : inductance propre magnétisante d'une phase statorique, en considérant un bobinage équilibré, cette inductance est la même pour toutes les phases du stator ;
- L_{s1i} : inductance mutuelle entre la phase « 1 » et la phase « i » du bobinage statorique ;
- L_{ls} : inductance de fuite d'une phase statorique.

Comme on peut remarquer dans l'équation 2-6, la matrice \underline{L}_{SS} est circulante (vu la régularité du bobinage). En outre, pour un bobinage équilibré, les termes L_{s12} et $L_{s1N_{ph}}$ sont égaux (plus généralement les termes L_{s1i} et $L_{s1(N_{ph}-i+2)}$, avec « i » différent de 1), ce qui donne à cette matrice la propriété de symétrie (une propriété liée à la réciprocité des flux).

Quant au rotor, la cage est modélisée selon la Figure 2.1. Chaque boucle rotorique, composée par deux demi-barres adjacentes et une portion de chaque anneau de court-circuit, est considérée comme une phase.

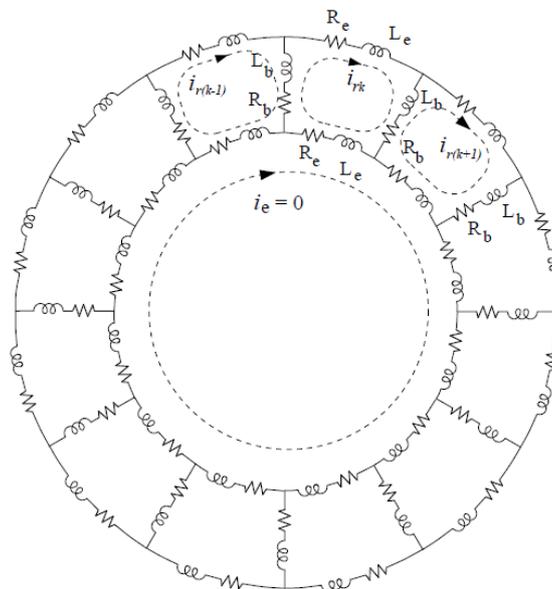


Figure 2.1 : Représentation de la cage rotorique [57].

En se basant sur cette représentation de la cage rotorique, les matrices de résistance et d'inductance rotoriques peuvent s'exprimer comme suit [56] :

$$\underline{R}_r = \begin{bmatrix} 2(R_b + R_e) & -R_b & 0 & \dots & -R_b \\ -R_b & 2(R_b + R_e) & -R_b & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_b & 0 & \dots & -R_b & 2(R_b + R_e) \end{bmatrix} \quad 2-7$$

$$\underline{L}_{rr} = \begin{bmatrix} L_{r11} + 2(L_b + L_e) & L_{r12} - L_b & L_{r13} & \dots & L_{r1(N_{bar}-1)} & L_{r1N_{bar}} - L_b \\ L_{r1N_{bar}} - L_b & L_{r11} + 2(L_b + L_e) & L_{r12} - L_b & L_{r13} & \dots & L_{r1(N_{bar}-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r12} - L_b & L_{r13} & \dots & L_{r1(N_{bar}-1)} & L_{r1N_{bar}} - L_b & L_{r11} + 2(L_b + L_e) \end{bmatrix} \quad 2-8$$

Tel que :

- R_b : résistance d'une barre rotorique ;
- R_e : résistance d'une portion d'anneau de court-circuit ;
- L_b : inductance d'une barre rotorique ;
- L_e : inductance d'une portion d'anneau de court-circuit ;
- L_{r11} : inductance propre magnétisante d'une phase rotorique (la même pour toutes les phases rotoriques) ;
- L_{r1i} : inductance mutuelle entre la phase « 1 » et la phase « i » du rotor.

La matrice \underline{L}_{rr} présente les mêmes propriétés de symétrie et de circularité que la matrice \underline{L}_{ss} .

La matrice d'inductance mutuelle stator-rotor $\underline{L}_{sr}(\theta)$ est variable en fonction de la position angulaire rotorique « θ » (position mécanique « θ », position électrique « $p \cdot \theta$ »). Le terme $L_{sr_{ij}}(\theta)$, entre une phase statorique « i » et une phase rotorique « j », peut s'écrire comme suit (valable uniquement pour un nombre entier d'encoches par paires de pôles, c.à.d. « $2 \cdot spp$ » entier, incluant les bobinages avec « $spp = 0.5, 1.5 \dots$ ») [58] :

$$L_{sr_{ij}}(\theta) = \sum_k M_{sr_{kp}} \cdot \cos \left(k \cdot \left((i-1) \frac{2\pi}{N_{ph}} - p(j-1) \frac{2\pi}{N_{bar}} - p\theta \right) + \varphi_{sr_{kp}} \right) \quad 2-9$$

Tel que : « k » est le rang d'harmonique électrique, « p » est le nombre de paires de pôles de la machine.

On remarque dans l'équation 2-9, que l'inductance mutuelle entre une phase statorique « i » et une phase rotorique « j » est une somme de composantes harmoniques d'inductance, liées aux harmoniques d'espace. Chaque composante harmonique d'inductance mutuelle de rang « k.p » est caractérisée par son amplitude « $M_{sr_{kp}}$ » et son argument « $\varphi_{sr_{kp}}$ ».

Pour simplifier l'écriture, la matrice $\underline{L}_{sr}(\theta)$ peut s'écrire sous la forme complexe suivante :

$$\underline{L}_{sr}(\theta) = \sum_k \text{real} \left(\widehat{(M_{sr})}_{kp} \begin{bmatrix} e^{-j.k.p\theta} & \dots & e^{j.k.(-p(N_{bar}-1)\frac{2\pi}{N_{bar}}-p\theta)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j.k.((N_{ph}-1)\frac{2\pi}{N_{ph}}-p\theta)} & \dots & e^{j.k.((N_{ph}-1)\frac{2\pi}{N_{ph}}-p(N_{bar}-1)\frac{2\pi}{N_{bar}}-p\theta)} \end{bmatrix} \right) \quad 2-10$$

Le terme complexe $\widehat{(M_{sr})}_{kp}$, lié à la composante harmonique de l'inductance mutuelle stator-rotor, s'écrit donc comme suit :

$$\widehat{(M_{sr})}_{kp} = M_{srkp} \cdot e^{j.\varphi_{srkp}} \quad 2-11$$

2.1.2 Transformation de Concordia généralisée : Réduction de dimensions statorique et rotorique

Les équations de tension (2-1 à 2-4) sont exprimées dans la base naturelle (dimensions statorique et rotorique : N_{ph} et N_{bar}), dans cette base les harmoniques se superposent (comme on peut le voir dans la matrice $\underline{L}_{sr}(\theta)$, équation 2-10), ce qui complique l'analyse de leurs interactions et leurs effets sur les performances de la machine.

