Le critère de Tsai-Hill

- Si $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ pour i=2,..,6, alors le critère se réduit à

$$(G+H)\sigma_1^2 = 1 \quad \rightarrow \quad G+H = \frac{1}{\sigma_1^2}.$$

- Mais si on est à l'état limite, alors σ_1 prend sa valeur limite, qui est X; donc:

$$G+H = \frac{1}{X^2}.$$

- De façon analogue, en posant successivement $\sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_3 \neq 0$ avec les autres composantes de la contrainte nulles, on obtient

$$F+H = \frac{1}{Y^2}, \quad F+G = \frac{1}{Z^2}.$$

- De ces trois dernières conditions on a finalement

Le critère de Tsai-Hill

$$F = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right],$$

$$G = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right],$$

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right].$$

- Donc, le critère de Hill peut se réécrire dans la forme

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}\right)\sigma_1\sigma_3 -$$

$$-\left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{\sigma_4}{S_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2 \leq 1.$$

Le critère de Tsai-Hill

- Pour une couche en état plan de contrainte, $\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0$, et donc on se réduit à

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2-\left(\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}-\frac{1}{Z^2}\right)\sigma_1\sigma_2+\left(\frac{\sigma_6}{S_{xy}}\right)^2\leq 1.$$

- D'ailleurs, pour une couche en composite, $Z=Y$ (voir page 115 à propos des couches en composite) et $S_{xy}=S$. Donc

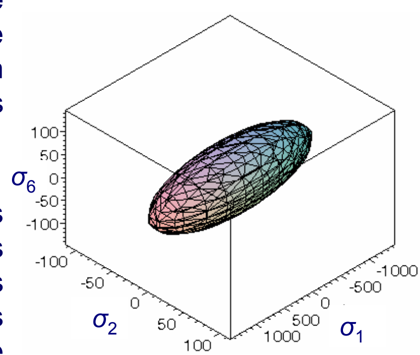
$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2-\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}+\left(\frac{\sigma_6}{S}\right)^2\leq 1.$$

- Cette équation est celle qui exprime le critère de Tsai-Hill pour une couche orthotrope en état plan de contrainte, qui est le cas d'intérêt pour les composites.
- Il faut faire des observations au sujet de ce critère. D'abord, on dispose maintenant d'une seule condition au lieu de cinq on peut donc tracer la surface limite dans l'espace des contraintes.

Le critère de Tsai-Hill

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Le graphique à côté présente cette surface, tracée dans le repère d'orthotropie, pour le composite en verre-époxyde déjà utilisé dans les exemples précédents (page 252).
- Le critère est donc interactif, à savoi il prévoit l'interaction entre les mécanismes de rupture, au moins au niveau macroscopique, mais phénoménologique, car il n'est pas en mesure de spécifier la cause de la crise, à savoir le mécanisme de rupture.



- En deuxième lieu, l'équation précédente détermine la condition limite; donc un état admissible de contrainte est celui dans lequel le premier membre de l'équation précédente prend une valeur inférieure à 1

Le critère de Tsai-Hill

- A remarquer, et c'est le problème principal du critère de Tsai-Hill, qu'on n'a fait aucune distinction entre la résistance à la traction et celle à la compression, qui sont normalement différentes, comme déjà vu.
- Cet inconvénient est implicite dans le critère de Hill, qui à l'origine était conçu pour les métaux et visait la crise élasto-plastique; dans ce contexte, la résistance ne dépend pas du signe des contraintes.
- La surface du graphique précédent est donc valable, à la rigueur, seulement où les contraintes sont de traction, ailleurs elle doit être remplacée avec une surface tracée en prenant en compte les caractéristiques de résistance à la compression
- Encore une fois, en utilisant toujours la formule de rotation des contraintes, page 250, on obtient l'expression du critère dans un repère quelconque:

