Modélisation de la formation des réseaux de fissures pour la prédiction des chemins de fuite

Sommaire

4.1	Stratégie de modélisation									
4.2	Modèle d'endommagement basés sur la mécanique de									
	la rupture									
	4.2.1	Modélisation des effets de l'endommagement sur la rigidité 114								
	4.2.2	Lois d'évolution de l'endommagement 116								
4.3	Exe	mples de la réponse du modèle								
4.4	1 Prise en compte de l'effet de la variabilité sur les ciné-									
	${ m tiques} { m d'endommagement} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 124$									
4.5	.5 Interactions entre plis et agencement des fissures 129									
	4.5.1	Effet des interactions sur les seuils et les cinétiques 129								
	4.5.2	Effet des interactions sur l'agencement des fissures trans-								
		verses et la formation de chemins de fuite								
	4.5.3	Proposition d'un modèle pour prédire les croisements de								
		fissures et chemins de fuite potentiels								
4.6	Bila	n de la modélisation								

4.1 Stratégie de modélisation

La modélisation doit fournir des informations sur la morphologie des endommagements : pour décrire des réseaux de fissures, la perte de raideur ne suffit pas. Le Chapitre 1 a montré que les approches adaptées étaient la mécanique de la rupture avec une représentation explicite des fissures, et la mécanique de l'endommagement avec une approche multi-échelles pour que la morphologie des endommagements soit intégrée dans les variables d'endommagement. On exclut donc les modèles dans lesquels les endommagements sont traduits uniquement par des pertes de raideur.

Comme on l'a vu dans le Chapitre 1, l'approche par la mécanique de la rupture peut être mise en œuvre :

- soit avec des méthodes qui nécessitent de pré-supposer le ou les trajets de fissuration avec des éléments finis classiques, en calculant le taux de restitution d'énergie par déboutonnage ou perturbation des nœuds, ou en utilisant des éléments cohésifs;
- soit avec des éléments enrichis X-FEM qui permettent l'apparition des fissures sans pré-supposer leur position, la localisation nécessite alors d'introduire de la variabilité dans les propriétés matériau de la structure.

Dans tous les cas, l'approche explicite requiert des maillages fins et des temps de calcul élevés en comparaison des approches mésoscopiques. Une stratégie basée sur la mécanique de la rupture où les endommagements sont représentés explicitement n'est donc pas adaptée à la conception d'une structure composite, en particulier lorsqu'elle est de taille importante, que sa stratification comporte de nombreux plis et que l'objectif est d'optimiser l'orientation et l'épaisseur des couches en évaluant des dizaines ou des centaines de configurations.

L'utilisation d'un modèle mésoscopique construit à travers une approche multiéchelles est beaucoup plus adaptée à cet objectif. Le modèle proposé dans ce chapitre s'appuie sur ce type d'approche, et plus précisément sur l'approche proposée par [Huchette, 2005, Bois et al., 2014]. Cette approche est basée sur une représentation de la morphologie des endommagements dans une cellule élémentaire qui, par homogénéisation, permet d'obtenir le comportement mésoscopique. Un simple calcul élastique, sur un ensemble de configurations représentatives des états d'endommagement envisageables, permet d'obtenir la perte de raideur homogénéisée. Concernant l'évolution des endommagements, il est possible d'utiliser des essais expérimentaux ou numériques. Expérimentalement, il s'agit de quantifier les endommagements pour différents niveaux de chargement et d'identifier des lois phénoménologiques. Numériquement, en réalisant des simulations par la méthode des éléments finis sur les cellules élémentaires et en utilisant la mécanique de la rupture pour décrire la propagation des fissures de manière explicite, on peut identifier des lois par régression. Mais il est également possible d'utiliser la relation entre la raideur de la cellule élémentaire et les taux d'endommagement pour piloter l'évolution des endommagements en utilisant la mécanique de la rupture finie.

Lors de la définition des cellules élémentaires représentatives de l'état d'en-



(a) Schéma du volume élémentaire représentatif.



(b) Modélisation par éléments finis du volume élémentaire représentatif.



dommagement, un choix doit être fait sur la finesse de description de la morphologie des endommagements. Dans la littérature [Ladevèze and Lubineau, 2003, Huchette, 2005] [Bois et al., 2014], cette morphologie est représentée par une densité de fissures transverses ρ et une longueur de microdélaminage μ , comme le montre la Figure 4.1. En supposant que le motif est périodique, la cellule élémentaire se limite alors à un pli endommagé comportant une fissure, entouré par des plis sains. Par ailleurs, la longueur des fissures est supposée très grande devant l'épaisseur de la couche, ce qui permet de traiter le problème en deux dimensions. Avec ces hypothèses, l'agencement des fissures et leurs interactions ne sont donc pas représentés. La prise en compte de l'agencement et des interactions nécessiterait une cellule avec au moins deux plis endommagés, et un nombre important de paramètres pour décrire une morphologie d'endommagement qui peut conduire à différents agencements comme ceux illustrés par les Figures 2.12 et 2.26.

Le nombre de configurations à simuler pour traiter l'ensemble des combinaisons envisageables devient alors considérable. Une alternative consiste à introduire directement l'effet de l'agencement et des interactions de manière phénoménologique sur la base des observations expérimentales. C'est cette voie que nous avons retenue dans ces travaux, même si au vu de la difficulté à obtenir des résultats expérimentaux pour un grand nombre de configurations (cf Chapitre 2), la solution réside sans doute dans la combinaison de l'approche numérique et de l'approche expérimentale pour identifier l'effet des agencements et des interactions. Les résultats expérimentaux pourraient alors être utilisés pour réduire l'espace des configurations envisageables lors des simulations.

Le modèle proposé dans la suite de ce chapitre s'appuie sur les résultats expérimentaux du Chapitre 2. Les variables que l'on sait caractériser expérimentalement et

qui peuvent être utilisées comme descripteurs des réseaux de fissures et des chemins de fuite sont les suivantes :

- le taux de fissuration transverse;
- le taux de croisement de fissures;
- le taux de microdélaminage en pointe de fissure transverse;
- le nombre de points de fuite (sorties des chemins de fuite).