Comme expliqué dans la section 1.2.1, la transformation de Concordia permet de séparer les harmoniques sur différents « plans α - β » découplés (indépendants entre eux). Par exemple, une machine triphasée, peut être modélisée par un circuit équivalent biphasé (correspondant à un plan α - β) et une composante homopolaire (non excitée en cas d'alimentation équilibrée des phases) grâce à la transformation de Concordia.

Plus généralement, un bobinage électrique contenant « n » phases régulièrement réparties peut être modélisé par :

- $\frac{n-1}{2}$ plans α - β , sur lesquels se répartissent des familles indépendantes d'harmoniques, et une composante homopolaire, si n est impair,
- $\frac{n}{2} - 1$ plans α - β , et deux composantes homopolaires, si n est pair.

La matrice de transformation de Concordia généralisée [18], pour une dimension « n » impaire, peut s'écrire comme suit :

$$\underline{A}_n = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \dots & \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) & \dots & \cos\left(\frac{(n-1)^2\pi}{n}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) & \dots & \sin\left(\frac{(n-1)^2\pi}{n}\right) \end{bmatrix}, \quad 2-12$$

La première ligne de la matrice correspond à la composante homopolaire. Si la dimension est paire « n+1 », une nouvelle ligne est ajoutée à la fin de la matrice de l'équation

2-12 : $\frac{2}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$. Cette ligne correspond à une deuxième composante homopolaire.

Il faut noter que cette base découplée de Concordia est « orthonormale », comme la base naturelle, ce qui conserve le produit scalaire (conservation de puissance).

L'application de la transformation de Concordia sur les équations de tension (2-1 à 2-4) permet de les découpler, elles s'expriment dans la base de Concordia comme suit :

$$\underline{V}_{s\alpha\beta} = \underline{A}_s \cdot \underline{R}_s \cdot \underline{A}_s^{-1} \cdot \underline{I}_{s\alpha\beta} + \frac{d\phi_{s\alpha\beta}}{dt}, \quad 2-13$$

$$\underline{V}_{r\alpha\beta} = 0 = \underline{A}_r \cdot \underline{R}_r \cdot \underline{A}_r^{-1} \cdot \underline{I}_{r\alpha\beta} + \frac{d\phi_{r\alpha\beta}}{dt}, \quad 2-14$$

$$\phi_{s\alpha\beta} = \underline{A}_s \cdot \underline{L}_{ss} \cdot \underline{A}_s^{-1} \cdot \underline{I}_{s\alpha\beta} + \underline{A}_s \cdot \underline{L}_{sr}(\theta) \cdot \underline{A}_r^{-1} \cdot \underline{I}_{r\alpha\beta}, \quad 2-15$$

$$\phi_{r\alpha\beta} = \underline{A}_r \cdot \underline{L}_{rr} \cdot \underline{A}_r^{-1} \cdot \underline{I}_{r\alpha\beta} + \underline{A}_r \cdot \underline{L}_{rs}(\theta) \cdot \underline{A}_s^{-1} \cdot \underline{I}_{s\alpha\beta}, \quad 2-16$$

Tel que : \underline{A}_s et \underline{A}_r sont les matrices de transformation de Concordia pour la dimension statorique N_{ph} et la dimension rotorique N_{bar} respectivement.

2.1.2.1 Transformation des matrices résistances et inductances propres

La matrice de résistance statorique reste la même (matrice diagonale dans la base naturelle). Les autres matrices (inductance statorique, résistance et inductance rotorique) sont diagonalisées grâce à la transformation de Concordia. Dans la base découplée de Concordia (qui est propre pour les applications linéaires, circulantes et symétriques), ces matrices s'expriment comme suit :

$$\underline{L}_{ss\alpha\beta} = \underline{A}_s \cdot \underline{L}_{ss} \cdot \underline{A}_s^{-1} = \begin{bmatrix} L_{s0} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & L_{s\alpha_1} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & L_{s\beta_1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & L_{s\alpha(\frac{N_{ph}-1}{2})} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & L_{s\beta(\frac{N_{ph}-1}{2})} \end{bmatrix}, \quad 2-17$$

$$\underline{L}_{rr\alpha\beta} = \underline{A}_r \cdot \underline{L}_{rr} \cdot \underline{A}_r^{-1} = \begin{bmatrix} L_{r0} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & L_{r\alpha_1} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & L_{r\beta_1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & L_{r\alpha(\frac{N_{bar}-1}{2})} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & L_{r\beta(\frac{N_{bar}-1}{2})} \end{bmatrix}, \quad 2-18$$

$$\underline{R}_{r\alpha\beta} = \underline{A}_r \cdot \underline{R}_r \cdot \underline{A}_r^{-1} = \begin{bmatrix} R_{r0} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & R_{r\alpha_1} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & R_{r\beta_1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & R_{r\alpha_{\frac{(N_{\text{bar}}-1)}{2}}} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{r\beta_{\frac{(N_{\text{bar}}-1)}{2}}} \end{bmatrix}, \quad 2-19$$

Ces matrices ont été exprimées pour des dimensions (statorique et rotorique) impaires. Pour des dimensions paires, une deuxième composante homopolaire s'ajoute à la fin de la matrice (dernière case de la diagonale).

Les termes qui apparaissent sur les diagonales de ces trois matrices, peuvent être définis comme suit :

- $L_{s\alpha_u} = L_{s\beta_u}$: est l'inductance statorique cyclique liée au plan numéro « u » de la base de Concordia statorique ;
- $L_{r\alpha_u} = L_{r\beta_u}$: est l'inductance rotorique cyclique liée au plan numéro « u » de la base de Concordia rotorique ;
- $R_{r\alpha_u} = R_{r\beta_u}$: est la résistance rotorique cyclique liée au plan numéro « u » de la base de Concordia rotorique ;

2.1.2.2 Transformation de la matrice d'inductance mutuelle stator-rotor

La matrice d'inductance mutuelle stator-rotor $\underline{L}_{sr}(\theta)$ est caractérisée par la superposition de l'ensemble des harmoniques d'espace sur chaque élément de la matrice. La transformation de Concordia permet de séparer ces harmoniques selon différents plans statoriques et rotoriques.

Plusieurs travaux scientifiques ont abordé l'application de la transformation par composantes symétriques aux machines avec « M » phases statoriques et « N » phases rotoriques. On cite d'abord la référence [20], datant de 1959, qui explique l'origine de ce type de transformation mathématique et ses intérêts, avec une application sur la matrice d'inductance mutuelle stator-rotor. Cependant, dans l'application présentée, un seul harmonique d'espace a été considéré (le fondamental « 1p »). La référence [56], datant de 1983, aborde cette transformation de façon plus générale, en considérant tous les harmoniques d'espace possibles. En revanche, dans cette publication, l'expression de l'inductance mutuelle dans la base de Concordia, est relativement complexe et ne permet pas de voir clairement les superpositions des harmoniques d'espaces qui apparaissent en fonction du nombre de barres rotoriques choisi. Enfin, une publication plus récente [59] a présenté cette transformation de façon plus claire, mais uniquement pour un nombre réduit d'harmoniques d'espace (harmoniques « 1p », « 3p », « 5p » et « 7p » pour une machine à induction à 5 phases).