Le critère de Tsai-Hill

$$\left(\frac{c^2\sigma_x+s^2\sigma_y-2cs\sigma_s}{X}\right)^2+\left(\frac{s^2\sigma_x+c^2\sigma_y+2cs\sigma_s}{Y}\right)^2-$$

$$-\frac{(c^2\sigma_x+s^2\sigma_y-2cs\sigma_s)(s^2\sigma_x+c^2\sigma_y+2cs\sigma_s)}{X^2}+\left[\frac{cs\sigma_x-cs\sigma_y+(c^2-s^2)\sigma_s}{S}\right]^2\leq 1.$$

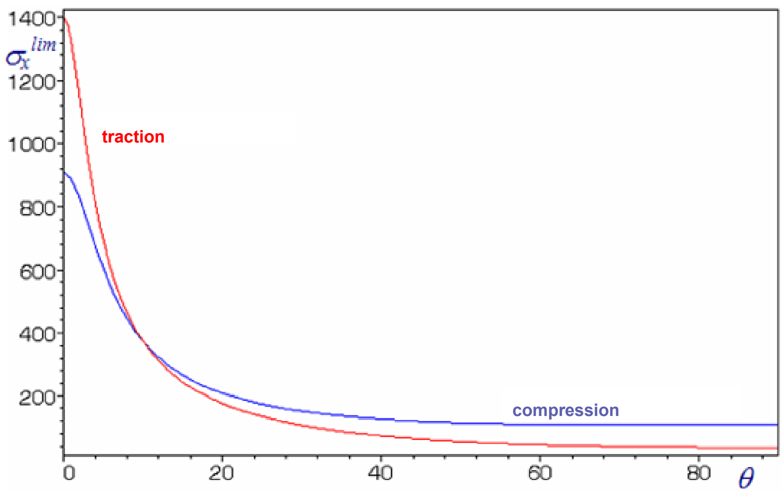
- Finalement, dans le cas, déjà considéré, d'un état de contrainte monoaxiale variable avec l'orientation, on obtient la courbe limite

$$\sigma_x^2\left[\frac{\cos^4\theta}{X^2}+\frac{\sin^4\theta}{Y^2}+\cos^2\theta\sin^2\theta\left(\frac{1}{S^2}-\frac{1}{X^2}\right)\right]=1.$$

- Ci de suite, on montre les courbes limite, en traction et compression, données par l'équation ci-dessus pour le composite en verre-époxyde déjà considéré

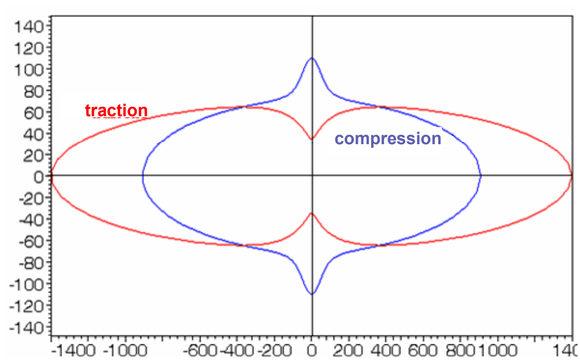
Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

Le critère de Tsai-Hill



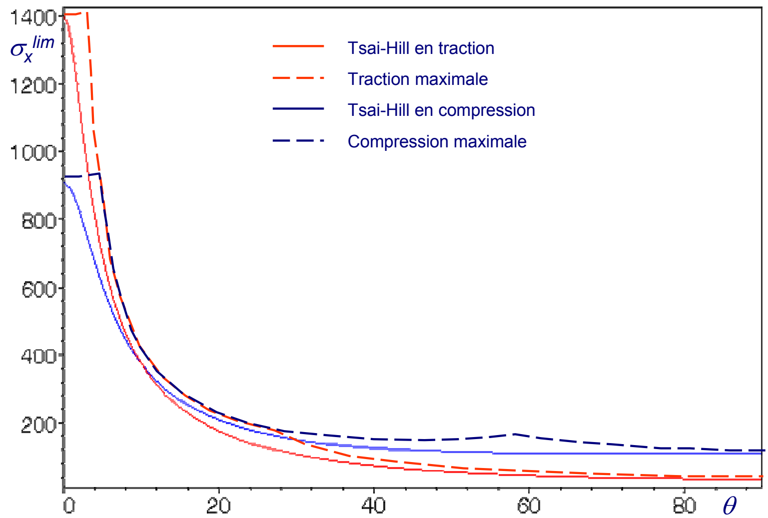
Le critère de Tsai-Hill

- Le diagramme suivant présente les mêmes courbes mais avec des courbes directionnelles.



