Modélisation d'une fléchie multi-renforcée

Les essais du chapitre précédent montrent que la présence du plat carbone répartit mieux les efforts dans la lame inférieure, tendant ainsi à diminuer l'impact des défauts les plus importants qui sont les maillons faibles du système. La propagation d'une fissure s'initiant dans une zone fragile du bois peut ainsi se trouver stoppée ou « cousue » temporairement par la lame carbone qui décharge ainsi la fissure. Sans augmenter la capacité maximale que l'on peut espérer de la poutre, le renforcement a permis de diminuer la dispersion des essais, en limitant l'influence des défauts les plus importants. Cependant, on constate que l'apparition de la fissure critique conduit toujours à la ruine catastrophique de la poutre. La fissure démarre (rupture en traction du bois) puis bifurque (rupture en cisaillement, en pointe de fissure).

poutre

La proposition du multi renforcement ou multi lamage (Figure 3.1) est motivée par l'idée qu'il faut stopper la propagation de cette fissure critique avant qu'elle ne traverse l'échantillon ou avant que le cisaillement maximum en pointe soit supérieur à une valeur permettant la bifurcation catastrophique. Il est certain que placer sur le chemin de cette fissure une lamelle de carbone, stoppera l'évolution en mode I. Il est difficile sans essais ou modélisation de dire si elle se propagera ou non en cisaillement, soit dans le bois avant la lamelle, soit à l'interface avec la lamelle.



Figure 3.1. *Proposition du multi renforcement (ou multi lamage)*

C'est à ces questions qu'il s'agit d'essayer de répondre ici, en proposant une modélisation aidant à la compréhension des mécanismes du système multi renforcé, en mettant en évidence la sensibilité des différents paramètres identifiés. Ces paramètres (épaisseur des lamelles, écartements, modules etc...) sont trop nombreux pour n'envisager qu'une approche expérimentale « à tâtons », d'autant qu'il faut travailler à l'échelle 1 pour s'affranchir des effets d'échelle très importants dans ce genre de problématique.

Ce chapitre décrit la problématique mécanique des multicouches, propose une revue des modélisations, expose la modélisation originale proposée et décrit la solution élastique du problème.

3.1. Les modèles multicouches

La structure multi lamée ou multi renforcée bois-composite est représentée sur la Figure 3.2



Figure 3.2. Renforcement multi lamé

Il s'agit donc d'un *n* couche de composite (FRP) intégrées entre les lamelles de bois.

Le chargement peut-être divers, de flexion principalement, mais il a été choisi une étude plus large autorisant les tractions ou torsions par exemple. Les conditions aux limites doivent elles aussi rester variées, puisqu'il s'agira de prendre en compte des fissurations ou ancrages divers.

Le calcul d'une telle structure est relativement complexe car la connaissance précise des champs de contrainte est nécessaire pour décrire la ruine. Cette poutre peu élancée, ne peut être abordée par des méthodes classiques homogènes et isotropes. Il s'agit résolument d'une plaque multicouche avec des singularités, bords libres, fissures et interfaces. En voulant s'intéresser à la ruine on ajoute également la difficulté liée à la définition de critères de rupture pour ce type de structure.

3.1.1. Les modèles existants

Il existe cependant bien des pistes qui vont être maintenant passée en revue.

Il est possible d'aborder le calcul des structures multicouches en gardant une vision 3D classique, en décrivant les différentes couches, les interfaces, les conditions de continuité. Une résolution par éléments finis est alors possible avec les outils classiques. Le coût de calcul est cependant très important et voir prohibitif. De plus, il est difficile d'approcher les zones de concentration de contrainte (bord, interface, fissure) qui demandent un maillage très fin. Enfin cette méthode numérique ne permet pas de proposer des valeurs de contrainte lorsqu'une singularité existe (bords libres par exemple) puisque la dépendance au maillage est alors inévitable. Il faut y adjoindre alors du post traitement et par exemple des intégrations sur des domaines définis par l'opérateur et permettant d'atteindre une valeur convergée et indépendante du maillage (C.Hochard, 2002). La plasticité ou de la viscosité si elles existent peuvent lisser ces singularités et supprimer cet écueil lié aux modélisations par EF. Il existe également des résolutions 3D analytiques de problèmes particuliers (Pagano 1969, 1970) efficaces et riches d'enseignements, mais ne concernant bien entendu que certains jeux de chargements, conditions aux limites et géométries.

Pour toutes ces raisons il est plus évident et plus naturel d'aborder le calcul des multicouches qui possèdent en général une topologie de plaque, une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions, par des approches 2D. De nombreux modèles existent, inspirés au départ par les modèles de plaques homogènes classiques (Love Kirchhoff, Reissner...), adaptés aux particularités des multicouches et développés pour différents besoins.

Pour passer en revue les différentes propositions faites dans la littérature, il est légitime de s'inspirer de la revue très complète réalisée par (Carrera, 2000) qui regroupe les modèles de plaques multicouches en 3 familles :

- les modèles type mécanique des milieux continus à cinématique enrichie (Cosserat, 1999)

- les méthodes dites « asymptotiques » qui affinent une solution grossière par développement asymptotique et à travers un cadre mathématique extrêmement rigoureux (on rajoute ici aux auteurs cités dans (Carrera, 2000), (Nguyen, 2005).

- et enfin les approches de loin les plus nombreuses que E.Carrera qualifie d'approche « axiomatiques». Ces dernières postulent une forme en z (suivant l'épaisseur de la plaque) des champs de déplacement et/ou de contrainte. Les intuitions sont nombreuses et font l'objet de très nombreuses publications. Il ne sera maintenant fait référence qu'à la famille de ces modèles « *axiomatic* », de loin la plus importante et celle à laquelle appartient le modèle choisi pour cet article.

A l'intérieur de cette famille d'approche, E.Carrera ajoute deux critères communs permettant de classifier plus finement les travaux. Le premier concerne le choix des variables inconnues, déplacements, contraintes ou mixtes. Le second, le choix du type de description de l'empilement, une monocouche équivalente obtenue par homogénéisation ou une description plus fine par couche.

Dans le cas où l'on décide de décrire le multicouche comme une simple couche homogène équivalente, les modèles proposés dérivent des théories de plaque homogène de Love Kirchhoff ou Reissner Mindlin selon de degré en Z des champs de déplacements (le plus souvent) postulés. The Classical Lamination Theory (Reddy, 1997) (Stavsky, 1961), qui néglige les déformations de cisaillement transverse, the First Shear Deformation Theorie (Reissner, 1945) (Mindlin, 1951) ou même the High Shear Order deformation Theories en sont les exemples les plus classiques et diffèrent par le degré des polynômes qui décrivent les champs de déplacement. Une revue exhaustive est dans (Murakami, 1987).

Ces modèles sont plutôt réservés au dimensionnement en raideur des plaques multicouches même épaisse, car ne permettant pas l'étudie des aspects locaux, bords libres ou même interface. L'avantage opérationnel est cependant évident du fait d'un nombre de degré de liberté cinématique indépendant du nombre de couches.

Si l'on veut aller plus loin que ces modèles homogénéisé (Equivalent Single Layer), la description de la cinématique (ou des contraintes) dans chaque couche et des conditions de continuité aux interfaces est nécessaire. Il s'agit de la famille des modèles « Layer-Wise » (srinivas, 1973). L'inconvénient évident lié à cet enrichissement cinématique est l'augmentation du nombre de degré de liberté qui dépend alors du nombre de couche. Pour pallier à cet inconvénient plusieurs familles de modèles ont été proposés et regroupés classiquement sous la dénomination « Zig-Zag » et ce du fait de la forme caractéristique du champ de déplacement dans l'épaisseur. Ces modèles prennent en compte le changement brutal des propriétés matériau à chaque interface et les conditions de continuité. L'un de ces développements (Murakami, 1987), (Carrera, 1998), postule une fonction linéaire normée dont la pente change de signe à chaque interface, qui s'ajoute à un champ de déplacement de type ESL. D'autres approches proposent d'ajouter plutôt qu'une fonction linéaire, un autre type de fonction (Touratier, 2000). Même si son sens physique n'est pas si évident, on peut voir cette fonction comme une perturbation qui brise la cinématique de la plaque homogène équivalente tout en conservant un nombre de degré de liberté indépendant du nombre de couche. En introduisant ce type de cinématique dans une formulation variationelle les auteurs identifient une forme en z pour les contraintes de cisaillement transverses. Le choix de la cinématique initiale, linéaire (FSDT) ou non (HSODT) provide différents modèles plus ou moins raffinés et qui permettent une bonne approche de la réalité 3D. Ces approches sont destinés au dimensionnement en raideur de stratifiés épais ou sandwiches, car une bonne description des champs dans l'épaisseur est obtenue.

Une façon d'aller encore plus loin, par exemple pour l'étude des singularités, fissures ou autres effets de bords, est de proposer des approches layerwise qui postulent dans chaque couche des champs indépendants dans leur description mais respectant des conditions de continuité aux interfaces Le prix à payer est bien entendu un nombre de degré de liberté dépendant du nombre de couche. Plusieurs approches sont alors possibles selon que l'on décide d'approximer les déplacements (Pagano, 1970), ou les contraintes et déplacements (Carrera, 1999). Les approches en contraintes seules sont plus rares. Pourtant l'étude des singularités et concentrations de contraintes nécessitent bien entendu la meilleure approche possible pour les champs de contraintes, et donc une approche en

contrainte semble plus naturelle. Il est cependant difficile de postuler la forme d'un champ qui soit statiquement admissible.

Une très belle approche de ce type a été proposée par Pagano (Pagano, 1978) et peu développée depuis. On citera cependant (Naciri, 1998) qui ont exploité le potentiel de cette méthode. Pagano, utilisant une formulation variationnelle de Reissner (Reissner, 1950) considérée comme une formulation mixte, postule un champ de contrainte, mais pas de champ de déplacement 3D, comme il le précise lui-même dans une note de bas de page (Pagano, 1978), « note that we refrain from assuming the form of the displacement field in accordance with the objectionable features of that approach described earlier ».

