

Modélisation de champs aléatoires à longue mémoire

Nous présentons dans ce chapitre diverses manières de modéliser des champs à longue mémoire. Nous verrons qu'il est assez aisé de construire de tels champs et que, par ailleurs, la forte dépendance apparaît déjà dans certains modèles familiers.

Dans les deux premières parties, nous nous inspirons des modèles existants en dimension $d = 1$ afin de les adapter au cadre des champs. Il s'agit respectivement des champs obtenus par filtrage d'un bruit blanc ou par agrégation de champs à courte mémoire.

Dans le cas du filtrage, on obtient un champ fortement dépendant dès que le filtre est non-borné. On verra notamment que les champs ARMA, contrairement aux séries temporelles ARMA en dimension $d = 1$, peuvent être à longue mémoire. Nous présentons également le filtrage fractionnaire qui est une technique de modélisation déjà rencontrée dans certains travaux en image pour obtenir des propriétés de forte dépendance.

La modélisation de la longue mémoire par agrégation, présentée dans la seconde partie, est une technique populaire en dimension 1, grâce notamment à son interprétation en économie. Mais l'agrégation semble être une démarche inédite en dimension supérieure. Nous verrons qu'elle peut garder un sens en économétrie en dimension $d \geq 2$ et nous proposerons quelques exemples de champs agrégés fortement dépendants.

La troisième partie présente des modèles issus de la mécanique statistique. Ils sont donc plus spécifiques du cadre des champs. On verra que la transition de phase est un phénomène très lié à la forte dépendance.

Quelques démonstrations sont reléguées dans la quatrième partie. Finalement, des simulations de champs à longue mémoire concluent le chapitre.

2.1 Modélisation par filtrage

Soit un bruit blanc $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ de variance σ^2 admettant la représentation spectrale

$$\varepsilon_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i \langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda),$$

où la mesure contrôlée de Z est de densité constante $\sigma^2/(2\pi)^d$ sur $[-\pi, \pi]^d$.

On dit que le champ X est obtenu par filtrage de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ à travers le filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ lorsque

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} a(\lambda) dZ(\lambda). \quad (2.1.1)$$

La densité spectrale de X s'écrit alors

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} |a(\lambda)|^2, \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi]^d. \quad (2.1.2)$$

En posant $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ la suite des coefficients de Fourier de a , i.e.

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} a(\lambda) e^{-i\langle k, \lambda \rangle} d\lambda,$$

la fonction a se décompose en $a(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i\langle k, \lambda \rangle}$, où la convergence de la série a lieu dans L^2 , et on peut réécrire le filtrage (2.1.1) dans le domaine temporel :

$$X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varepsilon_{n-k}.$$

D'après l'expression (2.1.2) de sa densité spectrale, le champ X sera à longue mémoire dès que $|a|$ est non-borné.

Avant de nous focaliser sur des classes particulières de filtres (les filtres ARMA et les filtres fractionnaires), nous donnons un exemple de filtrage en dimension $d = 2$ conduisant à un champ dont la densité spectrale est singulière sur toute une ligne.

Exemple 1. Soit un champ aléatoire $(X_{n_1, n_2})_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$ obtenu par filtrage d'un bruit blanc fort par $a(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 + \theta \lambda_2|^\alpha$ où $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Sa densité spectrale, définie sur $[-\pi, \pi]^2$, est proportionnelle à $|\lambda_1 + \theta \lambda_2|^{2\alpha}$. Le champ est à longue mémoire non-isotrope puisque sa densité spectrale ne vérifie pas (1.2.1). De plus le lemme suivant montre que sa fonction de covariance ne vérifie pas (1.2.2).

Lemme 1. *Soit un champ aléatoire $(X_{n_1, n_2})_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$ dont la densité spectrale, définie sur $[-\pi, \pi]^2$ vaut $f(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 + \theta \lambda_2|^{2\alpha}$, où $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors sa fonction de covariance ne vérifie pas (1.2.2).*

La démonstration est donnée dans la section 2.4.

2.1.1 Les champs ARMA

Les champs ARMA sont obtenus dans le cas particulier où le filtre s'écrit, pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [-\pi, \pi]^d$, $a(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \frac{Q}{P}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$ où P et Q sont des polynômes. Pour plus de lisibilité, nous focalisons notre étude sur les champs autorégressifs c'est à dire lorsque le polynôme Q est identiquement égal à 1.

Nous allons montrer que contrairement aux processus autorégressifs en dimension 1, un champ autorégressif peut être fortement dépendant. En nous plaçant dans le domaine

spectral, nous donnons auparavant quelques conditions générales d'existence des champs autorégressifs.

En notant L_j l'opérateur retard par rapport au j^{eme} indice, c'est à dire

$$L_j X_{n_1, \dots, n_d} = X_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_d},$$

ou encore dans le domaine spectral,

$$L_j X_{n_1, n_2, \dots, n_d} = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} e^{-i\lambda_j} dZ_X(\lambda),$$

où Z_X représente la mesure spectrale aléatoire du champ stationnaire X , on remarque qu'un champ autorégressif est solution de l'équation plus familière :

$$P(L_1, \dots, L_d) X_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d}. \quad (2.1.3)$$

Nous avons considéré un champ autorégressif comme le filtrage d'un bruit par la fonction $P^{-1}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$; dès que cette dernière est dans $L^2([-\pi, \pi]^d)$, nous sommes garantis de la stationnarité de X . Réciproquement, sous quelles conditions la représentation (2.1.3) admet-elle une solution stationnaire? En dimension $d = 1$, le résultat est bien connu : il est nécessaire et suffisant que le polynôme P n'ait aucune racine de module 1 (cf par exemple Brockwell et Davis (1991)). Cette équivalence n'est plus vraie en dimension quelconque comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc de mesure spectrale aléatoire Z . La représentation*

$$P(L_1, \dots, L_d) X_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d} \quad (2.1.4)$$

admet une unique solution stationnaire si et seulement si

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} \right|^2 d\lambda < \infty. \quad (2.1.5)$$

Dans ce cas

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda). \quad (2.1.6)$$

Démonstration. Supposons X stationnaire. En notant Z_X la mesure spectrale aléatoire de X , (2.1.4) s'écrit

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ_X(\lambda) = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda).$$

Ceci prouve que X admet une densité spectrale proportionnelle à $|1/P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^2$ qui est par définition intégrable sur $[-\pi, \pi]^d$. Réciproquement, si (2.1.5) est vérifiée, le champ

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} e^{i\langle n, \lambda \rangle} dZ(\lambda)$$

est solution de (2.1.4) de façon évidente. Supposons qu'il existe une autre solution stationnaire à (2.1.4), le filtrage de cette dernière par $1/P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$ montre qu'elle est égale à X . \square

Remarque 5. Il est important, en vue d'applications, de savoir sous quelles conditions la solution (2.1.6) admet une écriture sous forme de moyenne mobile causale. Cette question présuppose une relation d'ordre dans \mathbb{Z}^d . Notre objectif étant juste de souligner l'existence de la forte dépendance dans des champs autorégressifs, nous ne rentrons pas dans ces considérations. On trouve dans Guyon (1993) une description des principales écritures de (2.1.6) selon la relation d'ordre choisie.

La condition (2.1.5) est équivalente en dimension $d = 1$ à l'absence de racines de module 1 pour P . Ce dernier point est suffisant en dimension $d \geq 2$ pour garantir (2.1.5) mais pas nécessaire.

Il est en effet possible qu'un polynôme P vérifie (2.1.5) et qu'il existe par ailleurs (ν_1, \dots, ν_d) tel que $P(e^{i\nu_1}, \dots, e^{i\nu_d}) = 0$. D'après la proposition précédente, la représentation (2.1.4) associée à ce polynôme admet une solution stationnaire dont la densité spectrale est proportionnelle à $|1/P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^2$. Cette solution stationnaire sera donc fortement dépendante car sa densité spectrale est non bornée.

Nous donnons un exemple simple d'une représentation AR conduisant à un champ fortement dépendant.

Exemple 2. En dimension $d = 5$, la représentation

$$X_{n_1, \dots, n_5} - \frac{1}{5}(X_{n_1-1, n_2, \dots, n_5} + X_{n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5} + \dots + X_{n_1, \dots, n_4, n_5-1}) = \varepsilon_{n_1, \dots, n_5},$$

où ε est un bruit blanc de variance σ^2 , admet une solution stationnaire de densité spectrale

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^5} \left| \frac{1}{1 - \frac{e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_5}}{5}} \right|^2.$$

Elle est singulière à l'origine et X est à longue mémoire.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\int_{[-\pi, \pi]^5} \left| \frac{1}{1 - \frac{e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_5}}{5}} \right|^2 d\lambda < \infty.$$

Le module à intégrer est inférieur à $[1 - (\cos(\lambda_1) + \dots + \cos(\lambda_5))/5]^{-2}$. Cette expression est majorée par $7\pi^2[\lambda_1^2 + \dots + \lambda_5^2]^{-2}$ car pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leq 1 - (2/\pi)x^2$. Un changement en coordonnées polaires prouve l'intégrabilité recherchée. \square

Remarque 6. Le même exemple, mais en dimension $d = 3$, est proposé dans Rosenblatt (1985). Mais il n'est pas valide comme le précise le lemme suivant prouvé dans la partie 2.4.

Lemme 2. La représentation

$$X_{n_1, n_2, n_3} - \frac{1}{3}(X_{n_1-1, n_2, n_3} + X_{n_1, n_2-1, n_3} + X_{n_1, n_2, n_3-1}) = \varepsilon_{n_1, n_2, n_3}$$

n'admet aucune solution stationnaire.

2.1.2 Filtrage fractionnaire

L'idée du filtrage fractionnaire est la suivante. On considère une écriture AR dont le polynôme autoregressif P admet des racines sur le cercle unité et ne satisfait pas (2.1.5). On élève alors ce polynôme à une certaine puissance α de telle sorte que

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} |P^{-\alpha}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})|^2 d\lambda < \infty.$$

On appelle filtrage fractionnaire le filtrage d'un bruit blanc par $P^{-\alpha}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})$ qui devient dès lors légitime. Par construction, le champ résultant sera stationnaire et il sera à longue mémoire car de densité spectrale non bornée.

Cette démarche apparait pour la première fois en dimension 1 dans Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981). Ces auteurs introduisent la classe bien connue des modèles FARIMA (Fractionnal Autoregressive Integrated Moving Average) obtenus en filtrant un bruit blanc par $a(x) = (1 - x)^\alpha$, avec $-1/2 < \alpha < 1/2$, éventuellement multiplié par un filtre ARMA classique.

Les modèles existants en dimension 1

Nous rappelons quelques propriétés des modèles issus du filtrage fractionnaire en dimension 1. Il s'agit d'une part de la classe des processus FARIMA évoqués ci-dessus et des processus GARMA (dont le développement en moyenne mobile infinie fait intervenir les polynômes de Gegenbauer). Nous nous en inspirerons pour proposer quelques modèles en dimension supérieure.