De plus, les éléments suivants ont été identifiés comme à prendre en compte dans la modélisation :

- la variabilité des propriétés mécaniques liée à la présence de défauts;
- les interactions entre les endommagements de différents plis :
 - leur effet sur les seuils et les cinétiques d'endommagement,
 - et leur effet sur l'agencement des fissures transverses;
- la connectivité des croisements, qui fait le lien entre le nombre de croisements et le nombre de points de fuite.

À la différence de l'approche multi-échelles proposée par Huchette [Huchette, 2005], nous proposons des lois d'évolution basées sur l'énergie de fissuration et la mécanique de la rupture finie (FFM pour *Finite Fracture Mechanics*). La construction de ces lois d'évolution fait l'objet de la seconde section de ce chapitre. La réponse du modèle est illustrée dans la troisième section. Le choix de lois d'évolution basées sur la physique permet de prendre en compte les effets statistiques observés au Chapitre 2 directement via une variabilité des paramètres matériau du modèle d'endommagement. La quatrième section de ce chapitre porte sur l'implémentation de cette variabilité. Pour finir, l'interaction entre les plis et l'agencement des fissures sont traités dans la cinquième section.

4.2 Modèle d'endommagement basés sur la mécanique de la rupture

4.2.1 Modélisation des effets de l'endommagement sur la rigidité

Les effets de l'endommagement sur les propriétés élastiques sont modélisés par une augmentation de souplesse $\Delta \underline{\underline{S}}$, et sont identifiés numériquement par l'approche multi-échelles développée par Huchette *et al.* [Huchette, 2005, Huchette et al., 2006]. En pratique, $\Delta \underline{\underline{S}}$ est évaluée par homogénéisation sur une série de cellules élémentaires représentatives (Figure 4.1) couvrant une large gamme d'états d'endommagement $(\bar{\rho}, \bar{\mu})$. Le tenseur des souplesses \underline{S} relie les déformations et les contraintes homogénéisées selon l'expression suivante :

$$\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_{th} = \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} = \left(\underline{\underline{S}}^0 + \Delta \underline{\underline{S}}\right) : \underline{\sigma}$$
(4.1)

où les déformations et les contraintes sont notées :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2} \sigma_{12} \end{pmatrix}$$
(4.2)

et $\underline{\underline{S}}^0$ est le tenseur initial des souplesses :

$$\underline{\underline{S}}^{0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1}^{0}} & -\frac{\nu_{12}^{0}}{E_{1}^{0}} & 0\\ -\frac{\nu_{12}^{0}}{E_{1}^{0}} & \frac{1}{E_{2}^{0}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}^{0}} \end{bmatrix}$$
(4.3)

Huchette a montré que la réponse obtenue pour ΔS peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Delta \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}}^0 = \bar{\rho} \underline{\underline{H}}(\bar{\rho}, \bar{\mu}) \tag{4.4}$$

où $\underline{H}(\bar{\rho},\bar{\mu})$ est le tenseur des effets de l'endommagement et s'écrit :

$$\underline{\underline{H}}(\bar{\rho},\bar{\mu}) = \underline{\underline{H}}_{1}^{\bar{\rho}} + \bar{\rho}\underline{\underline{H}}_{2}^{\bar{\rho}} + \bar{\mu}\underline{\underline{H}}^{\bar{\mu}}$$

$$\tag{4.5}$$

Les composantes du tenseur des effets de l'endommagement $\underline{\underline{H}}_{1}^{\bar{\rho}}, \underline{\underline{H}}_{2}^{\bar{\rho}}$, et $\underline{\underline{H}}^{\bar{\mu}}$ ont été identifiées dans [Huchette, 2005] pour le matériau de notre étude (M21/T700), et sont utilisées ici comme paramètres du modèle d'endommagement.

Chaque tenseur d'effet de l'endommagement $\underline{\underline{H}}_{1}^{\bar{\rho}}$, $\underline{\underline{H}}_{2}^{\bar{\rho}}$ et $\underline{\underline{H}}^{\bar{\mu}}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{H}}_{y}^{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22}^{xy} S_{22}^{0} & 0 \\ 0 & 0 & h_{66}^{xy} S_{66}^{0} \end{bmatrix}$$
(4.6)

avec $x \in [\bar{\rho}, \bar{\mu}]$ et $y \in [\emptyset, 1, 2]$.

115

4.2.2 Lois d'évolution de l'endommagement

Pour décrire l'évolution des méso-endommagements (fissuration transverse et microdélaminage), nous proposons de construire les lois d'évolution du mésomodèle d'endommagement sur un double critère en énergie et en résistance, comme proposé dans la mécanique de la rupture finie [Leguillon, 2002]. Les deux critères doivent être vérifiés pour que les fissures transverses apparaissent. Pour le microdélaminage, la pointe de fissure transverse générant une concentration forte de contraintes, le critère en résistance est donc considéré comme vérifié inconditionnellement.

Critère en énergie

Comme proposé par Nairn [Nairn, 2000], il s'agit d'appliquer le critère de Griffith qui consiste à comparer l'énergie restituée lors de la création d'endommagement et l'énergie de fissuration. Le taux de restitution d'énergie par unité d'endommagement à l'échelle mésoscopique est calculé à partir de la relation liant le tenseur des souplesses aux variables d'endommagement mésoscopiques (Équations 4.1 et 4.4). On définit les deux forces thermodynamiques $y_{\bar{\rho}}$ et $y_{\bar{\mu}}$ associées aux variables d'endommagement $\bar{\rho}$ et $\bar{\mu}$ en dérivant l'énergie libre volumique de Helmholtz :

$$\Psi = \frac{1}{2}\underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma}$$
(4.7)

