

# Modélisation d'une ligne de métro automatique

*« La vie, c'est comme le métro,  
lorsqu'une porte s'ouvre il faut  
foncer. »*

---

Fabrice Bensoussan

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1.1	Enjeux - objectifs . . . . .	17
2.1.2	Terminologie . . . . .	17
2.1.3	Spécificités de l'étude . . . . .	17
<b>2.2</b>	<b>Présentation du réseau de traction . . . . .</b>	<b>19</b>
2.2.1	Sous-station d'alimentation . . . . .	20
2.2.1.1	Caractéristiques des sous-stations d'alimentation . .	20
2.2.1.2	Problématique d'implantation . . . . .	20
2.2.2	Feeders . . . . .	20
2.2.3	Rails d'alimentation et système de guidage . . . . .	21
2.2.4	Coffrets de Surveillance du Potentiel Négatif . . . . .	22
<b>2.3</b>	<b>Présentation du matériel roulant . . . . .</b>	<b>23</b>
2.3.1	Alimentation électrique du matériel roulant . . . . .	23
2.3.2	Description de la chaîne de traction . . . . .	24
2.3.3	Principe de fonctionnement du système de traction d'une voi- ture . . . . .	24
2.3.4	Conditions d'utilisation du système de freinage . . . . .	25
2.3.5	Plage d'application du freinage conjugué . . . . .	25
2.3.5.1	Cas particulier du système Néoval . . . . .	26
2.3.6	Equipements auxiliaires . . . . .	27
<b>2.4</b>	<b>Modélisation énergétique du matériel roulant . . . . .</b>	<b>27</b>
2.4.1	Modélisation du déplacement des trains . . . . .	28
2.4.1.1	Approche épisodique . . . . .	28
2.4.1.2	Approche temporelle . . . . .	28
2.4.2	Modélisation mécanique du matériel roulant . . . . .	28

2.4.3	Modélisation électrique du matériel roulant . . . . .	31
2.4.3.1	Conventions de modélisation . . . . .	33
2.4.3.2	Modélisation du rhéostat de freinage . . . . .	33
<b>2.5</b>	<b>Modélisation d'une ligne de métro . . . . .</b>	<b>34</b>
2.5.1	Modélisation du système d'électrification ferrovaire . . . . .	34
2.5.2	Présentation des hypothèses de modélisation . . . . .	34
2.5.3	Application à un exemple simplifié . . . . .	35
2.5.4	Analyse nodale modifiée . . . . .	35
<b>2.6</b>	<b>Résolution d'un problème de répartition des charges . . . . .</b>	<b>37</b>
2.6.1	Analogie avec une résolution load flow . . . . .	37
2.6.2	Historique de la résolution de problème de load flow . . . . .	38
2.6.3	Méthode de Newton-Raphson . . . . .	38
2.6.3.1	Présentation générale . . . . .	38
2.6.3.2	Formulation mathématique du problème . . . . .	40
2.6.3.3	Algorithme de résolution . . . . .	40
2.6.4	Méthode de Broyden . . . . .	41
2.6.4.1	Mise à jour de Broyden . . . . .	41
2.6.4.2	Mise à jour de Sherman-Morrison . . . . .	41
2.6.4.3	Remarques générales sur la méthode . . . . .	42
2.6.5	Résolution par heuristique itérative . . . . .	42
2.6.6	Résultats et performances de la résolution . . . . .	43
<b>2.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>45</b>

---

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Enjeux - objectifs

L'optimisation énergétique d'une ligne de métro automatique, nécessite d'abord de comprendre comment les rames de métro sont alimentées en énergie et comment les échanges de puissances s'effectuent entre les trains et les sous-stations d'alimentation. L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle électrique d'une ligne de métro pour nous permettre d'estimer la consommation instantanée des véhicules en circulation, ainsi que les échanges d'énergie qui se produisent entre véhicules lors des phases d'arrivée en station. Ce modèle devra en outre être assez simpliste pour permettre une mise en œuvre en temps-réel.

Dans ce chapitre, les principaux éléments qui constituent une ligne de métro automatique sont passés en revue : le matériel roulant, les barres de guidage qui permettent d'alimenter les rames en énergie et les sous-stations d'alimentation.

Puis, un modèle cinétique et électrique du matériel roulant est présenté afin d'établir le lien entre le déplacement des véhicules et les flux de puissance électrique que cela engendre. Le fonctionnement du freinage électrique est également caractérisé, pour permettre de comprendre les conditions de transformation de l'énergie cinétique du véhicule en énergie électrique.

Ensuite, une modélisation des sous-stations d'alimentation et des barres de guidage servant au transport de l'énergie sur la ligne est menée, afin d'obtenir un modèle suffisamment précis pour envisager de déterminer les flux de puissance qui s'opèrent au sein du réseau lors de l'exploitation de la ligne de métro.

Enfin, des méthodes de résolution sont mises en œuvre pour déterminer, à chaque pas de temps de simulation, les caractéristiques électriques de chacun des éléments constituant la ligne et d'en déduire les échanges d'énergie qui s'opèrent au sein du réseau électrique.

### 2.1.2 Terminologie

Avant de débiter la description des sous-systèmes qui composent une ligne de métro automatique, il convient de définir la terminologie propre au matériel roulant.

- Une voiture consiste en une caisse supportant des équipements et reposant sur deux bogies.
- Un doublet est constitué de deux voitures reliées par une barre semi-permanente.
- Un triplet est constitué de trois voitures reliées par une barre semi-permanente.
- Un véhicule est la plus petite unité utilisable en exploitation ; il peut s'agir d'un doublet ou d'un triplet.
- Un train peut être constitué d'un ou de deux doublets.

La figure 2.1 présente le schéma d'une voiture de type NEOVAL ainsi que ses principales dimensions.

### 2.1.3 Spécificités de l'étude

Dans cette étude, les systèmes de métro automatique développés par l'entreprise Siemens (anciennement MATRA), à savoir les systèmes VAL et Néoval sont particulièrement étudiés.

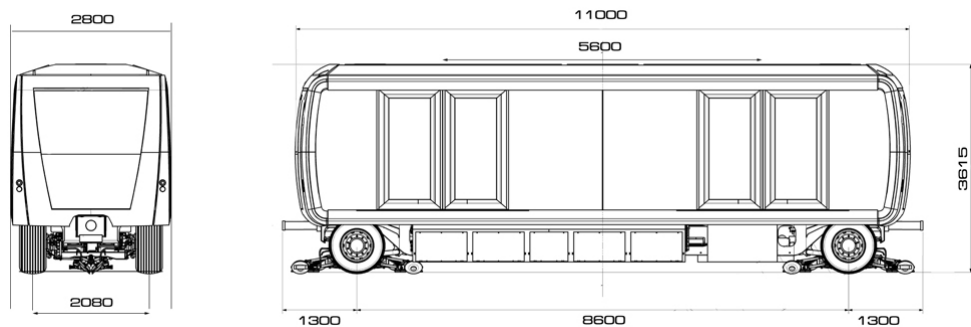


FIGURE 2.1 – Schéma d'une voiture de type NEOVAL.

Le VAL, acronyme pour Villeneuve d'Ascq-Lille, puis par la suite Véhicule Automatique Léger, a été mis en service pour la première fois en 1983 pour relier les villes de Lille et Villeneuve d'Ascq, sur ce qui constituait la première ligne de métro entièrement automatisée au monde. Le concept du VAL avait initialement trois grands objectifs :

- Offrir une haute qualité de service, avec une vitesse commerciale et une fréquence d'exploitation élevées.
- Pouvoir s'insérer dans un contexte urbain qui impose notamment des contraintes sur la déclivité et la courbure des voies.
- Permettre une conduite automatisée pour réduire les coûts d'exploitation.

En 1968, le cahier des charges du VAL imposait ainsi de pouvoir transporter 6000 passagers par heure et par direction en heure creuse.

Actuellement, douze lignes de VAL sont en service à travers le monde.

En 2006, Siemens et Lohr Industrie s'associent pour créer le Néoval. Ce dernier a pour but de compléter l'offre VAL, en proposant des véhicules plus larges (2,65m à 2,80m), une modularité plus complète (1 à 6 voitures), une capacité de transport accrue jusqu'à 30000 passagers par heure et par direction, la prise en compte des normes internationales et une plus grande compétitivité économique pour l'exploitant. En outre, certaines versions de Néoval auront également la capacité de pouvoir fonctionner sans alimentation extérieure sur des portions de ligne grâce à l'ajout de systèmes de stockage d'énergie embarqués.

Le Néoval intègre également un système de communication CBTC. Le CBTC (*Communication Based Train Control*) est une norme IEEE<sup>1</sup> qui s'applique à l'automatisation du contrôle-commande de la marche des trains et spécifie les exigences fonctionnelles, les exigences de performance, les critères d'intervalle (la fréquence de passage), les critères de sécurité système et les critères de disponibilité système.

Un système CBTC est un ATC (*Automatic Train Controller*) qui permet de gérer le fonctionnement de la ligne en localisant avec une forte résolution les trains de façon indépendante des circuits de voie. Ce système se caractérise également par l'utilisation d'une transmission de données, entre le sol et les trains, continue, bi-directionnelle et à haut débit et l'installation d'ordinateurs à bord des trains et au sol qui effectuent des traitements de sécurité.

1. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*

## 2.2 Présentation du réseau de traction

Dans cette section, les différents éléments qui composent le réseau de traction d'une ligne de métro sont détaillés. Seuls les équipements utiles à la modélisation et à la compréhension du système sont explicités.

La figure 2.2 présente le schéma d'alimentation électrique d'une ligne de métro, ainsi que les niveaux de tension vus par les différents équipements. Les Postes de Livraisons (PLv) distribuent l'énergie électrique aux Postes de Redressement (PR) qui alimentent la ligne de métro et aux Postes Eclairage et Force (PEF) qui alimentent les stations.

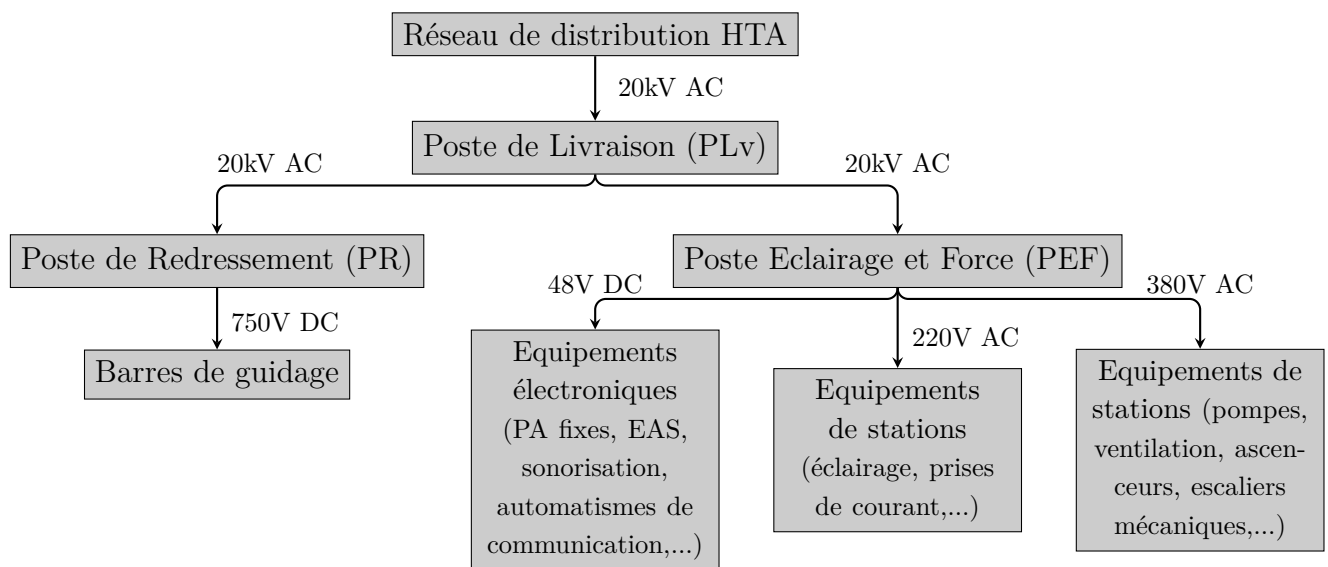


FIGURE 2.2 – Schéma de l'alimentation générale d'une ligne de métro.