L'objectif dans cette section, est donc de proposer une représentation plus globale de la matrice d'inductance mutuelle stator-rotor dans la base de Concordia, comme le montre la Figure 2.2.

Comme illustré dans cette figure, chaque harmonique d'espace de rang « k » apparait dans une seule cellule. Chaque cellule correspond à : soit une matrice (2x2), un vecteur de deux éléments, ou un scalaire (comme indiqué dans la légende en bas de la figure).

Pour un harmonique d'espace donné, on définit deux rangs : rang statorique et rang rotorique. Le rang statorique correspond au nombre naturel non nul « k », ce qui correspond en d'autres termes à un rang « électrique ». Le rang rotorique correspond à « k.p » (« p » étant le nombre de paires de pôles selon lequel le bobinage statorique est conçu), ce qui correspond en d'autres termes à un rang « mécanique ».

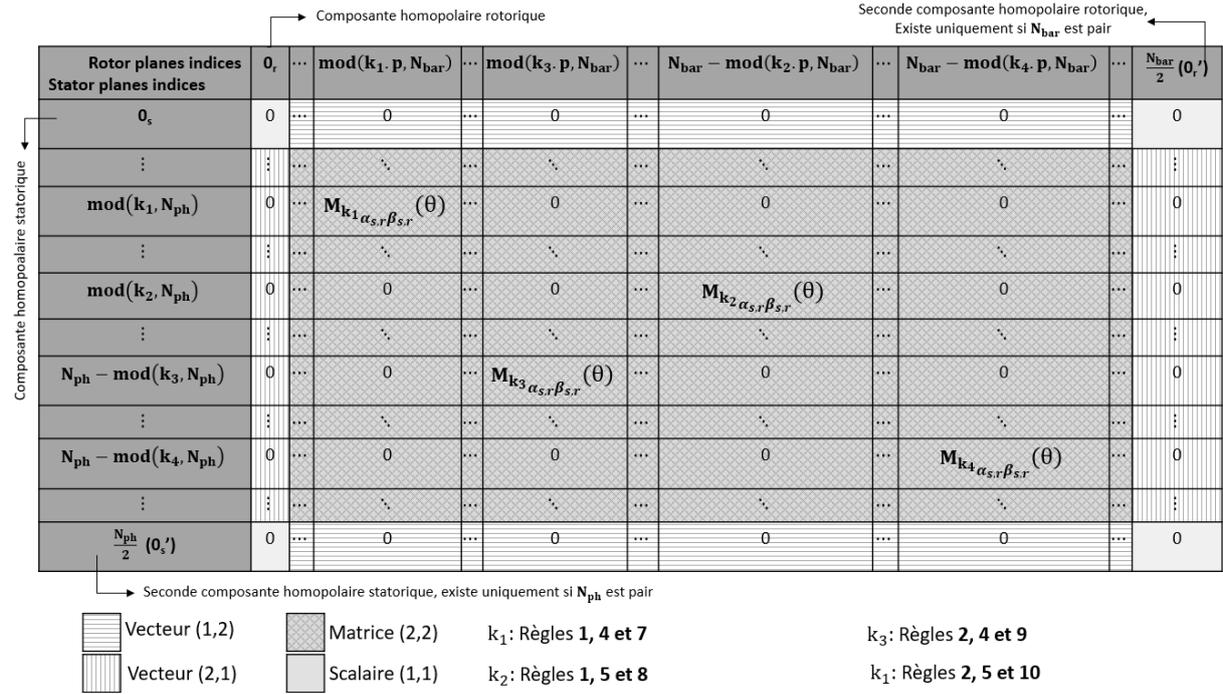


Figure 2.2 : Matrice d'inductance mutuelle stator-rotor transformée $L_{SR\alpha\beta}(\theta)$.

Dans l'Annexe 1, une analyse détaillée de la répartition des harmoniques d'espace sur la matrice $L_{SR\alpha\beta}(\theta)$, dans la base découplée de Concordia, est fournie.

La position (cellule) d'un harmonique d'espace « k » (ou « k.p » si on considère son rang rotorique ou mécanique) dans la matrice $L_{SR\alpha\beta}(\theta)$ est déterminée selon :

- La valeur de « $\text{mod}(k, N_{\text{ph}})$ » pour les numéros de lignes (voir les règles 1, 2, 3 et 3-bis dans l'Annexe 1) ;
- La valeur de « $\text{mod}(k, p, N_{\text{bar}})$ » pour les numéros de colonnes (voir les règles 4, 5, 6 et 6-bis dans l'Annexe 1).

Une cellule correspondant à une matrice (2x2) représente l'intersection entre un plan α - β statorique et un autre rotorique. La forme générale de ces matrices peut s'écrire comme suit :

$$M_{k\alpha_s r \beta_s r}(\theta) = \frac{\sqrt{N_{\text{ph}} \cdot N_{\text{bar}}}}{2} \cdot M_{srkp} \begin{pmatrix} \cos(-kp\theta + \varphi_{srk}) & \delta_{sr12} \sin(-kp\theta + \varphi_{srk}) \\ \delta_{sr21} \sin(-kp\theta + \varphi_{srk}) & \delta_{sr22} \cos(-kp\theta + \varphi_{srk}) \end{pmatrix}, \quad 2-20$$

Avec $\delta_{sr_{ij}} = \pm 1$, selon la catégorie de l'harmonique d'espace « k » (ou « k.p » si on considère son rang rotorique ou mécanique). Les règles 7 à 10 de l'Annexe 1 présentent les différents cas possibles de « $\delta_{sr_{ij}}$ ». Le reste des règles (de 11 à 19) présentent les cas particuliers de répartition sur des composantes homopolaires statoriques et/ou rotoriques.

Dans le cas où plusieurs harmoniques d'espace sont répartis sur le même plan statorique et rotorique (même cellule dans la Figure 2.2), les matrices $\underline{M}_{k\alpha_{s,r}\beta_{s,r}}(\theta)$ qui leur correspondent sont superposées.

Cette section propose une nouvelle approche de représentation « visuelle » de la répartition des harmoniques d'espace sur la matrice d'inductance mutuelle stator-rotor dans la base de Concordia. Cette représentation, permet d'identifier les interactions indésirables, entre les harmoniques d'espace, au niveau du rotor, qui peuvent apparaître en fonction du nombre de barres, comme cela sera montré dans la section 2.3 (applications sur machines à 3 et à 5 phases avec différents nombres de barres). Cette approche constitue donc un outil nécessaire pour la conception des rotors pour machines à induction polyphasées.