Proposition 3. *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2 .*

L'équation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, X_n = (1 - L)^\alpha \varepsilon_n,$$

avec $-1/2 < \alpha < 1/2$ admet une unique solution stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui s'écrit

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n-j}, \quad \text{où} \quad \psi_j = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} = \prod_{k=1}^j \frac{k - 1 - \alpha}{k}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

On a de plus $\psi_j \sim \frac{j^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ lorsque $j \rightarrow \infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \infty$.

La densité spectrale de X_n s'écrit

$$\forall \lambda \in [-\pi, \pi[, f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{2\alpha} \sim c\lambda^{2\alpha} \text{ en } 0,$$

c étant une constante strictement positive.

Enfin sa fonction de covariance vaut pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$r(k) = \sigma^2 (-1)^k \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)}{\Gamma(k + 1 + \alpha)\Gamma(1 - k + \alpha)},$$

elle est équivalente, lorsque $k \rightarrow \infty$, à

$$r(k) \sim ck^{-2\alpha-1}$$

c étant une constante strictement positive.

Ces propriétés peuvent être trouvées dans Brockwell et Davis (1991). On remarque que le processus X est à longue mémoire dès que $-1/2 < \alpha < 0$ car sa densité spectrale est singulière en l'origine et la suite de ses covariances est non sommable.

Nous focalisons à présent la classe des processus GARMA. Les processus GARMA sont construits en filtrant un bruit blanc par un filtre du type $a(x) = (1 - 2x \cos \nu + x^2)^\alpha$ avec $|\alpha| < 1/2$ éventuellement multiplié par un filtre ARMA classique. Ce modèle a été proposé par Hosking (1981) et son étude, effectuée par Gray et al. (1989), fait intervenir les polynômes de Gegenbauer dont nous donnons la définition et quelques propriétés.

Définition 5. Les polynômes de Gegenbauer, notés $C_j^\alpha(2 \cos \nu)$, interviennent dans la décomposition suivante

$$(1 - 2x \cos \nu + x^2)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^\alpha(2 \cos \nu) x^j, \quad |x| \leq 1, \quad \alpha \neq 0.$$

Leur forme explicite est

$$C_j^\alpha(2 \cos \nu) = \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \Gamma(-\alpha + j - k) \frac{(2 \cos \nu)^{j-2k}}{\Gamma(-\alpha) \Gamma(k+1) \Gamma(j-2k+1)}.$$

Ils vérifient $C_0^\alpha(2 \cos \nu) = 1$, $C_1^\alpha(2 \cos \nu) = -2\alpha \cos \nu$ et, pour tout $j \geq 2$, la relation de récurrence

$$C_j^\alpha(2 \cos \nu) = 2 \cos \nu \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) C_{j-1}^\alpha(2 \cos \nu) - \left(1 - 2\frac{\alpha+1}{j}\right) C_{j-2}^\alpha(2 \cos \nu).$$

Enfin les polynômes de Gegenbauer admettent l'équivalent suivant lorsque $j \rightarrow \infty$

$$C_j^\alpha(2 \cos \nu) \sim \frac{\cos[(j-\alpha)\nu + (\alpha\pi/2)]}{\Gamma(-\alpha) \sin^{-\alpha}(\nu)} \left(\frac{2}{j}\right)^{1+\alpha}.$$

On peut à présent énoncer des propriétés sur les processus GARMA.

Proposition 4. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc de variance σ^2 . L'équation

$$\forall n \in \mathbb{Z}, X_n = (1 - 2 \cos \nu L + L^2)^\alpha \varepsilon_n,$$

avec $|\cos \nu| \neq 1$ et $|\alpha| < 1/2$, $\alpha \neq 0$, admet une unique solution stationnaire qui s'écrit

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^\alpha(2 \cos \nu) \varepsilon_{n-j}$$

où les C_j^α sont les polynômes de Gegenbauer de la définition 5.

La densité spectrale de X s'écrit

$$\forall \lambda \in [-\pi, \pi], f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (2|\cos \lambda - \cos \nu|)^{2\alpha} \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} |\lambda^2 - \nu^2|^{2\alpha} \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \nu.$$

La fonction de covariance de X admet l'équivalent suivant, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$r(k) \sim c \cos(k\nu) k^{-2\alpha-1},$$

où c est une constante strictement positive.

Ces propriétés des processus GARMA peuvent être trouvées dans Leonenko (1999). On remarque que les processus GARMA sont à longue mémoire lorsque $-1/2 < \alpha < 0$. Ils admettent alors des singularités spectrales en des points différents de l'origine et la suite de leurs covariances est non sommable. Ce phénomène est connu sous le nom longue mémoire saisonnière et est étudié dans Ould Haye (2001).

Quelques exemples de filtrage fractionnaire produisant des champs à longue mémoire en dimension $d \leq 2$

Nous nous inspirons des modèles FARIMA et GARMA pour construire des champs à longue mémoire.

Certains des modèles que nous présentons sont utilisés en modélisation de textures d'images. Une présentation générale des modèles basés sur le filtrage fractionnaire et appliqués à l'étude d'images est proposée dans Bennett et Khotanzad (1998). Dans Kashyap et Lapsa (1984), on trouve des modèles comparables à ceux que nous présentons dans les exemples 2, 3 et 4 ci-dessous : les champs résultants sont fortement dépendants dans des directions privilégiées. Dans Kashyap et Eom (1989), les auteurs s'appuient sur le modèle produit (2.1.7) pour la détection de ruptures dans des textures d'images. Enfin un modèle amenant de la forte dépendance isotrope est proposé dans Eom (2001) ; nous le présentons pour finir dans l'exemple 7.

Dans tous les modèles qui suivent, nous notons $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^2}$ un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Soit le filtrage de type produit tensoriel

$$X_{n_1, n_2} = (1 - L_1)^{\alpha_1} (1 - L_2)^{\alpha_2} \varepsilon_{n_1, n_2} \quad (2.1.7)$$

où $|\alpha_1| < 1/2$ et $|\alpha_2| < 1/2$.

La proposition 3 nous permet directement d'obtenir l'expression de X sous la forme d'une moyenne mobile :

$$X_{n_1, n_2} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \psi_{i,1} \psi_{j,2} \varepsilon_{n_1 - i, n_2 - j}$$

où $\psi_{i,1}$ et $\psi_{j,2}$ ont la même expression que ψ_j dans la proposition 3 mais associés respectivement à α_1 et α_2 . On en déduit de même la densité spectrale de X :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} |1 - e^{i\lambda_1}|^{2\alpha_1} |1 - e^{i\lambda_2}|^{2\alpha_2}.$$

Enfin sa fonction de covariance s'écrit

$$r(h, l) = \frac{r_1(h)r_2(l)}{\sigma^2}$$

où les r_i sont comme dans la proposition 3 mais associés à α_i et leur équivalent fournit

$$r(h, l) \sim ch^{-2\alpha_1-1}l^{-2\alpha_2-1}$$

lorsque $h \rightarrow \infty$ et $l \rightarrow \infty$.

Ainsi, lorsque $-1/2 < \alpha_1 < 0$ ou $-1/2 < \alpha_2 < 0$, le champ X défini par (2.1.7) est fortement dépendant. On parlera dans ce cas particulier de longue mémoire séparable ou de type produit.

2. Nous pouvons construire un champ fortement dépendant dans une direction particulière en considérant le filtrage suivant

$$X_{n_1, n_2} = (1 - L_1 L_2^k)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}, \quad (2.1.8)$$

où $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ est fixé et $-1/2 < \alpha < 0$.

D'après la proposition 3, on obtient une écriture de X sous forme de moyenne mobile infinie :

$$X_{n_1, n_2} = \sum_{i \geq 0} \psi_i \varepsilon_{n_1 - i, n_2 - ki} \quad (2.1.9)$$

où $\psi_i = \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(i+1)}$.

Sa densité spectrale vaut

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} |1 - e^{i(\lambda_1 + k\lambda_2)}|^{2\alpha}.$$

La fonction de covariance de X se calcule à partir de (2.1.9)

$$r(h, l) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \psi_i \psi_j E(\varepsilon_{n_1 - i, n_2 - ki} \varepsilon_{n_1 + h - j, n_2 + l - kj})$$

ce qui, en s'appuyant sur la proposition 3, nous donne

$$\begin{cases} r(h, kh) = \sigma^2 (-1)^k \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)\Gamma(1-k+\alpha)} & h = \pm 1, \pm 2, \dots \\ r(h, l) = 0 & \text{si } l \neq kh. \end{cases}$$

Le champ issu du filtrage (2.1.8) admet donc une densité spectrale singulière sur toute la ligne $\lambda_1 + k\lambda_2 = 0$. D'autre part sa fonction de covariance est non sommable dans la direction $l = kh$ car asymptotiquement proportionnelle à $h^{-2\alpha-1}$. Le champ X ne vérifie ni (1.2.1) ni (1.2.2), il est donc à longue mémoire non-isotrope.

En s'inspirant des modèles GARMA, on peut étendre les deux exemples précédents afin de permettre des singularités spectrales hors de l'origine.

3. Considérons le filtrage de type produit tensoriel suivant

$$X_{n_1, n_2} = (1 - 2L_1 \cos \nu_1 + L_1^2)^{\alpha_1} (1 - 2L_2 \cos \nu_2 + L_2^2)^{\alpha_2} \varepsilon_{n_1, n_2} \quad (2.1.10)$$

où $|\alpha_1| < 1/2$ et $|\alpha_2| < 1/2$.

On peut obtenir toutes les propriétés de X en s'appuyant sur la proposition 4. Sa densité spectrale sera

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} (2|\cos \lambda_1 - \cos \nu_1|)^{2\alpha_1} (2|\cos \lambda_2 - \cos \nu_2|)^{2\alpha_2};$$

elle est singulière sur les axes $\lambda_1 = \pm \nu_1$ ou $\lambda_2 = \pm \nu_2$ dès que $-1/2 < \alpha_1 < 0$ ou $-1/2 < \alpha_2 < 0$.

Sa fonction de covariance sera équivalente lorsque $h \rightarrow \infty$ et $l \rightarrow \infty$ à

$$r(h, l) \sim c \cos(h\nu_1) h^{-2\alpha_1-1} \cos(l\nu_2) h^{-2\alpha_2-1}$$

et est non sommable.

4. Considérons le filtrage suivant

$$X_{n_1, n_2} = (1 - 2 \cos \nu L_1 L_2^k + L_1^2 L_2^{2k})^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}. \quad (2.1.11)$$

En procédant comme pour la représentation (2.1.8) ci-dessus et en utilisant la proposition 4 on obtient

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim |(\lambda_1 + k\lambda_2)^2 - \nu^2|^{2\alpha}$$

lorsque $\lambda_1 + k\lambda_2 \rightarrow \pm \nu$.

Le champ construit par (2.1.11) admet donc une densité spectrale singulière le long de deux lignes ne passant pas par l'origine.