Ceci est un point très important et peu commenté. En effet, la formulation mixte de Reissner ou Hellinger Reissner, permet d'exprimer la dualité naturelle entre champs de contrainte et champs de déplacements. De plus elle ne nécessite pas de proposer un champ de contrainte statiquement admissible.

Pagano a donc proposé d'exprimer le champ de contrainte comme des polynômes en z, dont les coefficients s'expriment en fonction des efforts généralisés, par exemple tensions, moments, efforts tranchants, dans chaque couche.

On peut proposer bien évidemment ensuite des expressions également pour les autres composantes des contraintes, faisant intervenir d'autres efforts généralisés (Pagano 1978). On y reviendra plus loin pour le modèle proposé mais on peut souligner ici l'idée majeure de N.J. Pagano qui fut d'introduire directement dans la méthode, en plus des efforts de plaque classiques, les contraintes au niveau des interfaces, sites privilégiés des concentrations de contraintes et des endommagements, décrits comme des efforts généralisés.

Pour ce faire il propose une expression des contraintes 3D de cisaillement et d'arrachement les faisant intervenir (respectivement polynômes en z^2 et z^3 que l'on trouvera dans (Pagano, 1978), et obtient ainsi, déformations généralisées d'interfaces associées, des conditions d'équilibre et un comportement d'interface.

Malgré l'utilisation de cette formulation mixte, il n'a donc pas été nécessaire de proposer une expression approchée des déplacements 3D. Dans (Pagano, 1978) on trouvera les détails d'un modèle complet qui possède 7n degré de liberté par couches.

Marchant dans ces pas, des auteurs ont proposé des modèles dérivés, moins riches mais adaptés à des situations spécifiques. L'approche détaillée ici est une formulation à 5n degré de liberté par couche, et qui peut être vu comme un empilement de plaque de Reissner collées par des efforts d'interface comme définis par Pagano.

3.1.2. Approche multiparticulaire

Nous allons dans ce paragraphe faire un bref résumé de deux modèles multiparticulaires, l'un étant plus simplifié que l'autre, qui allient le mieux richesse de description des champs et caractère opératoire. Le modèle considère le multicouche comme la superposition de plaque de Reissner (modèle $\mathcal{M}4$ -5n), ou la plaque de Kirchhoff (modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1P), liées par des efforts d'interface. La construction du modèle est fondée sur la méthode d'approximation d'Hellinger – Reissner (Reissner, 50). L'introduction des contraintes approchées à partir des efforts généralisés dans une adaptation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner a permis d'identifier les déplacements et les déformations généralisés. L'application du théorème de Reissner et avec quelques hypothèses énergétiques, donne ensuite les équations de comportement et d'équilibre et les conditions aux limites.

Le modèle des matériaux multicouches a été présenté par (Chabot, 1997), qui formalise une construction d'une famille de modèles multi particulaire $\mathcal{M}4$ élastiques (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches). Ce modèle est construit à partir d'une approximation des contraintes injectées dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. Les contraintes sont approchées par des

polynômes en *z*. Ces modèles proposent une cinématique par couche plutôt que des cinématiques globales qui sont proposées par les modèles de plaque d'ordre supérieur. Dans le cas des modèles multiparticulaires, le multicouche est représenté par un ensemble des plaques (objet 2D) couplées par des efforts d'interfaces (voir Figure 3.3). Le multicouche devient ainsi un objet 2D dont chaque point géométrique est le siège d'une superposition de particules matérielles correspondant aux plaques modélisant les couches.

Plusieurs travaux ont été consacrés à ce modèle. Philippe (Philippe, 1997) a présenté des modélisations multiparticulaires adaptées à la description du comportement de structures sandwichs en matériaux composites. La validation des modèles a été préalablement effectuée par comparaison à des solutions obtenues soit analytiquement soit à l'aide d'éléments finis (Carreira, 1998). (Hadj-Ahmed, 1999) a appliqué le modèle $\mathcal{M}4$ à l'optimisation du transfert des efforts par cisaillement dans un joint de colle. (Lagarde, 2000) a utilisé une modélisation multiparticulaires dans le cas de grandes transformations. [Diaz Diaz, 2001] a utilisé une modélisation des couches de chaussée par un modèle $\mathcal{M}4$. (Nguyen T., 2004) a implémenté le modèle $\mathcal{M}4$ dans un code éléments finis. (Pham S., 2006) a introduit les interfaces imparfaites dans les modèles $\mathcal{M}4$ pour la modélisation de la connexion dans les poutres mixtes bois-béton. (Duong V., 2007) a continué le travail de (Nguyen T., 2004) par l'introduction dans leur code éléments finis des modules de calcul dynamique et du modèle des interfaces imparfaites. Une implémentation dans ABAQUS est en cours.



3.1.3. Approximation des champs des contraintes et des déplacements

Figure 3.3. *Problème multicouche*

Nous proposons deux types d'approximation du champ de contraintes 3D, l'une étant plus précis que l'autre (Chabot, 1997). Le premier modèle est le $\mathcal{M}4$ -5n qui approche chaque couche par une plaque de Reissner (Reissner, 1945) et le deuxième est le modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1P qui approche chaque couche par une plaque. Le multicouche (objet 3D) devient ainsi une superposition de plaques ou de membranes couplées entre elles par des efforts d'interface. L'entité 2D qui modélise le multicouche est constituée de points géométriques occupés par *n* particules matérielles. L'approximation des contraintes sera exactement la même que dans le cadre de l'élasticité (Chabot, 1997)

Champs de contraintes approchées du modèle M4-5n

Nous approchons les contraintes dans le plan par des polynômes en z du premier degré. On les notera $\sigma_{\alpha\beta}((\alpha,\beta) \in \{1,2\})$. En utilisant les équations d'équilibre 3D, nous déduisons que les degrés des polynômes en z approchant les contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ et $\sigma_{3\beta}$ sont respectivement 2 et 3. On choisit les

coefficients des polynômes qui apparaissent dans l'écriture des contraintes approchées de manière à faire intervenir les champs suivants qu'on appelle effort intérieurs généralisés :

- le tenseur plan $\tilde{\tilde{N}}^i$ d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche *i* (avec $1 \le i \le n$) :

$$N^{i}_{\alpha\beta}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} \sigma_{\alpha\beta}(x,y,z)dz$$
(3.1)

- le tenseur plan $\widetilde{\tilde{M}}^i$ d'ordre 2 des moments de flexion par rapport au plan médian de la couche i (avec $1{\leq}i{\leq}n)$:

$$M^{i}_{\alpha\beta}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} (z - \overline{h}_{i}) \sigma_{\alpha\beta}(x,y,z) dz$$
(3.2)

- le vecteur plan \tilde{Q}^i d'effort tranchant de la couche *i* (avec $1 \le i \le n$) :

$$Q^{i}_{\alpha\beta}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} \sigma_{\alpha3}(x,y,z)dz$$
(3.3)

- le vecteur plan $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface j,j+1 ($1 \le j \le n-1$) :

$$\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) = \sigma_{\alpha3}(x,y,h_j^+)$$
(3.4)

- le scalaire $v^{j,j+1}$ d'effort d'arrachement à l'interface j,j+1 (avec $1 \le j \le n-1$):

$$v_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) = \sigma_{33}(x,y,h_j^+)$$
(3.5)

On définit une base $(P_j^i)_{0 \le i \le 3}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, avec

$$\begin{cases}
P_{0}^{i}(z) = 1 \\
P_{1}^{i}(z) = \frac{z - \bar{h}_{j}}{e^{i}} \\
P_{2}^{i}(z) = 6\left(\frac{z - \bar{h}_{j}}{e^{i}}\right)^{2} + \frac{1}{2} \\
P_{3}^{i}(z) = -2\left(\frac{z - \bar{h}_{j}}{e^{i}}\right)^{3} + \frac{3}{10}\left(\frac{z - \bar{h}_{j}}{e^{i}}\right)^{2}
\end{cases}$$
(3.6)

Ces polynômes ainsi définis sont orthogonaux entre eux, c'est-à-dire:

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z) dz = 0 \, si \, \alpha \neq \beta$$
(3.7)

Les contraintes approchées dans la couche i qui vérifient les équations 3 à (3.5) s'écrivent alors :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^{i}(x,y)\frac{P_{0}^{i}(z)}{e^{i}} + 12M_{\alpha\beta}^{i}(x,y)\frac{P_{1}^{i}(z)}{(e^{i})^{2}}$$
(3.8)

$$\sigma_{\alpha3}^{5n}(x,y,z) = Q_{\alpha}^{i}(x,y)\frac{P_{0}^{i}(z)}{e^{i}} + \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) - \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x,y)\right)P_{1}^{i}(z) + \left(Q_{\alpha}^{i}(x,y) + \frac{e^{i}}{2}\left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) - \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x,y)\right)\right)\frac{P_{2}^{i}(z)}{e^{i}}$$
(3.9)

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x,y,z) &= \left(\frac{\nu^{j,j+1}(x,y) + \nu^{j-1,j}(x,y)}{2} + \frac{e^{i}}{12}\operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right)\right) P_{0}^{i}(z) \\ &+ \left(\frac{e^{i}}{10}\operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) - \operatorname{div}\frac{\widetilde{Q}^{i}(x,y)}{5} + \nu^{j,j+1}(x,y) - \nu^{j-1,j}(x,y)\right) P_{1}^{i}(z) + \frac{e^{i}}{12}\operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right)\right) P_{2}^{i}(z) \\ &- \left(\frac{e^{i}}{10}\operatorname{div}\left(\tau^{j,j+1}(x,y) + \tau^{j-1,j}(x,y)\right) - \operatorname{div}\widetilde{Q}^{i}(x,y)\right) P_{3}^{i}(z) \end{aligned}$$
(3.10)

Puisque les polynômes $(P_j^i)_{0 \le j \le 3}$ sont donnés, la connaissance des efforts intérieurs généralisés définis ci-dessus (des champs en (x,y) permet de déterminer l'état de contraintes 3D approché du modèle $\mathcal{M}4$ -5n.