En utilisant le tenseur des souplesses endommagé défini par les Équations 4.1 et 4.4, on obtient $y_{\bar{\rho}}$ et $y_{\bar{\mu}}$:

$$y_{\bar{\rho}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\rho}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\sigma} : \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \left(\underline{\underline{S}}^{0} + \Delta \underline{\underline{S}} \right) : \underline{\sigma} \right]$$
$$y_{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} \left[\left(h_{22}^{\bar{\rho}1} + 2\bar{\rho} \ h_{22}^{\bar{\rho}2} + \bar{\mu} \ h_{22}^{\bar{\mu}} \right) S_{22}^{0} \sigma_{22}^{2} + \left(h_{66}^{\bar{\rho}1} + 2h_{66}^{\bar{\rho}2} + h_{66}^{\bar{\mu}} \right) 2 \ S_{66}^{0} \sigma_{66}^{2} \right]$$
(4.8)

$$y_{\bar{\mu}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mu}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\sigma} : \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \left(\underline{\underline{S}}^0 + \Delta \underline{\underline{S}} \right) : \underline{\sigma} \right]$$
$$y_{\bar{\mu}} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \left[h_{22}^{\bar{\mu}} S_{22}^0 \sigma_{22}^2 + h_{66}^{\bar{\mu}} S_{66}^0 2 \sigma_{12}^2 \right]$$
(4.9)





(a) Éprouvette CTT (*Compact Tension Test*).

(b) Éprouvette en stratifié avec des fissures transverses.

FIGURE 4.2 – Création d'une nouvelle surface de fissure dans deux types d'éprouvettes.

Pour appliquer le critère de Griffith, il faut comparer le taux de restitution d'énergie à l'énergie consommée par la propagation de la fissure (taux de restitution d'énergie critique). La Figure 4.2 permet d'illustrer le principe en comparant l'augmentation de la surface fissurée lors d'un essai CTT (Compact Tension Test) et lors d'une fissuration multiple dans un stratifié. Lors de la propagation, le critère de Griffith donne [Hashin, 1996] :

$$\int_{V} d\Psi = G da \tag{4.10}$$

où $d\Psi$ désigne l'énergie libre volumique libérée, V le volume de la structure, G le taux de restitution d'énergie critique et da l'aire de la surface fissurée créée.

Comme proposé dans [Hashin, 1996, Nairn, 2000, Camanho et al., 2007, Tual et al., 2013], pour la propagation de fissures transverses dans un stratifié, le critère de Griffith peut être étendu à la création de fissures transverses de longueur finie en posant l'équivalence entre un incrément de taux de fissuration $d\bar{\rho}$ et l'incrément correspondant de surface fissurée. L'incrément de surface fissurée da par unité de volume est alors défini par :

$$\frac{da}{V} = \frac{wh \ Ld\rho}{whL} = \frac{d\bar{\rho}}{h} \tag{4.11}$$

où V = whL et L sont respectivement le volume et la longueur de l'élément de matière considéré. $Ld\rho$ correspond à l'incrément du nombre de fissures dans ce volume et wh à la surface fissurée lors de la création d'une fissure transverse.

Le même raisonnement peut être fait pour le microdélaminage :

$$\frac{da}{V} = \frac{2wd\mu \ L\rho}{whL} = \frac{2d\bar{\mu}}{h} \tag{4.12}$$

où $2wd\mu$ est l'aire fissurée par microdélaminage pour une fissure transverse, $d\mu$ étant l'incrément de longueur de microdélaminage aux deux pointes de la fissure. $L\rho$ correspond au nombre de fissures dans l'élément de matière considéré.

L'application du critère de Griffith dans un mésomodèle d'endommagement dans le cadre de la mécanique des milieux continus impose de considérer que l'énergie restituée par la totalité de la structure est définie par des grandeurs locales qui sont les forces thermodynamiques $y_{\bar{\rho}}$ et $y_{\bar{\mu}}$. Le report des Équations 4.11 et 4.12 dans l'Équation 4.10 donne alors :

$$y_{\bar{\rho}} - \frac{G_{\rho}}{h} \le 0 \tag{4.13}$$

$$y_{\bar{\mu}} - \frac{2G_{\mu}}{h} \le 0 \tag{4.14}$$

Un taux de restitution d'énergie critique est associé à chacune des deux variables d'endommagement : G_{ρ} pour les fissures transverses et G_{μ} pour les microdélaminages.

Quand le membre de gauche de l'Équation 4.13 ou de l'Équation 4.14 est négatif, il n'y a pas d'évolution de la variable d'endommagement qui lui est associée. Quand le membre de gauche devient positif, l'endommagement se propage afin que $y_{\bar{\rho}}$ ou $y_{\bar{\mu}}$ n'évolue pas et que l'équilibre reste satisfait.

Notons que comme l'épaisseur de la couche endommagée a une influence sur l'effet des taux d'endommagement et par conséquent sur le tenseur des souplesses, l'effet de l'épaisseur du pli est pris en compte explicitement dans les lois d'évolution du critère en énergie (Équation 4.13 et Équation 4.14).

Critère en résistance

Sur la base du double critère proposé par Leguillon [Leguillon, 2002], la création de fissures transverses nécessite non seulement un niveau d'énergie suffisant mais également un niveau de contrainte ou de déformation supérieur à la résistance du matériau. À la différence d'une fissure unique, comme dans l'essai CTT (Figure 4.2(a)), l'accumulation de fissures transverses repose sur l'initiation de fissures tout au long du processus d'endommagement. En effet, on observe expérimentalement que les fissures apparaissent les unes après les autres et qu'elles traversent



FIGURE 4.3 – Champ de déformations ε_{22} obtenu dans le pli à 90° d'une cellule élémentaire soumise à une déformation homogénéisée $\varepsilon_{22} = 0.285\%$ pour un taux de fissuration transverse $\bar{\rho} = 0.37$ et un taux de délaminage $\bar{\mu} = 0.115$.

la couche quasi instantanément. Il y a très peu de fissures qui sont initiées et se propagent progressivement lorsque le chargement augmente.