Les termes *sous-station*, *sous-station d'alimentation*, *sous-station de traction* et *poste de redressement* font référence au même équipement.

Les trois premiers termes sont les dénominations classiquement utilisées dans la littérature ferroviaire et s'appliquent aussi bien à des réseaux à courants alternatifs que des réseaux à courants continus, tandis que le dernier est un terme spécifique aux réseaux électriques ferroviaires de type continu et est communément utilisé au sein de Siemens.

Pour plus de clarté, les termes *sous-station d'alimentation*, ou *sous-station* sont employés dans la suite du développement.

De plus, l'emploi du terme *rail d'alimentation* sera privilégié au détriment de celui de *barre de guidage*, afin de ne pas entraîner de confusion avec le rail de guidage présent sur les systèmes Néoval.

## 2.2.1 Sous-station d'alimentation

### 2.2.1.1 Caractéristiques des sous-stations d'alimentation

Les sous-stations d'alimentation ont deux fonctions principales : l'alimentation des circuits de chauffage de voie<sup>2</sup> et la distribution d'énergie aux sections de ligne auxquelles elles sont connectées.

Dans chaque sous-station la tension issue du réseau HTA (généralement, de l'ordre de 20 kV à 50Hz) est transformée puis redressée en 750 V continu, pour ensuite être transmise aux rails d'alimentation qui vont électrifier l'ensemble de la ligne.

En fonctionnement nominal, une sous-station peut délivrer un courant de 2400A sous 750V, tandis que sa tension à vide avoisine les 825V.

Les sous-stations alimentées en triphasé, sont essentiellement constituées d'un transformateur triphasé 20 kV / 750 V d'une puissance nominale secondaire de 2000kVA, d'un redresseur dodécaphasé d'une puissance nominale de 1800kW, de disjoncteurs et de sectionneurs à courant continu.

L'intérêt majeur d'un redresseur dodécaphasé est d'atténuer les harmoniques de rang peu élevé mais d'amplitudes importantes pour améliorer la qualité du signal électrique fourni.

### 2.2.1.2 Problématique d'implantation

La répartition des sous-stations d'alimentation le long de la ligne est définie en fonction des exigences de l'exploitant, de manière à garantir un certain taux de service en mode dégradé, c'est à dire, lors de la perte d'une sous-station.

En mode dégradé, l'implantation des sous-stations doit permettre la circulation d'un nombre assez important de rames à un intervalle donné, tout en n'excédant pas les limites de puissances délivrées par les sous-stations.

Cependant, dans un contexte urbain, les choix d'implantations des sous-stations sont largement dictés par la localisation des stations.

De ce fait, les distances entre les sous-stations peuvent être assez élevées, ce qui a pour effet de provoquer d'importantes chutes de tension. Pour cette raison, des feeders<sup>3</sup> sont installés en parallèle des voies pour limiter ces chutes de tension.

Sur le plan de la ligne de Turin (figure 2.3), les stations comportant des sous-stations sont encadrés.

## 2.2.2 Feeders

Les feeders sont des conducteurs placés le long des rails d'alimentation pour limiter les chutes de tension dans ces derniers. L'ajout de feeders permet de réduire la résistivité des rails.

Dans l'équation (2.1), la chute de tension  $\Delta U_{AB}$  entre les points A et B est proportionnelle à la résistivité  $\rho$ , à la longueur  $d_{AB}$  et à la section  $S$  du câble d'alimentation

2. Dans ce manuscrit, le système de chauffage de voie n'est pas développé car il ne présente pas un intérêt majeur pour le fonctionnement de la ligne de métro dans des conditions normales d'exploitations. Leur principale fonction étant d'assister au dégivrage des voies aériennes.

3. voir section 2.2.2

ainsi que du courant  $I_{AB}$  circulant entre A et B.

$$\Delta U_{AB} = \rho \cdot \frac{d_{AB}}{S} \cdot I_{AB} \quad (2.1)$$

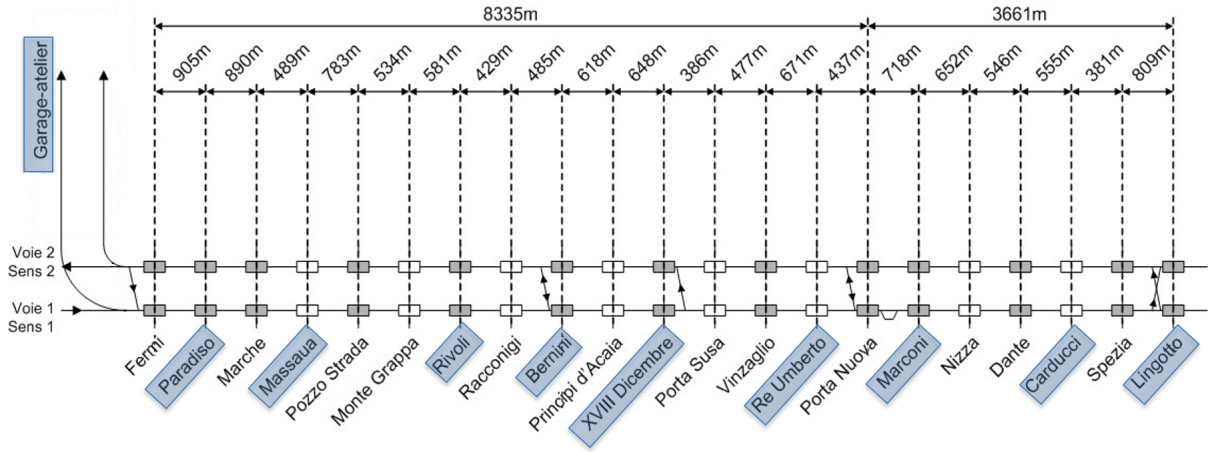


FIGURE 2.3 – Plan des stations et sous-stations d'alimentation de la ligne de métro de Turin.

### 2.2.3 Rails d'alimentation et système de guidage

Contrairement à certaines lignes ferroviaires où la captation du courant se fait par contact avec une ligne aérienne, les métros de type VAL et Néoval sont électrifiés par l'installation de conducteurs placés parallèlement à la piste de roulement.

La captation du courant se fait donc via deux rails d'alimentation positif et négatif. Le rail positif est alimenté en 750V, tandis que le rail négatif assure le retour du courant.

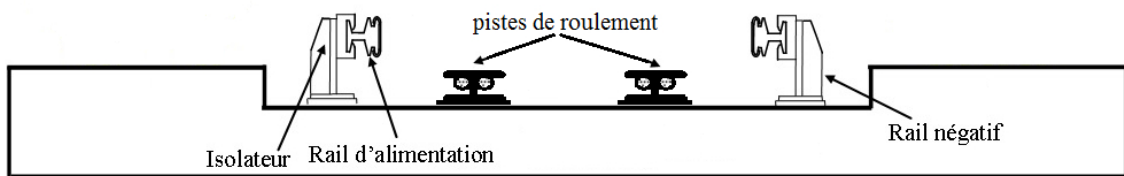


FIGURE 2.4 – Vue en coupe de la voie d'une ligne VAL.

Dans un système VAL (figure 2.4), chaque voiture est constituée d'une caisse reposant par l'intermédiaire d'une suspension sur deux essieux équipés de pneumatiques guidés par quatre roues de guidage.

Les roues de guidage placées aux quatre coins de l'essieu permettent d'orienter la rame dans les courbes et de la maintenir dans l'axe de la voie (figure 2.4).

Dans le système Néoval (figure 2.5), un rail de guidage central est installé pour guider les trains et servir de masse du réseau électrique.

La combinaison du guidage par rail central et de l'utilisation d'essieux orientables permet de réduire les efforts sur le système de guidage en redirigeant les efforts latéraux et verticaux sur les pneumatiques.

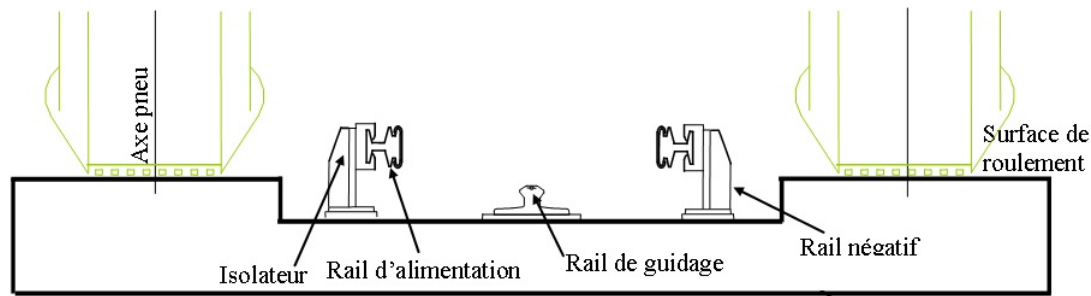


FIGURE 2.5 – Vue en coupe de la voie d'une ligne Néoval.

Ainsi, le rail de guidage est peu sollicité, puisque la quasi intégralité du poids des véhicules est assumé par les pneus.

Enfin, il est à noter que la mise à la terre de l'ensemble du réseau de traction est réalisée en un seul point, appelé puits de terre et que toutes les liaisons de terre sont interconnectées afin d'assurer l'équipotentialité du réseau électrique.

### 2.2.4 Coffrets de Surveillance du Potentiel Négatif

Dans un système VAL, la masse des trains est reliée au rail négatif. Le réseau de traction est donc dimensionné de manière à ce que le potentiel du rail négatif soit le plus souvent compris entre les valeurs de  $+ 60V$  et  $- 60V$ .

Cependant, dans certains modes de fonctionnement, il peut arriver que le potentiel de ce rail excède cette limite.

C'est pourquoi, afin d'assurer la sécurité des voyageurs montant ou descendant des trains, des Coffrets de Surveillance du Potentiel Négatif (CSPN) sont installés dans chaque station.

Ces dispositifs assurent un contrôle permanent de la valeur du potentiel du rail négatif et procèdent à la mise à la terre automatique du rail négatif lorsque sa tension excède une valeur limite :  $\pm 60V$  (dans le cas où une rame est en station) ou  $\pm 200V$  (dans le cas où aucune rame n'est en station).



## 2.3 Présentation du matériel roulant

### 2.3.1 Alimentation électrique du matériel roulant

La figure 2.6 représente le schéma électrique simplifié du système de propulsion et freinage d'un véhicule (PBS pour *Propulsion and Braking System*), sur lequel sont indiqués les principaux éléments permettant l'alimentation en courant des moteurs synchrones.