Remarque: Dans ce qui précède, les efforts d'interfaces $(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) \text{ et } v^{j,j+1}(x,y)$ sont définis pour *j* variant de 1 à *n*-1. Cependant il est commode de noter $\tau_{\alpha}^{0,1}(x,y)$, $v^{0,1}(x,y)$ et $\tau_{\alpha}^{n,n+1}(x,y)$, $v^{n,n+1}(x,y)$ les efforts extérieurs sur les faces, respectivement, inférieure et supérieure du multicouche. Ces efforts sont donc des données. Si nous notons $T_{\alpha}^{-}(x,y)$ et $T_{\alpha}^{+}(x,y)$ la composante suivant α du vecteur contrainte imposé sur les faces, respectivement, inférieure et supérieure et supérieure du multicouche, nous avons :

$$\begin{cases} \tau_1^{0,1}(x,y) = T_1^-(x,y) \\ \tau_2^{0,1}(x,y) = T_2^-(x,y) \\ v^{0,1}(x,y) = T_3^-(x,y) \end{cases} \text{ respectivement} \begin{cases} \tau_1^{n,n+1}(x,y) = T_1^+(x,y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x,y) = T_2^+(x,y) \\ v^{n,n+1}(x,y) = T_3^+(x,y) \end{cases}$$
(3.11)

Champ de contraintes approchées du modèle M4-2n+1Plaque

Dans cette approche, les couches sont des plaques de Kirchhoff sans effort tranchant. Nous approchons les contraintes dans le plan par des polynômes en z du premier degré. Les contraintes membranaires sont approchées par :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{2n+1P}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^{i}(x,y)\frac{P_{0}^{i}(z)}{e^{i}} + \frac{12}{\left(e^{i}\right)^{2}}M_{\alpha\beta}^{i}(x,y)P_{1}^{i}(z)$$
(3.12)

Les contraintes de cisaillement hors plan :

$$\sigma_{\alpha3}^{2n+1P}(x,y,z) = \frac{1}{2} \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) + \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x,y) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^{i}(x,y)}{e^{i}} \right) P_{0}^{i}(z) + \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x,y) - \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x,y) \right) P_{1}^{i}(z) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^{i}(x,y)}{e^{i}} P_{2}^{i}(z)$$
(3.13)

Les contraintes d'arrachement :

$$\sigma_{33}^{5n}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{T_3^+(x,y) + T_3^-(x,y)}{2} \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \frac{e^j}{2} \operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \widetilde{M}^j(x,y) \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{e^j}{2} \operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \widetilde{M}^j(x,y) \\ + \frac{e^j}{12} \operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) \\ - \left(\frac{e^j}{2} \operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) + \frac{6}{5} \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \widetilde{M}^j(x,y)\right) P_1^i(z) \\ + \frac{e^j}{12} \operatorname{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) P_2^i(z) - \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \widetilde{M}^j(x,y) P_3^i(z) \end{cases}$$
(3.14)

3.1.4. Les équations du modèle et les conditions aux limites

Nous allons écrire les équations d'équilibre et de comportement cohérentes avec l'approximation en contrainte (plus de détails dans [Chabot, 1997])

Modèle *M*4-5n

Les équations d'équilibre

En appliquant le théorème de (Reissner, 50), les équations d'équilibre sont :

$$\widetilde{div}\widetilde{\widetilde{N}}^{i}(x,y) + \widetilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \widetilde{\tau}^{j-1,j}(x,y) = 0 \text{ sur } \omega$$
(3.15)

$$div\tilde{Q}^{i}(x,y) + v^{i,i+1}(x,y) - v^{i-1,i}(x,y) = 0 \, sur\,\omega$$
(3.16)

$$\widetilde{div}\widetilde{\widetilde{M}}^{i}(x,y) - \widetilde{Q}^{i}(x,y) + \frac{e^{i}}{2} (\widetilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \widetilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)) = 0 \ sur \ \omega$$
(3.17)

Les équations d'équilibre généralisé sont du type *Reissner par couche* et cohérent avec l'équilibre 3D local :

$$\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\sigma}^{5n}(x,y,z) = 0 \tag{3.18}$$

Conditions aux limites en contrainte

$$\begin{split} \widetilde{\widetilde{P}}^{i} \cdot \underline{n} &= \widetilde{T}^{i}_{d} \\ \widetilde{\widetilde{P}}^{i} \cdot \underline{n} &= \widetilde{M}^{i}_{d} \\ \widetilde{Q}^{i} \cdot \underline{n} &= Q^{i}_{3d} \end{split}$$
 (3.19)

Déplacements généralisés

$$\begin{cases} U_{\alpha}^{i*}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} \frac{P_{0}^{i}(z)}{e^{i}} U_{\alpha}^{*}(x,y,z) dz \\ \phi_{\alpha}^{i*}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} \frac{12}{(e^{i})^{2}} P_{1}^{i}(z) U_{\alpha}^{*}(x,y,z) dz \\ U_{3}^{i*}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} \frac{P_{0}^{i}(z)}{e^{i}} U_{3}^{*}(x,y,z) dz \end{cases}$$
(3.20)

Déformations généralisées

Tenseur de déformation membranaire de la couche *i*

$$\varepsilon^{i}_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{i}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial U^{i}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad \alpha,\beta \in \{1,2\}$$
(3.21)

Tenseur de courbure de la couche *i*

$$\chi^{i}_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{i}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \phi^{i}_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad \alpha,\beta \in \{1,2\}$$
(3.22)

On peut en déduire la dualité énergétique entre efforts et déformations généralisés pour $i \in \{1,n\}$ et $j \in \{1,n-1\}$.

$$\begin{split} \widetilde{N}^{i} \leftrightarrow \widetilde{\tilde{\varepsilon}}^{i}(x,y) &= \frac{1}{2} (Gr \widetilde{\tilde{a}} d \widetilde{U}^{i} + {}^{T} Gr \widetilde{\tilde{a}} d \widetilde{U}^{i}) \\ \widetilde{M}^{i} \leftrightarrow \widetilde{\tilde{\chi}}^{i}(x,y) &= \frac{1}{2} (Gr \widetilde{\tilde{a}} d \widetilde{\phi}^{i} + {}^{T} Gr \widetilde{\tilde{a}} d \widetilde{\phi}^{i}) \\ \widetilde{Q}^{i} \leftrightarrow \widetilde{d}^{i}_{\phi}(x,y) &= \frac{1}{2} (\widetilde{\phi}^{i} + {}^{T} Gr \widetilde{a} d U_{3}^{i}) \end{split}$$
(3.23)
$$\widetilde{\tau}^{j,j+1} \leftrightarrow \widetilde{D}^{j,j+1}(x,y) = \widetilde{U}^{j+1} - \widetilde{U}^{j} - \frac{e^{j}}{2} \widetilde{\phi}^{j} - \frac{e^{j+1}}{2} \widetilde{\phi}^{j+1} \\ \widetilde{\nu}^{j,j+1} \leftrightarrow D^{j,j+1}(x,y) = \widetilde{U}_{3}^{j+1} - \widetilde{U}_{3}^{j} \end{split}$$

Loi de comportement :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{i} = \frac{1}{e^{i}} \tilde{\tilde{S}}^{i} : \tilde{N}^{i} \\ \tilde{\tilde{x}}^{i} = \frac{12}{(e^{i})^{3}} \tilde{\tilde{S}}^{i} : \tilde{M}^{i} \\ \tilde{d}_{\phi}^{i} = \frac{6}{5} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{i} \tilde{Q}^{i} - \frac{1}{10} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{i} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \\ \tilde{D}^{j,j+1} = -\frac{1}{10} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j} \tilde{Q}^{j} - \frac{1}{10} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j+1} \tilde{Q}^{j+1} - \frac{e^{j}}{30} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j} \tilde{\tau}^{j-1,j} + \\ + \frac{2}{15} \left(e^{j} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j} + e^{j+1} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j+1} \right) \tilde{\tau}^{j,j+1} - \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j+1} \tilde{\tau}^{j+1,j+2} \\ D_{v}^{j,j+1} = \frac{9}{70} e^{j} \tilde{\tilde{S}}_{v}^{j} v^{j-1,j} + \frac{13}{35} \left(e^{j} \tilde{\tilde{S}}_{v}^{j} + e^{j+1} \tilde{\tilde{S}}_{v}^{j+1} \right) v^{j,j+1} \\ + \frac{9}{70} e^{j+1} \tilde{\tilde{S}}_{v}^{j+1} v^{j+1,j+2} \end{cases}$$
(3.24)

Modèle M4-2n+1P

Nous procédons de la même manière que nous avons faite pour le modèle M4-5n, (plus de détails dans (Chabot, 1997)

Les équations d'équilibre du modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1

$$\begin{cases} d\tilde{\imath}v\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y) + \tilde{\imath}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\imath}^{j-1,j}(x,y) = 0 \text{ sur } \omega \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{i}}{2} div(\tilde{\imath}^{i,i+1} + \tilde{\imath}^{i-1,i}) + div(\underline{div}(\tilde{\tilde{M}}^{i})) + (T_{3}^{+} + T_{3}^{-}) = 0 \end{cases}$$
(3.25)