Pour évaluer l'état de contrainte ou de déformation quels que soient les taux d'endommagement, nous proposons d'utiliser les simulations réalisées sur les cellules élémentaires. La Figure 4.3 représente le champ de déformations transverses ε_{22} obtenu sur une cellule chargée dans la direction transverse pour un taux de fissuration transverse égal à $\bar{\rho} = 0.3705$ et un taux de délaminage égal à $\bar{\mu} = 0.115$.

Comme attendu, on remarque que la présence de la fissure transverse et du microdélaminage décharge globalement la couche. La zone la plus sollicitée sur la couche se situe au bord gauche de la cellule près de l'interface avec les plis adjacents. En théorie, dans un schéma périodique, sans variabilité sur la géométrie ou les propriétés matériau, la prochaine fissure transverse se créerait à cet endroit. Cependant, en raison de la rigidité élevée des plis adjacents, la déformation dans cette zone est très proche de celle imposée en moyenne à la cellule (déformation homogénéisée). Autrement dit, si le critère en résistance était défini à partir de la déformation maximale, il ne serait pas affecté par les taux d'endommagement. Ainsi, le critère en résistance ne ferait qu'augmenter lorsque la déformation homogénéisée croît. Une fois le seuil de résistance atteint pour l'apparition de la première fissure, il serait forcément vérifié pour les fissures suivantes. Seul le critère en énergie piloterait alors l'accumulation des fissures transverses. Le déchargement de la couche lors de l'endommagement n'aurait de conséquence que sur le taux de restitution d'énergie.

En réalité, le seuil d'apparition de la fissure est impacté non seulement par la valeur maximale du critère, mais aussi par la forme du champ du critère. En effet, la microstructure, la présence de variabilité géométrique et matériau engendrent des effets d'échelle qui sont pilotés par les gradients de déformation [Bažant, 1999].



FIGURE 4.4 – Zone d'intégration du calcul du critère non local pour deux cellules élémentaires ayant des épaisseurs de couche fissurée différentes mais des taux d'endommagement $\bar{\rho}$ et $\bar{\mu}$ identiques, NB : L_c ne varie pas avec l'épaisseur de la couche.

Un gradient de déformation important accroît le seuil de rupture par rapport à un champ homogène. Ce type d'effet est bien connu, en particulier dans les matériaux composites. Une manière simple de traiter cet effet est de définir un critère de résistance non-local [Whitney and Nuismer, 1974, Hochard et al., 2007]. Pour cela on définit un volume caractéristique V_c sur lequel est intégré le critère initial (local). Plus le gradient de déformation est grand, moins le critère non-local sera élevé par rapport au critère local.

Nous avons choisi, comme proposé dans [Huchette, 2005], un critère de rupture quadratique basé sur les déformations transverses et de cisaillement dans le plan :

$$c = \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}^r}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{12}^r}\right)^2 \ge 1$$
(4.15)

Où ε_{22}^r et ε_{12}^r sont les seuils de résistance à la fissuration en mode I (direction transverse dans le plan) et en mode II (cisaillement plan). Le volume caractéristique V_c est défini par un cylindre de rayon L_c et dont l'axe est dans la direction des fibres.

La Figure 4.4 illustre l'application du critère non-local sur deux couches d'épaisseur différentes. En bord de couche, le volume caractéristique devient un demi cylindre. La longueur L_c est une caractéristique du matériau et est donc indépendante de l'épaisseur de la couche alors que le champ de déformations dans la couche est homothétique au regard de l'épaisseur de la couche à $\bar{\rho}$ fixé, par conséquent le critère non-local engendre un effet de l'épaisseur sur la rupture.



FIGURE 4.5 – Identification de la loi du critère adimensionné \tilde{c} pour une couche d'épaisseur h = 0.26 mm : valeurs de \tilde{c} calculées par la méthode des éléments finis pour plusieurs valeurs de la longueur caractéristique L_c (symboles \blacktriangle) et lois identifiées.

Définissons un critère, noté \tilde{c} , adimensionné par la valeur du critère que donne la déformation moyenne ou homogénéisée appliquée à la cellule :

$$\tilde{c} = \frac{c}{c^h} \tag{4.16}$$

avec
$$c^h = \left(\frac{\varepsilon_{22}^h}{\varepsilon_{22}^r}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}^h}{\varepsilon_{12}^r}\right)^2$$
 (4.17)

où ε_{22}^h et ε_{12}^h désignent respectivement les déformations transverses dans le plan et de cisaillement plan homogénéisées appliquées à la cellule endommagée.

La Figure 4.5 présente, pour un chargement en mode I ($\varepsilon_{12}^h = 0$), l'évolution du critère adimensionné noté \tilde{c} en fonction de $\bar{\rho}$ pour $\bar{\mu} = 0$ et différentes valeurs de L_c . Comme attendu, le critère diminue lorsque le taux de fissuration augmente traduisant le déchargement de la couche. Pour exploiter ces résultats dans le modèle, nous proposons d'identifier une loi analytique représentant les résultats obtenus avec les simulations numériques. Cette loi permettra de calculer le critère sans refaire de simulation par éléments finis pour chaque valeur de $\bar{\rho}$. Les courbes présentent une asymptote de pente notée *a* lorsque $\bar{\rho}$ devient grand. Nous proposons donc la loi suivante :

$$\tilde{c} = 1 - a(\bar{\rho} - \bar{\rho}_0)e^{-\frac{b}{\bar{\rho} - \bar{\rho}_0}}$$
(4.18)

a, b et $\bar{\rho}_0$ sont des paramètres dépendants de L_c . Les lois ainsi obtenues sont tracées sur la Figure 4.5.



FIGURE 4.6 – Réponse du modèle avec double critère sur des stratifiés croisés avec $G_{\rho} = 120 \text{ J.m}^{-2}, \varepsilon_{22}^r = 0.8\%$ et $L_c = 0.234 \text{ mm}.$

4.3 Exemples de la réponse du modèle

Le modèle a été implémenté dans Matlab[®]. Le programme permet d'appliquer un chargement plan de membrane en effort généralisé ou en déformation sur n'importe quel stratifié. Pour illustrer comment se comporte le modèle proposé, il est appliqué au matériau de l'étude (composite carbone époxy M21/T700). Les rigidités et tenseurs d'effet de l'endommagement utilisés sont extraits de [Huchette, 2005, Bois et al., 2014].