De même

$$\begin{cases} r(h, kh) = r_0(h) \\ r(h, l) = 0 \end{cases} \quad \text{si } l \neq kh,$$

où $r_0(h) \sim c \cos(h\nu) h^{-2\alpha-1}$ lorsque $h \rightarrow \infty$.

La fonction de covariance de X est non sommable dans la direction $l = kh$ où elle tend vers 0 de façon oscillante.

Dans l'exemple suivant, bien qu'issu d'un filtrage assez élémentaire, le champ construit admet une densité spectrale qui n'est singulière qu'en l'origine mais qui n'admet pas la forme isotrope (1.2.1).

5. Considérons le champ filtré

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \frac{L_1 + L_2}{2}\right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}, \quad (2.1.12)$$

où $-1/2 < \alpha < 0$.

La densité spectrale de X vaut

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left|1 - \frac{e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2}}{2}\right|^{2\alpha},$$

qui s'écrit

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2}{2} + \sin^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)\right)^\alpha.$$

La densité spectrale de X est singulière en l'origine. De plus son comportement en 0 dépend des directions d'approche puisqu'il est directement lié au comportement de $\lambda_1 + \lambda_2$ par rapport à $\lambda_1 \lambda_2$, deux quantités qui ne sont pas toujours comparables à l'origine. Il est donc vain d'espérer un équivalent de f en 0 de la forme (1.2.1).

Dans l'exemple 5 de la section 2.2.2 consacrée à la modélisation par agrégation, on rencontre le même type de singularité spectrale et la figure 2.1 nous en montre une représentation.

On peut évidemment construire un champ ayant une singularité spectrale du même type que précédemment mais en une fréquence autre que $\lambda = 0$:

6. Soit le champ construit par le filtrage suivant

$$X_{n_1, n_2} = \left(\left(1 - \frac{e^{i\nu_1} L_1 + e^{i\nu_2} L_2}{2}\right) \left(1 - \frac{e^{-i\nu_1} L_1 + e^{-i\nu_2} L_2}{2}\right) \right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2},$$

avec $-1/2 < \alpha < 0$, ou écrit autrement

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \cos \nu_1 L_1 - \cos \nu_2 L_2 + \frac{2 \cos(\nu_1 - \nu_2) L_1 L_2 + L_1^2 + L_2^2}{4}\right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}.$$

Ce champ admet la densité spectrale

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left|1 - \frac{e^{i(\lambda_1 + \nu_1)} + e^{i(\lambda_2 + \nu_2)}}{2}\right|^{2\alpha} \left|1 - \frac{e^{i(\lambda_1 - \nu_1)} + e^{i(\lambda_2 - \nu_2)}}{2}\right|^{2\alpha}$$

qui s'exprime après calculs de la manière suivante :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1 - \nu_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_1 - \nu_1 + \lambda_2 - \nu_2}{2}\right)^\alpha \\ \times \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1 + \nu_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2 + \nu_2}{2} + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \nu_1 + \lambda_2 + \nu_2}{2}\right)^\alpha.$$

La densité spectrale de X est singulière aux points (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$ et son comportement au voisinage de ces points dépend comme dans le modèle (2.1.12) des directions d'approche.

La figure 2.2 représente une densité spectrale ayant les mêmes types de singularités. Il s'agit de la densité du champ agrégé de l'exemple 6 de la section 2.2.2.

Remarque 7. Dans les exemples précédents, il est possible d'augmenter la quantité des singularités spectrales sur $[-\pi, \pi]^2$ des champs construits. Il suffit pour cela d'ajouter une puissance $p \in \mathbb{N}$ à tous les opérateurs L_i , $i = 1, 2$, intervenant dans les filtres. A titre d'exemple, dans le filtrage (2.1.8) cela donnerait :

$$X_{n_1, n_2} = (1 - L_1^p L_2^{pk})^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2},$$

avec $-1/2 < \alpha < 0$. Le champ induit aura une densité spectrale singulière le long des axes $\lambda_1 + k\lambda_2 = j\frac{2\pi}{p}$, $j \in \{0, \pm 1, \dots, \pm[p/2]\}$.

Pour finir le modèle proposé par Eom (2001) amène de la forte dépendance isotrope.

7. On considère le filtre

$$P^\alpha (e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}) = (3 - \cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2) - \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2))^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < 0$. La représentation suivie par le champ X est alors

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \frac{1}{2} (L_1 + L_1^{-1} + L_2 + L_2^{-1}) - \frac{1}{4} (L_1 L_2 + L_1^{-1} L_2 + L_1 L_2^{-1} + L_1^{-1} L_2^{-1}) \right)^\alpha \varepsilon_{n_1, n_2}. \quad (2.1.13)$$

La densité spectrale de X est proportionnelle à

$$|3 - \cos(\lambda_1) - \cos(\lambda_2) - \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2)|^{2\alpha}.$$

Elle est continue partout sauf en l'origine où elle est proportionnelle à $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{2\alpha}$. Le champ X est donc à longue mémoire isotrope selon la définition (1.2.1).

Afin d'obtenir une densité spectrale singulière à l'originemais dont les lignes de niveau sont des ellipses, Eom (2001) propose de généraliser ce modèle en introduisant des paramètres $\theta \in [0, 2\pi]$ et $e \geq 1$ dans le filtre. Ce dernier s'écrit

$$(3 - \cos(\nu_1) - \cos(\nu_2) - \cos(\nu_1) \cos(\nu_2))^\alpha, \quad (2.1.14)$$

où $\nu_1 = \frac{\lambda_1}{e} \cos \theta - \frac{\lambda_2}{e} \sin \theta$ et $\nu_2 = \lambda_1 \sin \theta + \lambda_2 \cos \theta$.

La densité spectrale du champ obtenu par ce filtrage est proportionnelle à

$$|3 - \cos(\nu_1) - \cos(\nu_2) - \cos(\nu_1) \cos(\nu_2)|^{2\alpha}$$

expression qui est équivalente en 0 à

$$\left| \lambda_1^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{e^2} + \sin^2 \theta \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{e^2} + \cos^2 \theta \right) + \lambda_1 \lambda_2 \left(\sin 2\theta \frac{e^2 - 1}{e^2} \right) \right|^{2\alpha}. \quad (2.1.15)$$

La densité spectrale est donc singulière en l'origine et ses lignes de niveau au voisinage de $\lambda = 0$ sont des ellipses. Cependant, son comportement satisfait (1.2.1) puisque (2.1.15) s'écrit $\|\lambda\|^{4\alpha} b\left(\frac{\lambda_1}{\|\lambda\|}, \frac{\lambda_2}{\|\lambda\|}\right)$ où $\|\lambda\|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ et où

$$b(x, y) = \left| x^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{e^2} + \sin^2 \theta \right) + y^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{e^2} + \cos^2 \theta \right) + xy \left(\sin 2\theta \frac{e^2 - 1}{e^2} \right) \right|^{2\alpha}$$

est une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^2 . Le champ résultant X est donc à longue mémoire isotrope selon la définition 3 et sa fonction de covariance, d'après le théorème 1 de Wainger (1965), satisfait (1.2.2).

Remarque 8. L'écriture (2.1.13) ne fait pas intervenir un polynôme fonction de (L_1, L_2) comme nous l'exigeons dans la définition du filtrage fractionnaire mais nous pouvons nous y ramener en effectuant un changement d'indices. Par contre le filtrage par (2.1.14) n'est pas un filtrage fractionnaire au sens où nous l'avons défini.

2.2 Modélisation par agrégation

L'idée est venue des économètres. Elle apparaît pour la première fois dans Granger (1980) pour des processus temporels ($d = 1$). Cette façon de construire des processus à longue mémoire suggère l'interprétation économétrique suivante : un grand nombre de comportements microéconomiques à courte mémoire (temporelle) peut engendrer un comportement global, donc macroéconomique, à longue mémoire.

Nous expliquons dans un premier temps l'idée de l'agrégation en dimension d quelconque. Les justifications théoriques en dimension 1 se trouvent notamment dans Oppenheim et Viano (2004) et sont identiques en dimension supérieure. Nous donnerons ensuite des résultats spécifiant sous quelles conditions, en dimension 1, l'agrégation conduit à un processus à longue mémoire. Enfin, nous les utiliserons pour donner quelques exemples en dimension $d = 2$ de champs agrégés présentant de la forte dépendance.

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc de variance σ^2 . Considérons une suite $(X^{(q)})_{q \geq 1}$ de copies indépendantes du champ autorégressif

$$P(L_1, \dots, L_d) X_{n_1, \dots, n_d} = \varepsilon_{n_1, \dots, n_d}, \quad (2.2.1)$$

où P est un polynôme dont les coefficients sont aléatoires et qui vérifie presque sûrement, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [-\pi, \pi]^d$, $P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) \neq 0$.

La représentation (2.2.1) admet presque sûrement la solution

$$X_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} c_j \varepsilon_{n-j}, \quad (2.2.2)$$

où $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}^d}$ est la suite des coefficients du développement sous forme de série de P^{-1} .

Le champ X donné par (2.2.2) appartient à $L^2(\Omega)$ si et seulement si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} E(|c_j|^2) < \infty, \quad (2.2.3)$$

et sa densité spectrale vaut alors

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} E \left| \frac{1}{P(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d})} \right|^2. \quad (2.2.4)$$

On peut à présent définir le champ agrégé Y comme suit

$$Y_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=0}^N X_n^{(q)}, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

où la convergence a lieu en loi. Le champ Y existe bien d'après le Théorème Central Limite, il est gaussien et admet les mêmes caractéristiques d'ordre 2 que les champs $X^{(q)}$, $q \geq 1$. En particulier la densité spectrale de Y est (2.2.4).

Ainsi, le champ agrégé Y est à longue mémoire dès que $E \left| P^{-1}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_d}) \right|^2$ est non borné. Il suffit donc de choisir correctement la loi que suivent les coefficients de P pour obtenir la forte dépendance désirée.

Remarque 9. Quelle interprétation en économétrie peut avoir l'agrégation de champs aléatoires ?

En dimension 1, on considère que l'indice est le temps et que chaque particule (q) est un acteur économique ayant un comportement $X^{(q)}$ à l'instant t qui dépend de son passé selon (2.2.1). Le processus agrégé peut être vu comme le comportement global de tous ces acteurs économiques à l'instant t . Il dépend de son passé de manière différente de ce qui se passe pour les particules puisqu'on vient de le voir : il peut être à longue mémoire alors que chaque particule est à courte mémoire.