Les conditions aux limites

$$\begin{cases} \widetilde{\widetilde{N}}^{i} \underline{n} = \widetilde{T}_{d}^{i} \\ \underline{n} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\widetilde{M}}^{i} \underline{n} = \widetilde{M}_{d} \underline{n} \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{i}}{2} \left(\widetilde{\tau}^{i,i+1} + \widetilde{\tau}^{i-1,i} \right) + (\underline{div} \left(\widetilde{\widetilde{M}}^{i} \right) \right) \underline{n} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\underline{t} \cdot \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\widetilde{M}}^{i} \underline{n} - \widetilde{M}_{d} \underline{t} \right] - \widetilde{Q}_{3d} = 0 \end{cases}$$

$$(3.26)$$

Les champs de déplacements généralisés

$$\begin{cases} U_{\alpha}^{i*}(x,y) = \int_{h_{i}^{-}}^{h_{i}^{+}} \frac{P_{0}^{i}(z)}{e^{i}} U_{\alpha}^{*}(x,y,z) dz \\ W(x,y) = \frac{U_{3}(x,y,h_{n}^{+}) + U_{3}(x,y,h_{1}^{-})}{2} \end{cases}$$
(3.27)

Les champs de déformations généralisées :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}^{i}(x,y) = \frac{1}{2} (Gr\tilde{a}d\widetilde{U}^{i} + {}^{T}Gr\tilde{a}d\widetilde{U}^{i}) \\ \tilde{\chi}^{i}(x,y) = -Gr\tilde{a}dGr\tilde{a}dW_{3} = \tilde{\chi}^{j}(x,y) \forall i,j \\ \tilde{D}^{j,j+1}(x,y) = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^{j} + \frac{e^{j+1} + e^{j}}{2} Gr\tilde{a}dW_{3} \end{cases}$$
(3.28)

Loi de comportement

En négligeant l'énergie élastique des contraintes normales d'arrachement des couches et l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires et les contraintes normales d'arrachement, nous en déduisons les lois de comportement du modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1 :

$$\begin{cases}
\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^{i} = \frac{1}{e^{i}}\tilde{\tilde{S}}^{i}:\tilde{\tilde{N}}^{i} \\
\tilde{\tilde{\chi}}^{i} = \frac{12}{(e^{i})^{3}}\tilde{\tilde{S}}^{i}:\tilde{\tilde{M}}^{i} = \tilde{\tilde{\chi}}^{j} \quad \forall i,j \\
\tilde{D}^{j,j+1} = \frac{e^{i}}{6}(\tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j})\tilde{\tau}^{j-1,j} + \frac{1}{3}\left(e^{j}\tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j} + e^{j+1}\tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j+1}\right)\tilde{\tau}^{j,j+1} + \frac{e^{j+1}}{6}\tilde{\tilde{S}}_{Q}^{j+1}\tilde{\tau}^{j+1,j+2}
\end{cases}$$
(3.29)

3.2. Modélisation des poutres multicouches en flexion

Après ces rappels des modèles qui vont être utilisés, on s'intéresse à notre problème de poutre multi renforcée.

3.2.1. Description du problème

Nous nous intéressons au cas d'une poutre multicouche en flexion (voir Figure 3.4). Dans cette partie seront présentées les résolutions du problème par le $\mathcal{M}4$ -2n+1P et et par le $\mathcal{M}4$ -5n d'un multicouche uniaxial en flexion, permettant d'étudier le problème de bords libres ou des fissures transverses, ainsi des fissures d'interfaces que nous détaillerons plutôt dans le chapitre 4.



Figure 3.4. Poutre multi renforcée en flexion

Nous commençons dans un premier temps à résoudre théoriquement le problème $\mathcal{M}4$ -2n+1P et $\mathcal{M}4$ -5n. On comparera dans la suite les résultats obtenus pour un empilement de trois couches en traction, grâce à notre outil avec ceux obtenus par un calcul éléments finis.

3.2.2. Problème de flexion par le modèle M4-2n+1 Plaque

Récapitulatif des équations principales bidimensionnelles

Avec le modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1P, les hypothèses et les équations applicables au problème sont :

Déplacements généralisés :

Avec l'hypothèse uniaxiale, le problème bi dimensionnel est donc indépendant à y. Les équations (3.27) deviennent :

 $\widetilde{U} = \begin{bmatrix} u^{1}(x) \\ u^{2}(x) \\ ... \\ u^{n}(x) \end{bmatrix}$ (3.30) $U_{3} = w(x)$

Déformations généralisées :

Les efforts généralisés du modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1P sont associés respectivement aux déformations généralisées dans l'équation (3.28) exprimées ci-dessous :

$$\begin{cases} \epsilon^{i} = \frac{d}{dx} u^{i} \quad (x) \\ \chi^{i} = \frac{d}{dx} \phi^{i}(x) = \frac{d^{2}}{dx^{2}} w(x) = \chi \\ D^{j,j+1} = u^{j+1}(x) - u^{j}(x) - \frac{e^{j} - e^{j,j+1}(x)}{2} \phi(x) \end{cases}$$
(3.31)

En effet, seul w(x) la flèche moyenne étant considérée dans ce modèle, les courbures sont identiques dans toutes les couches.

Loi de comportement

En notant, en fonction des modules d'ingénieur, les expressions des composantes du tenseur des souplesses de chacune des couches :

$$\underline{\underline{S}}^{i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1}^{i}} & -\frac{\nu_{12}^{i}}{E_{1}^{i}} & -\frac{\nu_{13}^{i}}{E_{1}^{i}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^{i}}{E_{2}^{i}} & \frac{1}{E_{2}^{i}} & -\frac{\nu_{23}^{i}}{E_{2}^{i}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}^{i}}{E_{3}^{i}} & -\frac{\nu_{32}^{i}}{E_{3}^{i}} & \frac{1}{E_{3}^{i}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^{i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^{i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^{i}} \end{bmatrix}$$
(3.32)

Les équations (3.29) se réécrivent :

$$\frac{d}{dx}u^{i}(x) = \frac{N_{11}(x)}{e^{i}E^{i}}$$
(3.33)

$$\chi = \frac{12}{(e^{i})^{3} E^{i}} M^{i} (x)$$
(3.34)

$$u^{i+1}(x) - u^{i}(x) + \frac{e^{i+1} + e^{i}}{2} \phi(x)$$

= $\frac{1}{6} \frac{e^{i}}{G^{i}} \tau^{i-1,i} + \frac{1}{6} \frac{e^{i+1}}{G^{i+1}} \tau^{i+1,i+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{i}}{G^{i}} + \frac{e^{i+1}}{G^{i+1}} \right) \tau^{i,i+1}$ (3.35)

Les équations d'équilibre :

Les équations d'équilibre (3.25) se réécrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N^{i}(x) + \left(\tau^{i,i+1}(x) - \tau^{i-1,i}(x)\right) = 0\\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{i}}{2} \frac{d}{dx} \left(\tau^{i,i+1}(x) + \tau^{i-1,i}(x)\right) + \frac{d^{2}}{dx^{2}} M^{i}(x)\right) + q(x) = 0 \end{cases}$$
(3.36)

Pour écrire les équations sous la forme matricielle, nous allons tout d'abord définir des vecteurs et des matrices intervenant dans le problème :

Les vecteurs d'inconnus dans le problème sont :

Vecteur de déplacements membranaires :

$$\underline{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \dots \\ u^n \end{bmatrix}$$
(3.37)

Vecteurs des efforts membranaires :

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \\ \dots \\ N^n \end{bmatrix}$$
(3.38)

Vecteurs des contraintes de cisaillement d'interface :

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}^{1,2} \\ \boldsymbol{\tau}^{2,3} \\ \dots \\ \boldsymbol{\tau}^{n-1,n} \end{bmatrix}$$
(3.39)

Nous définissons les vecteurs et les matrices supplémentaires, qui sont :

Vecteur des épaisseurs :

$$\underline{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e^1\\ e^1\\ \\ \\ \\ \\ e^n \end{bmatrix}$$
(3.40)

Matrice des rigidités membranaires :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} e^{1}E^{1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{2}E^{2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & e^{n}E^{n} \end{bmatrix}$$
(3.41)

Matrice des souplesses du cisaillement :

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{e^1}{G^1} + \frac{e^2}{G^2} \right) & \frac{1}{6} \frac{e^2}{G^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} \frac{e^2}{G^2} & \frac{1}{3} \left(\frac{e^2}{G^2} + \frac{e^3}{G^3} \right) & \frac{1}{6} \frac{e^3}{G^3} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \frac{e^3}{G^3} & \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{G^3} + \frac{e^4}{G^4} \right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3} \left(\frac{e^{n-1}}{G^{n-1}} + \frac{e^n}{G^n} \right) \end{bmatrix}$$
(3.42)

Matrice supplémentaire:

$$\underline{\underline{A}}_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}; \ \underline{\underline{A}}_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
(3.43)

On rappelle que w(x) le champ de déplacement vertical est identique pour toutes les couches. Un seul scalaire $\phi(x)$ est nécessaire pour décrire $w^i(x)$, $\phi^i(x)$, $\chi^i(x)$.