La Figure 4.6 montre la réponse du modèle en terme de taux de fissuration transverse sur des stratifiés $[0_2/90_1/0_2]$ et $[0_2/90_3/0_2]$ pour $G_{\rho} = 120 \text{ J.m}^{-2}$, $\varepsilon_{22}^r =$ 0.8% et $L_c = 0.234$ mm. Pour $L_c = 0.234$ mm, les paramètres de l'Équation 4.18 sont : a = 2.15, b = 0.028 et $\bar{\rho}_0 = 0.191$. La longueur L_c utilisée correspond à 90% de l'épaisseur du pli élémentaire, ce qui peut sembler important. Il est toutefois difficile d'avoir un regard critique sur cette valeur vu l'ensemble des phénomènes que cette longueur caractéristique représente. Les critères en énergie et en résistance sont tracés en pointillés. Pour la couche triple, la réponse est pilotée uniquement par le critère en déformation puisque seul, le critère en énergie donnerait des taux de fissuration très élevés. Pour la couche simple, l'initiation et la première phase d'endommagement sont pilotées par le critère en énergie alors que la seconde phase est pilotée par le critère en résistance. La saturation du taux de fissuration est ainsi, dans les deux cas, gouvernée par le critère en résistance. L'effet d'épaisseur induit par le critère non-local donne des niveaux de saturation différents pour les deux stratifiés. Notons que pour obtenir du microdélaminage, il faudrait prendre pour



(a) Influence de G_{ρ} sur un $[0_2/90_1/0_2]$ pour $\varepsilon_{22}^r = 0.8\%$.

(b) Influence de ε_{22}^r sur un $[0_2/90_3/0_2]$ pour $G_{\rho} = 120 \text{ J.m}^{-2}$.

FIGURE 4.7 – Influence de G_{ρ} et ε_{22}^r sur le taux de fissuration avec $L_c = 0.234$ mm.

 G_{μ} des valeurs d'un ordre de grandeur inférieur à ce que l'on peut trouver dans la littérature. Ce résultat est cohérent avec les résultats expérimentaux obtenus dans le Chapitre 2.

L'effet de l'épaisseur de la couche a pour conséquence que l'initiation de la fissuration d'une couche fine (ici, un pli) est pilotée par le taux de restitution d'énergie critique G_{ρ} , tandis que pour une couche plus épaisse, c'est le seuil de résistance en déformation ε_{22}^r qui conditionne la fissuration ; l'autre critère étant, dans chacun des deux cas, déjà vérifié. La Figure 4.7 montre l'influence de G_{ρ} et ε_{22}^r sur le taux de fissuration respectivement pour les stratifiés $[0_2/90_1/0_2]$ et $[0_2/90_3/0_2]$. Les résultats expérimentaux présentés dans le chapitre 2 sont également tracés. Même si G_{ρ} et ε_{22}^r permettent de décaler les seuils d'initiation, on remarque que le démarrage lent au début du processus d'endommagement ne peut pas être reproduit par le modèle. La Figure 4.8 montre l'influence de L_c sur le taux de fissuration pour les stratifiés $[0_2/90_1/0_2]$ et $[0_2/90_3/0_2]$. On remarque que L_c gouverne le niveau de saturation de $\bar{\rho}$. Lorsque L_c augmente, les niveaux de saturation augmentent d'autant plus que l'épaisseur de la couche est grande.

Les Figures 4.7 et 4.8 permettent de proposer une manière d'identifier le modèle :

- 1. détermination de G_{ρ} à partir de l'initiation sur le stratifié $[0_2/90_1/0_2]$;
- 2. détermination de ε_{22}^r à partir de l'initiation sur le stratifié $[0_2/90_3/0_2]$;
- 3. détermination de L_c à partir de la saturation sur les deux stratifiés.



FIGURE 4.8 – Influence de L_c sur le taux de fissuration pour $G_{\rho} = 120 \text{ J.m}^{-2}$ et $\varepsilon_{22}^r = 0.8\%$.

Cependant, on a vu que cette identification est délicate à cause de l'évolution lente au début de l'endommagement et que cette approche n'est pas suffisante pour représenter le démarrage lent au début de l'endommagement. Nous proposons donc d'introduire l'effet des variabilités et d'identifier ensuite les paramètres G_{ρ} , ε_{22}^{r} et L_{c} .

4.4 Prise en compte de l'effet de la variabilité sur les cinétiques d'endommagement

Comme déjà évoqué, la représentation de l'évolution lente du taux de fissuration au début de l'endommagement est cruciale pour la prédiction des premiers points de fuite. Le choix de construire les lois d'évolution à partir de l'énergie de fissuration et la résistance permet d'introduire l'effet de la variabilité sur des paramètres physiques aux échelles pertinentes. Plusieurs sources de variabilités sont présentes dans le matériau stratifié. A l'échelle de la microstructure, on peut observer des porosités et des zones plus ou moins riches en résine. Ces défauts peuvent affecter la résistance et l'énergie de fissuration. La distribution de ces défauts est telle que le caractère non-local du critère ne suffit pas forcément à les prendre en compte. À l'échelle de la mésostructure, on peut observer des variations d'épaisseur de couche provoquées notamment par les *gaps* inhérents à la fabrication par placement de fibre. Ces défauts n'affectent pas l'énergie de fissuration, mais en modifiant la mésostructure, ils modifient l'effet de l'endommagement sur la raideur de la couche et donc l'énergie restituée lors de la fissuration.