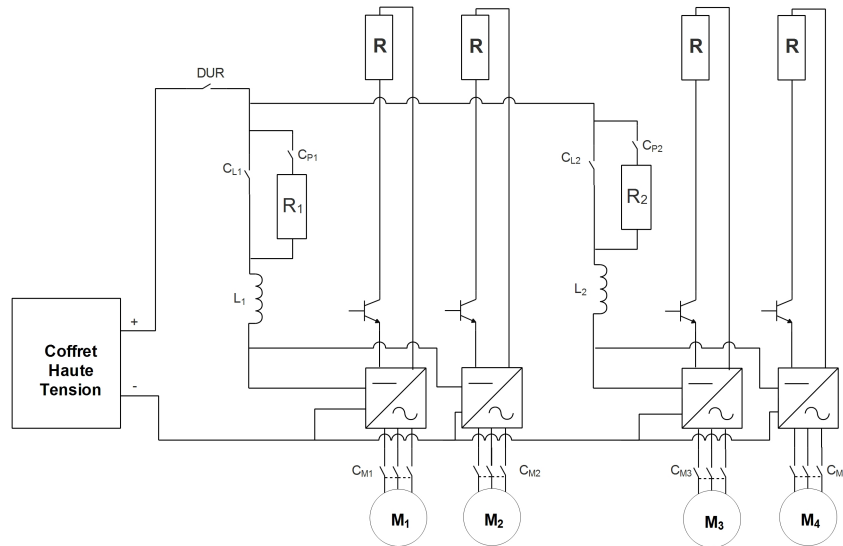


FIGURE 2.6 – Schéma d'alimentation des moteurs d'un véhicule.

Une fois délivrée par les sous-stations, la tension continue de la ligne est d'abord filtrée par une inductance et un condensateur connectés en entrée d'onduleurs triphasés à transistors de type IGBT<sup>4</sup> qui alimentent les phases des moteurs en courant.

La propulsion de chaque voiture de type VAL 208 et Néoval est assurée par quatre moteurs synchrones triphasés à aimants permanents, chacun alimenté par son propre onduleur. Chaque roue d'une voiture est ainsi équipée d'un moteur synchrone dédié.

Les performances des moteurs imposent le respect d'une tension d'alimentation comprise entre 450V et 960V. Cependant, la valeur basse retenue comme critère de dimensionnement est 550V.

Les IGBT des onduleurs sont pilotés par l'électronique de traction en fonction de la référence de courant qui détermine également le couple moteur. La séquence de pilotage des IGBT est quant à elle déterminée par la position relative du rotor par rapport au stator, du sens de marche et de l'ordre de traction ou freinage.

Il est à noter que suivant les lignes de métro étudiées, la dissipation du freinage électrique est réalisée tantôt dans un rhéostat embarqué, tantôt dans un banc de charge fixe placé en un point de la ligne. La première solution est généralement mise en oeuvre dans les systèmes Néoval tandis que la seconde est privilégiée dans les systèmes VAL.

4. Un IGBT, de l'anglais, *Insulated Gate Bipolar Transistor*, est un semi-conducteur de la famille des transistors. Sa popularité vient de ses faibles pertes de conduction et d'un faible coût énergétique de commande.

Ainsi, la figure 2.6 représente plutôt le fonctionnement d'un système Néoval, où chaque onduleur possède son propre rhéostat de freinage auto-ventilé en toiture (noté  $R$ ).

### 2.3.2 Description de la chaine de traction

La chaine de traction d'un train VAL / Néoval est composée des éléments présents sur la figure 2.7.

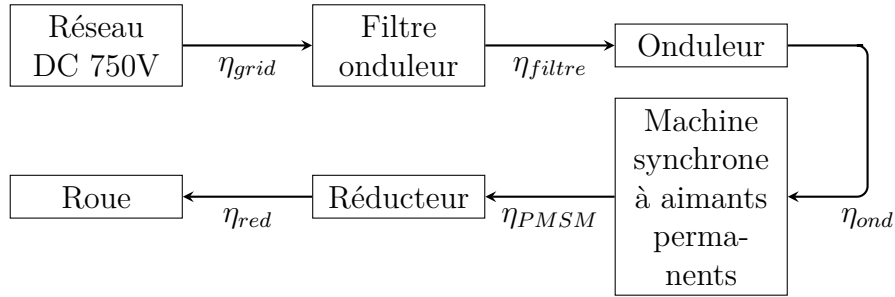


FIGURE 2.7 – Composition de la chaine de traction d'un métro de type VAL.

En première approximation, la chaine de traction du VAL 206 est considérée équivalente à celle du VAL 208.

Les coefficients de rendement de chaque élément de la chaine de traction sont rappelés dans le tableau 2.1.

	Val 208	Néoval
Rendement des rails d'alimentation $\eta_{grid}$	0,99	
Rendement du filtre de l'onduleur $\eta_{filtre}$	0,99	
Rendement de l'onduleur $\eta_{ond}$	0,98	
Rendement moyen de la machine synchrone $\eta_{PMSM}$	0,95	
Rendement du réducteur $\eta_{red}$	0,965	0,95

TABEAU 2.1 – Caractéristiques des machines tournantes.

### 2.3.3 Principe de fonctionnement du système de traction d'une voiture

le schéma de principe 2.8 illustre la chaine de contrôle du système de traction d'un véhicule.

Lors de l'exploitation en mode nominal, la vitesse du véhicule est régulée par un asservissement bouclé réalisé par le Pilote Automatique (PA) ou Automatic Train Control (ATC).

Ce dernier reçoit de la voie un signal correspondant à la vitesse de palier à atteindre. Cette référence est ensuite comparée à la vitesse réelle du véhicule mesurée par une génératrice tachymétrique.

L'unité de contrôle du véhicule (VCU) reçoit la consigne d'effort de l'ATC et donne l'ordre de traction aux différentes unités de contrôle de la traction (TCU). Une TCU est dédié à chaque essieu.

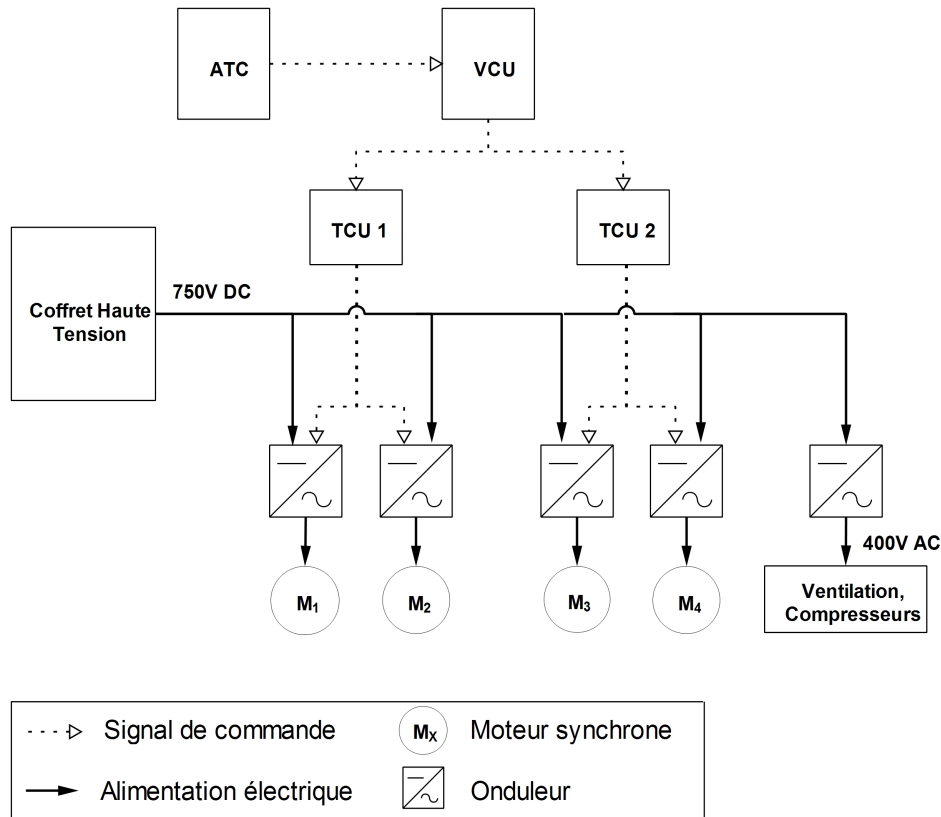


FIGURE 2.8 – Principe de fonctionnement du système de traction d'un véhicule.

### 2.3.4 Conditions d'utilisation du système de freinage

Le tableau 2.2 récapitule les cas d'utilisation des freins mécanique et électrique en fonction des conditions d'exploitation.

- Le frein de service est utilisé pour permettre le ralentissement du véhicule en fonction du profil de vitesse ; il s'effectue par la conjugaison du frein mécanique et du frein électrique pour fournir un freinage contrôlé. Dans ce mode, priorité est donnée au frein électrique.
- Le frein d'urgence permet au véhicule de s'arrêter en cas d'urgence ; pour des raisons de sécurité, il est entièrement fourni par le frein à friction et est prioritaire sur les autres actions.
- Le frein de stationnement permet d'assurer la sécurité du stationnement de secours d'un véhicule ayant reçu la commande d'arrêt. Il est exclusivement effectué par le frein mécanique.

### 2.3.5 Plage d'application du freinage conjugué

Lorsqu'un train est en cours de freinage, celui-ci va voir sa tension d'alimentation augmenter due à la réinjection de courant sur le réseau électrique. Si le courant renvoyé par le train est consommé par d'autres trains, sa tension d'alimentation reste à un niveau acceptable mais si une partie de ce courant ne peut être consommé, la tension d'alimentation du train augmente jusqu'à atteindre une valeur limite qui entraîne une conjugaison du freinage électrique avec du freinage mécanique.

	Frein mécanique à friction	Frein électrique
Freinage de service	✓ (uniquement en mode dégradé)	✓
Freinage d'urgence	✓	✗
Arrêt en station et freinage en côte	✓	✗
Frein de stationnement	✓	✗

TABLEAU 2.2 – Récapitulatif des cas d'utilisation des freins mécanique et électrique.

Lorsque la tension de la ligne dépasse la valeur seuil, le freinage électrique et le freinage rhéostatique/mécanique sont combinés pour maximiser la récupération du freinage électrique tout en respectant le confort des voyageurs.

La figure 2.9 présente l'évolution de la consigne de courant en fonction de la tension d'alimentation. La consigne maximale de courant est applicable entre 450V et 860V, tandis qu'entre 860V et 960V, la consigne maximale admise est réduite linéairement à zéro. Dans la suite du manuscrit,  $I_{max}$  sera pris comme le courant maximal généré/absorbé par les moteurs d'un train et la notation suivante est adoptée :  $E_- = 860V$ ,  $E_+ = 960V$ .