- Finalement, on reporte la comparaison entre le critère de Hill et celui de la contrainte maximale, pour le cas en objet on remarque que le critère de Hill réussit, avec une seule courbe, à représenter tous les cas du critère de la contrainte maximale.

Le critère de Tsai-Hill



Le critère de Hoffmann

- Le critère de Hoffmann (1967) est une généralisation du critère de Hill, dans lequel on prend en compte la différence de résistance en traction et compression.
- La condition d'admissibilité du champ des contraintes dans le critère de Hoffmann est la suivante:

$$C_1(\sigma_2-\sigma_3)^2+C_2(\sigma_3-\sigma_1)^2+C_3(\sigma_1-\sigma_2)^2+$$
$$+C_4\sigma_1+C_5\sigma_2+C_6\sigma_3+C_7\sigma_4^2+C_8\sigma_5^2+C_9\sigma_6^2\leq 1.$$

- Les 9 constantes C_i sont déterminées sur la base des 9 résistances dans les directions d'orthotropie, X_t, X_c, Y_t, Y_c, Z_t, Z_c, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}, par une démarche analogue à celle vue pour le critère de Tsai-Hill.
- On obtient les relations suivantes:

$$C_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{Y_tY_c}+\frac{1}{Z_tZ_c}-\frac{1}{X_tX_c}\right],\quad C_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{X_tX_c}+\frac{1}{Z_tZ_c}-\frac{1}{Y_tY_c}\right],$$

Le critère de Hoffmann

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c}\right],$$

$$C_4 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad C_5 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \quad C_6 = \frac{1}{Z_t} - \frac{1}{Z_c},$$

$$C_7 = \frac{1}{S_{yz}^2}, \quad C_8 = \frac{1}{S_{xz}^2}, \quad C_9 = \frac{1}{S_{xy}^2}.$$

- Pour un état plan de contrainte, la condition se réduit à

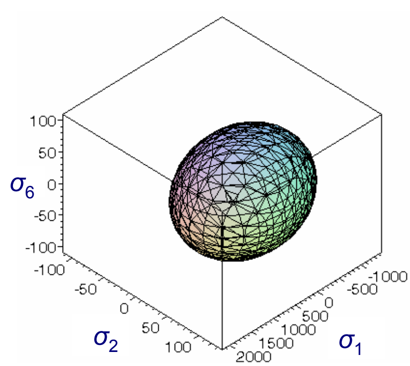
$$C_1\sigma_2{}^2 + C_2\sigma_1{}^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_9\sigma_6^2 \leq 1.$$

- Donc, pour une couche ($Z_t=Y_t$, $Z_c=Y_c$, $S_{xy}=S$) on parvient à:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t X_c} + \frac{X_c - X_t}{X_t X_c}\sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c}\sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1.$$

Le critère de Hoffmann

- L'équation précédente définit la surface limite de Hoffmann dans l'espace des contraintes, dans le repère d'orthotropie.
- Dans le cas d'égale résistance en traction et compression, on vérifie immédiatement que le critère de Hoffmann coïncide avec celui de Tsai-Hill.
- Les termes linéaires par rapport aux composantes de la contrainte permettent d'introduire la différence de résistance en traction et compression et déplacent la surface limite, un ellipsoïde, dans l'espace des contraintes.
- La figure suivante représente la surface limite pour le composite en verre-époxyde déjà traité.