Ces différents effets pourraient être quantifiés à l'aide d'une approche numérique micro-méso basée sur l'analyse probabiliste des micro et mésostructures. Pour des raisons de simplicité, nous avons préféré introduire la variabilité directement sur les paramètres du modèle sous la forme de distributions phénoménologiques. Les paramètres affectés par la variabilité sont les résistances ε_{22}^r et ε_{12}^r , ainsi que les tenseurs d'effet de l'endommagement h_{22}^{xy} et h_{66}^{xy} (cf. Équation 4.6). Nous avons choisi de ne pas affecter de variabilité sur l'énergie de fissuration G_{ρ} , car en pratique chaque fissure transverse se développe instantanément sur l'épaisseur de la couche et une longueur dans le plan assez importante, ce qui moyenne la valeur de l'énergie et réduit l'effet des variabilités présentes dans la microstructure. Les variabilités se présentant sous la forme de défauts, elles ont tendance à abaisser les propriétés nominales ou idéales (i.e. sans défaut). Ainsi, nous avons opté pour des distributions asymétriques définies par l'équation suivante :

$$x \to P(x) = \frac{(x - x_{min})^{\alpha} (x_{max} - x)^{\beta}}{A}$$
 (4.19)

avec
$$A = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - x_{min})^{\alpha} (x_{max} - x)^{\beta} dx$$
 (4.20)

où α et β sont deux réels positifs qui pilotent la dissymétrie de la distribution, et A est une constante de normalisation. Les allures des distributions obtenues pour le paramètre $h_{22}^{\bar{\rho}1}$ des effets de l'endommagement, et pour la résistance sens transverse ε_{22}^r sont représentées sur la Figure 4.9.

Le comportement avec prise en compte des variabilités est obtenu en effectuant la moyenne des réponses obtenues dans la plage de variation des paramètres incertains, pondérée par les densités de probabilité de ces paramètres. En pratique, des jeux de paramètres sont constitués à partir des distributions illustrées en Figure 4.9, puis une simulation est réalisée pour chacun des jeux de paramètres. Enfin, la moyenne de toutes les simulations est réalisée en pondérant chaque résultat par la densité de probabilité du jeu de paramètre avec lequel il a été obtenu. Cette méthode revient à considérer comme Volume Élémentaire Représentatif un ensemble de cellules élémentaires endommagées placées en série, soumises à une même déformation homogénéisée, et ayant des propriétés différentes.

La variabilité de l'effet des endommagements h_{22}^{xy} et la variabilité de la résistance ε_{22}^r ont été, dans un premier temps, appliquées séparément à deux stratifiés croisés pour obtenir la Figure 4.10. Dans cette figure, les courbes en pointillés sont des

CHAPITRE 4. MODÉLISATION DE LA FORMATION DES RÉSEAUX DE FISSURES POUR LA PRÉDICTION DES CHEMINS DE FUITE



FIGURE 4.9 – Allures des densités de probabilité pour $h_{22}^{\bar{\rho}1}$ et ε_{22}^r avec $\alpha = 0.2$ et $\beta = 2$. Les symboles • représentent les valeurs des paramètres utilisées pour obtenir les courbes tracées en pointillés dans la Figure 4.10.

exemples de réponses obtenues sur une cellule élémentaire (autrement dit, pour une valeur de propriété), et les courbes en traits pleins représentent la moyenne pondérées de toutes les cellules élémentaires. L'effet de la variabilité de h_{22}^{xy} pour des stratifiés $[0_2/90_1/0_2]$ et $[0_2/90_3/0_2]$ est illustré respectivement par les Figures 4.10(a) et 4.10(c) (figures de gauche), tandis que les Figures 4.10(b) et 4.10(d) (figures de droite) illustrent l'effet de la variabilité de ε_{22}^r pour des stratifiés $[0_2/90_1/0_2]$ et $[0_2/90_3/0_2]$. On remarque que la variabilité de h_{22}^{xy} , qui modifie le critère de fissuration en énergie, s'exprime de manière importante dans le cas du stratifié $[0_2/90_1/0_2]$, donnant lieu a un démarrage progressif, alors que son effet n'est pas sensible pour le comportement du stratifié $[0_2/90_3/0_2]$. En ce qui concerne ε_{22}^r , qui intervient dans le critère de fissuration en résistance, on observe que sa valeur influe sur le taux de fissuration des deux stratifiés dans la phase de saturation, mais l'effet de la variabilité de ε_{22}^r n'est notable que pour le stratifié $[0_2/90_3/0_2]$, dont la couche à 90° est constituée de trois plis. Dans les deux cas où la variabilité a un effet significatif (Figures 4.10(a) et 4.10(d)), celui-ci se traduit par un démarrage progressif du processus de fissuration.



(a) Influence de la variabilité de h_{22}^{xy} sur le taux de fissuration transverse d'un stratifié $[0_2/90_1/0_2]$.



(c) Influence de la variabilité de h_{22}^{xy} sur le taux de fissuration transverse d'un stratifié $[0_2/90_3/0_2]$.



(b) Influence de la variabilité de ε_{22}^r sur le taux de fissuration transverse d'un stratifié $[0_2/90_1/0_2]$.



(d) Influence de la variabilité de ε_{22}^r sur le taux de fissuration transverse d'un stratifié $[0_2/90_3/0_2]$.

FIGURE 4.10 – Exemple de la prise en compte de la variabilité pour l'évolution du taux de fissuration transverse.

	crit	ère en éne	ergie	critère en déformation			forme des distributions		
paramètres	G_{ρ}	$h_{22}^{\bar{ ho}1(*)}$	$h_{22}^{\bar{\rho}2(*)}$	ε_{22}^r	L_c		α	β	
nominaux identifiés	120	0.86	2.65	0.8	0.234		0.2	2	
unité	$J.m^{-2}$	-	-	%	mm		-	-	
	$h_{22}^{ar{ ho}1}$	1 2	$h_{22}^{ar{ ho}2}$		ε_{22}^r				
plage de	min	max	min	max	min r	max			
variation	0.43	2.15	1.32	6.62	0.5	0.9			
unité	-	-	-	-	%	%			
ιœ	0.6 - 0.4 - 0.2 - 0	0.6 0	ο ο .8 1 ε	1.2 (%)	1.4 1	1.6	$\begin{bmatrix} 0_2 & 90_1 & 0_2 \\ 0_2 & 90_3 & 0_2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0_2 & 90_1 & 0_2 \\ 0_2 & 90_1 & 0_2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0_2 & 90_3 & 0_2 \end{bmatrix}$	essais essais modèle modèle	

TABLE 4.1 – Paramètres identifiés du modèle, ^(*) valeurs issues de [Huchette, 2005].