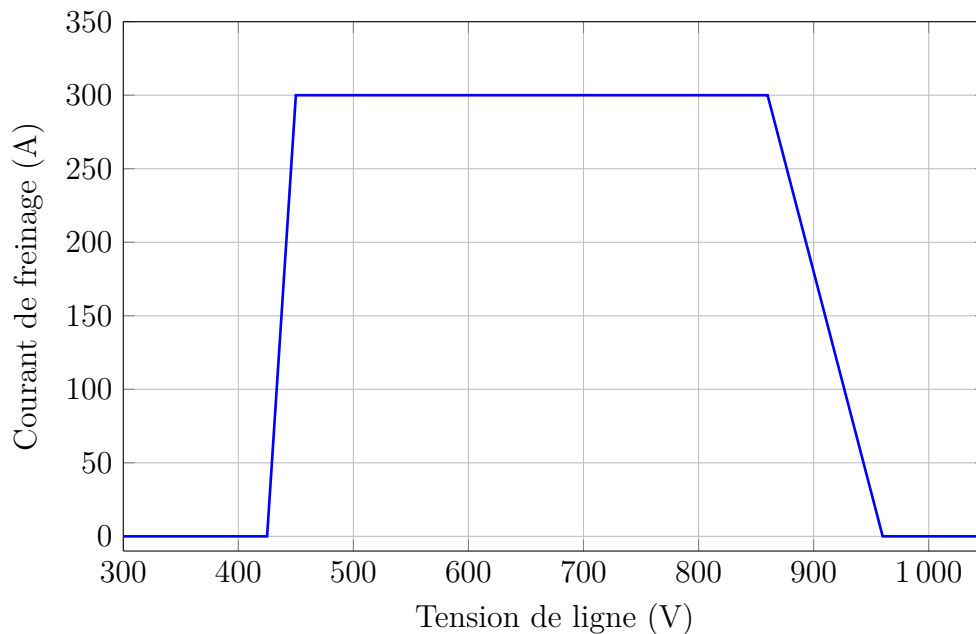


FIGURE 2.9 – Evolution de la consigne du courant moteur en phase de freinage.

### 2.3.5.1 Cas particulier du système Néoval

A la différence du VAL, où le frein électrique est inhibé en dessous d'une certaine valeur de vitesse, le frein de service du Néoval est assuré par des équipements électriques via les roues motrices, avec récupération de l'énergie, jusqu'à l'arrêt complet du

véhicule. De plus, le véhicule est équipé de résistances embarquées afin de maintenir le freinage électrique opérationnel même dans le cas où la ligne ne serait pas réceptive, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas assez de trains capables d'absorber l'énergie générée par les trains en phase de freinage. Ces rhéostats de freinage sont calibrés pour supporter la complète décélération du véhicule, de la vitesse maximale à l'immobilisation.

En outre, dans le système Néoval, le frein mécanique n'est utilisé pour le freinage de service que pour des cas bien particuliers comme la perte de l'alimentation HTA ou une panne partielle du frein électrique.

L'utilisation quasi-systématique du frein électrique dans le système Néoval présente plusieurs avantages :

- une réduction de l'usure des garnitures de frein par rapport à un système VAL classique,
- une baisse de la pollution aux particules fines émises par la friction métallique des freins mécaniques,
- l'adoption d'une démarche éco-responsable grâce à la récupération du freinage électrique,
- une conduite des trains plus fluide avec un confort des passagers accru et une meilleure précision dans le contrôle des différentes phases de marche des trains.

### 2.3.6 Equipements auxiliaires

Le circuit auxiliaire des voitures est composé de deux sous-réseaux électriques. Un premier sous-réseau triphasé à 400V alimente la ventilation ainsi que les compresseurs hydrauliques et pneumatiques. Le second sous-réseau alimente en 24V continu le chargeur de batterie, l'éclairage intérieur, les portes palières, la signalisation extérieure,...

Une batterie est également présente dans chaque voiture en cas de perte de la haute tension ou de panne des convertisseurs. Dans cette éventualité, la batterie alimente les équipements de secours comme la ventilation, l'éclairage, la sonorisation et système de communication, le contrôle des freins mécaniques, les portes palières, quelques équipements du pilote automatique, et d'autres dispositifs nécessaires aux opérations de secours. Ce mode de fonctionnement peut être maintenu pendant une période supérieure à 60 minutes.

## 2.4 Modélisation énergétique du matériel roulant

La modélisation de lignes ferroviaires a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature scientifique.

Dès 1987, [41] propose de simuler le déplacement de plusieurs trains sur une ligne ferroviaire, puis met en évidence la variation de la tension de ligne en fonction de la position et de la consommation électrique des différents trains.

Cette étude est l'une des premières à proposer une modélisation détaillée des différents éléments présents sur la ligne pour en estimer la consommation énergétique.

Depuis, la plupart des modélisations de lignes ferroviaires adoptent une méthodologie analogue axée principalement autour de l'étude de trois sous-systèmes : le dé-

placement des trains sur la ligne, les efforts de traction qui en résultent et le système d'alimentation électrique de la voie [42].

## 2.4.1 Modélisation du déplacement des trains

Selon le niveau de précision souhaité, il existe classiquement deux approches pour modéliser le déplacement des trains sur une ligne ferroviaire : l'approche temporelle et l'approche épisodique (le terme *épisodique* provient de la traduction du terme anglais *event-based*) [42].

### 2.4.1.1 Approche épisodique

L'approche dite épisodique, définit le mouvement des trains par une séquence d'événements caractéristiques tels que l'arrivée et le départ de station.

L'intérêt majeur de cette approche est de pouvoir avancer l'horloge de simulation jusqu'à l'occurrence de l'événement suivant. Cette méthode a notamment été utilisée dans [24], [43] et [44], mais le niveau de précision n'est pas suffisant pour effectuer une gestion énergétique d'une ligne de métro.

Cette approche a plutôt pour objectif d'effectuer une étude macroscopique des tables horaires et de définir des algorithmes de régulation de trafic.

### 2.4.1.2 Approche temporelle

L'approche temporelle consiste à discrétiser l'horizon de simulation afin d'étudier le mouvement des trains à chaque pas de temps.

Mathématiquement, il est possible de représenter cette approche par le système d'équations (2.2), où  $X(t)$ ,  $V(t)$ ,  $\gamma(t)$ , représentent respectivement la position, la vitesse et l'accélération du train à l'instant  $t$ , tandis que  $\delta t$  représente le pas de discrétisation choisi.

De cette manière à chaque pas de temps la vitesse et la position des trains sont mises à jour pour simuler leur déplacement sur la ligne. Cette méthode est celle classiquement utilisée dans les travaux d'estimation de consommation énergétique.

$$\begin{cases} V(t + \delta t) = V(t) + \gamma(t) \cdot \delta t \\ X(t + \delta t) = X(t) + V(t) \cdot \delta t \end{cases} \quad (2.2)$$

## 2.4.2 Modélisation mécanique du matériel roulant

La modélisation des efforts de traction se fait quasi-systématiquement par application de la deuxième loi du mouvement de Newton, appelée aussi Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) [45], [46], [47], [48], [49], [50].

Cette loi permet d'exprimer les efforts à la jante, et par extension la puissance électrique consommée par les trains en fonction des paramètres d'exploitation tels que la vitesse commerciale, l'accélération, le profil de la ligne,...

Cette méthode de modélisation est populaire pour sa simplicité d'implémentation et le fait que les paramètres d'exploitation nécessaires au calcul des efforts sont généralement connus, ou facilement déterminables.

Dans le cas des lignes de métro automatisées par Siemens, pour chaque interstation, des diagrammes de marche type d'une rame sont définis à vitesse nominale et à vitesse maximale.

Ces deux types de marche permettent d'avoir une plus grande flexibilité d'exploitation en cas d'aléas, ou en période de pointe.

Les figures 2.10, 2.11 et 2.12 présentent un exemple de marche type sur un parcours interstation avec un profil de vitesse, un profil de position et un profil d'accélération.

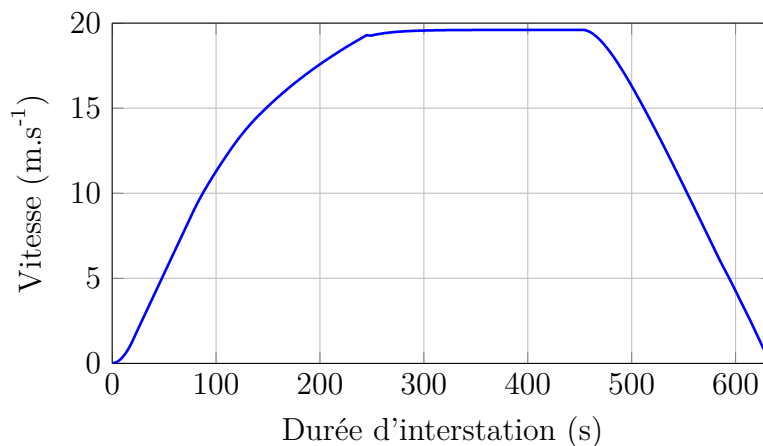


FIGURE 2.10 – Profil de vitesse pour un parcours interstation (vitesse nominale).

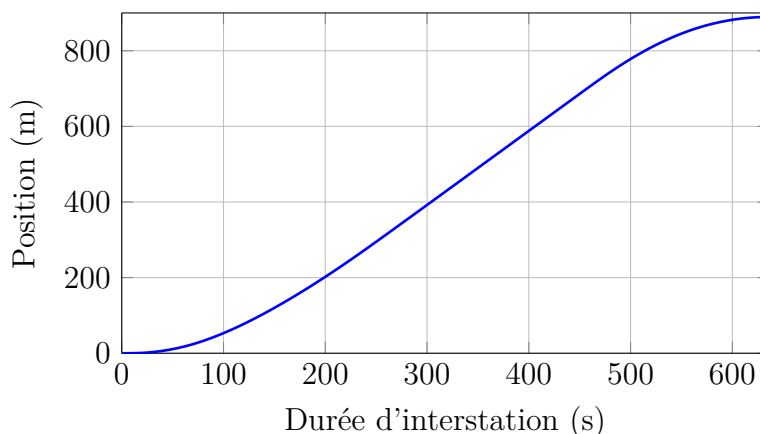


FIGURE 2.11 – Profil de position pour un parcours interstation (vitesse nominale).

Une marche type définit la vitesse de déplacement<sup>5</sup> d'un train sur un parcours interstation sous l'hypothèse d'une exploitation sans aléa. Ainsi, pour chaque parcours interstation, il y a une correspondance entre la position d'un train et sa vitesse de déplacement. Par extension, il est également possible de déterminer la durée de parcours d'une interstation à vitesse nominale et maximale.

Pour établir le modèle mécanique du matériel roulant, il est nécessaire d'identifier les différentes forces qui s'opposent à l'avancement d'un train. Ces efforts sont principalement de trois types : les efforts liés aux frottements (contact roues-rails et frottements aérodynamiques), les efforts liés à la pente de la voie et les efforts liés à l'accélération du train (2.3).

5. La vitesse commerciale est limitée soit par les contraintes géométriques de la ligne soit par la vitesse maximale admissible sur la portion de voie considérée.