Les équations de comportement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \underline{\underline{K}} \frac{d}{dx} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{N}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M^{i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (e^{i})^{3} \underline{E}^{i}}{12} \frac{d}{dx} \varphi \\ \underline{\underline{A}}_{1} \underline{\underline{U}} + \frac{1}{2} \phi \underline{\underline{A}}_{2} \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{GT}} \end{cases}$$
(3.44)
(3.45)

Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\underline{N} - {}^{T}\underline{\underline{A}}_{1}\underline{T} = 0 \\ {}^{T}(\underline{\underline{A}}_{2}\underline{e})\frac{d}{dx}\underline{T} + \frac{d^{2}}{dx^{2}}\sum_{i=1}^{n} M^{i} + q(x) = 0 \end{cases}$$
(3.46)

$$\underline{\underline{A}}_{1}\underline{\underline{U}} + \frac{1}{2}\phi\underline{\underline{A}}_{2}\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{GT}}$$
(3.47)

Établissement du système d'équations

Avec $\underline{\underline{G}}$ toujours inversible, nous avons :

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{-1} \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{1} \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \frac{1}{2} \phi \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{2} \underline{\mathbf{e}} \right)$$
(3.48)

Remplacer (3.48) dans la première équation du (3.46), on a :

$$\underline{\underline{K}}\frac{d^{2}}{dx^{2}}\underline{\underline{U}} - {}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}_{1}\underline{\underline{G}}^{-1}\left(\underline{\underline{A}}_{1}\underline{\underline{U}} + \frac{1}{2}\phi\underline{\underline{A}}_{2}\underline{\underline{e}}\right) = 0$$
(3.49)

Remplacer (3.44) et (3.48) dans la deuxième équation (3.46) en posant :

$$R_{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (e^{i})^{3} E^{i}}{12}$$
(3.50)

On obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{d}{dx}\phi - \frac{1}{R_M} \operatorname{T}\left(\underline{\underline{A}}_2\underline{\underline{e}}\right)\underline{\underline{G}}^{-1}\left(\underline{\underline{A}}_1\frac{d}{dx}\underline{\underline{U}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{A}}}_2\underline{\underline{e}}\frac{d}{dx}\phi\right) - \frac{1}{R_M}q(x) = 0$$
(3.51)

Après l'intégration :

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi - \frac{1}{R_M} \prod_{M=0}^{T} \left(\underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{e}}\right) \underline{\underline{G}}^{-1} \left(\underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{U}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{e}} \phi\right) - \frac{1}{R_M} \int q(x) \, dx + C^{te}$$

$$= 0$$
(3.52)

Pose \underline{X} le vecteur d'inconnu des déplacements :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \phi \end{bmatrix}$$
(3.53)

Nous obtenons le système d'équations différentielles final :

$$\frac{d^2}{dx^2}\underline{X} - \underline{\underline{C}}_{s}\underline{X} = \underline{\underline{F}}$$
(3.54)

Où

$$\underline{\underline{C}}_{s} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} \ {}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}_{1} \ \underline{\underline{G}}^{-1} \ \underline{\underline{A}}_{1} & \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} \ {}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}_{1} \ \underline{\underline{G}}^{-1} \ \underline{\underline{A}}_{2} \underline{\underline{e}} \\ \frac{1}{R_{M}} \ {}^{\mathrm{T}} (\underline{\underline{A}}_{2} \underline{\underline{e}}) \ \underline{\underline{G}}^{-1} \ \underline{\underline{A}}_{1} & \frac{1}{2} \frac{1}{R_{M}} \ {}^{\mathrm{T}} (\underline{\underline{A}}_{2} \underline{\underline{e}}) \ \underline{\underline{G}}^{-1} \ \underline{\underline{A}}_{2} \underline{\underline{e}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \int q(x) dx + C \underline{\underline{te}} \end{bmatrix}$$

$$(3.55)$$

Pour écrire le système de manière adimensionnelle, posons :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} e^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{PX}}_0$$
(3.56)

Nous obtenons :

$$\frac{d^2}{dx^2}\underline{X}_0 - \left(\underline{\underline{P}}^{-1}\,\underline{\underline{C}}_s\,\underline{\underline{P}}\right)\underline{X}_0 = \underline{\underline{F}}$$
(3.57)

Ou bien

$$\frac{d^2}{dx^2}\underline{X}_0 - \underline{\underline{CX}}_0 = \underline{\underline{F}}$$
(3.58)

La résolution de l'équation (3.58) donnera tous les champs de déplacements adimensionnalisés $\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} u_0^1(x) \\ \vdots \\ u_0^n(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix}$.

Les champs des efforts généralisés sont déterminés par les équations (3.44).

Les champs des cisaillements d'interface sont déterminés par les équations (3.48)

A noter que la matrice $\underline{\underline{C}}$ est singulière, le rang de $\underline{\underline{C}}$ est de (*n*-1). Sa dimension est n+1, $\underline{\underline{C}}$ présente donc 2 valeurs propres nulles. La résolution détaillée de l'équation (3.58) sera présentée dans l'annexe.

Conditions aux limites

Nous avons au total 2(n+1)+1 coefficients d'intégration à déterminer, qui correspondent aux 2(n+1)+1 conditions aux limites.

$$\begin{cases}
\underline{U}^{d}(x) = \underline{U}^{d} \\
\frac{d}{dx} \underline{U}^{d}(x) = \underline{K}^{-1} \underline{T}^{d} \\
\phi^{d}(x) = \phi^{d} \\
^{T}(\underline{N}_{2}\underline{e}) \underline{G}^{-1}(\underline{N}_{1}\underline{U} + \frac{1}{2} \phi \underline{N}_{2}\underline{e}) + R_{M} \frac{d^{2}}{dx^{2}} \phi = Q_{3}^{d}
\end{cases}$$
(3.59)

Solution analytique

Nous pouvons analytiquement résoudre le problème du modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$ qui se présente sous forme d'un système d'équations différentielles d'ordre 2. Pour le faire, nous réalisons une décomposition LU de la matrice \underline{C} en intégrant 2 fois les deux dernières équations, la dépendance de $\phi(x)$ et $\underline{u}_0^n(x)$ sur les *n*-1 champs de déplacements membranaires sera déterminée. En les remplaçant dans leurs *n*-1 équations, nous obtiendrons un système équivalent qui est régulier. La solution générale est composée d'une solution homogène et une particulière. Les champs de solution sont composés d'un polynôme qui correspond à la solution du modèle de poutre Bernoulli, et d'une somme exponentielle des parties couplées engendrées par les effets de bords (y compris d'éventuelles fissures transverses, détaillé dans le chapitre suivant).

Les constantes d'intégration seront déterminées en ajoutant les conditions aux limites. Après avoir trouvé les champs de déplacements et de rotation, les champs des cisaillements d'interface sont alors déterminés par (3.48).

Conclusion

Nous avons trouvé la solution analytique d'une poutre multicouche fléchie avec le modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1P. Cette solution est simple et permet de simuler rapidement les structures multicouches en regardant les champs de cisaillement d'interface. Cependant, dans les structures sandwichs, notamment les structures bois- composites où les matériaux sont très souples et peu résistants dans la direction transversale des fibres, il faut sans doute mieux approcher les efforts d'arrachement, qui sont avec les cisaillements, responsables des ruptures mode I et mode mixte. Dans la suite, nous allons résoudre donc le même problème en utilisant le modèle $\mathcal{M}4$ -5n qui est beaucoup plus performant que son cousin $\mathcal{M}4$ -2n+1P.

3.2.3. Résolution analytique avec le modèle 5n bidimensionnel

Nous allons résoudre le problème général d'une poutre sandwich en utilisant le modèle M4-5n. Supposons les efforts appliqués sur les deux faces (voir Figure 3.5) :

$$\begin{cases} \tau^{0,1} = T^{-} \\ \tau^{n,n+1} = T^{+} \\ \nu^{0,1} = T_{3}^{-} \\ \nu^{n,n+1} = T_{3}^{+} \end{cases}$$
(3.60)



Figure 3.5. Notation de chargement d'un multicouche

Récapitulatif des équations principales bidimensionnelles

Équations de compatibilité :

Les efforts généralisés du modèle $\mathcal{M}4$ -5n sont associés respectivement aux déformations généralisées exprimées ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon^{i}(x) = \frac{d}{dx}u^{i}(x) \\ \chi^{i}(x) = \frac{d}{dx}\phi^{i}(x) \\ d_{\phi}^{j,j+1}(x) = \phi^{i}(x) + \frac{d}{dx}w^{i}(x) \\ D^{j,j+1}(x) = u^{j}(x) - u^{j}(x) - \frac{e^{j}}{2}\phi^{j}(x) - \frac{e^{j+1}}{2}\phi^{j+1}(x) \\ D_{\nu}^{j,j+1}(x) = w^{j+1}(x) - w^{j}(x) \end{cases}$$
(3.61)

Équations de comportement

En notant, en fonction des modules d'ingénieur, les expressions des composantes du tenseur des souplesses de chacune des couches :

$$\underline{\underline{S}}^{i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1}^{i}} & -\frac{\nu_{12}^{i}}{E_{1}^{i}} & -\frac{\nu_{13}^{i}}{E_{1}^{i}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^{i}}{E_{2}^{i}} & \frac{1}{E_{2}^{i}} & -\frac{\nu_{23}^{i}}{E_{2}^{i}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}^{i}}{E_{3}^{i}} & -\frac{\nu_{32}^{i}}{E_{3}^{i}} & \frac{1}{E_{3}^{i}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^{i}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^{i}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^{i}} \end{bmatrix}$$
(3.62)

Les équations (3.24), de comportement du modèle s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon^{i} = \frac{N^{i}}{e^{i}E_{11}^{i}} \\ \chi^{i} = 12 \frac{M^{i}}{(e^{i})^{3}E_{11}^{i}} \\ d^{i}_{\phi} = \frac{6}{5} \frac{Q^{i}}{G_{13}^{i}} - \frac{1}{10} \frac{(\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i})}{G_{13}^{i}} \\ D^{j,j+1} = -\frac{1}{10} \frac{Q^{j+1}}{G_{13}^{j+1}} - \frac{1}{10} \frac{Q^{j}}{G_{13}^{j}} - \frac{1}{6} \frac{e^{j}}{G^{j}} \tau^{i-1,i} \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{j}}{G^{j}} + \frac{e^{j+1}}{G^{j+1}} \right) \tau^{j,j+1} - \frac{1}{6} \frac{e^{j+1}}{G^{j+1}} \tau^{j+1,j+2} \\ D^{j,j+1}_{\nu} = \frac{9}{70} \frac{e^{j}}{E_{33}^{j}} \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^{j}}{E_{33}^{j}} + \frac{e^{j+1}}{E_{33}^{j+1}} \right) \nu^{j,j+1} \\ + \frac{9}{70} \frac{e^{j+1}}{E_{33}^{j+1}} \nu^{j+1,j+2} \end{cases}$$
(3.63)