2.1.2.3 Transformation du vecteur courant statorique

Le bobinage statorique polyphasé peut être alimenté par différentes séquences d'alimentation (comme expliqué dans la section 1.2.1). L'intervalle des séquences d'alimentation « u » possibles dans une machine à « N_{ph} » phases est :

$$u \in [0, 1 \dots N_{ph} - 1] \quad 2-21$$

Tel que la séquence « u=0 » correspond à l'homopolaire.

Si on considère un bobinage alimenté par une séquence « u », le courant dans une phase statorique « i » peut être exprimé comme suit :

$$I_{s_i} = I_{s_u} \cdot \sin\left(2\pi \cdot f_{s_u} \cdot t - (i - 1) \cdot u \cdot \frac{2\pi}{N_{ph}} + \varphi_{s_u}\right), \quad 2-22$$

Le vecteur de courant statorique dans la base naturelle s'exprime donc comme suit :

$$\underline{I}_s = \begin{pmatrix} I_{s_0} \\ I_{s_1} \\ \vdots \\ I_{s_{N_{ph}-1}} \end{pmatrix}, \quad 2-23$$

Si le stator est alimenté par une seule séquence « u » (non homopolaire), et donc avec des courants sinusoïdaux (contenant un seul harmonique), la transformation de Concordia réduit la dimension statorique de « N_{ph} », dans la base naturelle, à « 2 » (un plan α - β statorique), dans la base découplée. Le vecteur de courant statorique découplé $\underline{I}_{s_{\alpha\beta}}$ dépend de la (ou les) séquence(s) « u » imposée(s). Les différents cas de séquences, et leur répartition sur le vecteur $\underline{I}_{s_{\alpha\beta}}$ sont illustrés dans la Table 2.1.

Quatre différents cas de séquences ont été présentés dans la Table 2.1 :

- $u_0 = N_{ph}$ (Composante homopolaire) à Exemple d'une machine à 6 phases : $u_0 = 6$;
- $u_1 < \left\lfloor \frac{N_{ph}}{2} \right\rfloor$ (\leq si N_{ph} est impair) à Exemple d'une machine à 6 phases : $u_1 = 1$ ou 2 ;
- $u_2 > \left\lfloor \frac{N_{ph}}{2} \right\rfloor$ à Exemple d'une machine à 6 phases : $u_2 = 4$ ou 5 ;
- $u'_0 = \frac{N_{ph}}{2}$ (seconde composante homopolaire pour N_{ph} pair) à Exemple d'une machine à 6 phases : $u'_0 = 3$.

Indice	Vecteur de courant statorique transformé $\underline{I_{s\alpha\beta}}$
1	$\sqrt{N_{ph}} \cdot I_{su_0} \cdot \sin(2\pi f_{su_0} \cdot t + \varphi_{su_0})$
⋮	⋮
$2 \cdot u_1$	$\sqrt{\frac{N_{ph}}{2}} \cdot I_{su_1} \cdot \sin(2\pi f_{su_1} \cdot t + \varphi_{su_1})$
$2 \cdot u_1 + 1$	$-\sqrt{\frac{N_{ph}}{2}} \cdot I_{su_1} \cdot \cos(2\pi f_{su_1} \cdot t + \varphi_{su_1})$
⋮	⋮
$2 \cdot (N_{ph} - u_2)$	$\sqrt{\frac{N_{ph}}{2}} \cdot I_{su_2} \cdot \sin(2\pi f_{su_2} \cdot t + \varphi_{su_2})$
$2 \cdot (N_{ph} - u_2) + 1$	$\sqrt{\frac{N_{ph}}{2}} \cdot I_{su_2} \cdot \cos(2\pi f_{su_2} \cdot t + \varphi_{su_2})$
⋮	⋮
N_{ph}	$\sqrt{N_{ph}} \cdot I_{su'_0} \cdot \sin(2\pi f_{su'_0} \cdot t + \varphi_{su'_0})$

Table 2.1 : Vecteur courant statorique transformé $\underline{I_{s\alpha\beta}}$ (base découplée de Concordia).

2.1.2.4 Transformation du vecteur courant rotorique

Dans un bobinage ayant un nombre entier d'encoches par paire de pôles et par phase, c.à.d. $2.spp = \text{entier}$ (incluant les bobinages fractionnaires particuliers comme $spp = 0.5, 1.5 \dots$), la séquence d'alimentation « u » génère un ensemble d'harmoniques d'espace « F_u », définit comme suit [58] :

$$F_u = \{Z \cdot N_{ph} + u\}p \quad Z = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \dots \quad 2-24$$

Comme montré dans l'équation 2-24, tous les harmoniques d'espace sont des multiples de « p », le nombre de paires de pôles.

Par exemple :

- Pour $N_{ph}=3$, un nombre de paires de pôles « p » et la séquence statorique « u=1 », $F_u=p\{1, -2, 4, -5, 7, -8, 10, -11, 13\dots\}$;
- Pour $N_{ph}=5$: pour « u=1 », $F_u=p\{1, -4, 6, -9, 11, -14, 16, -19, 21\dots\}$; pour « u=2 », $F_u=p\{2, -3, 7, -8, 12, -13, 17\dots\}$ et pour « u=3 », $F_u=p\{-2, 3, -7, 8, -12, 13, -17\dots\}$. On remarque que les séquences « u=2 » et « u=3 » génèrent le même ensemble d'harmoniques d'espace, mais avec des signes opposés. En effet, le signe négatif correspond à un harmonique d'espace associé à une onde qui tourne dans le sens contraire par rapport au fondamental.

Dans une machine à induction, pour une séquence d'alimentation « u » avec une fréquence de courants statoriques « f_s », chaque harmonique d'espace « v.p » (« v » peut être positif ou négatif, comme expliqué ci-dessus) appartenant à l'ensemble « F_u » induit un harmonique de courant rotorique (circulant dans les barres) d'une fréquence « $f_{r_{vp}}$ », qui peut être déterminée comme suit (en considérant la vitesse mécanique du rotor) :

$$f_{r_{vp}} = f_s - v.p \cdot \frac{\Omega_{mec}}{2\pi} \quad 2-25$$

Le courant dans une barre rotorique « i », induit par la série d'harmoniques d'espace « F_u », peut donc être exprimé comme suit :

$$I_{r_i} = \sum_v \left[I_{r_{vp}} \cdot \sin \left(2\pi \cdot f_{r_{vp}} \cdot t - (i-1) \cdot v.p \cdot \frac{2\pi}{N_{bar}} + \varphi'_{r_{vp}} \right) \right] \quad 2-26$$

Tel que : « $I_{r_{vp}}$ » est l'amplitude de l'harmonique de courants rotorique de rang « v.p », « $\varphi'_{r_{vp}}$ » est son argument et « $f_{r_{vp}}$ » est sa fréquence. Il faut noter que ces fréquences (« $f_{r_{vp}}$ »), ne sont généralement pas synchrones entre elles. En d'autres termes, une fréquence « $f_{r_{vp}}$ » n'est généralement pas multiple de la fréquence fondamentale « $f_{r_{up}}$ » générée par l'harmonique d'espace principal « u.p » (« u » étant la séquence statorique).