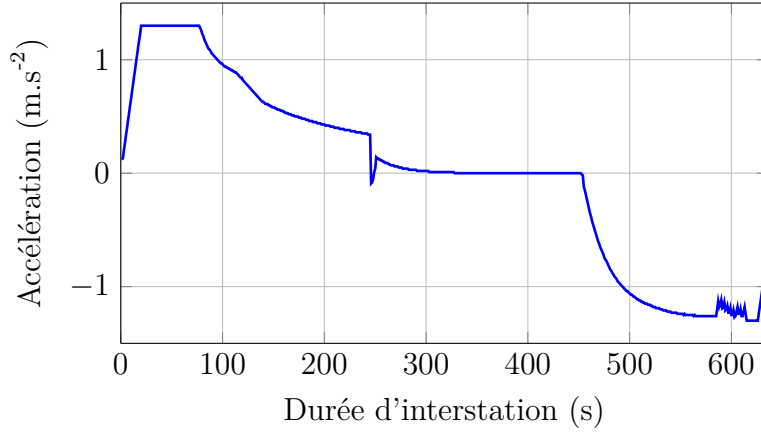


FIGURE 2.12 – Profil d'accélération pour un parcours interstation (vitesse nominale).

$$F_{avancement} = F_{res} + F_{pente} + F_{acc} \quad (2.3)$$

Les forces de frottements sont déterminées par l'équation empirique (2.4), où A, B et C représentent respectivement le coefficient de frottements secs (proportionnel à la charge par essieu, en  $N$ ), le coefficient de frottements visqueux (en  $N.s.m^{-1}$ ) et le coefficient de résistance aérodynamique (en  $N.s^2.m^{-2}$ ), tandis que  $V$  et  $W$  représentent la vitesse du véhicule et la vitesse du vent (en  $m.s^{-1}$ ).

$$F_{res}(t) = A + B \cdot V(t) + C \cdot (V(t) - W(t))^2(t) \quad (2.4)$$

L'expression algébrique des coefficients précédents est rappelée dans le tableau 2.3<sup>6</sup>, où  $n$  représente le nombre de voitures par train.

	Val 208	Néoval
A	$1400*n + 0,1*M$	$700*n + 0,1*M$
B	$75*n$	$38*n$
C (accélération / souterrain)	-16,5	
C (décélération / souterrain)	-9	

TABLEAU 2.3 – Valeurs des coefficients aérodynamiques.

Pour plus de simplicité, nous faisons ici l'hypothèse que les lignes étudiées sont souterraines ( $W = 0$ ), que les courbes de la voie sont suffisamment faibles pour négliger les efforts dues aux courbes et que la force d'arrachement est également négligeable par rapport aux autres efforts.

Les efforts dus à la déclivité sont exprimés par la relation (2.5), où  $\alpha$ ,  $M$  et  $g$  correspondent respectivement au profil topographique de la ligne, à la masse du train passagers inclus et à l'accélération de la pesanteur

$$F_{pente}(t) = M.g.\alpha(t) \quad (2.5)$$

6. Le VAL 208 étant une évolution du VAL 206, nous présenterons ce premier modèle ainsi que le Néoval; et seuls les trains composés d'un doublet de voitures sont considérés.



Les efforts dus à l'accélération sont quant à eux exprimés par la relation (2.6). Le coefficient  $\eta_{inertie}$  permet de prendre en compte l'inertie des masses tournantes tandis que  $\gamma$  désigne l'accélération du train considéré.

$$F_{acc}(t) = \eta_{inertie} \cdot M \cdot \gamma(t) \quad (2.6)$$

### 2.4.3 Modélisation électrique du matériel roulant

Les efforts de résistance à l'avancement définis précédemment s'appliquent à la roue. Pour en déduire la puissance électrique consommée ou générée par un train, il nous est nécessaire de considérer le rendement global de la chaîne de traction  $\eta$  évoqué dans le tableau 2.1 afin d'appliquer le PFD (2.7). Le terme  $a$  vaut 1 en phase de freinage et -1 en phase d'accélération tandis que  $P_{aux}$  permet de prendre en compte la puissance électrique consommée par les auxiliaires

$$P_{elec}(t) = \eta^a \cdot V(t) \cdot (F_{acc}(t) + F_{pente}(t) + F_{res}(t)) + P_{aux} \quad (2.7)$$

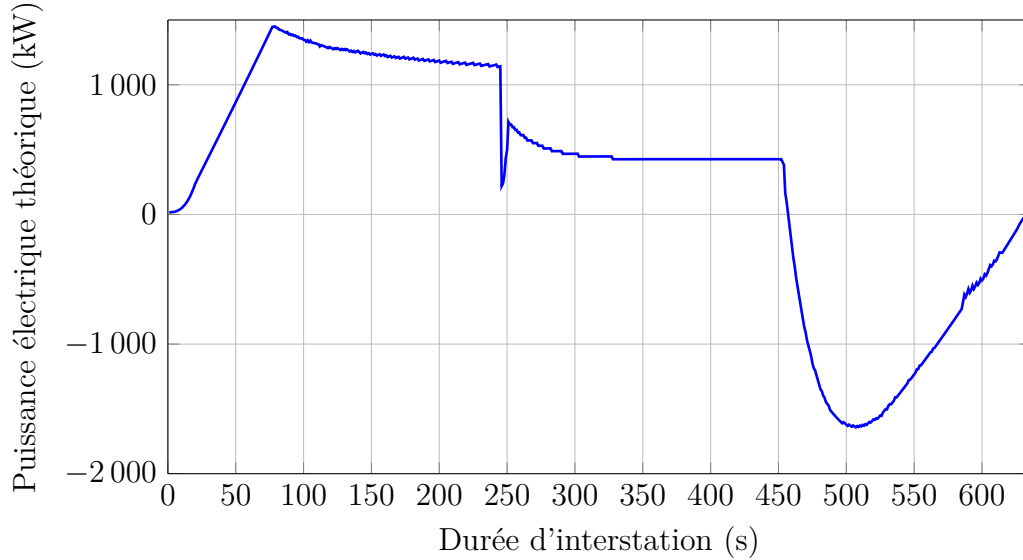


FIGURE 2.13 – Profil de puissance électrique consommée/générée par un train sur un parcours type.

Il est alors possible de définir pour chaque interstation, un profil type de puissance électrique. Un exemple de profil type de puissance, issu de la marche type présentée dans les figures 2.10, 2.11 et 2.12, est donné en figure 2.13.

Le déplacement d'un train sur une interstation est caractérisé par plusieurs phases distinctes :

- une phase d'accélération, caractérisée par une forte hausse de la puissance consommée. Cette phase d'accélération est elle même composée de deux sous-phases :
  - une phase d'accélération dite à *couple constant*<sup>7</sup>, typiquement entre 0 et 26  $km.h^{-1}$ , afin de respecter les contraintes techniques qui portent sur le courant maximal admissible par les moteurs et la limite d'adhérence entre les roues et la piste de voie ;

7. Ces phases d'accélération sont particulièrement visibles sur les enregistrements d'un véhicule en exploitation présentés en figure 2.14

- une phase d'accélération dite à *puissance constante*<sup>7</sup>, entre 26 et 80  $\text{km.h}^{-1}$  (vitesse maximale des matériels roulants VAL et Néoval) ;
- une phase de maintien en vitesse est caractérisée par une chute de la consommation et se termine lorsque le train débute sa phase d'accostage ;
- une phase de freinage à couple constant se produit lorsque le train arrive en station. Durant cette phase, le moteur du train devient générateur, et ce couple est contraint par les caractéristiques des freins et l'adhérence des roues ;
- une phase d'arrêt en station ;

Des phases de marche sur l'erre peuvent également se produire sur un parcours interstation selon la déclivité de la voie et les contraintes opérationnelles portant sur le temps de parcours.

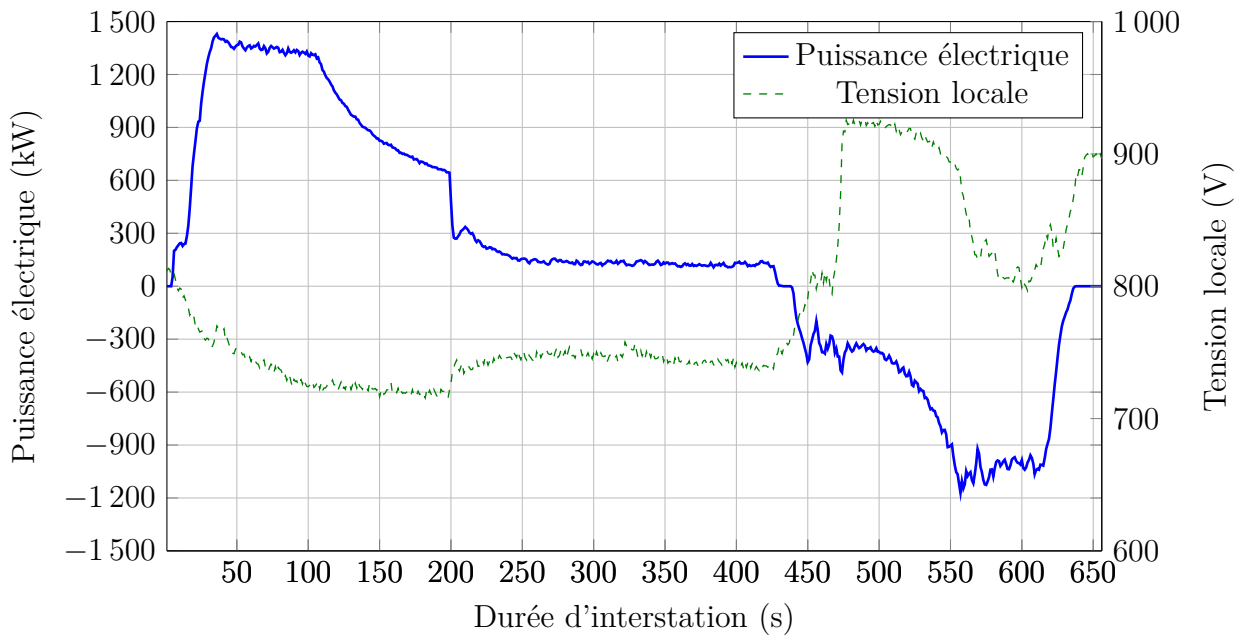


FIGURE 2.14 – Evolution de la tension locale en fonction de la puissance électrique consommée/renvoyée par un train.

Dans le cadre d'essais effectués sur la ligne de Turin, les caractéristiques électriques instantanées d'un véhicule en exploitation ont pu être enregistrés.

La figure 2.14 montre l'évolution de la tension locale en fonction de la puissance électrique consommée/renvoyée par le train durant son parcours interstation. Le parcours interstation est le même que celui évoqué précédemment.

Lors de la phase de traction, la valeur de la tension perçue par le train reste proche de la tension nominale d'exploitation, cependant, lors de la phase de freinage, la valeur de la tension locale augmente nettement. L'allure de la courbe de la puissance électrique est alors très éloignée de l'allure théorique (figure 2.13).

En effet, lors de la phase de freinage, les trains à proximité n'étaient pas en mesure de consommer la totalité de l'énergie renvoyée, ce qui a eu pour effet de faire augmenter le potentiel de la ligne et ainsi de dissiper une partie de la puissance électrique de freinage.

### 2.4.3.1 Conventions de modélisation

L'étude des figures 2.12, 2.13 et 2.14 montre une forte similitude de forme entre le profil d'accélération et le profil de puissance électrique qui en découle durant la phase de traction. En traction, un train est donc assimilé à une source de courant idéale absorbant de l'énergie sur le réseau (figure 2.15).

En revanche, en phase de freinage, le modèle électrique du train doit être modifié pour intégrer la notion de dissipation de l'énergie du freinage lorsque le renvoi d'énergie sur la ligne n'est pas possible. Pour ce faire, un train est assimilé soit à une source de tension en série avec un rhéostat de freinage, soit à une source de courant en parallèle avec un rhéostat de freinage. Les deux modèles sont électriquement valables, mais la première formulation est plus propice à l'analyse nodale qui sera effectuée dans la suite des travaux (figure 2.16).

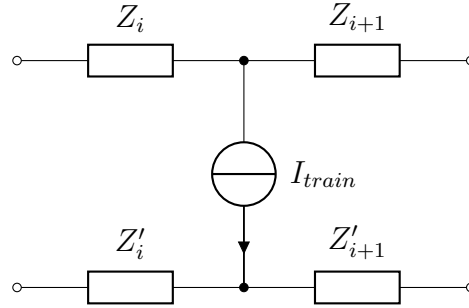


FIGURE 2.15 – Modèle électrique d'un train en traction ou en freinage purement électrique.