En dimension supérieure, il est plus délicat de comprendre ce que signifie l'empilement de variables situées sur le même pixel. Cependant une interprétation économétrique est encore possible. Lorsque l'indice est dans \mathbb{Z}^2 , nous pouvons considérer qu'il représente les coordonnées géographiques de l'acteur économique (q) . Ces coordonnées sont issues d'un quadrillage régulier du domaine d'observation et il est tout à fait possible qu'il y ait plusieurs acteurs ayant les mêmes coordonnées. Typiquement le domaine d'étude pourrait être une grande ville que l'on quadrille en zones régulières : toute observation située dans une zone est assimilée au centre de la zone. On peut ainsi supposer qu'il y a un très grand nombre d'acteurs économiques dans chaque zone. L'agrégation aurait alors l'interprétation suivante : chaque acteur économique (q) admet un comportement $X^{(q)}$ au point (n_1, n_2) dépendant de son voisinage selon (2.2.1); le champ agrégé est le comportement global de tous les acteurs situés en (n_1, n_2) . Les modèles présentés en 2.2.2 montre que Y peut admettre une dépendance spatiale forte alors que chaque acteur économique ne dépend que faiblement de son voisinage.

En dimension $d = 3$, on peut de la même façon imaginer une interprétation spatio-temporelle à l'agrégation.

2.2.1 Processus agrégés à longue mémoire en dimension 1

Nous donnons deux lemmes spécifiant des conditions sur la loi des coefficients de P dans (2.2.1) qui conduisent à un processus agrégé à longue mémoire. Ils sont dus à Oppenheim et Viano (2004) et nous seront utiles dans la partie suivante pour la construction de champs agrégés fortement dépendants en dimension 2.

Nous supposons que le polynôme autorégressif dans (2.2.1) s'écrit

$$P_a(z) = \prod_{k=1}^{2p} (1 - a_k z)$$

où le vecteur des paramètres $a = (a_1, \dots, a_{2p})$ est aléatoire et indépendant du bruit ε . La loi des a_k a pour support la boule ouverte unité afin que l'écriture (2.2.2) existe presque sûrement.

Les a_k peuvent être réels ou complexes (on note dans ce cas ρ_k leur module et θ_k leur argument). Supposons que deux seulement sont réels. On choisit de mettre de l'aléa sur les modules des a_k , supposés indépendants entre eux et de densité de probabilité respective g_k . La densité spectrale (2.2.4) de Y est alors proportionnelle à

$$\int_0^1 \frac{g_1(s)}{|1 - se^{i\lambda}|^2} ds \int_0^1 \frac{g_2(s)}{|1 + se^{i\lambda}|^2} ds \prod_{k=3}^{p+1} \int_0^1 \frac{g_j(\rho)}{|1 - \rho e^{i(\lambda+\theta_j)}|^2 |1 - \rho e^{i(\lambda-\theta_j)}|^2} d\rho \quad (2.2.5)$$

pour $\lambda \notin \{0, \pi, \pm\theta_1, \dots, \pm\theta_p\}$.

Les deux premières intégrales ci-dessus peuvent amener des singularités spectrales en 0 ou en π tandis que les autres peuvent en produire en $\pm\theta_j$, $j = 3, \dots, p+1$. Pour cela il suffit de spécifier le comportement des densités de probabilité g_k au voisinage de $x = 1$, autrement dit le comportement aléatoire des a_k au voisinage des points interdits. Les deux lemmes suivants le précisent.

Lemme 3. *Soit $\alpha \in]-1, 1[$ et $\forall s \in [0, 1]$ $g(s) = (1-s)^{-\alpha} \Phi(s)$ où Φ est borné sur $[0, 1]$ et est continu au point $s = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$, alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\lambda|^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{g(s)}{|1 - se^{i\lambda}|^2} ds = \Phi(1) \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds.$$

De même,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pi} |\lambda - \pi|^{1+\alpha} \int_0^{-1} \frac{g(-s)}{|1 - se^{i\lambda}|^2} ds = \Phi(1) \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds$$

et les intégrales de gauche sont C^∞ sur respectivement $]0, \pi[$ et $] - \pi, 0[$.

Lemme 4. *Si $g(\rho) = (1-\rho)^{-\alpha} \Phi(\rho)$, avec $\alpha \in]-1, 1[$, et où Φ est borné sur $[0, 1]$ et est continu au point $\rho = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$, alors*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \theta} |\lambda - \theta|^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{g(\rho)}{|1 - \rho e^{i(\lambda+\theta)}|^2 |1 - \rho e^{i(\lambda-\theta)}|^2} d\rho = \frac{\Phi(1)}{4 \sin^2 \theta} \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds,$$

De même,

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\theta} |\lambda + \theta|^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{g(\rho)}{|1 - \rho e^{i(\lambda+\theta)}|^2 |1 - \rho e^{i(\lambda-\theta)}|^2} d\rho = \frac{\Phi(1)}{4 \sin^2 \theta} \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1 + s^2} ds$$

et les intégrales de gauche sont C^∞ sur les intervalles $] -\pi, -\theta[$, $] -\theta, \theta[$ et $] \theta, \pi[$.

En prenant les densité g_k comme dans ces lemmes, la condition (2.2.3) est remplie et le processus agrégé Y admet une densité spectrale (2.2.5) non bornée dès que $\alpha < 0$: il est à longue mémoire.

Enfin le lemme suivant donne la fonction de covariance de Y lorsque les densités g_k sont choisies comme ci-dessus.

Lemme 5. *Sous les hypothèses précédentes concernant la forme de P_a et en supposant, pour tout $k = 1 \dots p + 1$, $g_k(s) = (1 - s)^{-\alpha_k} \Phi_k(s)$ avec $-1 < \alpha_k < 0$ et où Φ_k est continu au point $s = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$, le processus agrégé Y admet comme fonction de covariance, lorsque $h \rightarrow \infty$,*

$$r(h) = n^\alpha \left(\sum_{\{k|\alpha_k=\alpha\}} c_k \cos(h\theta_k) + o(1) \right),$$

où $\alpha = \sup\{\alpha_k\}$ et où les c_k sont des constantes complexes.

Ce lemme est issu comme les deux précédents de Oppenheim et Viano (2004).

Le processus agrégé admet sous ces hypothèses une fonction de covariance non-sommable ce qui confirme sa forte dépendance.

2.2.2 Quelques champs agrégés à longue mémoire en dimension $d = 2$

La modélisation par agrégation conduit à des champs ayant les mêmes types de singularités spectrales que celles rencontrées dans la modélisation par filtrage. La particularité de l'agrégation par rapport au filtrage est simplement qu'elle conduit nécessairement à un champ gaussien.

L'intérêt majeur est que l'agrégation nous fournit une alternative au filtrage pour la simulation de champs à longue mémoire.

Présentons quelques exemples. Ils sont ordonnés de la même manière que pour le filtrage, selon le type de singularités spectrales qu'ils amènent. Pour chacun d'entre eux, nous précisons le polynôme autorégressif à paramètres aléatoires intervenant dans la représentation (2.2.1) des particules composant le champ agrégé.

1. Des champs à longue mémoire de type produit peuvent être construits en considérant le polynôme autorégressif $P(L_1, L_2) = (1 - aL_1)(1 - bL_2)$. Les paramètres sont aléatoires sur $[0, 1]$ et on suppose que leur densité de probabilité vaut respectivement $g_a(x) = (1 - x)^{-\alpha_1} \Phi_1(x)$ et $g_b(x) = (1 - x)^{-\alpha_2} \Phi_2(x)$, où Φ_1 et Φ_2 sont comme dans le lemme 3 et où α_1 et α_2 appartiennent à $] -1, 0[$.

Le lemme 3 nous assure alors que la condition (2.2.3) est remplie et nous fournit un équivalent de la densité spectrale du champ agrégé Y :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1|^{1+\alpha_1} |\lambda_2|^{1+\alpha_2}} \quad \text{en } (0, 0),$$

où c est une constante non nulle.

La fonction de covariance de Y nous est donnée par le lemme 5 : $r(h, l)$ est asymptotiquement proportionnelle à $h^{\alpha_1} l^{\alpha_2}$ et est donc non sommable.

2. De la longue mémoire dans une direction particulière peut être construite à l'aide du polynôme autorégressif $P(L_1, L_2) = 1 - aL_1L_2^k$ où $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ est fixé et où a est un paramètre aléatoire sur $[0, 1]$. En choisissant la densité de probabilité de a égale à $(1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ où $\alpha \in]-1, 0]$ et où Φ vérifie les mêmes conditions que dans le lemme 3, la condition (2.2.3) est vérifiée. De plus, d'après le lemme 3 la densité spectrale du champ agrégé Y vérifiera

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1 + k\lambda_2|^{1+\alpha}},$$

en $\lambda_1 + k\lambda_2 = 0$, où c est une constante non nulle.

La fonction de covariance de Y se déduit du lemme 5 : $r(h, l)$ est asymptotiquement proportionnelle à h^α dans la direction $l = kh$ et $r(h, l) = 0$ si $l \neq kh$.

Le champ agrégé est donc à longue mémoire non isotrope.

Il est possible de construire les mêmes types de champs fortement dépendants mais avec des singularités spectrales hors de l'origine.

3. Pour un champ présentant de la longue mémoire de type produit, il suffit de considérer le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = (1 - 2\rho_1 L_1 \cos \nu_1 + \rho_1^2 L_1^2)(1 - 2\rho_2 L_2 \cos \nu_2 + \rho_2^2 L_2^2),$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des paramètres aléatoires. On suppose que leur densité de probabilité vaut respectivement $g_{\rho_1}(x) = (1-x)^{-\alpha_1}\Phi_1(x)$ et $g_{\rho_2}(x) = (1-x)^{-\alpha_2}\Phi_2(x)$ avec Φ_{ρ_1} et Φ_{ρ_2} deux fonctions vérifiant les hypothèses du lemme 4 et où α_1 et α_2 appartiennent à $] -1, 0[$.

La densité spectrale du champ agrégé Y admettra alors les équivalents suivants en $(\mp\nu_1, \mp\nu_2)$

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1 \pm \nu_1|^{1+\alpha_1} |\lambda_2 \pm \nu_2|^{1+\alpha_2}},$$

où c est une constante non nulle.

Le lemme 5 nous permet d'obtenir sa fonction de covariance : $r(h, l)$ est asymptotiquement proportionnelle à $h^{\alpha_1} \cos(h\nu_1) l^{\alpha_2} \cos(l\nu_2)$.

4. En considérant le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = 1 - \rho \cos \beta L_1 L_2^k + \rho^2 L_1^2 L_2^{2k}$$

où ρ est aléatoire sur $[0, 1]$ et où $\beta \neq 0$ et $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ sont fixés, on obtient un champ agrégé dont la densité spectrale est singulière tout le long d'une ligne ne passant pas par l'origine. Il suffit pour cela de supposer que la densité de probabilité de ρ vaut $(1 - x)^{-\alpha} \Phi(x)$.

La densité spectrale de Y vérifie, au voisinage de chacune des deux lignes $\lambda_1 + k\lambda_2 = \mp\beta$,

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{c}{|\lambda_1 + k\lambda_2 \pm \beta|^{1+\alpha}}.$$

Sa fonction de covariance $r(h, l)$ sera nulle si $l \neq kh$ et sera asymptotiquement proportionnelle à $h^\alpha \cos(h\beta)$ dans la direction $l = kh$.