Le vecteur de courant rotorique transformé, dans une base découplée, contient les harmoniques induits par la famille « F_u » des harmoniques d'espace répartis sur différents plans α - β rotoriques, comme montré dans la Table 2.2.

Indice	Vecteur de courant rotorique transformé $\underline{I_{r\alpha\beta}}$
1	$\sqrt{N_{\text{bar}}} \cdot I_{r_{v_0p}} \cdot \sin(2\pi f_{r_{v_0p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_0p}})$
⋮	⋮
$2 \cdot \text{mod}(v_1 \cdot p, N_{\text{bar}})$	$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_1p}} \cdot \sin(2\pi f_{r_{v_1p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_1p}})$
$2 \cdot \text{mod}(v_1 \cdot p, N_{\text{bar}}) + 1$	$-\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_1p}} \cdot \cos(2\pi f_{r_{v_1p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_1p}})$
⋮	⋮
$2 \cdot \text{mod}(v_2 \cdot p, N_{\text{bar}})$	$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_2p}} \cdot \sin(2\pi f_{r_{v_2p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_2p}})$
$2 \cdot \text{mod}(v_2 \cdot p, N_{\text{bar}}) + 1$	$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_2p}} \cdot \cos(2\pi f_{r_{v_2p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_2p}})$
⋮	⋮
$2 \cdot (N_{\text{bar}} - \text{mod}(v_3 \cdot p, N_{\text{bar}}))$	$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_3p}} \cdot \sin(2\pi f_{r_{v_3p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_3p}})$
$2 \cdot (N_{\text{bar}} - \text{mod}(v_3 \cdot p, N_{\text{bar}})) + 1$	$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_3p}} \cdot \cos(2\pi f_{r_{v_3p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_3p}})$
⋮	⋮
$2 \cdot (N_{\text{bar}} - \text{mod}(v_4 \cdot p, N_{\text{bar}}))$	$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_4p}} \cdot \sin(2\pi f_{r_{v_4p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_4p}})$
$2 \cdot (N_{\text{bar}} - \text{mod}(v_4 \cdot p, N_{\text{bar}})) + 1$	$-\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{v_4p}} \cdot \cos(2\pi f_{r_{v_4p}} \cdot t + \varphi_{r_{v_4p}})$
⋮	⋮
N_{bar}	$\sqrt{N_{\text{bar}}} \cdot I_{r_{v'_0p}} \cdot \sin(2\pi f_{r_{v'_0p}} \cdot t + \varphi_{r_{v'_0p}})$

 Table 2.2 : Vecteur de courant rotorique transformé $\underline{I_{r\alpha\beta}}$ (base découplée de Concordia).

La Table 2.2 illustre 6 différents cas de répartition d'harmoniques de courant rotorique sur les plans de la base découplée : $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v'_0$.

- $\text{mod}(|v_0| \cdot p, N_{\text{bar}}) = N_{\text{bar}}$ (Composante homopolaire rotorique) ;

- $\text{mod}(|v_1| \cdot p, N_{\text{bar}}) < \left\lfloor \frac{N_{\text{bar}}}{2} \right\rfloor$ (\leq si N_{bar} est impair), et v_1 et $f_{r_{v_1p}}$ ont le même signe (positifs ou négatifs) ;
- $\text{mod}(|v_2| \cdot p, N_{\text{bar}}) < \left\lfloor \frac{N_{\text{bar}}}{2} \right\rfloor$ (\leq si N_{bar} est impair), et v_2 et $f_{r_{v_2p}}$ ont des signes différents ;
- $\text{mod}(|v_3| \cdot p, N_{\text{bar}}) > \left\lfloor \frac{N_{\text{bar}}}{2} \right\rfloor$, et v_3 et $f_{r_{v_3p}}$ ont le même signe ;
- $\text{mod}(|v_4| \cdot p, N_{\text{bar}}) > \left\lfloor \frac{N_{\text{bar}}}{2} \right\rfloor$, et v_4 et $f_{r_{v_4p}}$ ont des signes différents ;
- $\text{mod}(|v_0'| \cdot p, N_{\text{bar}}) = \frac{N_{\text{bar}}}{2}$ (pour N_{bar} pair).

Dans le cas où deux harmoniques d'espace différents « $v_1.p$ » et « $v_2.p$ », générés par la séquence statorique « u », se répartissent sur le même plan rotorique $\{\alpha_{r_v}, \beta_{r_v}\}$ (ou la même droite rotorique homopolaire $\{0_r\}$ ou $\{0_r'\}$), alors ils induisent des courants rotoriques de fréquences différentes, ce qui génère des couples pulsatoires.

Comme on peut constater dans la Table 2.2, les rangs d'harmoniques « $v.p$ » et leurs fréquences « $f_{r_{vp}}$ » sont écrites en valeur absolue, en effet, selon l'équation 2-24, « v » peut être positif ou négatif, et donc les fréquences « $f_{r_{vp}}$ » déterminées par l'équation 2-25 peuvent aussi être positives ou négatives.

On peut également constater que les arguments des harmoniques de courants dans la base de Concordia sont « $\varphi_{r_{vp}}$ », et « $\varphi'_{r_{vp}}$ » dans la base naturelle. En effet, si la fréquence « f_{r_v} » est positive : « $\varphi_{r_{vp}} = \varphi'_{r_{vp}}$ » ; et si elle est négative : « $\varphi_{r_{vp}} = \pi - \varphi'_{r_{vp}}$ ».

2.1.3 Elaboration d'un modèle analytique : calcul des courants rotoriques et du couple à courants statoriques imposés

2.1.3.1 Calcul des courants rotoriques

- Dans la base naturelle :

Dans une machine à induction, uniquement le bobinage statorique est alimenté par une source d'énergie externe, l'alimentation du bobinage par des courants alternatifs permet de créer un champ tournant, ce qui induit des courants dans la cage rotorique (dont les barres sont court-circuitées).