Nous écrivons l'équation pour la couche 1 et l'interface 1,2 afin de mettre en conditions les forces réparties extérieures :

$$\begin{cases} d_{\phi}^{1} = \frac{6}{5} \frac{Q^{1}}{G_{13}^{1}} - \frac{1}{10} \frac{(\tau^{1,2} + T^{-})}{G_{13}^{1}} \\ D^{1,2} = -\frac{1}{10} \frac{Q^{2}}{G_{23}^{2}} - \frac{1}{10} \frac{Q^{1}}{G_{13}^{1}} - \frac{1}{6} \frac{e^{1}}{G^{1}} T^{-} \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{1}}{G^{1}} + \frac{e^{2}}{G^{2}} \right) \tau^{1,2} - \frac{1}{6} \frac{e^{2}}{G^{2}} \tau^{2,3} \\ D_{\nu}^{1,2} = \frac{9}{70} \frac{e^{1}}{E_{33}^{1}} T_{3}^{-} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^{1}}{E_{33}^{1}} + \frac{e^{2}}{E_{33}^{2}} \right) \nu^{1,2} + \frac{9}{70} \frac{e^{2}}{E_{33}^{2}} \nu^{2,3} \end{cases}$$
(3.64)

Similaire pour la couche n et l'interface n-1

$$\begin{cases} d_{\phi}^{n} = \frac{6}{5} \frac{Q^{n}}{G_{13}^{n}} - \frac{1}{10} \frac{(\tau^{n-1,n} + T^{+})}{G_{13}^{n}} \\ D^{n-1,n} = -\frac{1}{10} \frac{Q^{n}}{G_{13}^{n}} - \frac{1}{10} \frac{Q^{n-1}}{G_{13}^{n-1}} - \frac{1}{6} \frac{e^{n-1}}{G^{n-1}} \tau^{n-2,n-1} \\ + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{n-1}}{G_{13}^{n-1}} + \frac{e^{n}}{G_{13}^{n}} \right) \tau^{n-1,n} - \frac{1}{6} \frac{e^{n}}{G_{13}^{n}} T^{+} \\ D_{\nu}^{1,2} = \frac{9}{70} \frac{e^{n-1}}{E_{33}^{n-1}} \nu^{n-2,n-1} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^{n-1}}{E_{33}^{n-1}} + \frac{e^{n}}{E_{33}^{n}} \right) \nu^{n-1,n} + \frac{9}{70} \frac{e^{n}}{E_{33}^{n}} T_{3}^{+} \end{cases}$$
(3.65)

Équations d'équilibre (3.15) à (3.17) sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N^{i} + (\tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i}) = 0\\ \frac{d}{dx}M^{i} + \frac{e^{i}}{2}(\tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i}) - Q^{i} = 0\\ \frac{d}{dx}Q^{i} + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) = 0 \end{cases}$$
(3.66)

L'équilibre de la couche 1 et de la couche *n* sont alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N^{1} + (\tau^{1,2} - T^{-}) = 0\\ \frac{d}{dx}M^{1} + \frac{e^{1}}{2}(\tau^{1,2} + T^{-}) - Q^{1} = 0\\ \frac{d}{dx}Q^{1} + (\nu^{1,2} - T_{3}^{-}) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{d}{dx}N^{n} + (T^{+} - \tau^{n-1,n}) = 0\\ \frac{d}{dx}M^{n} + \frac{e^{n}}{2}(T^{+} + \tau^{n-1,n}) - Q^{n} = 0\\ \frac{d}{dx}Q^{n} + (T_{3}^{+} - \nu^{1,2}) = 0 \end{cases}$$
(3.67)

Rappelons que nous sommes en train de travailler sur l'hypothèse de contrainte plane. Dans le cas de déformation plane, les modules E_{11}^i doivent être remplacés par $E_{11(déf.plane)}^i = E_{11}^i \times (1 - v_{12}^i v_{21}^i)$

Établissement du système des équations

Nous définissons maintenant les vecteurs des champs de déplacements et des efforts généralisés qui sont de dimension n:

Champs de déplacement membranaires généralisés :

$$\widetilde{U} = \begin{bmatrix} u^{1}(x) \\ u^{2}(x) \\ \dots \\ u^{n}(x) \end{bmatrix}$$
(3.68)

Champs de déplacement vertical généralisés :

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} w^1(x) \\ w^2(x) \\ \dots \\ w^n(x) \end{bmatrix}$$
(3.69)

Champs de rotation généralisés :

$$\widetilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \vdots \\ \phi^n(x) \end{bmatrix}$$
(3.70)

Champs des efforts membranaires généralisés :

$$\widetilde{N} = \begin{bmatrix} N^{1}(x) \\ N^{2}(x) \\ \dots \\ N^{n}(x) \end{bmatrix}$$
(3.71)

Champs des efforts tranchants généralisés :

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q^1(x) \\ Q^2(x) \\ \dots \\ Q^n(x) \end{bmatrix}$$
(3.72)

Champs des moments de flexion généralisés :

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} M^{1}(x) \\ M^{2}(x) \\ \dots \\ M^{n}(x) \end{bmatrix}$$
(3.73)

Les vecteurs des champs des efforts d'interface de dimension n-1:

Champs des contraintes de cisaillement d'interface généralisés :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tau^{1}(x) \\ \tau^{2}(x) \\ \dots \\ \tau^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$
(3.74)

Champs des contraintes d'arrachement d'interface généralisés :

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} v^{1}(x) \\ v^{2}(x) \\ ... \\ v^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$
(3.75)

Les vecteurs supplémentaires des forces réparties sur les faces extérieures sont déduits des équations (3.63) à (3.67) :

Les vecteurs de dimension n :

$$\underline{F}_{1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \frac{T^{-}}{G^{1}} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{1}{10} \frac{T^{+}}{G^{n}} \end{bmatrix}; \underline{F}_{4} = \begin{bmatrix} -T^{-} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -T^{+} \end{bmatrix}; \underline{F}_{5} = \begin{bmatrix} \frac{e^{1}}{2} T^{-} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{e^{n}}{2} T^{+} \end{bmatrix}; \underline{F}_{6} = \begin{bmatrix} -T_{3}^{-} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ T_{3}^{+} \end{bmatrix};$$
(3.76)

Les vecteurs de dimension *n*-1 :

$$\underline{F}_{2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} \frac{e^{1}}{G^{1}} T^{-} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{1}{30} \frac{e^{1}}{G^{1}} T^{+} \end{bmatrix}; \qquad \underline{F}_{3} = \begin{bmatrix} \frac{9}{70} \frac{e^{1}}{G^{1}} T_{3}^{-} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{9}{70} \frac{e^{n}}{G^{n}} T_{3}^{+} \end{bmatrix}; \qquad (3.77)$$

Nous définissons ensuite les matrices des propriétés du problème. La matrice du module d'Young longitudinale et la matrice du module de cisaillement hors plan des couches sont :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11}^{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_{11}^{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{11}^{n} \end{bmatrix}; \\ \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_{13}^{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{13}^{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G_{13}^{n} \end{bmatrix};$$
(3.78)

La matrice de l'épaisseur des couches est :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^n \end{bmatrix}$$
(3.79)

Les matrices supplémentaires pour décrire le couplage entre des champs :

$$\underline{\underline{A}}_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}; \underline{\underline{A}}_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix};$$
(3.80)

La matrice carrée de dimension n-1 des souplesses du cisaillement :

La matrice carrée de dimension *n*-1 de la souplesse verticale :

$$\underline{\underline{K}}_{3} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{35} \left(\frac{e^{1}}{E_{33}^{1}} + \frac{e^{2}}{E_{33}^{2}} \right) & -\frac{9}{70} \frac{e^{1}}{E_{33}^{1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{9}{70} \frac{e^{1}}{E_{33}^{1}} & -\frac{13}{35} \left(\frac{e^{2}}{E_{33}^{2}} + \frac{e^{3}}{E_{33}^{3}} \right) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{9}{70} \frac{e^{2}}{E_{33}^{2}} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{13}{35} \left(\frac{e^{n-1}}{E_{33}^{n-1}} + \frac{e^{n}}{E_{33}^{n}} \right) \end{bmatrix}$$
(3.82)

Avant de résoudre analytiquement, nous écrivons les équations du problème sous forme matricielle. Le principe de la résolution est le même de celui qu'on a réalisé avec le modèle $\mathcal{M}4$ - 2n+1P. En total, nous avons 6 vecteurs d'inconnus des champs généralisés dans les couches (3 champs des déplacements et 3 champs des efforts généralisés) et 2 vecteurs d'inconnus des efforts d'interfaces (cisaillements et d'arrachements). En effet, nous pouvons faire disparaître les deux vecteurs des efforts d'interface grâce à leur relation algébrique avec les champs généralisés dans les couches. Ensuite nous allons établir un système d'équations différentielles de premier ordre. Une approximation sera présentée pour la détermination très rapide des valeurs de bords et/ou des valeurs dans les singularités structurales (fissures transverses).

En remplaçant les champs de déformations de (3.61) dans (3.63), nous obtiendrons 3 systèmes d'équations différentielles et 2 systèmes d'équations algébriques. Les équations de comportement dans les couches peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{P}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{-1} \underline{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \\ \frac{d}{dx} \underline{\Phi} - \mathbf{12} \underline{\mathbf{P}}^{-3} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^{-1} \underline{\mathbf{M}} = \mathbf{0} \\ \underline{\Phi} + \frac{d}{dx} \underline{\mathbf{W}} - \frac{6}{5} \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{-1} \underline{\mathbf{Q}} + \frac{1}{10} \mathbf{\mathbf{T}} (\underline{\underline{\mathbf{N}}}_2 \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{-1}) \underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{0} \end{cases}$$
(3.83)

Les équations de comportement d'interface sont :

$$\begin{cases} \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{P}}_{1} \underline{\Phi} = -\frac{1}{10} \underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{G}}_{2} \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{F}}_{2} = 0 \\ \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{W}} + \underline{\underline{K}}_{3} \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{F}}_{3} = 0 \end{cases}$$
(3.84)

Les équations d'équilibre (3.66) et (3.67) se réécrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\underline{\mathbf{N}} - {}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{1}\underline{\mathbf{T}} + \underline{\mathbf{F}}_{4} = \mathbf{0} \\ \frac{d}{dx}\underline{\mathbf{M}} + \frac{1}{10}{}^{\mathrm{T}}(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{2}\underline{\mathbf{P}})\underline{\mathbf{T}} - \underline{\mathbf{Q}} + \underline{\mathbf{F}}_{4} = \mathbf{0} \\ \frac{d}{dx}\underline{\mathbf{Q}} - {}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{1}\underline{\mathbf{V}} + \underline{\mathbf{F}}_{6} = \mathbf{0} \end{cases}$$
(3.85)

La définition de $\underline{\underline{G}}_2$ et $\underline{\underline{K}}_3$ montre que ces deux matrices sont inversibles. Nous pouvons donc déterminer la formule de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{V}}$ en fonction des champs généralisés des déplacements et des efforts dans les couches.