Le critère de Hoffmann

- La surface limite est un ellipsoïde symétrique par rapport au plan σ_6=0,dont le centre se situe en

$$\sigma_1 = \frac{X_t + X_c}{2} + \frac{Y_t + Y_c}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{Y_t + Y_c}{2} + \frac{(X_t + X_c)Y_t Y_c}{4X_t X_c}, \quad \sigma_6 = 0.$$

- L'angle que le premier axe de l'ellipsoïde forme avec l'axe x_1 est

$$\beta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\left(\frac{Y_t Y_c}{X_t X_c} - 1\right).$$

- Le critère de Hoffmann est, d'un point de vue du calcul, le plus simple à utiliser, surtout pour des procédures automatiques de calcul.

Le critère de Tsai-Wu

- Tsai et Wu (1971) ont proposé un critère tensoriel pour les matériaux orthotropes, dans lequel le nombre des paramètres de résistance est supérieur à celui des critères précédents, dans le but de mieux interpoler les données de l'expérience.
- Dans ce critère, on introduit deux tenseurs de résistance, **f** et **F**, le premier d'ordre 2 et le deuxième d'ordre 4 Ces tenseurs ont les symétries de l'élasticité.
- Le critère de résistance, écrit dans le repère d'orthotropie et en notation de Voigt, est le suivant:

$$f_i \sigma_i + F_{hk}\sigma_h \sigma_k \leq 1, \quad i,h,k = 1,...,6.$$

- Dans le cas d'une couche en état plan de contrainte, la condition ci-dessus se réduit à

$$f_i \sigma_i + F_{hk}\sigma_h \sigma_k \leq 1, \quad i,h,k = 1,2,6 \quad \rightarrow$$
$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \leq 1.$$

Le critère de Tsai-Wu

- Pour les termes linéaires et la forme de la surface limite, vaut ce que déjà dit pour le critère de Hoffmann.
- Les paramètres f_i et F_{ij} se déterminent d'une façon analogue aux cas précédents.
- Si $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ pour i=2,6, alors le critère se réduit à

$$f_1\sigma_1 + F_{11}\sigma_1^2 = 1.$$

- A l'état limite, σ_1 devient X_t si la contrainte est de traction, X_c si de compression en considérant ces deux cas distincts, on obtient les relations

$$f_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_c X_t}.$$

- D'une manière analogue, si $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ pour i=1,6, on obtient

$$f_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_c Y_t}.$$

Le critère de Tsai-Wu

- Si ensuite il est $\sigma_6 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ pour i=1,2, et en considérant qu'il n'y a pas de différence de résistance avec le signe de la contrainte de cisaillement, on obtient

$$f_6 = 0, \quad F_{66} = \frac{1}{S^2}.$$

- La détermination du dernier terme F_{12} est plus délicate: on ne dispose pas d'ultérieurs tests monoaxiaux et donc ce terme doit être trouvé par le biais d'un test biaxial dans lequel $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$.
- Or, non seulement les tests biaxiaux sont d'exécution difficile, mais de ces tests il y en a une infinité, de par la valeur relative des deux contraintes.
- Si par exemple on prends un état de contrainte biaxiale avec $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, on obtient la condition

$$(f_1 + f_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1.$$

Le critère de Tsai-Wu

- En utilisant les expressions ci-dessus pour les autres paramètres de résistance, on obtient donc

$$F_{12}=\frac{1}{2\sigma^2}\left[1-\left(\frac{1}{X_t}+\frac{1}{X_c}+\frac{1}{Y_t}+\frac{1}{Y_c}\right)\sigma+\left(\frac{1}{X_tX_c}+\frac{1}{Y_tY_c}\right)\sigma^2\right].$$

- Donc, la valeur de F_{12} dépend non seulement de la valeur des autres paramètres de résistance, mais aussi du niveau de contrainte σ par lequel se produit la rupture biaxiale.
- Diverses auteurs considèrent que le terme F_{12} a une faible importance sur le résultat final et proposent même de le considérer nul D'autres ont montré expérimentalement que ce terme produit une petite variation des résultats même lorsqu'on le fait varier d'un facteur 8.
- De toute façon, le critère de Tsai-Wu est généralement écrit de la façon suivante:

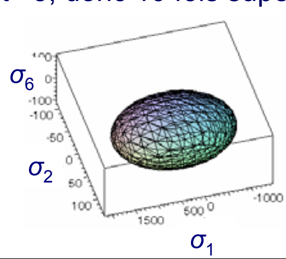
Le critère de Tsai-Wu

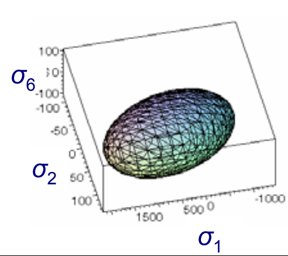
$$\frac{\sigma_1^2}{X_tX_c}+\frac{\sigma_2^2}{Y_tY_c}+\frac{X_c-X_t}{X_tX_c}\sigma_1+\frac{Y_c-Y_t}{Y_tY_c}\sigma_2+\frac{\sigma_6^2}{S^2}+2F_{12}^*\frac{\sigma_1\sigma_2}{X_tX_c}\leq 1,$$

avec $F_{12}^*=F_{12}X_tX_c$.

- On observe immédiatement que si F_{12}*=–1/2, le critère de Tsai-Wu coïncide avec celui de Hoffmann. Si en outre les résistances en traction et compression sont identiques, alors le critère de Tsai-Wu coïncide avec celui de Tsai-Hill.
- A titre d'exemple, on montre ici les surfaces limite pour le cas plusieurs fois traité du composite en verre-époxyde, pour les valeurs F_{12}*=–1/2 et –5, donc 10 fois supérieur.

F_{12}*=–0.5





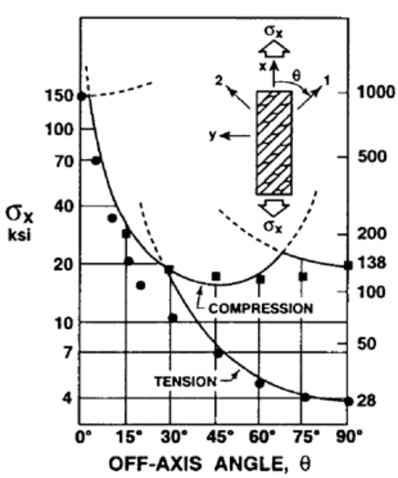
F_{12}*=–5

Comparaison avec les données de l'expérience

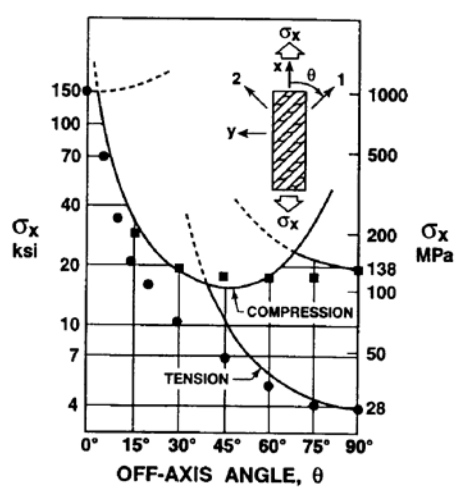
- On montre ci de suite des graphiques qui concernent le cas traité d'un état monoaxial de contrainte avec orientation variable, où certaines données expérimentales sont comparées avec les prédictions faites à l'aide d'un des critères de résistance vus ci-dessus.
- Les données, tirés du livre de Jones, concernent une campagne de tests conduits par Tsai principalement sur de composites en verre-époxyde les données caractéristiques sont celle du tableau de page 247, à l'exception du paramètre *S* qui vaut 0.055 Gpa.
- Dans les comparaisons des données expérimentales avec les critères de la contrainte et de la déformation maximale, on remarque que les point anguleux des courbes théoriques en réalité n'apparaissent pas dans les données expérimentales, qui suivent une allure plus régulière.
- Ceci est interprété par certains comme une confirmation du fait qu'il existe une interaction entre les modes de rupture.