En se basant sur les équations de tension de la machine à induction polyphasée (équation 2-1 à 2-4) dans la base naturelle, le vecteur de courant rotorique \underline{I}_r peut être déterminé, pour des courants statoriques imposés (avec les matrices de résistances et d'inductances de la machine déjà identifiées). A partir de l'équation du flux rotorique 2-4, le vecteur de courant rotorique dans la base naturelle peut être exprimé comme suit :

$$\underline{I}_r = \underline{L}_{rr}^{-1} \cdot (\underline{\Phi}_r - \underline{L}_{rs} \cdot \underline{I}_s) \quad 2-27$$

En remplaçant 2-27 dans l'équation de tension rotorique 2-2, on obtient l'équation différentielle de premier ordre suivante :

$$\frac{d\underline{\Phi}_r}{dt} = -\underline{R}_r \cdot \underline{L}_{rr}^{-1} \cdot \underline{\Phi}_r + \underline{R}_r \cdot \underline{L}_{rr}^{-1} \cdot \underline{L}_{rs} \cdot \underline{I}_s \quad 2-28$$

L'équation 2-28 correspond à une représentation d'état en flux rotorique de la machine, l'entrée (imposée) étant le courant statorique. La matrice d'état est généralement régulière et le système peut être numériquement résolu avec une méthode du type Runge-Kutta (par exemple). En rapport à une estimation par éléments finis, le temps de calcul est négligeable. Si le système est résolu, le flux rotorique est connu, ce qui est équivalent à connaître le courant rotorique (la saturation n'étant pas prise en compte).

- Dans la base découplée :

Comme expliqué précédemment, la transformation de Concordia permet de réduire les dimensions statoriques et rotoriques, en séparant les harmoniques de courant et d'espace sur différents plans α - β (statoriques et rotoriques).

Quant aux courants rotoriques, cette transformation permet de répartir les différents harmoniques de temps, induits par la présence des harmoniques d'espace dans la fonction de bobinage, sur différents plans α - β rotoriques (comme illustré dans la Table 2.2). Cela permet de déterminer les courants dans les barres rotoriques par une approche fréquentielle, harmonique par harmonique, par des équations simplifiées (qui nécessitent moins d'efforts calculatoires que la résolution de l'équation différentielle 2-28 dans la base naturelle). En d'autres termes, cette approche permet de calculer l'amplitude et la phase du courant rotorique induit par l'harmonique d'espace d'ordre « v.p ». Ce calcul est effectué en transformant les équations en flux et en tension du circuit rotorique dans la base de Concordia, ce qui permet notamment de déterminer l'impédance de la boucle rotorique.

A partir de l'équation de tension rotorique dans la base découplée (2-14), la dérivée du flux rotorique peut être exprimée en fonction du courant rotorique :

$$\frac{d\phi_{r\alpha\beta}}{dt} = -R_{r\alpha\beta} \cdot I_{r\alpha\beta} \quad 2-29$$

Comme illustré dans la Table 2.2, une composante harmonique « v.p » du courant rotorique (hors homopolaire), se positionne sur un plan α - β rotorique, et donc correspond à un vecteur de cette forme :

$$\underline{I_{r\alpha\beta vp}} = \sqrt{\frac{N_{bar}}{2}} \cdot I_{r vp} \cdot \begin{bmatrix} \sin(|\omega_{r vp}| \cdot t + \varphi_{r vp}) \\ \delta_r \cos(|\omega_{r vp}| \cdot t + \varphi_{r vp}) \end{bmatrix} \quad 2-30$$

Tel que $\delta_r = \pm 1$ (les différents cas sont expliqués dans la section 2.1.2.4), et $|\omega_{r vp}| = 2\pi|f_{r vp}|$.

La composante harmonique « v.p » du flux rotorique peut donc être exprimée (en se basant sur l'équation 2-29) :

$$\underline{\phi_{r\alpha\beta vp}} = \sqrt{\frac{N_{bar}}{2}} \cdot I_{r vp} \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_{r\alpha vp}}{|\omega_{r vp}|} \cdot \cos(|\omega_{r vp}| \cdot t + \varphi_{r vp}) \\ -\delta_r \cdot \frac{R_{r\beta vp}}{|\omega_{r vp}|} \cdot \sin(|\omega_{r vp}| \cdot t + \varphi_{r vp}) \end{bmatrix} \quad 2-31$$

En exprimant l'équation 2-16 du flux rotorique dans la base découplée pour un harmonique quelconque « v.p », faisant partie de la famille d'harmoniques rotoriques « F_u » engendrée par la séquence statorique « u », on obtient :

$$\sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{vp}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_{r_{\alpha vp}}}{|\omega_{r_{vp}}|} \cdot \cos(|\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \varphi_{r_{vp}}) \\ -\delta_r \cdot \frac{R_{r_{\beta vp}}}{|\omega_{r_{vp}}|} \cdot \sin(|\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \varphi_{r_{vp}}) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{N_{\text{bar}}}{2}} \cdot I_{r_{vp}} \cdot \begin{bmatrix} L_{r_{\alpha vp}} \cdot \sin(|\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \varphi_{r_{vp}}) \\ \delta_r \cdot L_{r_{\beta vp}} \cdot \cos(|\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \varphi_{r_{vp}}) \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{N_{\text{ph}} \cdot N_{\text{bar}}}}{2} M_{sr_{vp}} \begin{bmatrix} \cos(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) & \delta_{sr_{21}} \sin(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) \\ \delta_{sr_{12}} \sin(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) & \delta_{sr_{22}} \cos(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{N_{\text{ph}}}{2}} I_{su} \begin{bmatrix} \sin(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su}) \\ \delta_s \cos(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su}) \end{bmatrix} \quad 2-32$$

Cette équation 2-32 est une égalité de deux vecteurs colonnes à deux éléments. En prenant donc la première ligne de l'équation (correspondant à la composante « α_{vp} »), on obtient :

$$I_{r_{vp}} \cdot \left(\frac{R_{r_{\alpha vp}}}{|\omega_{r_{vp}}|} \cdot \cos(|\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \varphi_{r_{vp}}) - L_{r_{\alpha vp}} \cdot \sin(|\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \varphi_{r_{vp}}) \right) = \frac{N_{\text{ph}}}{2} \cdot I_{su} \cdot M_{sr_{vp}} \cdot \sin(\delta_1 |\omega_{r_{vp}}| \cdot t + \delta_2 \varphi_{su} + \delta_3 \varphi_{sr_{vp}}) \quad 2-33$$

Tel que δ_1, δ_2 et $\delta_3 = \pm 1$, selon les signes du rang d'harmonique de courant rotorique « v.p » et de la fréquence associée « $f_{r_{vp}}$ ».