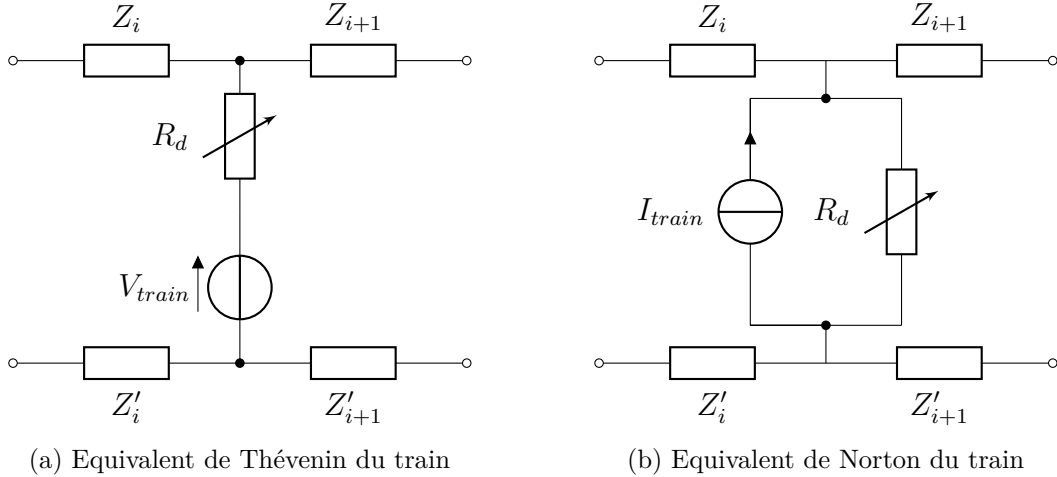


FIGURE 2.16 – Modèle électrique d'un train en freinage conjugué

### 2.4.3.2 Modélisation du rhéostat de freinage

En considérant la caractéristique de décroissance du courant de freinage présentée à la figure 2.9, l'expression de la résistance de dissipation  $R_d$  est déterminée par interpolation linéaire grâce au développement explicité dans l'équation (2.8); où  $P_{train}$  est assimilée à la puissance électrique générée par le train considéré.

$$\begin{cases} R_d = \frac{\Delta V}{\Delta I} = \frac{E_+ - E_-}{I_{max}} \\ I_{max} = \frac{P_{train}}{E_-} \end{cases} \Rightarrow R_d = \frac{(E_+ - E_-) \times E_-}{P_{train}} \quad (2.8)$$

## 2.5 Modélisation d'une ligne de métro

### 2.5.1 Modélisation du système d'électrification ferroviaire

La modélisation électrique d'une ligne ferroviaire a fait l'objet de nombreux travaux, tant pour des réseaux alimentés en courant alternatif que continu. [45], [51] et [52] présentent des méthodes pour modéliser une ligne ferroviaire alimentée en courant alternatif, mais les modèles équivalents qui en résultent sont en beaucoup de points similaires aux modèles définis dans des cas d'électrification en courant continu par [46], [48], [34], [53], [54], [55] ou encore [56].

### 2.5.2 Présentation des hypothèses de modélisation

Pour les besoins de l'étude, la complexité du réseau électrique de ligne de métro est volontairement simplifiée, pour nous concentrer sur le fonctionnement des sous-stations d'alimentation et des trains. Ainsi, la partie amont d'acheminement de l'énergie est occultée et seul le réseau électrique de traction est étudié.

Diverses hypothèses simplificatrices sont formulées pour mettre en oeuvre le modèle électrique de la ligne afin de réduire la complexité du problème et de ne retenir que les paramètres les plus influents :

- Une sous-station est assimilée à une source de tension  $E_0$  en série avec une résistance  $R_0$  représentant la chute de tension interne des PR :  $E_0 = 810V$  ;  $R_0 = 30.10^{-3}\Omega$ .
- Afin de limiter les chutes de tension et les tensions rail sol, une mise en parallèle des rails de même polarité est réalisée de voie à voie, à intervalle régulier le long de la ligne. Une ligne de métro est alors considérée comme un rail positif et un rail négatif entre les bornes desquelles circulent les trains.
- Les rails d'alimentation sont représentés par des impédances, dont la valeur est proportionnelle à la distance entre les éléments qu'ils interconnectent. La valeur de ces impédances de ligne varie également selon la présence de feeders sur la ligne.
- Une impédance équivalente de ligne est définie comme la somme de l'impédance des rails positif et négatif (2.9).

$$Z_{i,i+1} = R_{i,i+1} + R'_{i,i+1} \quad (2.9)$$

- En première approximation, les impédances de lignes sont considérées comme purement résistives :  $Z_{eq} = R_{eq}$  ;  $R_{i,i+1} = 53.10^{-6}\Omega.km^{-1}$  ;  $R'_{i,i+1} = 26.10^{-6}\Omega.km^{-1}$ . Le caractère inductif et capacitif de la ligne est négligé.
- La tension du rail négatif est considérée constante en tout point de la ligne et égale à 0V.

- Les courants de fuite sont considérés nuls quelles que soient les conditions de fonctionnement du réseau.
- Les sous-stations d'alimentation sont non-réversibles, ce qui implique que le courant régénéré lors des phases de freinage ne peut être renvoyé sur le réseau HTA.
- Du fait du déplacement des trains, la modélisation de la ligne de métro doit être faite en régime permanent quasi-statique ; en mettant à jour la position des trains à chaque pas de temps.

### 2.5.3 Application à un exemple simplifié

Le schéma électrique d'une ligne de métro simplifiée est présentée à la figure 2.17. Cette ligne fictive est composée de 3 sous-stations d'alimentation (noeuds 1,3 et 5), d'un train en traction (noeud 2) et d'un autre en freinage (noeud 4). Le train freineur est distinguable du fait de la résistance variable placée en parallèle de la source de courant afin de modéliser la possibilité de dissipation du freinage électrique.

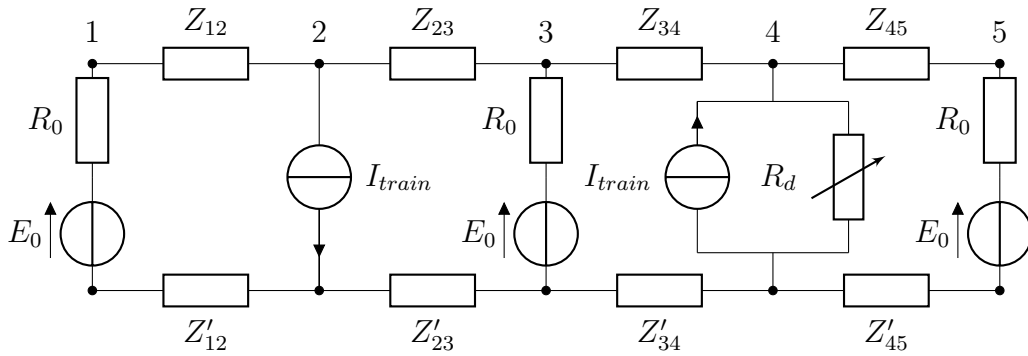


FIGURE 2.17 – Schéma électrique d'une ligne simplifiée.

### 2.5.4 Analyse nodale modifiée

L'analyse nodale modifiée repose sur l'utilisation des lois de Kirchoff pour déterminer les tensions nodales et les courants circulant dans les branches d'un circuit électrique.

La loi des mailles permet d'établir une relation entre les tensions au sein d'une maille d'un circuit. Cette loi stipule que dans une maille la somme algébrique des tensions est nulle. Ainsi, pour chaque maille du réseau composée de  $k$  branches, il est possible d'écrire la relation (2.10).

$$\sum_{i=1}^k U_i = 0 \quad (2.10)$$

La loi des noeuds permet d'établir une relation entre les courants électriques parcourant un noeud du circuit : la somme algébrique des courants entrant dans un noeud est égale à la somme de ceux sortant du même noeud. Pour un noeud constitué de  $k$  branches, l'équation (2.11) est obtenue.

$$\sum_{i=1}^k I_i = 0 \quad (2.11)$$

En combinant les lois de Kirchhof et la loi d'Ohm, qui relie l'intensité du courant électrique traversant un dipôle avec la tension à ses bornes, il est possible d'écrire les équations reliant les éléments électriques entre eux.

Nous obtenons alors la formulation matricielle suivante (2.12), où  $[V]$  et  $[I]$  sont respectivement les vecteurs des tensions et des courants nodaux et  $[Y]$  est la matrice d'admittance qui synthétise la connaissance de l'état du réseau.

En effet, cette matrice renseigne sur la distance entre les trains et les sous-stations d'alimentation, mais aussi sur la réceptivité du réseau.  $[Y]$  est définie comme l'inverse de la matrice d'impédance  $[Z]$  correspondante.

$$[Y] \cdot [V] = [I] \quad \text{où} \quad [Y] = \frac{1}{[Z]} \quad (2.12)$$

En considérant le circuit simplifié de la figure 2.17, en exprimant les impédances par leurs admittances équivalentes et en explicitant les paramètres électriques du réseau, il est possible d'obtenir une vue encore plus synthétique de la relation électrique qui unit chaque noeud du réseau (figure 2.18).

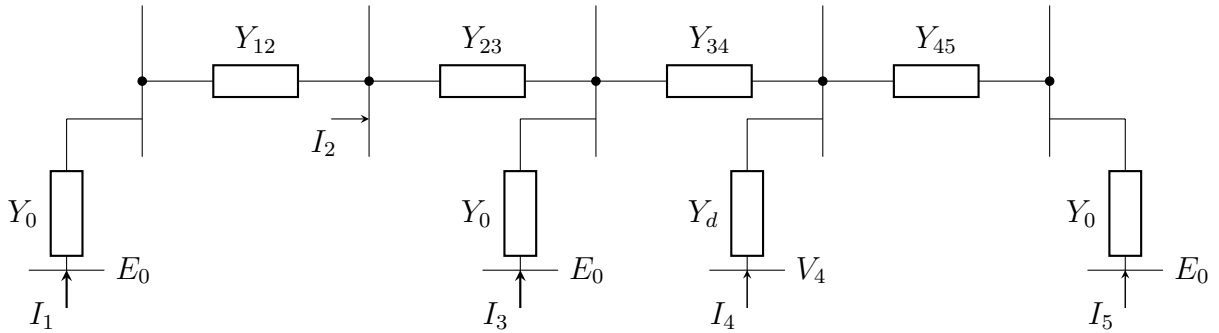


FIGURE 2.18 – Représentation du réseau électrique avec des admittances.

La construction de la matrice d'admittance du réseau est alors définie par (2.13), où l'expression de l'admittance de ligne reliant les noeuds 1 et 2 est donnée par :

$$Y_{12} = \frac{1}{Z_{12} + Z'_{12}}.$$

$$Y = \begin{vmatrix} Y_{12} + Y_0 & -Y_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -Y_{12} & Y_{12} + Y_{23} & -Y_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{23} & Y_{23} + Y_{34} + Y_0 & -Y_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -Y_{34} & Y_{34} + Y_{45} + Y_d & -Y_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -Y_{45} & Y_{45} + Y_0 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Cette méthode de définition de la matrice d'admittance d'un réseau ferroviaire électrique peut alors être étendue à l'étude de lignes réelles plus complexes.