Comparaison avec les données de l'expérience

Critère de la contrainte maximale

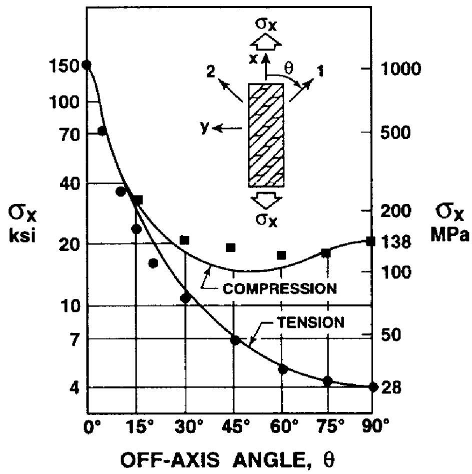


Critère de la déformation maximale

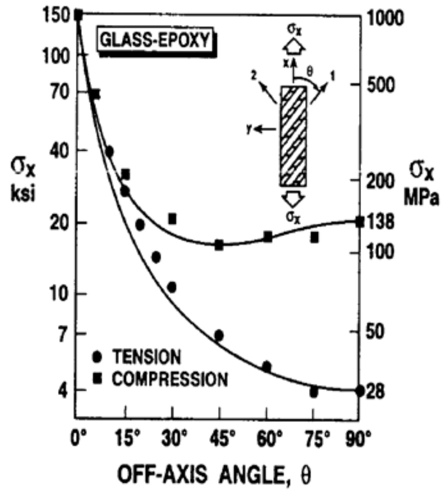


Comparaison avec les données de l'expérience

Critère de Tsai-Hill



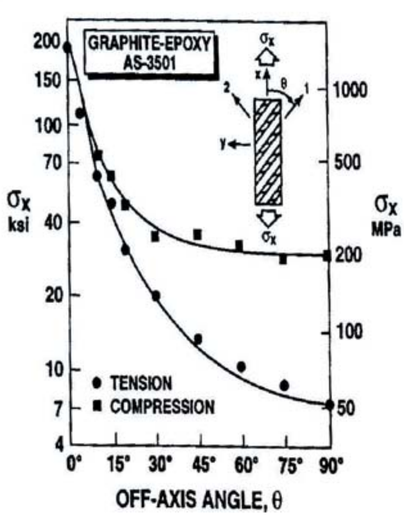
Critère de Hoffmann

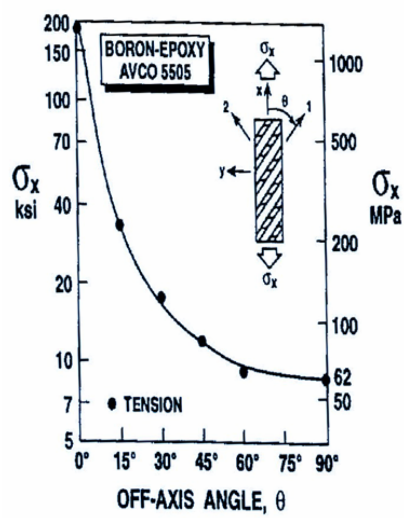


Comparaison avec les données de l'expérience

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

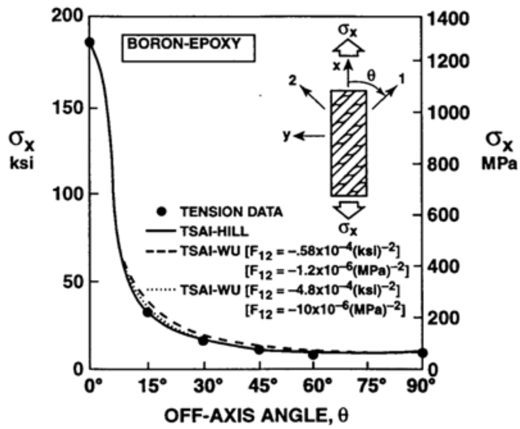
- Les graphiques qui suivent sont relatif au critère de Hoffmann, sur des composites en carbone-époxyde et bore-époxyde.