En se basant sur l'équation 2-33, l'amplitude de l'harmonique « v.p » du courant rotorique s'exprime, dans tous les cas (quels que soient les signes de « v » et de « $f_{r_{vp}}$ »), comme suit :

$$I_{r_{vp}} = \frac{N_{\text{ph}}}{2} \cdot I_{su} \cdot \frac{M_{sr_{vp}}}{\sqrt{\left(\frac{R_{r_{\alpha vp}}}{|\omega_{r_{vp}}|} \right)^2 + L_{r_{\alpha vp}}^2}} \quad 2-34$$

Quant à l'argument « $\varphi_{r_{vp}}$ », son expression dépend des signes de « v » et de « $f_{r_{vp}}$ » :

- Si $v > 0$ et $f_{r_{vp}} > 0$:

$$\varphi_{r_{vp}} = \varphi_{sr_{vp}} - \text{atan}\left(-\frac{R_{r_{\alpha vp}}}{|\omega_{r_{vp}}| \cdot L_{r_{\alpha vp}}}\right) - \pi + \varphi_{su} \quad 2-35$$

- Si $v > 0$ et $f_{r_{vp}} < 0$:

$$\varphi_{r_{vp}} = -\varphi_{sr_{vp}} - \text{atan}\left(-\frac{R_{r_{\alpha vp}}}{|\omega_{r_{vp}}| \cdot L_{r_{\alpha vp}}}\right) - \varphi_{su} \quad 2-36$$

- Si $v < 0$ et $f_{r_{vp}} > 0$:

$$\varphi_{r_{vp}} = -\varphi_{sr_{vp}} - \text{atan}\left(-\frac{R_{r_{\alpha vp}}}{|\omega_{r_{vp}}| \cdot L_{r_{\alpha vp}}}\right) - \pi + \varphi_{su} \quad 2-37$$

- Si $v < 0$ et $f_{r_{vp}} < 0$:

$$\varphi_{r_{vp}} = \varphi_{sr_{vp}} - \text{atan} \left(- \frac{R_{r_{\alpha_{vp}}}}{|\omega_{r_{vp}}| \cdot L_{r_{\alpha_{vp}}}} \right) - \varphi_{su} \quad 2-38$$

Avec ces équations, les composantes harmoniques du courant rotorique peuvent être déterminées par un calcul instantané. Cela est surtout intéressant pour l'étude de la machine sur différents points de fonctionnement (variation du courant d'alimentation, de la fréquence, du glissement ...etc.), alors qu'avec la méthode numérique de résolution de l'équation différentielle dans la base naturelle, la simulation d'un grand nombre de points de fonctionnement nécessite un effort calculatoire plus important et ceci d'autant plus qu'une partie significative du temps de simulation est consacrée au transitoire lié à l'élimination des conditions initiales (comme cela est observé en calcul éléments finis).

Par ailleurs, avec cette approche, la contribution de chaque harmonique d'espace dans la production du couple peut être isolée, et donc analysée de façon plus aisée que dans la base naturelle.

2.1.3.2 Calcul du couple

- Dans la base naturelle :

Le couple peut être calculé dans la base naturelle par la formule suivante [56] :

$$T = \underline{I}'_s \cdot \frac{dL_{sr}(\theta)}{d\theta} \cdot \underline{I}_r \quad 2-39$$

Tel que \underline{I}'_s est la transposée du vecteur courant statorique dans la base naturelle, \underline{I}'_s correspond donc à un vecteur ligne de dimension « N_{ph} ».

Comme le montre l'équation 2-39, le couple dépend du courant statorique, de la dérivée de l'inductance mutuelle stator-rotor et des courants rotoriques. Dans la base naturelle, il est difficile d'isoler la contribution de chaque harmonique d'espace dans la production du couple, alors que cela se fait naturellement dans la base découplée de Concordia.

- Dans la base découplée :

Dans la base découplée de Concordia, les harmoniques d'espace, présents dans la matrice inductance mutuelle stator-rotor, ainsi que les harmoniques de temps induit dans les courants rotoriques, peuvent être répartis sur différents plans α - β . Le couple développé sur un plan $\{\alpha_{r_v}, \beta_{r_v}\}$ rotorique donné, est le produit scalaire de la dérivée, par rapport à la position angulaire, du flux mutuel stator-rotor (induit dans les boucles rotoriques par l'alimentation statorique), par le courant rotorique. Considérons l'harmonique de flux stator-rotor appartenant au le plan $\{\alpha_{r_v}, \beta_{r_v}\}$ qui est induit par l'harmonique spatial de rang « $v_{1.p}$ » caractérisé par la pulsation « ω_1 », et l'harmonique du courant rotorique appartenant au même plan $\{\alpha_{r_v}, \beta_{r_v}\}$ qui est induit par l'harmonique spatial de rang « $v_{2.p}$ » caractérisé par la pulsation « ω_2 », le couple produit par l'interaction des deux harmoniques (du flux et du courant rotorique) pulse à la différence des pulsations « ω_1 » et « ω_2 » :

- Si « $v_1 = v_2 = v$ », donc « $\omega_1 = \omega_2$ », le couple produit est constant de valeur moyenne non nulle, appelé « T_v » ci-dessous ;

- Si « v_1 » est différent de « v_2 » (deux harmoniques d'espace différents répartis sur le même plan rotorique), donc « $\omega_1 \neq \omega_2$ », le couple produit est pulsatoire de valeur moyenne nulle, appelé « $T_{v_1-v_2}$ » ci-dessous ;

Le couple « T_{vp} » constant, lié à un harmonique d'espace « $v.p$ » est exprimé comme suit :

$$T_{vp} = \sqrt{\frac{N_{ph}}{2}} I_{su} [\sin(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su}) \quad \delta_s \cos(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su})] \cdot \frac{\sqrt{N_{ph} \cdot N_{bar}}}{2} |v|. p. M_{sr_{vp}} \begin{bmatrix} \sin(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) & -\delta_{sr_{12}} \cos(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) \\ -\delta_{sr_{21}} \cos(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) & \delta_{sr_{22}} \sin(-|v|p\theta + \varphi_{sr_{vp}}) \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{N_{bar}}{2}} \cdot I_{rvp} \cdot \begin{bmatrix} \sin(|\omega_{rvp}| \cdot t + \varphi_{rvp}) \\ \delta_r \cdot \cos(|\omega_{rvp}| \cdot t + \varphi_{rvp}) \end{bmatrix} \quad 2-40$$

L'expression finale du couple « T_{vp} » dépend des signes de « v » et de « ω_{rvp} » :

- Si $v > 0$ et $f_{rvp} > 0$:

$$T_{vp} = \frac{N_{ph} \cdot N_{bar}}{4} \cdot p \cdot |v| \cdot I_{su} \cdot I_{rvp} \cdot M_{sr_{vp}} \cdot \sin(\varphi_{su} - \varphi_{rvp} + \varphi_{sr_{vp}}) \quad 2-41$$

- Si $v > 0$ et $f_{rvp} < 0$:

$$T_{vp} = \frac{N_{ph} \cdot N_{bar}}{4} \cdot p \cdot |v| \cdot I_{su} \cdot I_{rvp} \cdot M_{sr_{vp}} \cdot \sin(-\varphi_{su} - \varphi_{rvp} - \varphi_{sr_{vp}}) \quad 2-42$$