La formulation exhaustive de la matrice des courants nodaux  $I$  et de celle des tensions nodales  $V$  pour le cas d'étude considéré, est rappelée en (2.14).

$$I = \begin{pmatrix} -\frac{E_0}{R_0} \\ \frac{P_2}{V_2} \\ -\frac{E_0}{R_0} \\ \frac{(E_+ - V_4) \cdot P_4}{(E_+ - E_-) \cdot E_-} \\ -\frac{E_0}{R_0} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

L'analyse nodale met en évidence un système d'équations non linéaires qu'il sera nécessaire de résoudre afin de déterminer la valeur des éléments des matrices  $[V]$  et  $[I]$ .

## 2.6 Résolution d'un problème de répartition des charges

### 2.6.1 Analogie avec une résolution load flow

Le problème de répartition des charges est un des principaux défis qui se présentent aux gestionnaires de réseaux électriques de transport et de distribution. Ce problème a pour principaux objectifs d'évaluer le transit de puissance au sein du réseau dans un but de gestion et de planification, mais également de déterminer l'impact sur le réseau électrique d'actions telles que l'ajout ou le retrait de charges, de sources de puissances ou de nouvelles interconnexions.

Ce problème est couramment mentionné dans la littérature par les termes anglais *load flow* ou (*optimal*) *power flow*.

Dans sa définition la plus simple, une étude de *load flow* consiste à déterminer, en régime stationnaire, la valeur des tensions, courants et puissances échangés dans un système électrique soumis à des conditions de charge données.

Le terme *optimal* désigne quant à lui la volonté des gestionnaires de régler les paramètres électriques et énergétiques du réseau afin d'assurer la fiabilité, la robustesse et surtout la fourniture de l'énergie aux clients finaux. En outre, dans un contexte de libéralisation du marché de l'énergie électrique, le terme *optimal* fait également référence à un besoin de minimiser les coûts d'exploitation d'un réseau électrique.

Cependant, dans notre cas d'étude, l'hypothèse sera faite que les études réalisées en amont de la construction d'une ligne de métro ont déjà permis de mettre en place un réseau électrique correctement dimensionné pour assumer les contraintes technico-économique d'exploitation.

## 2.6.2 Historique de la résolution de problème de load flow

L'une des premières résolutions automatisées d'un problème de répartition des charges a été réalisée par [57] en 1956 à l'aide d'une heuristique itérative utilisant une formulation par matrice d'admittance.

Une décennie plus tard, [58] passe en revue les techniques développées, par la suite, pour la résolution d'un problème de *load flow*. Les formulations du réseau par matrice d'admittance ou d'impédance sont alors majoritairement utilisées. Historiquement, outre les heuristiques itératives, la méthode de résolution dite de Gauss-Seidel a été la première employée avant que la méthode de Newton-Raphson ne la supplante à la fin des années 1960 [59].

La méthode de Gauss-Seidel a l'avantage de nécessiter peu de mémoire et de ne pas résoudre de système matriciel, cependant, elle présente une vitesse de convergence lente quand le nombre de noeuds du réseau augmente, ce qui a poussé les chercheurs à utiliser d'autres algorithmes itératifs comme la méthode de Newton-Raphson [60].

La méthode de Newton-Raphson est devenue la technique de résolution privilégiée pour les systèmes de *load flow* [61] et a été étendue, par la suite, à l'étude de systèmes ferroviaires électriques [62], [63].

L'évolution constante des moyens de calcul a ensuite vu l'essor d'un certain nombre de logiciels commerciaux permettant de modéliser puis de simuler des réseaux ferroviaires plus ou moins complexes.

- Sidytrac (Siemens)
- Elbas (Alstom)
- Energy Management Model (Université Carnegie Mellon - USA)
- ECOtranz (Bombardier)
- Multi-Train Simulator (Université de Birmingham - UK)
- Fabel (Enotrac)
- SIMTRAC (ABB & Adtranz)

Cette liste est loin d'être exhaustive, mais cette abondance d'outils montre à quel point les problématiques liées à la connaissance des flux de puissances dans un réseau ferroviaire électrique sont prises au sérieux tant par les industriels que les universitaires.

## 2.6.3 Méthode de Newton-Raphson

### 2.6.3.1 Présentation générale

La méthode de Newton-Raphson est un algorithme de résolution numérique capable de déterminer les racines d'une fonction réelle par approximations successives. Cette méthode est très utilisée du fait de ses propriétés de convergence quadratique locale. En d'autres termes, la convergence est atteinte en un nombre limité d'itérations si le point de départ de la résolution est pris assez proche de la solution finale recherchée. Si cette condition n'est pas respectée, la convergence pourra être atteinte en un nombre plus élevé d'itérations.

Bien qu'initialement prévue pour la résolution de fonction unidimensionnelle, l'algorithme a été étendu à l'étude de fonction à dimension infinie.



Ici, cette méthode est utilisée pour calculer la ou les racines du système d'équation non linéaires (2.12). En d'autres termes, la recherche des racines revient à trouver les valeurs pour lesquelles la fonction étudiée s'annule (2.15).

$$f(x) = 0 \quad (2.15)$$

Dans sa version unidimensionnelle, la méthode de Newton-Raphson est l'étude d'une fonction  $f$  d'une variable réelle infiniment dérivable et  $a$ , un point au voisinage duquel la fonction  $f$  est définie. Le développement limité ou série de Taylor, qui donne une approximation polynomiale de la valeur de  $f$  au point  $a$ , est donné par (2.16), où  $f(a)^n$  représente la  $n$ -ième dérivée de  $f$  au point  $a$ .

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (2.16)$$

La méthode de Newton-Raphson se contente d'utiliser un développement limité de  $f$  à l'ordre 1. Cela revient à considérer que la fonction étudiée est quasiment égale à sa tangente en ce point.

Dans la pratique, nous partons d'un point initial  $x_0$  appartenant à l'ensemble de définition de la fonction (2.17); et à chaque itération, une nouvelle solution, qui doit se rapprocher de la valeur réelle de la racine de la fonction  $f$ , est obtenue. Cela nous permet d'en déduire la relation de récurrence (2.18).

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) = 0 \quad (2.17)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.18)$$

Dans un problème à  $n$ -dimension, la formulation matricielle devient (2.19), où  $J$  est la matrice jacobienne de  $f$  et  $i, j = 1, \dots, n$ .

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}f(x_n) \quad \text{avec} \quad J_{i,j} = \frac{\delta f_i}{\delta x_j} \quad (2.19)$$

En considérant une fonction  $F$  définie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  (ici  $n=2$ ) et  $X = (x_1, x_2)$ , une variable à 2 dimensions, l'expression de la matrice jacobienne de  $F$  est explicitée par (2.20).

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F_1(X)}{\delta x_1} & \frac{\delta F_1(X)}{\delta x_2} \\ \frac{\delta F_2(X)}{\delta x_1} & \frac{\delta F_2(X)}{\delta x_2} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

### 2.6.3.2 Formulation mathématique du problème

L'objectif de la résolution est de déterminer les solutions de l'équation du réseau (2.21), où  $V_n$  et  $I_n$  sont respectivement les vecteurs de tensions et de courants aux noeuds du réseau et  $Y_n$  est la matrice d'admittance du réseau. La matrice jacobienne se déduit alors immédiatement (2.22).

$$F(V_n) = Y_n \cdot V_n - I_n = 0 \quad (2.21)$$

$$F'(V) = Y_n - \frac{\delta I_n}{\delta V_n} \quad (2.22)$$

En outre, comme le montre l'expression de la matrice des courants nodaux  $I$  (2.14), le terme  $\frac{\delta I_n}{\delta V_n}$  voit son expression être modifiée en fonction de l'état du train au noeud considéré. Lorsque le train est en traction ou en phase de freinage purement électrique, ce terme devient (2.23) et lorsque le train est en phase de freinage avec dissipation électrique de ce freinage (2.24).

$$\frac{\delta I}{\delta V} = -\frac{P_{trains}}{V^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{\delta I}{\delta V} = -\frac{P_{trains}}{((E^+ - E^-) \times E^-)} \quad (2.24)$$

### 2.6.3.3 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution est synthétisé dans le synoptique de l'algorithme 1. Il s'agit d'un processus itératif composé de 3 étapes : le calcul de la matrice jacobienne de la fonction à annuler, l'inversion de cette matrice puis le calcul d'une nouvelle solution. Cette relative simplicité d'implémentation est également l'un des facteurs ayant contribué à la popularisation de la méthode de Newton-Raphson.

---

#### Algorithme 1 Algorithme de Newton-Raphson

---

Création d'une solution initiale  $V^{(0)}$

**Tant que**  $|V^{n+1} - V^n| > \epsilon$  **Faire**

    Calcul de la matrice jacobienne  $J_F$

    Inversion de la matrice jacobienne  $J_F$

    Calcul de la nouvelle solution  $V^n = V^{n-1} - J^{-1}F(V_{n-1})$

**Fin du Tant que**

---

La tolérance  $\epsilon$  est spécifiée de sorte que la précision sur la résolution des tensions nodales soit assez fine, mais également pour que le temps de résolution reste faible. Après divers essais, la valeur  $\epsilon = 10^{-3}$  a été retenue comme étant celle permettant le meilleur compromis entre précision et temps de résolution.

## 2.6.4 Méthode de Broyden

La méthode de Newton-Raphson présente des propriétés de convergence intéressantes, cependant, pour certaines classes de problème, des améliorations de la méthode doivent être apportées. En effet, il est nécessaire de calculer  $n^2$  dérivées partielles à chaque itération de cette méthode.

Ainsi, lorsque la dimension du système est trop importante, le temps de calcul de la matrice jacobienne devient prohibitif. De fait, la résolution du système d'équation devient une opération très coûteuse en temps de calcul.

### 2.6.4.1 Mise à jour de Broyden

Pour palier à ces inconvénients, une astuce courante consiste à rechercher une approximation mathématique, où une valeur approchée de la solution du système d'équation est obtenue à chaque itération. La résolution de l'équation (2.21) étant censée converger en un nombre fini d'itérations, les matrices jacobiennes issues d'itérations consécutives doivent être *assez proches*. En théorie, il serait donc possible de définir un terme  $M$  qui vérifie la relation de récurrence  $B_{n+1} = B_n + M$ , où  $B_n$  est une valeur approchée de la jacobienne de la fonction. La résolution est alors dite *quasi-newton*.