Comparaison avec les données de l'expérience

- Pour terminer, un diagramme qui concerne le critère de Tsai-Wu, avec 2 valeurs différentes de F_{12}, et la comparaison avec les données expérimentales sur un composite en bore-époxyde et avec les résultats du critère de Tsai-Hill.
- On peut remarquer que les trois courbes sont très proches entre elles et aux données expérimentales.



Homogénéisation des caractéristiques de résistance

- Considérons brièvement à présent les modèles utilisés pour prédire la résistance d'une couche en fonction des paramètres de résistance des phases, à savoir, on considère l'homogénéisation des caractéristiques de résistance.
- En particulier, nous nous bornons à considérer l'homogénéisation de la résistance à la traction en direction des fibres; on renvoie à la littérature spécialisée pour un approfondissement de la matière
- Le modèle que nous considérons est le suivant:
  - fibres ayant toutes la même résistance;
  - rupture fragile des fibres;
  - comportement élastique linéaire de fibres et matrice;
  - déformation limite des fibres inférieure à celle de la matrice.
- Si la fraction volumique des fibres, V_f, est suffisamment grande, la crise du composite se produit par déformation limite des fibres:

Homogénéisation des caractéristiques de résistance

$$\varepsilon^l_{\max} = \varepsilon^f_{\max}.$$

- Comme les fibres ont une déformation limite inférieure à celle de la matrice, celles-ci ne peuvent pas se dilater comme cette dernière et constituent le côté faible du composite.
- Par l'hypothèse de l'adhérence, en fait, la déformation des fibres et de la matrice sont la même; ceci d'ailleurs comporte que la résistance du composite en direction des fibres est donnée encore par la loi des mélanges:

$$\sigma^l_{\max} = V_f \sigma^f_{\max} + (1 - V_f)\sigma^m_\varepsilon,$$

où σ^m_ε est la contrainte dans la matrice en correspondance de la valeur limite de déformation dans les fibres.

- Naturellement, pour que le renfort soit efficace, on veut que

$$\sigma^l_{\max} > \sigma^m_{\max}.$$

Homogénéisation des caractéristiques de résistance

- Les deux équation précédentes permettent de trouver la valeur minimale de V_f pour avoir un renfort de la matrice par les fibres:

$$V_f^{crit} = \frac{\sigma^m_{\max} - \sigma^m_\varepsilon}{\sigma^f_{\max} - \sigma^m_\varepsilon}.$$

- Pour des valeurs inférieures de la fraction volumique, la résistance est dominée par la matrice: les fibres sont entraînées par la matrice dans sa déformation et peuvent donc se rompre pour des valeurs relativement petites de la charge appliquée.
- Si toutes les fibres se rompent au même moment, le composite aura encore une capacité de faire face à la charge appliquée si

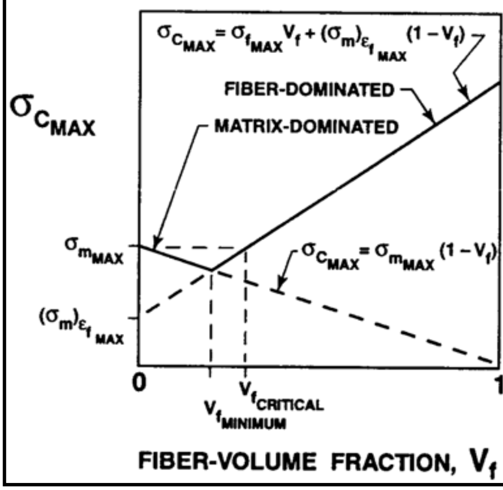
$$\sigma^l_{\max} < (1 - V_f)\sigma^m_{\max}.$$