- Si $v < 0$ et $f_{rvp} > 0$:

$$T_{vp} = \frac{N_{ph} \cdot N_{bar}}{4} \cdot p \cdot |v| \cdot I_{su} \cdot I_{rvp} \cdot M_{sr_{vp}} \cdot \sin(-\varphi_{su} + \varphi_{rvp} + \varphi_{sr_{vp}}) \quad 2-43$$

- Si $v < 0$ et $f_{rvp} < 0$:

$$T_{vp} = \frac{N_{ph} \cdot N_{bar}}{4} \cdot p \cdot |v| \cdot I_{su} \cdot I_{rvp} \cdot M_{sr_{vp}} \cdot \sin(\varphi_{su} + \varphi_{rvp} - \varphi_{sr_{vp}}) \quad 2-44$$

Le couple pulsatoire « $T_{v_1p-v_2p}$ » généré par l'interaction entre l'harmonique de rang « $v_1.p$ » de l'inductance mutuelle stator-rotor et l'harmonique de rang « $v_2.p$ » du courant rotorique (dont la fréquence est « f_{rv_2p} ») peut être exprimé comme suit :

$$T_{v_1p-v_2p} = \frac{N_{ph} \cdot N_{bar}}{4} \cdot p \cdot |v_1| \cdot I_{su} \cdot I_{rv_2p} \cdot M_{sr_{v_1p}} \cdot \sin\left(\delta_s(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su}) + \delta_r(|\omega_{rv_2p}| \cdot t + \varphi_{rv_2p}) + \delta_{sr}(-|v_1|. p. \Omega_{mec} \cdot t + \varphi_{sr_{v_1p}})\right) \quad 2-45$$

Tel que : δ_s , δ_r et $\delta_{sr} = \pm 1$ selon les règles qui régissent les deux harmoniques « $v_1.p$ » et « $v_2.p$ » (voir l'Annexe 1 et la sections 2.1.2.4). La fréquence d'une composante pulsatoire du couple « $T_{v_1p-v_2p}$ » est donc égale à : « $\delta_s \cdot f_{su} + \delta_r \cdot f_{rv_2p} - \delta_{sr} |v_1|. p. \frac{\Omega_{mec}}{2\pi}$ ».

La Table 2.3 illustre les coefficients δ_s , δ_r et δ_{sr} pour les différents cas d'interactions possibles.

Si l'harmonique de l'inductance mutuelle stator-rotor et l'harmonique du courant rotorique sont du même rang « $v_1 = v_2$ », le couple produit est constant, ce qui correspond aux expressions de 2-41 à 2-44 décrivant les différents cas du couple « T_{vp} ». L'équation 2-45 (avec la Table 2.3) représente donc une expression plus générale du couple.

Séquence « u »		$\text{mod}(u, N_{ph}) \leq \left\lfloor \frac{N_{ph}}{2} \right\rfloor$		$\text{mod}(u, N_{ph}) > \left\lfloor \frac{N_{ph}}{2} \right\rfloor$	
Harmonique de courant rotorique : « $v_2.p$ »		« $v_2 \times f_{rv_{2p}} > 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) \leq \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$ OU « $v_2 \times f_{rv_{2p}} < 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) > \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$	« $v_2 \times f_{rv_{2p}} < 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) \leq \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$ OU « $v_2 \times f_{rv_{2p}} > 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) > \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$	« $v_2 \times f_{rv_{2p}} > 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) \leq \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$ OU « $v_2 \times f_{rv_{2p}} < 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) > \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$	« $v_2 \times f_{rv_{2p}} < 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) \leq \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$ OU « $v_2 \times f_{rv_{2p}} > 0$ » et $\text{mod}(v_2 p, N_{bar}) > \left\lfloor \frac{N_{bar}}{2} \right\rfloor$
Règle régissant l'harmonique de $L_{sr\alpha\beta}(\theta)$: « $v_1.p$ »	7	$\delta_s = 1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = 1$	$\delta_s = -1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = -1$	$\delta_s = 1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = -1$	$\delta_s = -1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = 1$
	8	$\delta_s = -1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = -1$	$\delta_s = 1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = 1$	$\delta_s = -1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = 1$	$\delta_s = 1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = -1$
	9	$\delta_s = 1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = -1$	$\delta_s = -1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = 1$	$\delta_s = 1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = 1$	$\delta_s = -1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = -1$
	10	$\delta_s = -1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = 1$	$\delta_s = 1$ $\delta_r = 1$ $\delta_{sr} = -1$	$\delta_s = -1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = -1$	$\delta_s = 1$ $\delta_r = -1$ $\delta_{sr} = 1$

Table 2.3 : Coefficients des composantes pulsatoires du couple, dues aux interactions entre les harmoniques d'espace et les harmoniques du courant rotorique (hors homopolaire rotorique)

Dans le cas où un harmonique de l'inductance mutuelle stator-rotor « $v_3.p$ » appartient à une composante homopolaire rotoriques (règles 15 à 18 dans l'Annexe 1), et un harmonique du courant rotorique, induit par « $v_4.p$ », appartient à la même composante homopolaire rotorique (dans le vecteur courant rotorique découplé $I_{r\alpha\beta}$), le couple développé par l'interaction de ces deux harmoniques s'exprime comme suit :

$$T_{v_3p-v_4p} = \frac{N_{ph} \cdot N_{bar}}{4} \cdot p \cdot |v_3| \cdot I_{su} \cdot I_{rv_{4p}} \cdot M_{sr_{v_3p}} \cdot \sin\left(\delta_{s1}(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su}) + \delta_{r1}\left(|\omega_{rv_{4p}}| \cdot t + \varphi_{rv_{4p}}\right) + \delta_{sr1}\left(-|v_3| \cdot p \cdot \Omega_{mec} \cdot t + \varphi_{sr_{v_3p}}\right)\right) + \sin\left(\delta_{s2}(\omega_{su} \cdot t + \varphi_{su}) + \delta_{r2}\left(|\omega_{rv_{4p}}| \cdot t + \varphi_{rv_{4p}}\right) + \delta_{sr2}\left(-|v_3| \cdot p \cdot \Omega_{mec} \cdot t + \varphi_{sr_{v_3p}}\right)\right) \quad 2-46$$

Les différents cas de valeurs des coefficients : δ_{s1} , δ_{s2} , δ_{r1} , δ_{r2} , δ_{sr1} et δ_{sr2} , sont présentés dans la Table 2.4. Comme remarqué dans l'équation 2-46, l'interaction entre deux harmoniques d'une composante homopolaire rotorique produit deux composantes pulsatoires du couple. Si l'harmonique de l'inductance mutuelle stator-rotor et l'harmonique du courant rotorique sont du même rang « $v_3 = v_4$ », l'interaction produit une composante de couple pulsatoire et une autre constante (l'une des deux fréquences de couple dans l'équation 2-46 est nulle).