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{G}}_{2}^{-1} \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{1} \, \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{1} \, \underline{\Phi} + \frac{1}{10} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{2} \, \underline{\underline{\mathbf{G}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} - \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{2} \right) \\ \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{3}^{-1} \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{1} \, \underline{\underline{\mathbf{W}}} + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{3} \right) \end{cases}$$
(3.86)

En les remplaçant dans (3.83) et (3.85), nous faisons alors disparaître les champs des efforts généralisés d'interface :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \frac{U}{\Phi} \\ \frac{Q}{Q} \\ \frac{N}{M} \\ \frac{M}{W} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2_{14}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2_{25}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C}{2_{36}} \\ \frac{C}{2_{41}} & \frac{C}{2_{42}} & \frac{C}{2_{43}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C}{2_{51}} & \frac{C}{2_{52}} & \frac{C}{2_{53}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C}{2_{61}} & \frac{C}{2_{62}} & \frac{C}{2_{63}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{U}{\Phi} \\ \frac{Q}{Q} \\ \frac{N}{M} \\ \frac{M}{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_1}{F_2} \\ \frac{F_3}{F_4} \\ \frac{F_5}{F_6} \end{bmatrix}$$
ou encore
$$\frac{d}{dx} \underline{Y} + \underline{C}_0 \ \underline{Y} = \underline{F}^*$$
(3.88)

avec,

$$\begin{split} \left(\underline{\underline{C}}_{14} = -\left(\underline{\underline{P}} \underline{\underline{E}}\right)^{-1} \\ \underline{\underline{C}}_{25} = -12 \left(\underline{\underline{P}}^{3} \underline{\underline{E}}\right)^{-1} \\ \underline{\underline{C}}_{36} = {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{K}}_{3}^{-1} \underline{\underline{N}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{41} = -{}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{42} = \frac{1}{2} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{43} = -\frac{1}{10} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{43} = -\frac{1}{10} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{N}}_{1} \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{51} = \frac{1}{2} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{P}}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{52} = -\frac{1}{4} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{P}}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{53} = \frac{1}{20} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{P}}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{61} = \frac{1}{10} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{G}}^{-1}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{62} = \underline{\underline{I}} - \frac{1}{20} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{G}}^{-1}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{63} = -\frac{6}{5} \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{C}}^{-1} + \frac{1}{100} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{G}}^{-1}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{61} = -\frac{1}{20} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{C}}_{61} \\ \underline{\underline{C}}_{63} = -\frac{6}{5} \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{C}}_{1} + \frac{1}{100} {}^{\mathrm{T}} \left(\underline{\underline{N}}_{2} \underline{\underline{G}}^{-1}\right) \underline{\underline{G}}_{2}^{-1} \underline{\underline{N}}_{2} \\ \underline{\underline{C}}_{61} = -\frac{1}{20} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{C}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{62} = -\frac{1}{2} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{C}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{63} = -\frac{6}{5} \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{C}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{61} = \frac{1}{20} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{C}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{61} = -\frac{1}{20} {}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{C}}_{1} \\ \underline{\underline{C}}_{61} \\ \underline$$

et,

$$\begin{cases}
\underbrace{\underline{F}_{1}^{*} = 0} \\
\underline{\underline{F}_{2}^{*} = 0} \\
\underline{\underline{F}_{3}^{*} = -^{T}\underline{\underline{N}}_{1} \ \underline{\underline{K}}_{3}^{-1}\underline{\underline{F}}_{3} - \underline{\underline{F}}_{6} \\
\underline{\underline{F}}_{4}^{*} = -^{T}\underline{\underline{N}}_{1} \ \underline{\underline{G}}_{2}^{-1}\underline{\underline{F}}_{2} - \underline{\underline{F}}_{4} \\
\underline{\underline{F}}_{5}^{*} = \frac{1}{2} \ \overset{T}{(\underline{\underline{N}}_{2} \ \underline{\underline{P}})} \underline{\underline{G}}_{2}^{-1}\underline{\underline{F}}_{2} - \underline{\underline{F}}_{5} \\
\underline{\underline{F}}_{6}^{*} = \frac{1}{10} \ \overset{T}{(\underline{\underline{N}}_{2} \ \underline{\underline{G}}^{-1})} \underline{\underline{G}}_{2}^{-1}\underline{\underline{F}}_{2} - \underline{\underline{F}}_{1}
\end{cases}$$
(3.90)

Afin d'écrire le système adimensionnel, posons :

$$\underline{\underline{L}}_{0} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{I}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{P}} & \underline{\underline{E}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{P}} & \underline{\underline{E}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{P}}^{2} & \underline{\underline{E}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{P}}^{2} & \underline{\underline{E}} & 0 \\ \end{bmatrix}; \text{ et } \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{L}}_{0} \underline{\underline{X}}$$
(3.91)

Le système (3.88) devient :

$$\frac{d}{dx}\underline{X} + \underline{\underline{C}}\,\underline{X} = \underline{\underline{F}}_0 \tag{3.92}$$

avec,

En résumé, nous avons établi le système d'équations différentielles de premier ordre du modèle $\mathcal{M}4$ -5n bidimensionnel. Ce système classique peut se résoudre avec plusieurs méthodes.

Conditions aux limites

Par rapport au modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1, le modèle $\mathcal{M}4$ -5n présente plus de degrés de liberté. Les conditions aux limites dans le modèle $\mathcal{M}4$ -5n sont alors plus nombreuses. Mathématiquement, nous avons besoin, pour le modèle $\mathcal{M}4$ -5n bidimensionnel, de 6 conditions à imposer sur chaque couche, en total représente alors 6*n* conditions, tandis que le nombre conditions du problème $\mathcal{M}4$ -2n+1 (bidimensionnel) est 2(n+1).

La résolution du système (3.92) est mathématiquement réalisable avec la connaissance de 6n conditions aux bords. Ces conditions sont, soit en effort, soit en déplacement. Autrement dit, à l'extrémité de la couche *i*, nous devrons imposer 3 conditions qui sont :

$$\begin{cases} \text{la connaissance, soit de } N^i (x = x_d) = N^i_d, & \text{soit de } U^i (x = x_d) = U^i_d, \\ \text{la connaissance, soit de } M^i (x = x_d) = M^i_d, & \text{soit de } \phi^i (x = x_d) = \phi^i_d \\ \text{la connaissance, soit de } Q^i (x = x_d) = Q^i_d, & \text{soit de } W^i (x = x_d) = W^i_d \end{cases}$$
(3.94)

Résolution analytique

Généralité

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre le problème classique (3.92) : approximation par étapes simples [Euler, Runge Kutta], multi étapes [Adams Bashforth], différences finies [Diaz Diaz, 2001], éléments finis [Nguyen 2004]. Nous allons utiliser une méthode d'approximation de Runge Kutta 4 qui est simple mais donne une précision considérable.

En général, le multicouche [0, L] est divisée en N éléments dans lesquels les champs sont définis grâce à une fonction de forme connue (constants, linéaires, quadratiques...). Ces éléments sont reliés par des nœuds x_p (p=1..N+1). En ajoutant les conditions aux limites, ce système différentiel devient linéaire et la résolution est beaucoup moins couteuse.

Une méthode semi-analytique pour le cas sans effort surfacique.

Nous supposons maintenant qu'il n'y a pas de forces surfaciques sur les deux faces du multicouche. Le système (3.92) devient :

$$\frac{d}{dx}\underline{X} + \underline{\underline{C}}\,\underline{X} = 0 \tag{3.95}$$

Un des avantages principaux des modèles $\mathcal{M}4$ est de donner des valeurs quantitatives aux bords. Nous nous intéressons alors à une méthode simple permettant de déterminer directement ces valeurs, ou éventuellement, à de positions données (la valeur au milieu de la structure par exemple). La méthode est comme suit :

Soit l'intervalle [a,b] où tous les champs de <u>X</u> sont continus et dérivables. Nous discrétisons cette intervalle par *N* segments qui sont alors distingués par *N*-1 nœuds. Les champs de <u>X</u> dans le segment $[x_{p-1}; x_p]$ sont approchés avec une fonction linéaire. La dérivée $\frac{d}{dx} \underline{X}$ au point milieu $\frac{x_p+x_{p-1}}{2}$ est approchée par :

$$\frac{d}{dx}\underline{X}\left(\frac{x_p + x_{p-1}}{2}\right) = \underline{\underline{A}}_p \underline{X}(x_p) + \underline{\underline{B}}_p \underline{X}(x_{p-1})$$
(3.96)

où $\underline{\underline{A}}_p$ et $\underline{\underline{B}}_p$ sont des matrices constantes dépendant du choix de l'approximation. Par exemple, avec la méthode d'approximation d'Euler :

$$\underline{\underline{A}}_{p} = -\underline{\underline{\underline{B}}}_{p} = \frac{1}{\delta_{p}} \underline{\underline{\underline{I}}} \ \forall p \tag{3.97}$$

où,

$$\delta_p = x_p - x_{p-1} \tag{3.98}$$

La méthode d'Euler est la plus simple mais donne une moindre précision par rapport aux autres méthodes, avec une erreur cumulée de l'ordre de δ_p^2 . Nous utilisons l'approximation de Runge Kutta 4 ayant une précision plus élevée, et une erreur cumulée de l'ordre de δ_p^5 . Par cette méthode, on a :