L'exemple suivant fournit un champ à longue mémoire non isotrope ayant une seule singularité spectrale à l'origine.

5. Considérons le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = 1 - a \frac{L_1 + L_2}{2}$$

où a est aléatoire sur $[0, 1]$ de densité de probabilité $g(x) = (1 - x)^{-\alpha} \Phi(x)$ avec $\alpha \in [-1, 0]$ et avec Φ bornée sur $[0, 1]$ et continue au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Pour une particule X , ce polynôme conduit à la représentation

$$X_{n_1, n_2} - a \frac{X_{n_1-1, n_2} + X_{n_1, n_2-1}}{2} = \varepsilon_{n_1, n_2}, \quad (2.2.6)$$

où ε est un bruit blanc de variance σ^2 . En inversant cette écriture, nous obtenons

$$X_{n_1, n_2} = \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \varepsilon_{n_1-k+j, n_2-j}, \quad (2.2.7)$$

ce qui nous permet de donner une condition pour que (2.2.3) soit vérifiée. Il faut et il suffit que

$$\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2 \right) E(a^{2k}) < \infty \Leftrightarrow E \left(\frac{1}{1 - a^2} \right) < \infty \quad (2.2.8)$$

car $\frac{1}{2^{2k}} \sum_{j=0}^k (C_k^j)^2$ est borné quelque soit $k \geq 0$. Cette condition est vérifiée compte tenu du choix de α .

La densité spectrale du champ agrégé Y vaut alors

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{g(x)}{|1 - x \frac{e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2}}{2}|^2} dx. \quad (2.2.9)$$

Le lemme suivant établit que le choix de g ci-dessus implique que le champ X est à longue mémoire.

Lemme 6. Soit $-1 < \alpha < 0$, $g(x) = (1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ avec Φ bornée sur $[0, 1]$ et continue au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Alors $f(\lambda_1, \lambda_2)$ définie par (2.2.9) est singulière en l'origine et est bornée sur tout intervalle ne contenant pas 0.

De plus, son comportement au voisinage de 0 dépend des directions d'approche comme le montre la démonstration du lemme donnée en section 2.4. Le champ est donc à longue mémoire non isotrope.

La figure 2.1 représente la densité spectrale (2.2.9) lorsque $\alpha = -0.75$ et $\Phi \equiv 1$. Cette représentation confirme les résultats du lemme : la densité est singulière en l'origine et la divergence est plus rapide dans certaines directions, comme le long de l'axe $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Enfin le même type de singularité spectrale que précédemment mais en des points différents de l'origine peut être construit selon l'exemple suivant.

6. Considérons le polynôme autorégressif

$$P(L_1, L_2) = \left(1 - \rho \frac{e^{i\nu_1 L_1} + e^{i\nu_2 L_2}}{2}\right) \left(1 - \rho \frac{e^{-i\nu_1 L_1} + e^{-i\nu_2 L_2}}{2}\right),$$

où ρ est un paramètre aléatoire sur $[0, 1]$ de densité de probabilité $g(x) = (1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ avec $-1 < \alpha < 0$ et avec Φ bornée sur $[0, 1]$ et continue au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Cela conduit à la représentation suivante

$$\begin{aligned} X_{n_1, n_2} - \rho \cos \nu_1 X_{n_1-1, n_2} - \rho \cos \nu_2 X_{n_1, n_2-1} \\ + \frac{\rho^2}{2} \cos(\nu_1 - \nu_2) X_{n_1-1, n_2-1} + \frac{\rho^2}{4} X_{n_1-2, n_2} + \frac{\rho^2}{4} X_{n_1, n_2-2} = \varepsilon_{n_1, n_2}. \end{aligned}$$

La densité spectrale du champ agrégé Y vaudra alors

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{g(x)}{|1 - x \frac{e^{i(\lambda_1 + \nu_1)} + e^{i(\lambda_2 + \nu_2)}}{2}|^2 |1 - x \frac{e^{i(\lambda_1 - \nu_1)} + e^{i(\lambda_2 - \nu_2)}}{2}|^2} dx. \quad (2.2.10)$$

Elle est singulière aux points (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$ et bornée sur tout intervalle ne contenant pas ces points comme le montre le lemme 7 de la partie 2.4. De plus son comportement en (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$ dépend des directions d'approche comme dans l'exemple précédent. On peut le vérifier sur la figure 2.2 qui représente la densité spectrale (2.2.10) lorsque $\alpha = -0.75$ et $\Phi \equiv 1$. On remarque par exemple une divergence plus forte dans la direction $\lambda_1 - \nu_1 + \lambda_2 - \nu_2 = 0$ au voisinage de (ν_1, ν_2) .

Remarque 10. Comme pour le filtrage fractionnaire, il est possible d'augmenter la fréquence des singularités spectrales sur $[-\pi, \pi]^2$ des champs agrégés. Il suffit pour cela d'ajouter une puissance $p \in \mathbb{N}$ à tous les opérateurs L_i , $i = 1, 2$, intervenant dans les polynômes autorégressifs.

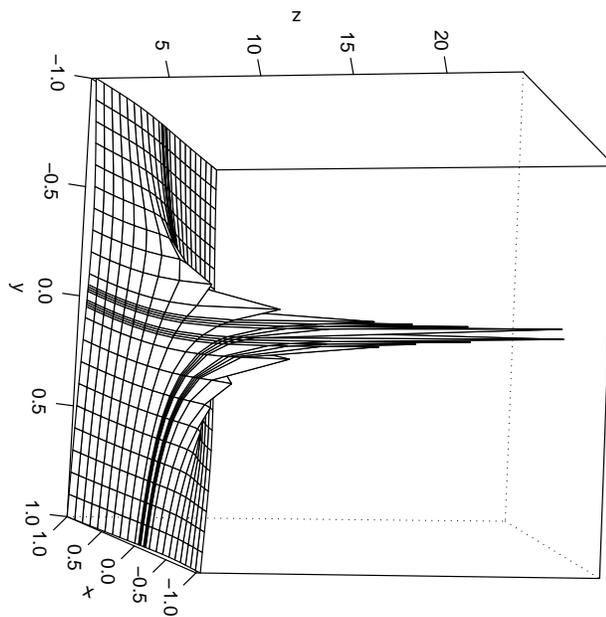
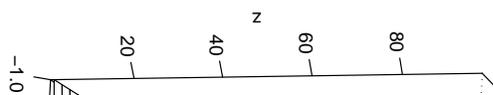


FIG. 2.1 – Densité spectrale (2.2.9) obtenue par agrégation ayant une singularité anisotrope en $(0, 0)$



2.3 La forte dépendance en mécanique statistique

L'objet de la mécanique statistique est de rendre compte du comportement macroscopique d'un système de particules à partir de la modélisation et de l'étude de son comportement microscopique (état des particules, interactions entre elles). La mécanique statistique a été initialement introduite par les physiciens pour modéliser des phénomènes thermodynamiques et magnétiques dont la transition de phase. La transition de phase est un état instable du système en des valeurs d'un paramètre tel que la température ou un champ magnétique extérieur. Elle apparaît par exemple lorsque la matière passe d'un état à un autre en thermodynamique ou lorsqu'un matériau magnétique passe de l'état ferromagnétique à l'état paramagnétique. Le formalisme mathématique permettant l'étude rigoureuse des modèles de mécanique statistique est apparu plus tardivement et s'appuie sur l'existence et l'étude des mesures de Gibbs. Sans vouloir entrer dans les détails de ce formalisme, nous introduisons les notions nécessaires à la présentation de quelques modèles. Une présentation rigoureuse du domaine se trouve par exemple dans Georgii (1988). L'objectif est de souligner des propriétés de forte dépendance dans des systèmes de particules en transition de phase. Les modèles présentés sont le modèle d'Ising, très populaire en mécanique statistique, et les modèles à interactions quadratiques.

On considère un système de particules sur \mathbb{Z}^d . L'état d'une particule située en $j \in \mathbb{Z}^d$ est donnée par le spin x_j , une variable aléatoire à valeurs dans un espace polonais X . L'interaction entre les particules (on la suppose ici par paires) est modélisée par le potentiel d'interaction $\Phi_{i,j}$, fonction de $X \times X$ à valeurs réelles.

Les configurations possibles du système sont notées $\omega = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in X^{\mathbb{Z}^d}$. On définit l'énergie sur un ensemble fini Λ de \mathbb{Z}^d par

$$E_\Lambda(\omega) = \sum_{\{i,j\} \subset \Lambda} \Phi_{i,j}(x_i, x_j) + \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Lambda^c}} \Phi_{i,j}(x_i, x_j), \quad (2.3.1)$$

où Λ^c est le complémentaire de Λ dans \mathbb{Z}^d . L'énergie E_Λ tient compte à la fois de la quantité d'énergie au sein de l'ensemble Λ mais aussi des interactions au bord modélisées par la seconde somme dans (2.3.1).

Considérons à présent une mesure produit $\rho = \otimes_{i \in \mathbb{Z}^d} \rho_i$ où ρ_i est une mesure sur X (typiquement ρ_i est la mesure de Lebesgue si $X = \mathbb{R}$ ou la mesure de Bernoulli si $X = \{\pm 1\}$). On dit qu'une mesure μ sur $X^{\mathbb{Z}^d}$ est une mesure de Gibbs pour le potentiel Φ par rapport à ρ si

$$\mu(d\omega_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) = \frac{1}{Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})} e^{-E_\Lambda(\omega)} \rho(d\omega), \quad (2.3.2)$$

où ω_Λ est une configuration sur Λ et ω_{Λ^c} une configuration sur Λ^c et où $Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})$ est une constante de normalisation dépendante de la configuration extérieure à Λ appelée fonction de partition. Une mesure de Gibbs est donc définie localement selon (2.3.2), formalisme proposé par Dobrushin, Landford et Ruelle qui garantit la cohérence des lois conditionnelles.

Pour un modèle donné, une question primordiale consiste à s'assurer, selon les valeurs prises par les paramètres du modèle, de l'existence d'une mesure de Gibbs. Lorsqu'il y a existence mais non-unicité de la mesure de Gibbs, on dit que le modèle est en transition de phase. Dans ce cas, on sait que l'ensemble des mesures de Gibbs est un convexe dont les éléments extrémaux sont appelés phases pures.

Considérons à présent le système de spins comme un champ aléatoire probabilisé par la mesure de Gibbs. Lorsque les moments d'ordre 2 existent, on peut mesurer la dépendance entre deux sites i et j grâce à $r(i, j) = \text{cov}(x_i, x_j)$ ou $r(h) = \text{cov}(x_i, x_{i+h})$ lorsque le champ est stationnaire. Dans les exemples suivants, cette fonction de covariance peut être non-sommable, témoignant de la forte dépendance du système : dans le modèle d'Ising, en la valeur critique au delà de laquelle il y a transition de phase et dans les modèles gaussiens, pour des interactions particulières.