FIGURE 4.11 – Résultats expérimentaux et résultats du modèle.

Finalement, l'identification du modèle consiste à déterminer G_{ρ} et L_c , la valeur moyenne de ε_{22}^r , ainsi que les écarts types sur ε_{22}^r et $h_{22}^{\bar{\rho}y}$. La forme des distributions (dissymétrie et progressivité), n'ayant que peu d'effet, a été figée. Dans l'identification présentée ici, les paramètres associés au cisaillement (ε_{12}^r) et au microdélaminage (G_{μ}) ne sont pas recherchés car les données expérimentales ne donnent pas d'informations les concernant. Pour la même raison, la variabilité des composantes $h_{66}^{\bar{\rho}y}$, $h_{22}^{\bar{\mu}}$ et $h_{66}^{\bar{\mu}}$ du tenseur des effets de l'endommagement n'est pas étudiée non plus.

En suivant les trois étapes proposées dans la Section 4.3 et en ajustant par itération les deux écarts types, on obtient les valeurs rassemblées dans la Table 4.1. La Figure 4.11 permet de comparer la réponse du modèle avec les résultats expérimentaux présentés dans le Chapitre 2. Le modèle reproduit parfaitement les seuils de fissuration avec l'évolution lente du taux de fissuration au début de l'endommagement pour les deux épaisseurs de couche. La saturation est également bien reproduite.



FIGURE 4.12 – Allure théorique de l'évolution des taux de fissuration dans un stratifié ou deux couches d'épaisseurs différentes se fissurent de manière isolée ou non, en l'absence de variabilité matériau.

4.5 Interactions entre plis et agencement des fissures

4.5.1 Effet des interactions sur les seuils et les cinétiques

En étudiant la fissuration transverse des plis de différents stratifiés quasiisotropes, Huchette a mis en évidence l'interaction entre les endommagements de plis adjacents [Huchette, 2005]. Ce phénomène a également été observé lors des essais présentés dans le Chapitre 2 sur la stratification $[0/-67.5/+67.5_2/-67.5/0]$. L'apparition de fissures dans une couche peut générer simultanément des fissures dans les plis adjacents même si leur seuil de fissuration lorsqu'ils sont isolés est plus élevé. Ces interactions peuvent s'expliquer par la hausse de contrainte engendrée en pointe de fissure dans le pli adjacent au pli endommagé.

Bien que l'interaction se traduise par un démarrage simultané de la fissuration dans les deux couches, en pratique, il est difficile de quantifier ces interactions en termes de taux de fissuration car les fissures engendrées par les interactions sont courtes (Figure 2.15) et se traduisent par des taux de fissuration très faibles (Figure 4.12). L'effet des interactions sur les taux de fissuration est donc masqué par l'effet des variabilités matériaux. Ceci explique que l'effet des interactions ne soit pas pris en compte dans le dimensionnement des structures composites.

Toutefois, cet effet des interactions doit être considéré pour le dimensionnement en perméabilité. Pour le quantifier expérimentalement, un grand nombre d'essais doit être réalisé. En raison des effets de bord, il parait judicieux de faire appel à la tomographie plutôt qu'à l'observation sur les bords des éprouvettes. Devant l'ampleur de ce travail expérimental, le recours à des essais virtuels semble intéressant. Il permettrait d'intégrer dans le critère en résistance l'effet des fissures dans les plis adjacents. Ce travail de modélisation n'ayant pas été réalisé dans le cadre de cette thèse, et les résultats expérimentaux étant insuffisants pour proposer une loi phénoménologique, l'effet des interactions sur les lois d'évolution des endommagements n'a pas été intégré au modèle.

4.5.2 Effet des interactions sur l'agencement des fissures transverses et la formation de chemins de fuite

D'après les observations des réseaux de fissures du Chapitre 2, les interactions entre plis favorisent l'apparition dans les différents plis de fissures regroupées. Ce phénomène a pour conséquence que l'effet des interactions sur l'agencement des fissures peut être décrit par le taux de croisement χ ou le taux de croisement réduit $\bar{\chi}$ des interfaces, tels que définis au Chapitre 2 par les Équations 2.3 et 2.5 :

$$\chi_{i,i+1} = \frac{n_{croisements}}{S} \tag{4.21}$$

$$\bar{\chi}_{i,i+1} = \chi_{i,i+1} \ S_{motif} \tag{4.22}$$

$$\bar{\chi}_{i,i+1} = \frac{\chi_{i,i+1}}{\bar{\rho}_i \ \bar{\rho}_{i+1} \ \sin|\theta_{i+1} - \theta_i|} \tag{4.23}$$

L'évolution de l'agencement des fissures dans deux plis adjacents est schématisée en Figure 4.13. L'étape 4 représente l'évolution vers un réseau de fissures longues, et correspond à un taux de croisement réduit $\bar{\chi}$ tendant vers 1. Dans ce cas, la surface contenant un croisement tend vers la surface définie par $S_{motif} = 1/(\bar{\rho}_i |\bar{\rho}_{i+1}| sin |\theta_{i+1} - \theta_i|).$

Une autre conséquence du regroupement des fissures est que les croisements de fissures aux différentes interfaces entre plis sont également regroupés, ce qui signifie que les fissures forment préférentiellement des réseaux susceptibles d'être interconnectés. Dans ce cas, on peut borner le nombre de chemins de fuite potentiels par le plus petit nombre de croisements aux interfaces. La densité de point de fuite X s'exprime alors comme suit :

$$X = \min_{i \in [1, n-1]} (\chi_{i, i+1})$$
(4.24)



FIGURE 4.13 – Proposition de scénario d'évolution de l'endommagement et de l'agencement des fissures.

La percolation des chemins de fuite potentiels, qui gouverne le nombre de chemins de fuite effectifs, ne serait alors plus régie que par la connectivité des croisements de fissures aux interfaces.