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}_{p} = \underline{\underline{I}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} = c^{\text{te}} \\ \underline{\underline{B}}_{p} = -\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_{p}}{6} (\underline{\underline{R}}_{1} + 2\underline{\underline{R}}_{2} + 2\underline{\underline{R}}_{3} + \underline{\underline{R}}_{4}) - \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} \end{cases}$$
(3.99)

où:

$$\begin{cases} \underline{\underline{R}}_{1} = \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{R}}_{2} = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_{p}}{2} \underline{\underline{R}}_{1} \right) \\ \underline{\underline{R}}_{3} = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_{p}}{2} \underline{\underline{R}}_{2} \right) \\ \underline{\underline{R}}_{4} = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{I}} + \delta_{p} \underline{\underline{R}}_{3} \right) \end{cases}$$
(3.100)

à $x = x_p$, l'équation (3.95) donne:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}_{p} + \underline{\underline{B}}_{p} \underline{\underline{X}}_{p-1} + \underline{\underline{C}} \left(\frac{\underline{\underline{X}}_{p} + \underline{\underline{X}}_{p-1}}{2} \right) = 0$$
(3.101)

Alors,

$$\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{p}} = \left(-\underline{\mathbf{I}} + \frac{\delta_{p}}{6} \left(\underline{\mathbf{R}}_{1} + 2\underline{\mathbf{R}}_{2} + 2\underline{\mathbf{R}}_{3} + \underline{\mathbf{R}}_{4}\right)\right) \underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{p}-1}$$
(3.102)

Ou encore :

$$\underline{\mathbf{X}}_{p} = \underline{\mathbf{M}}_{p} \, \underline{\mathbf{X}}_{p-1} \tag{3.103}$$

Donc, implicitement, (3.102) s'écrit :

$$\underline{\mathbf{X}}_{N+1} = \prod_{\mathbf{p}=N}^{1} \underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{p}} \ \underline{\mathbf{X}}_{1}$$
(3.104)

Avec la connaissance des 6*n* conditions aux limites dont 3*n* dans \underline{X}_1 et 3*n* d'autres dans \underline{X}_{N+1} , il est facile à résoudre le système d'équations (3.104).

Soit le cas avec une discrétisation homogène où :

$$\delta_p = x_p - x_{p-1} = C^{te} \tag{3.105}$$

qui donne $\underline{\underline{M}}_{p} = C^{te}$, Alors $\prod_{p=N}^{1} \underline{\underline{M}}_{p} = \left(\underline{\underline{M}}_{p}\right)^{N}$. Le système (3.104) devient :

$$\underline{\mathbf{X}}_{N+1} = \left(\underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{p}}\right)^{N} \underline{\mathbf{X}}_{1} \tag{3.106}$$

L'intérêt de la discrétisation homogène est de la réduction du coût de calcul. Un exemple : avec 2^n éléments, il faut réaliser 2^n calculs de produit matriciel pour avoir le résultat numérique de $\prod_{p=2^n}^{1} (\underline{M}_p)$, tandis que $(\underline{M}_p)^{2^n}$ demande au maximum de 2n-1 calculs. Avec cette méthode analytique, nous ne travaillons que sur les matrices de dimension fixée à $6n \times 6n$, on économise alors énormément de mémoire d'ordinateur.

Récapitulatif des étapes de la résolution

Les étapes de la résolution peuvent être résumées comme suit :

Préparer les données des matériaux et de la géométrie (de (3.78) à (3.81)) et établir la *matrice caractéristique* \underline{C}_0 du modèle $\mathcal{M}4$ -5n par (3.87)

Choisir *N* pour déterminer $\underline{\underline{M}}_p$ par (3.99) et calculer $\left(\underline{\underline{M}}_p\right)^N$

Ajouter les 6n conditions aux limites (en déplacements et/ou en contrainte) dans le système linéaire (3.106), la résolution de ce système donnera tous les valeurs des efforts et des déplacements généralisés aux bords.

Utiliser la formule (3.86) pour obtenir les valeurs des efforts d'interface.

Conclusion

Nous avons établi une formule analytique pour résoudre le problème de multicouche bidimensionnel utilisant le modèle $\mathcal{M}4$ -5*n*. Étant donné les propriétés et géométrie du multicouche, dans le cas sans effort surfacique, la construction de la matrice \underline{M}_p permet de calculer rapidement les valeurs aux points singuliers, y compris les bords libres. La formule établie permet également de simuler les fissures transverses et le délaminage dans un multicouche, ce qui fait l'objet d'une étude dans le prochain chapitre.

3.3. Validation par un calcul éléments finis M4

Nous allons dans cette partie comparer les résultats obtenus par un essai de traction d'un 3 couches de composite / bois avec un code d'éléments finis basé sur le modèle $\mathcal{M}4$ -5n, (à l'aide du logiciel MPFEAP (Nguyen T. 2005).

La longueur, la largeur de l'éprouvette sont respectivement 600*mm* et 35*mm*. La force statique **F** appliquée est de 29400*N*. Le schéma simplifié de chargement est décrit dans la Figure 3.6.



Figure 3.6. Schéma de calcul de l'essai en traction directe d'un assemblage 3 couches

Couche	Epaisseur (mm)	Module d'Young E ₁₁ (GPa)	Module d'Young $E_{33}(GPa)$	Module de cisaillement G ₁₃ (GPa)	Coefficient de Poisson v
Bois	28	12,3	0,5	0,5	0,35
Carbone	0,5	100	5	5	0,3

Les épaisseurs et les modules des couches sont donnés dans le Tableau 2.8

Tableau 2.8.Propriétés des matériaux

Nous présentons en comparant ci-dessous nos résultats obtenus. En effet, l'assemblage cidessus est étudié pour 2 configurations de maillages différents :





Grâce à la symétrie géométrique et de chargement, nous ne présentons ci-dessous les résultats de calcul d'efforts généralisés que dans les couches 1 et 2



Figure 3.8. Effort membranaire généralisé N11i dans les couches 1 et 2



Cisaillement d'interface

Figure 3.9. Contrainte de cisaillement de l'interface 1,2

Dans le calcul éléments finis, les efforts sont déterminés aux points de Gauss. Pour déterminer les valeurs aux bords précisément, nous pourrions réaliser un calcul d'interpolation.

Schéma 2 : Les couches « peaux » sont modélisées chacune par une couche modèle. La couche « âme » en bois est modélisé en 4 couches modèles, reliées par des interfaces fictives

Cette configuration est liée à la suite de l'étude où l'on verra qu'il est important pour prédire la rupture de cisaillement de définir un volume élémentaire représentatif qui est conservé lors de l'étude de plusieurs géométries d'éprouvette (plusieurs épaisseurs de bois et de composite)





Grâce à la sysmétrie géométrique et de chargement, nous ne présentons ci-dessous les résultats de calcul d'efforts généralisés que dans les couches 1, 2 et 3.





Figure 3.11. Effort membranaire généralisé N11i dans les couches i, i={1, 2 et 3}



Figure 3.12. Contrainte de cisaillement τ_{xz} de l'interface 1,2 et 2,3

Nous constatons la cohérence entre deux outils de calcul, celui proposé ici et MPFEAP.

En confrontant la Figure 3.9 et la Figure 3.12, on observe que la valeur de la contrainte de cisaillement $\tau_{13}(x)$ d'interface 1,2 change (de 18*MPa* à 27*MPa*). On note aussi qu'en créant une interface fictive, on y a naturellement généré une contrainte d'interface. On reviendra sur ces aspects très importants dans la suite. On ne reviendra ici que la validation d'une solution analytique par un modèle numérique validé par ailleurs (Carreira, 2002)

3.4. Conclusion

Dans le but de réaliser des poutres multi renforcées, nous avons souhaité, et afin d'éviter de trop lourdes campagnes d'essais échelle 1, modéliser le multicouche ainsi réalisée, en flexion. Après une bibliographie détaillant les modèles de multicouche existants, nous avons arrêté notre choix sur des modèles *layer-wise* disponibles et permettant le calcul des efforts d'interface.

Nous avons donc établi et validé les résolutions analytiques du problème de multicouche en flexion et /ou en traction en utilisant deux modèles existants, $\mathcal{M}4 - 2n+1P$ et $\mathcal{M}4-5n$. La solution analytique exacte du problème $\mathcal{M}4 - 2n+1P$ a été déterminée. Nous avons également présenté une méthode pour la résolution mathématique d'un système singulier non homogène d'équations différentielles d'ordre 2. Une solution particulière a été trouvée.

Quant au modèle $\mathcal{M}4$ -5n, une méthode d'approximation utilisant la discrétisation homogène a été présentée, qui permet de déterminer immédiatement les valeurs aux bords sans avoir besoin de calculer les champs dans le multicouche. Avec cette méthode, une matrice s'appelant *matrice caractéristique du multicouche* du problème uni axial a été proposée, ce qui décrit la loi d'écoulement et de couplage des champs de contrainte et de déplacement dans le multicouche, suivant les hypothèses du modèle $\mathcal{M}4$ -5n. Cette matrice permet donc de déterminer la relation entre les champs généralisés (des efforts et des déplacements) en $x=x_1$ et $x=x_2$ quelconques. Le problème des bords libres, ainsi que le problème de multi fissuration sont alors résolus de manière rapide, aisée et peu coûteuse, qui est bien adopté pour un calcul de bureaux d'étude.

La résolution présentée est simple à réaliser permettant de calculer un multicouche sous différents types de chargements. Elle permet également de simuler le problème de multi fissuration avec la solution exacte.

La résolution a été validée à l'aide d'une comparaison d'un 3 couches avec le calcul éléments finis utilisant le même modèle (M4 -5n).

On a mis en évidence la dépendance des valeurs des cisaillements aux bords avec le degré de discrétisation dans l'épaisseur. On verra dans le prochain chapitre que cette dépendance permet de prendre en compte l'effet d'échelle sur la rupture.