2.3.1 Le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising est le plus connu des modèles de mécanique statistique. Il a été introduit pour l'étude du magnétisme et de la dynamique des fluides. L'espace d'état est $X = \{-1, 1\}$, la mesure de référence est la mesure de Bernoulli $1/2(\delta_{-1} + \delta_1)$ et le potentiel d'interaction se limite aux plus proches voisins :

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \beta x_i x_j & \text{si } \sum_{k=1}^d |i_k - j_k| = 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante représentant l'inverse de la température.

En dimension $d = 1$, il y a existence et unicité de la mesure de Gibbs quelque soit β , il n'y a donc jamais transition de phase. En dimension $d \geq 2$, il y a transition de phase au delà d'un certain β_c dépendant de la dimension d . Cela fut montré en dimension $d = 2$ par Onsager (1944) en utilisant l'approche physique du modèle, puis par Dobrushin (1965) dans le formalisme mathématique en dimension quelconque. Lorsque $d = 2$, $\beta_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.441$.

Intéressons-nous à la fonction de covariance. Dans leur approche physique du modèle d'Ising, Kaufman et Onsager (1949) et Fisher (1964) obtiennent la vitesse de décroissance de r selon les valeurs de β . Si $\beta \neq \beta_c$, la fonction de covariance décroît exponentiellement mais lorsque $\beta = \beta_c$ elle décroît géométriquement et n'est plus sommable. On a

$$r(h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} |h|^{-1} e^{-\kappa|h|} & \text{si } \beta \neq \beta_c \\ |h|^{-(d-2+\mu)} & \text{si } \beta = \beta_c, \end{cases}$$

où $\kappa > 0$ est la constante de Boltzmann et $\mu \in [0, 2]$ est un paramètre critique valant $1/4$ dans le cas $d = 2$.

Dans le modèle d'Ising en dimension $d \geq 2$, le champ aléatoire des spins est donc fortement dépendant en la valeur critique β_c , la longue mémoire étant isotrope.

Remarque 11. La propriété de forte dépendance dans le modèle d'Ising est relevée dans Cassandro et Jona-Lasinio (1978) ; on y trouve également d'autres modèles physiques pouvant présenter de la longue mémoire en des points critiques. Dans Pickard (1987),

l'auteur s'intéresse à l'estimation dans le modèle d'Ising et souligne les difficultés liées au comportement de forte dépendance au point critique.

Remarque 12. Il est à noter qu'il existe certains modèles compliquant le modèle d'Ising qui exhibent de la forte dépendance sans qu'il y ait transition de phase. C'est le cas pour le modèle XY ou le modèle d'Heisenberg qui n'admettent pas de transition de phase lorsque $d \leq 2$ mais dont la fonction de covariance en dimension $d = 2$ est non sommable sur tout un intervalle de basses températures (cf Kosterlitz et Thouless (1978)).

2.3.2 Les modèles à interactions quadratiques

L'espace d'état est $X = \mathbb{R}$, la mesure de référence est la mesure de Lebesgue et le potentiel d'interaction par paires est :

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \beta \left(\frac{1}{2} J(0) x_i^2 + e x_i \right) & \text{si } i = j \\ \beta J(i-j) x_i x_j & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

où β et e sont des constantes représentant respectivement l'inverse de la température et un champ magnétique ambiant et où $(J(i))_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite réelle définie positive vérifiant $J(i) = J(-i)$ pour tout i et $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |J(i)| < \infty$. Nous supposons pour simplifier $e = 0$ qui reste un cas fondamental à partir duquel nombre de résultats peuvent se déduire pour e quelconque. Par ailleurs, contrairement au modèle d'Ising, la température est sans influence sur l'apparition de transition de phase, le paramètre déterminant est donc la suite J que l'on appellera par abus le potentiel d'interaction.

Ce type de modèles a été étudié par Künsch (1980) et Dobrushin (1980). On peut trouver les résultats qui vont suivre dans Georgii (1988). L'intérêt du modèle présenté est qu'il conduit à des mesures de Gibbs gaussiennes dont les caractéristiques sont directement liées au potentiel J . Soit

$$\hat{J}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) e^{i \langle n, \lambda \rangle}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]^d,$$

on a en effet le théorème suivant :

Théorème 5 (Kunsch, Dobrushin). *Sous les hypothèses précédentes sur J et dans le cas $e = 0$, l'ensemble des mesure de Gibbs associées au modèle précédent est non vide si et seulement si*

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{J}^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Dans ce cas, les phases pures sont les mesures gaussiennes de fonction de covariance

$$r(h) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{J}^{-1}(\lambda) e^{i \langle h, \lambda \rangle} d\lambda \quad (2.3.3)$$

et de moyenne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ telle que $\forall k \in \mathbb{Z}^d, \sum J(n) u_{k+n} = 0$.

Remarque 13. Le cas $e \neq 0$ nécessite une hypothèse supplémentaire sur J pour assurer l'existence d'une mesure de Gibbs.

L'apparition de transition de phase dans notre cas particulier où $e = 0$ se déduit de ce théorème et est résumé dans le corollaire suivant dû à Künsch. Bien que les phases pures soient gaussiennes, toutes les mesures de Gibbs ne le sont pas forcément. Lorsque le système est en transition de phase, certaines mesures peuvent ne pas avoir de second moment. Le corollaire suivant ne concerne que les mesures du second ordre.

Corollaire 1 (Kunsch). *Sous les hypothèses du Théorème 5, il existe plusieurs mesures de Gibbs du second ordre si et seulement si \hat{J} admet une racine dans $[-\pi, \pi]^d$.*

Autrement dit, en transition de phase, toutes les mesures de Gibbs du second ordre sont à longue mémoire. En effet \hat{J}^{-1} correspond à leur densité spectrale d'après la forme (2.3.3) de leur covariance : elle sera non-bornée dès que \hat{J} admet une racine, c'est à dire lorsqu'il y a transition de phase.

Exemple 3. Soit le potentiel harmonique en dimension $d \geq 3$:

$$J(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2d} & \text{si } \sum_{j=1}^d |n_j| = 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

On a

$$\hat{J}(\lambda) = 1 - \sum_{|n|=1} \frac{1}{2d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} = 1 - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(\lambda_k).$$

Le dernier terme est équivalent en 0 à $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \lambda_k^2$ dont l'inverse est intégrable sur $[-\pi, \pi]^d$ car $d \geq 3$. Cela nous assure, d'après le théorème 5, l'existence de mesures de Gibbs associées au potentiel J . Par ailleurs $\hat{J}(0) = 0$, d'après le corollaire 1 le système est en transition de phase et les mesures de Gibbs du second ordre sont à longue mémoire. On remarque de plus que la longue mémoire est ici isotrope. Le potentiel harmonique est donc un exemple simple d'interactions à portée finie conduisant à des champs à longue mémoire isotrope.

Exemple 4. Soit, en dimension $d = 2$, le potentiel suivant :

$$J(k, l) = \begin{cases} \prod_{0 < j \leq k} \frac{j-1+\alpha}{j-\alpha} & \text{si } l = pk, |k| > 1 \\ 1 & \text{si } k = l = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où p est une constante non nulle et $\alpha \in]-1/2, 0[$.

La suite $J(k, pk)$ correspond à la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire intégré d'ordre α dont on trouve la présentation et des propriétés dans la Proposition 3. On en tire

$$J(k, pk) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} k^{2\alpha-1}$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ ce qui montre la sommabilité de J . Par ailleurs, en notant \tilde{r} et \tilde{f} la fonction de covariance et la densité spectrale d'un processus intégré d'ordre α ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} J(k, pk) e^{ik\lambda} = \frac{2\pi}{\tilde{r}(0)} \tilde{f}(\lambda) = \frac{\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \left| 2 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right|^{-2\alpha}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \hat{J}(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^2} J(k, l) e^{i(k\lambda_1 + l\lambda_2)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J(k, pk) e^{ik(\lambda_1 + p\lambda_2)} \\ &= \frac{\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \left| 2 \sin\left(\frac{\lambda_1 + p\lambda_2}{2}\right) \right|^{-2\alpha}. \end{aligned}$$

L'inverse de \hat{J} est intégrable sur $[-\pi, \pi]^2$ car $\alpha \in]-1/2, 0[$ et l'existence d'une mesure de Gibbs associée au potentiel J est garantie par le théorème 5. D'autre part, \hat{J} s'annule sur toute la ligne $\lambda_1 + p\lambda_2 = 0$ ce qui montre que le système est en transition de phase d'après le corollaire 1 et que les mesures de Gibbs sont à longue mémoire. Leur densité spectrale est de plus singulière le long de toute une ligne, la longue mémoire est donc ici non-isotrope.

2.4 Preuves des lemmes

Preuve du lemme 1

La fonction de covariance vaut

$$r(h, l) = \int_{[-\pi, \pi]^2} |\lambda_1 + \theta\lambda_2|^{2\alpha} e^{i(h\lambda_1 + l\lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2.$$

On se restreint au calcul de $r(h, \theta h)$, pour les h tels que $\theta h \in \mathbb{Z}$, suffisant pour conclure.

$$r(h, \theta h) = \int_{[-\pi, \pi]^2} |\lambda_1 + \theta\lambda_2|^{2\alpha} e^{ih(\lambda_1 + \theta\lambda_2)} d\lambda_1 d\lambda_2.$$

On effectue le changement de variable $u = \lambda_1 + \theta\lambda_2$ et $v = \theta\lambda_2 - \lambda_1$. Nous supposons, sans nuire à la généralité, que $\theta \geq 1$; on obtient alors le nouveau domaine d'intégration

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\theta-1)\pi < u < (\theta-1)\pi \\ -2\pi + u < v < 2\pi + u \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} -(\theta+1)\pi < u < -(\theta-1)\pi \\ -2\theta\pi - u < v < 2\pi + u \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} (\theta-1)\pi < u < (\theta+1)\pi \\ -2\pi + u < v < 2\theta\pi - u \end{array} \right\}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
r(h, \theta h) &= \int_{-(\theta-1)\pi}^{(\theta-1)\pi} |u|^{2\alpha} e^{ihu} du + \int_{-(\theta+1)\pi}^{-(\theta-1)\pi} (2u + 2(\theta+1)\pi) |u|^{2\alpha} e^{ihu} du \\
&\quad + \int_{-(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} (2(\theta+1)\pi - 2u) |u|^{2\alpha} e^{ihu} du \\
&= 2 \int_0^{(\theta-1)\pi} u^{2\alpha} \cos(hu) du + 4(\theta+1)\pi \int_{(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} |u|^{2\alpha} \cos(hu) du \\
&\quad - 4 \int_{(\theta-1)\pi}^{(\theta+1)\pi} u |u|^{2\alpha} \cos(hu) du \\
&= \frac{1}{h^{2\alpha+1}} \left(2 \int_0^{(\theta-1)\pi h} u^{2\alpha} \cos(u) du + 4(\theta+1)\pi \int_{(\theta-1)\pi h}^{(\theta+1)\pi h} |u|^{2\alpha} \cos(u) du \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{h} \int_{(\theta-1)\pi h}^{(\theta+1)\pi h} u |u|^{2\alpha} \cos(u) du \right).
\end{aligned}$$

La première intégrale admet une limite finie non nulle et les deux derniers termes convergent vers 0. Ainsi

$$r(h, \theta h) \sim ch^{-2\alpha-1},$$

lorsque $h \rightarrow \infty$, où c est une constante positive non nulle.