En reprenant la définition de la jacobienne équivalente à l'équation d'une tangente, et en reprenant l'expression (2.19), le système (2.25) est obtenu, où  $B_n$  représente l'approximation de la jacobienne à la  $n$ -ième itération.

$$\begin{cases} B_{n+1} = \frac{F(X_{n+1}) - F(X_n)}{(X_{n+1} - X_n)} \\ B_n = \frac{F(X_n)}{(X_{n+1} - X_n)} \end{cases} \quad (2.25)$$

A la première itération, la valeur exacte de la jacobienne :  $B_0 = J_F(X_0)$  est utilisée pour calculer une nouvelle solution  $X_1$ . Puis, en exprimant la différence  $B_1 - B_0$  et en simplifiant son expression, les relations (2.26) et (2.27) sont obtenues.

$$B_1 - B_0 = \frac{F(X_1) - F(X_0)}{X_1 - X_0} - \frac{-F(X_0)}{X_1 - X_0} \quad (2.26)$$

$$B_1 = B_0 + \frac{\Delta F_1 - B_0 \cdot d_0}{d_0 \cdot d_0} \otimes d_0 \quad \text{avec} \quad \Delta F_1 = F(X_1) - F(X_0) \quad \text{et} \quad d_0 = -B_0^{-1} F(X_0) \quad (2.27)$$

Par généralisation, l'équation dite de Broyden est alors définie par (2.28).

$$B_{n+1} = B_n + \frac{\Delta F_n - B_n \cdot \Delta X_n}{\|\Delta X_n\|^2} \otimes \Delta X_n \quad \text{avec} \quad \Delta X_n = X_{n+1} - X_0 \quad (2.28)$$

### 2.6.4.2 Mise à jour de Sherman-Morrison

Cependant, lors du processus de résolution, il nous est nécessaire de connaître l'inverse de la matrice jacobienne. La formule de Sherman-Morrison permet alors d'obtenir

l'approximation de l'inverse de la jacobienne (2.29), dont l'usage sera privilégié afin de limiter le coût en calcul de la résolution.

$$B_n^{-1} = B_{n-1}^{-1} + \frac{\Delta X_n - B_{n-1}^{-1} \Delta F_n}{\Delta X_n^T B_{n-1}^{-1} \Delta F_n} \otimes \Delta X_n B_{n-1}^{-1} \quad (2.29)$$

#### 2.6.4.3 Remarques générales sur la méthode

Les méthodes de Newton-Raphson et Broyden ont de bonnes propriétés de convergence.

Ainsi, lorsque le nombre d'itérations dépasse un seuil prédéfini<sup>8</sup>, la solution initiale  $V_0$  doit être modifiée et la procédure de résolution est relancée, puisque la convergence de ces algorithmes dépend pour beaucoup de l'itéré initial.

De plus, il est nécessaire de vérifier les niveaux de tensions des sous-stations d'alimentation, afin de vérifier que le courant régénéré en excès ne soit pas renvoyé sur le réseau. Lorsque la tension aux bornes d'une sous-station excède une certaine valeur, celle-ci doit être bloquée. En pratique, le modèle de la sous-station doit être modifié en augmentant la valeur de la résistance interne à une très haute valeur pour simuler la présence d'une diode bloquante.

#### 2.6.5 Résolution par heuristique itérative

Dans [64], Cai présente un problème très similaire à celui défini en section 2.5.3, et y décrit une méthode de résolution remarquable qui ne fait pas appel à des approximations par dérivées successives.

La méthodologie présentée dans ces travaux a donc été reprise pour pouvoir comparer les performances de cette heuristique avec la méthode de Newton-Raphson / Broyden.

L'auteur définit tout d'abord la relation (2.30) pour modéliser les liaisons électriques entre les trains et les sous-stations présents aux noeuds du réseau continu.

$$Y_{\text{reseau}} \cdot V_{\text{noeud}} = I_{\text{noeud}} \quad (2.30)$$

En outre, le déplacement de chaque train impose des conditions de charge, ce qui a pour effet de conditionner les échanges de puissance qui s'effectuent entre les sous-stations et les trains.

En chaque noeud du réseau où un train est présent, il est alors possible de vérifier la relation 2.31.

$$P_{\text{trains}} = V_{\text{trains}} \cdot I_{\text{trains}} \quad (2.31)$$

La détermination des paramètres électriques en chaque noeud du réseau se fait ensuite par un procédé itératif, résumé par l'algorithme 2<sup>9</sup>.

La tolérance  $\epsilon$  adopte la même valeur que pour l'algorithme 1.

8. Ce seuil dépend du problème considéré, il doit donc être défini par essais et erreurs en analysant le nombre moyen d'itération pour que la résolution s'effectue correctement.

9. Le lecteur intéressé, pourra se référer aux travaux de [64], pour visualiser un synoptique plus exhaustif de la méthode.

---

**Algorithme 2** Algorithme d'heuristique itérative

---

- 1: Création d'une solution initiale  $V^{(0)}$
  - 2: **Tant que**  $|V^{n+1} - V^n| > \epsilon$  **Faire**
  - 3:   Calcul du vecteur courant  $I_n = Y_n \cdot V_n$
  - 4:    $I_{trains} \leftarrow I_n$
  - 5:   Calcul du nouveau vecteur tension  $V_{trains} = \frac{P_{trains}}{I_{trains}}$
  - 6:    $V_n \leftarrow V_{trains}$
  - 7: **Fin du Tant que**
- 

Outre sa relative simplicité, cette méthode de résolution présente l'avantage de ne pas nécessiter de manipulations de matrices coûteuses en temps de calcul.

Cependant, dans [64], de nombreuses étapes de l'heuristique ont pour objectif d'effectuer une vérification du respect des conditions électriques et énergétiques en chaque nœud du réseau, pour s'assurer que le processus de résolution converge vers une solution admissible qui conserve une réalité physique.

### 2.6.6 Résultats et performances de la résolution

Certains problèmes de non-convergence surviennent lors du processus résolution de Newton-Raphson. En effet, la procédure appliquée nécessite d'inverser la matrice jacobienne à chaque itération.

Or, dans certaines conditions de fonctionnement, la jacobienne présente des singularités et l'inversion de cette matrice entraîne la divergence de l'algorithme de résolution. Ainsi, pour quasiment 10% des cas étudiés, la matrice jacobienne présente des singularités.

D'après l'expression de la jacobienne (2.22), les singularités sont générées soit par l'expression de la matrice d'admittance, soit par la dérivée des courants nodaux par rapport aux tensions nodales.

Une étude attentive des conditions de singularité indique que dans une très grande majorité des cas, l'expression de la matrice d'admittance en est la cause.

En effet, lorsque la distance entre les trains et les sous-stations d'alimentation est faible, la valeur de l'admittance au nœud considéré devient très grande, ce qui provoque une non-convergence lors de l'exécution de l'algorithme de résolution.

En revanche, en utilisant la méthode de Broyden pour mettre à jour la valeur de la matrice d'impédance, les problèmes de non-convergence disparaissent d'eux même puisque l'étape qui engendrait la singularité de la matrice jacobienne est supprimée et le temps de calcul est également diminué.

Une comparaison de vitesse de résolution entre la méthode de Newton-Raphson et la méthode de Broyden, pour des cas ne présentant pas de singularités, montre que la méthode Quasi-newton est en moyenne 17% plus rapide en terme de durée de résolution.

Une analyse comparative des performances de convergence de la méthode Quasi-Newton de Broyden et de l'heuristique développée par Cai est effectuée. Deux critères sont analysés : le temps de convergence et le nombre d'itérations pour y arriver. La méthode de Newton-Raphson n'est pas considérée puisqu'elle ne converge pas pour tous les cas d'études.

Pour cela, la ligne de Turin a été prise comme référence, avec 16 trains en exploitation sur un tour de boucle entier ; chaque intervalle possible a été simulé et les paramètres électriques nodaux de la ligne à chaque pas de temps ont été déterminés par les deux méthodes de résolution. La résolution a été effectuée avec un pas d'échantillonnage de 1s.

Chaque simulation nécessite en moyenne 3060 évaluations, et 12 simulations ont été nécessaires pour étudier l'ensemble des intervalles possibles avec un carrousel de 16 trains.

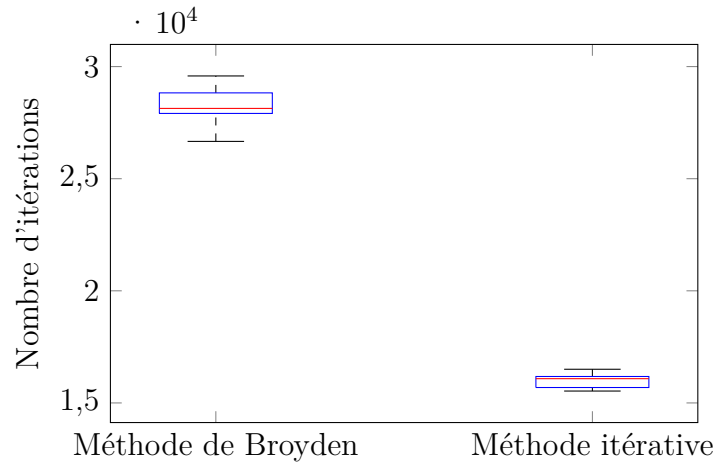


FIGURE 2.19 – Distribution statistique du nombre d'itérations pour effectuer la résolution.

La figure 2.19 montre que la méthode de Broyden nécessite en moyenne un plus grand nombre d'itérations que l'heuristique itérative pour solutionner chacune des 12 simulations, cependant, le temps de calcul par simulation est plus faible (figure 2.20). La méthode de Broyden met en moyenne 18s / 28000 itérations pour déterminer les paramètres électriques nodaux des 3060 pas de temps de simulation tandis que l'heuristique itérative formulée par Cai met en moyenne 19s / 16000 itérations pour réaliser la même tâche.

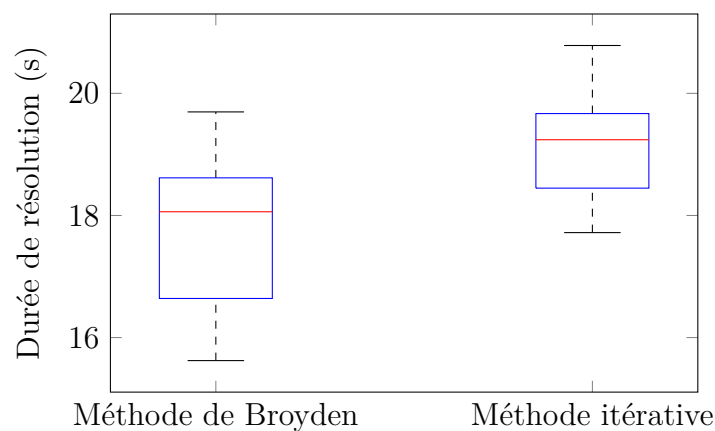


FIGURE 2.20 – Distribution statistique de la durée de résolution.

Une résolution par la méthode Quasi-Newton de Broyden sera donc privilégiée pour déterminer les paramètres électriques du réseau électrique, du fait de sa rapidité de convergence en terme de durée de résolution.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une brève introduction sur les systèmes VAL et Néoval a été effectuée, puis les principaux éléments constitutifs d'une ligne de métro automatique ont été présentés en détails : le réseau de traction et le matériel roulant. Des modèles mécaniques et électriques de ces éléments ont été établis et des hypothèses simplificatrices ont été formulées afin d'alléger la modélisation de la ligne de métro sans en affecter la précision. Ces différents modèles ont alors été agrégés pour simuler une ligne de métro générique.

Des essais réalisés sur la ligne de métro de Turin ont permis de mettre en évidence le lien entre l'évolution de la tension locale perçue par le train en fonction de la puissance électrique de freinage renvoyée sur la ligne.

Ensuite, trois méthodes de résolution itératives ont été introduites et deux de ces méthodes ont été retenues afin de déterminer les paramètres électriques des sous-stations et des trains à chaque instant. Puis, ces techniques itératives ont été mises en oeuvre sous le logiciel Matlab et leurs performances de convergence ont été analysées sur un cas d'étude.

Cette étude comparative a permis de choisir la méthode Quasi-Newton de Broyden comme technique de résolution des paramètres nodaux d'un réseau électrique.

Après avoir modélisé une ligne de métro et avoir introduit une méthode de résolution capable de déterminer les paramètres électriques de la ligne, la suite des travaux va se focaliser sur la mise en oeuvre de méthodes d'optimisation visant à réduire la consommation d'énergie au sein d'une ligne de métro.