Pour modéliser la connectivité des croisements, on peut s'appuyer sur un modèle qui décrirait les microdélaminages en prenant en compte que les microdélaminages ne sont pas les mêmes dans les zones de croisement que dans les zones courantes. Comme observé au Chapitre 2, il est possible qu'il n'y ait pas de microdélaminage dans les zones courantes et qu'il y en ait de manière localisée dans certains croisements. On peut également recaler le modèle de prédiction des points de fuite en identifiant par exemple un facteur de connectivité à partir de mesures du nombre de points de fuite réalisées avec les dispositifs proposés au Chapitre 3.

4.5.3 Proposition d'un modèle pour prédire les croisements de fissures et chemins de fuite potentiels

Nous proposons de prédire les chemins de fuite potentiels en nous appuyant sur le nombre de croisements aux interfaces. Pour cela, la démarche retenue consiste à construire une loi phénoménologique décrivant l'évolution du taux de croisement réduit $\bar{\chi}$. La variable sélectionnée pour piloter la loi d'évolution doit être nulle lorsque le taux de fissuration de l'un des deux plis adjacents est nul, puisque dans ce cas il n'y a pas de croisement possible. Nous avons choisi d'exprimer cette loi en fonc-



FIGURE 4.14 – Taux de croisement réduit $\bar{\chi}_{i,i+1}$ en fonction du produit $\bar{\rho}_i \ \bar{\rho}_{i+1}$ des taux de fissuration des deux plis adjacents.

tion du produit des taux de fissuration des plis adjacents à l'interface contenant les croisements de fissures. Les taux de croisement réduits mesurés au Chapitre 2 (Figure 2.24) sont tracés sur la Figure 4.14 en fonction de ce produit.

On remarque que le taux de croisement réduit tend vers une valeur très grande lorsque $\bar{\rho}_i$ ou $\bar{\rho}_{i+1}$ tend vers zéro. Ceci est dû au fait que la surface du motif S_{motif} introduite dans la définition de $\bar{\chi}$ tend vers l'infini lorsque l'un des deux $\bar{\rho}$ tend vers zéro. Par ailleurs, comme le montre la Figure 4.13, $\bar{\chi}$ tend vers 1 lorsque les taux de fissuration atteignent la saturation et que la longueur des fissures devient très grande. Cette asymptote n'est pas visible sur la Figure 4.14 car le chargement maximal appliqué à l'éprouvette est bien inférieur à celui pour lequel on atteint la saturation. À partir de cette analyse, on propose pour la loi phénoménologique la forme suivante :

$$\bar{\chi} = 1 + \frac{\lambda}{(\bar{\rho}_i \ \bar{\rho}_{i+1})^{\gamma}} \tag{4.25}$$

où λ et γ sont des paramètres à identifier. Par exemple, en prenant $\lambda = 0.3$ et $\gamma = 0.7$, on obtient la courbe tracée sur la Figure 4.14. Pour que la loi soit exploitable dans le modèle complet, ces paramètres devront être identifiés sur des données plus représentatives que celles dont nous disposons. En particulier, il faudra étudier l'effet de la séquence d'empilement sur les paramètres λ et γ , le motif de fissuration et son évolution étant étroitement liés à l'effet des interactions sur la fissuration.

Avec cette loi et l'Équation 4.23, on obtient pour le taux de croisement χ l'expression suivante :

$$\chi_{i,i+1} = \bar{\chi}_{i,i+1} \ \bar{\rho}_i \ \bar{\rho}_{i+1} \ \sin|\theta_{i+1} - \theta_i| \tag{4.26}$$

$$\chi_{i,i+1} = \left(\bar{\rho}_i \ \bar{\rho}_{i+1} + \lambda \left(\bar{\rho}_i \ \bar{\rho}_{i+1}\right)^{1-\gamma}\right) \sin|\theta_{i+1} - \theta_i|$$
(4.27)

La puissance γ de la loi étant inférieure à 1, on a bien un taux de croisement qui tend vers zéro lorsque le produit des $\bar{\rho}$ tend vers zéro.

Cette loi phénoménologique a été intégrée au mésomodèle. Cependant, la non prise en compte de l'effet des interactions entre plis sur les cinétiques d'endommagement, et le nombre trop limité de résultats expérimentaux ne permet pas de proposer dans ce mémoire une comparaison pertinente entre les essais et les simulations.

4.6 Bilan de la modélisation

Dans ce chapitre nous avons proposé des lois d'évolution des endommagements basées sur un double critère en énergie et en déformation, en faisant le choix d'un critère en déformation non local. L'utilisation de ces lois d'évolution construites sur des paramètres matériau facilite l'introduction de la variabilité qui est à l'origine du démarrage lent de la fissuration observé dans les essais. Le modèle obtenu ainsi permet de reproduire les phases d'initiation, de développement et de saturation des fissures transverses ainsi que l'effet de l'épaisseur des couches.

Les taux d'endommagement servent ensuite de données d'entrée à une loi phénoménologique qui décrit l'évolution des taux de croisement et de chemins de fuite potentiels.

Ces éléments de modélisation s'appuient fortement sur les résultats expérimentaux, en particulier les observations par microtomographie. La réalisation d'un plus grand nombre d'essais permettrait de conforter les choix de modélisation et de valider l'identification des paramètres. Notamment, des essais complémentaires seraient nécessaires en vue de vérifier si le modèle reproduit correctement l'effet du cisaillement sur la fissuration transverse.

Par ailleurs, en l'état, le modèle ne prend pas en compte les endommagements diffus à l'échelle microscopique qui sont à l'origine des non-linéarités observées en cisaillement. Cela pourrait être fait en s'appuyant sur les modèles multi-échelles proposés par [Ladevèze and Lubineau, 2003, Laurin et al., 2013].

Globalement, étant donné la lourdeur des approches expérimentales, l'utilisation d'essais virtuels permettrait d'analyser les effets des interactions entre plis ainsi que la connectivité des croisements et de nourrir ainsi le mésomodèle.