Si le champ X admettait une fonction de covariance du type (1.2.2), alors, d'après le calcul de $r(h, \theta h)$, elle devrait vérifier

$$r(h, l) \sim |(h, l)|^{-2\alpha-1} L(|(h, l)|) b \left(\frac{(h, l)}{|(h, l)|} \right)$$

lorsque $|(h, l)| \rightarrow \infty$. On pourrait appliquer le théorème de Dobrushin et Major (1979) sur la convergence de ses sommes partielles présenté dans le chapitre introductif. Pour obtenir cette convergence, la normalisation des sommes partielles serait alors $n^{\alpha-3/2} L(n)^{-1/2}$. Or le (ii) du théorème 7 du chapitre 3 montre que les sommes partielles de X convergent en loi avec une normalisation égale à $n^{\alpha-1}$. La fonction de covariance de X n'est donc pas de la forme (1.2.2).

Preuve du lemme 2

D'après la Proposition 2 il suffit de montrer que

$$\int_{[-\pi, \pi]^3} \frac{1}{|3 - (e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_3})|^2} d\lambda = \infty. \quad (2.4.1)$$

Le dénominateur est proportionnel à $6 + \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_3) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_3) + \cos(\lambda_2) \cos(\lambda_3) + \sin(\lambda_2) \sin(\lambda_3) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_3)$. Nous

pouvons intégrer son inverse par rapport à λ_3 sur $[-\pi/2, 0]$ et après calculs nous obtenons

$$\int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{|3 - (e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_3})|^2} d\lambda_3 = \frac{1}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \left(\arctan \left[\frac{\sin(\lambda_1) + \sin(\lambda_2)}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \right] + \arctan \left[\frac{\cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) - 4 \cos(\lambda_1) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - \sin(\lambda_1) - 4 \cos(\lambda_2) - \sin(\lambda_2) + 9}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \right] \right),$$

où

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = |\cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) + 5|.$$

Lorsque $(\lambda_1, \lambda_2) \in [0, \frac{\pi}{6}]^2$, on obtient donc facilement

$$\frac{c}{G(\lambda_1, \lambda_2)} \leq \int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{|3 - (e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_3})|^2} d\lambda_3 \leq \frac{\pi}{G(\lambda_1, \lambda_2)}, \quad (2.4.2)$$

où $0 < c < \pi$. Or, sur $[0, \frac{\pi}{6}]^2$,

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) + 5 \\ \leq \lambda_1 \lambda_2 + \frac{3\lambda_1^2}{2} + \frac{3\lambda_2^2}{2} \leq \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_1) \cos(\lambda_2) + \sin(\lambda_1) \sin(\lambda_2) - 3 \cos(\lambda_1) - 3 \cos(\lambda_2) + 5 \\ \geq -\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2}{4} \geq -\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_2^2}{2} \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$G(\lambda_1, \lambda_2) \leq \max \left(\frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2, \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right) = \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

Ainsi $1/G$ n'est pas intégrable sur $[0, \frac{\pi}{6}]^2$ et grâce à (2.4.2), (2.4.1) s'ensuit.

Preuve du lemme 6

Le dénominateur dans l'intégrale de (2.2.9) vaut

$$D = \left(1 - \frac{x}{2}(\cos \lambda_1 + \cos \lambda_2) \right)^2 + x^2 \frac{(\sin \lambda_1 + \sin \lambda_2)^2}{4}$$

ce qui se développe à l'aide de formules trigonométriques en

$$D = \left(x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

D'après (2.2.9) on a donc

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{(1-x)^{-\alpha} \Phi(x)}{(x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})^2 + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} dx$$

ce qui montre que f est borné sur tout intervalle ne contenant pas 0. Par ailleurs, pour tout $y \in [0, 1]$, f est supérieur à

$$\frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^y \frac{(1-x)^{-\alpha} \Phi(x)}{(x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})^2 + \sin^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} dx.$$

La dernière intégrale est asymptotiquement proportionnelle à $\int_0^y (1-x)^{-\alpha-2} \Phi(x) dx$ lorsque (λ_1, λ_2) tend vers 0. En faisant tendre y vers 1, on remarque que f est singulière en l'origine.

Étudions son comportement lorsque (λ_1, λ_2) tend vers 0 le long des quelques directions particulières. certaines directions d'approche.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $D = (x \cos \lambda - 1)^2$. En posant $u = (1-x) \frac{\cos \lambda}{1 - \cos \lambda}$ dans l'intégrale de (2.2.9), on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda, -\lambda) &= \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{(1 - \cos \lambda)^{-\alpha-1}}{\cos^{-\alpha+1} \lambda} \int_0^{\frac{\cos \lambda}{1 - \cos \lambda}} \frac{u^{-\alpha}}{1 + u^2} \Phi \left(1 - u \frac{1 - \cos \lambda}{\cos \lambda} \right) du \\ &\sim c |\lambda|^{2-\alpha-2} \int_0^\infty \frac{u^{-\alpha}}{1 + u^2} du, \end{aligned}$$

en $\lambda = 0$ et avec c une constante non nulle.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, on pose dans l'intégrale $u = \frac{x \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} - \cos \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}{\sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}$, et on obtient, en 0,

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} \int_A^B \frac{(2 \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2} - u \sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})^{-\alpha}}{1 + u^2} \Phi(1) du \quad (2.4.3)$$

avec $A = -\frac{1}{\tan(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})}$ et $B = \frac{2 \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \frac{\lambda_2}{2}}{\sin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}}$.

Le comportement dans ce cas dépend encore des directions, relevons-en trois :

- . Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = o(\lambda_1 \lambda_2)$ en 0, alors l'expression (2.4.3) nous donne l'équivalent :

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c \frac{|\lambda_1 \lambda_2|^{-\alpha}}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

avec c une constante non nulle.

- . Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 = o(\lambda_1 + \lambda_2)$ en 0, alors

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha-1}$$

où c est une constante non nulle.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et si $\lambda_1\lambda_2$ est du même ordre que $\lambda_1 + \lambda_2$ en 0, on obtient l'équivalence

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \sim c(\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha-1}$$

où c est une constante non nulle.

Il y a évidemment d'autres directions pour lesquelles le comportement est différent car $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$ ne sont pas toujours comparables au voisinage de 0.

Nous énonçons maintenant un lemme similaire à celui que nous venons de démontrer. Il concerne l'exemple 6 de la section 2.2.2.

Lemme 7. *Soit $-1 < \alpha < 0$, $g(x) = (1-x)^{-\alpha}\Phi(x)$ avec Φ borné sur $[0, 1]$ et continu au point $x = 1$ tel que $\Phi(1) \neq 0$. Alors $f(\lambda_1, \lambda_2)$ définie par (2.2.10) est singulière aux points (ν_1, ν_2) et $(-\nu_1, -\nu_2)$. Elle est bornée sur tout intervalle ne contenant pas ces points.*

Démonstration. Supposons que (λ_1, λ_2) est dans un voisinage de (ν_1, ν_2) ; alors la fonction

$$x \mapsto \left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1+\nu_1)} + e^{i(\lambda_2+\nu_2)}}{2} \right|^2$$

est majorée sur $[0, 1]$ par une constante $1/c$ strictement positive. D'où, pour tout y dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &\geq \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^y \frac{(1-x)^d \Phi(x)}{\left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1+\nu_1)} + e^{i(\lambda_2+\nu_2)}}{2} \right|^2 \left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1-\nu_1)} + e^{i(\lambda_2-\nu_2)}}{2} \right|^2} dx \\ &\geq c \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \int_0^y \frac{(1-x)^d \Phi(x)}{\left| 1 - x \frac{e^{i(\lambda_1-\nu_1)} + e^{i(\lambda_2-\nu_2)}}{2} \right|^2} dx. \end{aligned}$$

Lorsque (λ_1, λ_2) tend vers (ν_1, ν_2) , la dernière intégrale est asymptotiquement proportionnelle à $\int_0^y (1-x)^{-\alpha-2} \Phi(x) dx$ qui diverge vers $+\infty$ lorsque y tend vers 1. La densité spectrale est donc singulière en (ν_1, ν_2) . Le même résultat s'obtient en $(-\nu_1, -\nu_2)$. Sur tout intervalle en contenant ni (ν_1, ν_2) ni $(-\nu_1, -\nu_2)$, la densité spectrale est bornée de façon évidente. \square

2.5 Simulation de champs fortement dépendants

Les figures 2.3 à 2.7 représentent des champs aléatoires gaussiens, leur périodogramme (en trois dimension à gauche et projeté en deux dimension à droite) et l'estimation de leur fonction de covariance (en 3D et projeté en 2D). Leur réalisation sont des images de taille 100×100 . La valeur de chaque variable aléatoire $X_{i,j}$ située au pixel (i, j) est symbolisée par un niveau de gris.

La figure 2.3 représente un champ faiblement dépendant. Il est issu du modèle auto-régressif de type produit :

$$(1 - \frac{1}{2}L_1)(1 - \frac{1}{2}L_2)X_{n_1, n_2} = \varepsilon_{n_1, n_2},$$

où ε est un champ i.i.d gaussien. La structure produit se lit sur le périodogramme et sur la fonction de covariance dont la forme en croix révèle deux directions privilégiées de décroissance le long des axes. Le périodogramme ne témoigne pas de singularités spectrales particulières et la fonction de covariance décroît très rapidement ce qui confirme la courte mémoire du champ.

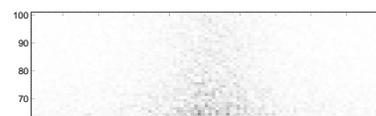
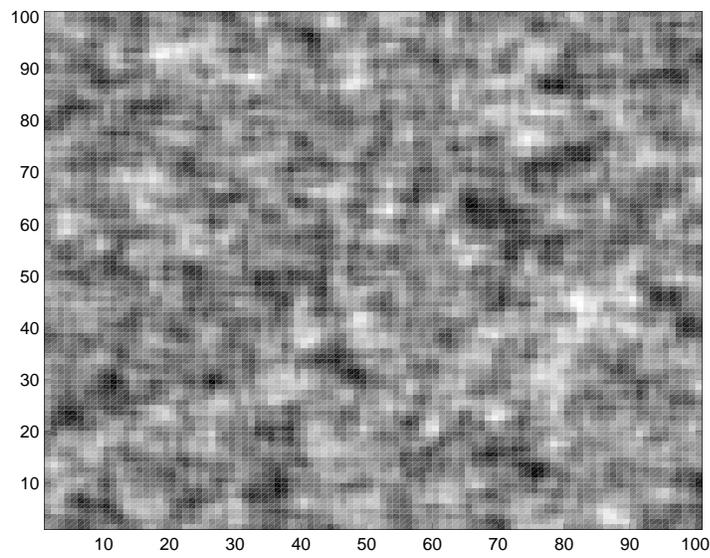
A titre de comparaison, les figures 2.4 à 2.7 représentent des champs à longue mémoire. Tous admettent d'une part un périodogramme témoignant visiblement d'une densité spectrale non-bornée et d'autre par d'une fonction de covariance à décroissance lente.

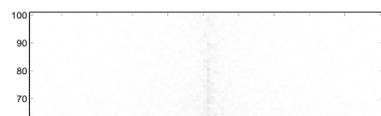
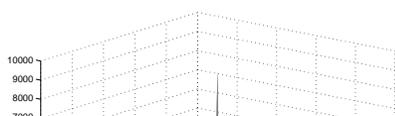
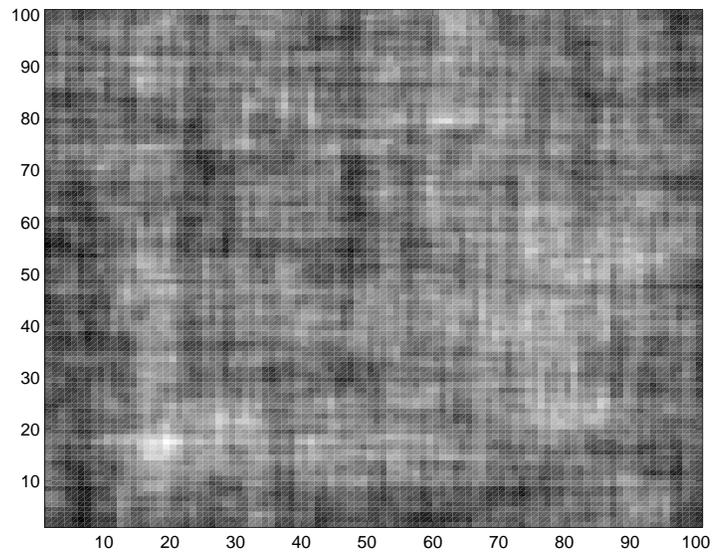
La figure 2.4 est une simulation du champ agrégé considéré dans l'exemple 1 de la partie 2.2.2 où l'on a choisi $g_a(x) = g_b(x) = \frac{3}{2}\sqrt{1-x}$ et $N = 1000$. L'image possède des taches de niveau de gris uniforme beaucoup plus étendues que l'image de la figure 2.3 ce qui témoigne de sa forte dépendance. Le périodogramme témoigne d'une singularité spectrale prononcée en l'origine et la fonction de covariance décroît faiblement ce qui confirme le caractère fortement dépendant du champ. La structure produit se remarque clairement sur les représentations.

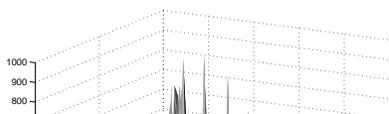
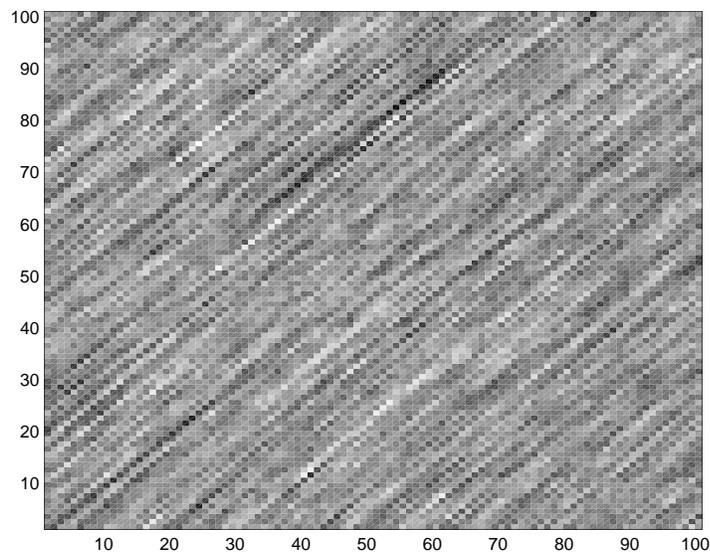
La figure 2.5 montre une simulation du champ agrégé de l'exemple 2 de la partie 2.2.2 avec $k = 1$, g proportionnel à $(1-x)^{0.9}$ et $N = 1000$. La forte dépendance le long d'une direction oblique se voit clairement sur l'image. Elle se confirme sur le périodogramme qui montre une singularité spectrale tout le long de la ligne $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et sur la fonction de covariance $r(k, l)$ qui ne décroît faiblement que dans la direction $k = l$.

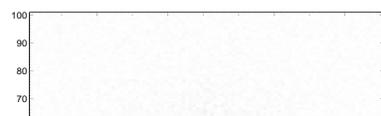
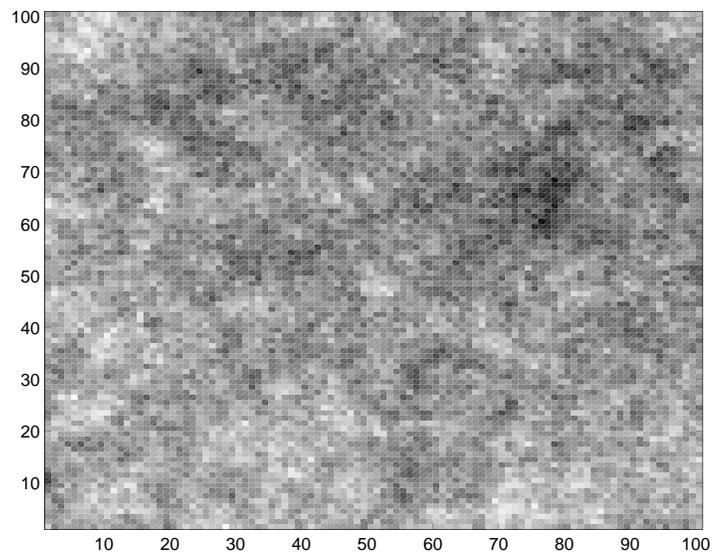
Le champ de la figure 2.6 a été obtenu par filtrage d'après la procédure de simulation présentée dans Eom (2001). Il s'agit de l'exemple 7 de la partie 2.1.2 avec $\alpha = -0,48$, $\theta = 0$ et $e = 1$. La forte dépendance du champ se remarque comme précédemment grâce aux taches de niveau de gris uniforme, à la singularité spectrale suggérée par le périodogramme et à la décroissance lente de la fonction de covariance. La divergence du périodogramme en l'origine ainsi que la décroissance de la fonction de covariance ont visiblement lieu de façon isotrope.

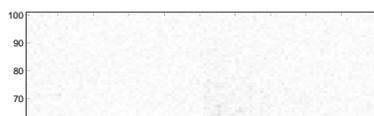
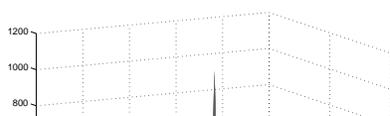
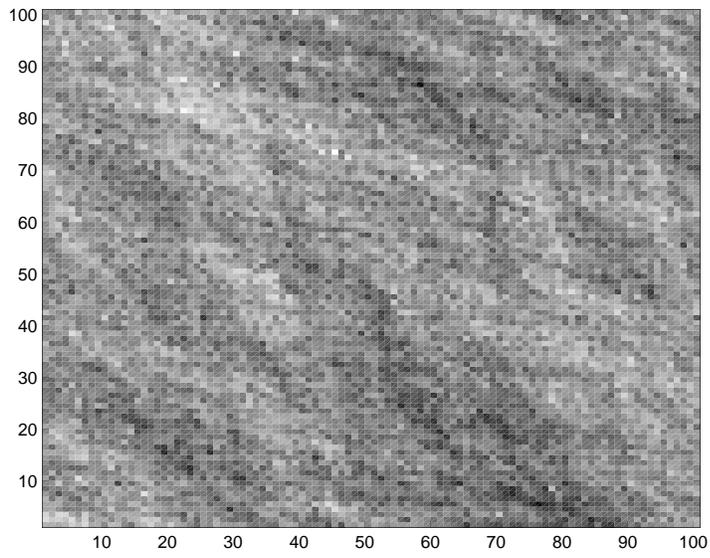
La figure 2.7 représente également une simulation du champ considéré dans l'exemple 7 de la partie 2.1.2 avec $\alpha = -0,48$ mais avec $\theta = \pi/6$ et $e = 2$. Le champ est clairement à longue mémoire. Bien que la forte dépendance soit isotrope au sens de la définition 3, la divergence du périodogramme à l'origine n'est pas invariante par rotation des axes. D'après l'équivalent (2.1.15), cette divergence a plutôt lieu de manière elliptique ce qui semble confirmé sur les représentations du périodogramme.











Chapitre 3

Convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles

Soit X un champ linéaire fortement dépendant. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique des lois fini-dimensionnelles de ses sommes partielles

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}, \quad (3.0.1)$$

pour $t \in [0, 1]^d$ et où d_n est une suite normalisatrice qui sera précisée par la suite.

La convergence fonctionnelle de ces sommes nécessite l'étude de leur équitension dans l'espace de Skorohod $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ et fera l'objet du chapitre suivant.

Nous basons notre étude sur un théorème de convergence de mesures spectrales démontré dans le cas $d = 1$ par Van der Meer (1996) et Lang et Soulier (2000) et que nous généralisons au cadre des champs dans la section 3.1. Le théorème 6 permet l'étude de statistiques linéaires pouvant s'écrire sous forme d'une intégrale stochastique. C'est le cas des sommes partielles (3.0.1) lorsque le champ X s'écrit

$$X_{n_1, \dots, n_d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1, \dots, k_d} \xi_{n_1 - k_1, \dots, n_d - k_d},$$

où ξ est un bruit dont nous préciserons les propriétés plus tard et où les a_k peuvent être vus comme les coefficients de Fourier d'un filtre $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$. Ce filtre détermine la structure de dépendance de X puisqu'il est très lié à sa densité spectrale : cette dernière est proportionnelle à $|a|^2$ lorsque ξ est un bruit blanc.

Dans la section 3.2, on applique le Théorème 6 pour les dimensions $d = 1$ et $d = 2$. Des conditions de dépendance sur le champ X , précisées via le filtre a dans le Théorème 7, nous permettent d'obtenir la limite de S_n . Les résultats se déclinent selon que le filtre est continu en 0 ou non. Dans la première situation, S_n admet un comportement de type centrale limite. Dans la seconde, nous supposons le filtre équivalent en l'origine à une fonction homogène de degré négatif, un cadre typique amenant de la forte dépendance, et nous obtenons un théorème limite non-central dans le sens où la normalisation n'est plus standard.