- Dans ce cas, seule la matrice, évidemment, est active.
- En définitive, le composite se fracture par rupture des fibres si

Homogénéisation des caractéristiques de résistance

$$\sigma^l_{\max} = V_f \sigma^f_{\max} + (1 - V_f)\sigma^m_{\varepsilon} \geq (1 - V_f)\sigma^m_{\max}.$$

- De cette condition on tire la valeur minimale de V_f pour avoir une rupture du composite provoquée par la rupture des fibres:



$$V_f^{\min} = \frac{\sigma^m_{\max} - \sigma^m_{\varepsilon}}{\sigma^f_{\max} + \sigma^m_{\max} - \sigma^m_{\varepsilon}}.$$

- Le comportement est mieux compris grâce au graphique à côté (source: Jones): si $V_f < V_f^{min}$, c'est la matrice qui domine la rupture et la valeur limite reste inférieure à celui de la matrice jusqu'à V_f^{crit}; seulement pour des valeurs supérieures les fibres donnent un renfort efficace.

Chapitre 5

- **Théorie classique des stratifiés**

Introduction

- Les couches en composite ne sont jamais utilisées seules, mais sous la forme de stratifiés, à savoir en plaques obtenues par superposition de plusieurs plis, le plus souvent identiques.
- Les caractéristiques mécaniques de rigidité et résistance des couches normalement utilisées rendent en fait impossible l'utilisation de couches simples principalement à cause de:
  - une trop forte anisotropie de la réponse élastique, au moins pour les couches à renfort unidirectionnel;
  - une trop faible résistance en direction transversale;
  - une trop petite épaisseur (≈ 0.125 mm pour les pre-pregs en carbone), ce qui rend d'un côté la rigidité, surtout celle flexionnelle, trop petite et de l'autre donne un fort danger d'instabilité à la compression, dans les deux directions.
- Les couches sont donc utilisées pour composer des stratifiés, par superposition d'un nombre suffisant de couches, selon les besoins conceptuels.

Introduction

- Cette opération permet de créer des plaques dont les caractéristiques mécaniques, de rigidité et résistance, peuvent être l'objet de la conception.
- En fait, tandis que pour une plaque en matériau homogène c'est l'épaisseur le seul paramètre à dimensionner une fois le matériau choisi, un stratifié a des caractéristiques mécaniques finales qui dépendent aussi bien de celles des couches qui le composent que du nombre de ces couches et surtout de leur orientation relative.
- L’utilisation d'un stratifié nécessite donc d'une phase de conception et de vérification.
- La phase de conception doit comprendre normalement la conception de la résistance et de la rigidité. Il faut spécifier que ceci comporte non seulement la détermination de requis minimaux de résistances et rigidité, selon les besoins de la conception, mais aussi le type de réponse élastique (orthotrope, isotrope etc.).
- Un stratifié est, en définitive, un *matériau complexe complètement à concevoir*.

Introduction

- La théorie classique des stratifiés répond à cet but; son objectif est en fait celui de fournir un modèle mathématique capable de synthétiser la réponse élastique d'un stratifié comme si celui-ci était constitué simplement par une seule couche équivalente.
- Il s'agit, en définitive, comme déjà anticipé, d'un processus d'homogénéisation, dans l'épaisseur de la plaque, des caractéristiques mécaniques macroscopiques de rigidité.
- Les résultats de la théorie classique sont condensés dans une loi, qui formalise la réponse élastique de la plaque monocouche équivalente du stratifié, et ayant la même épaisseur totale.
- Il faut préciser dès maintenant que la théorie classique des stratifiés est seulement un modèle mathématique, basé sur la théorie classique des plaques en flexion et qui comme cette dernière est soumise à des critiques, encore plus importantes dans le cas des stratifiés pour une série de facteurs dépendants de l'anisotropie et durtout de l'hétérogénéité (de par la superposition de couches).

Introduction

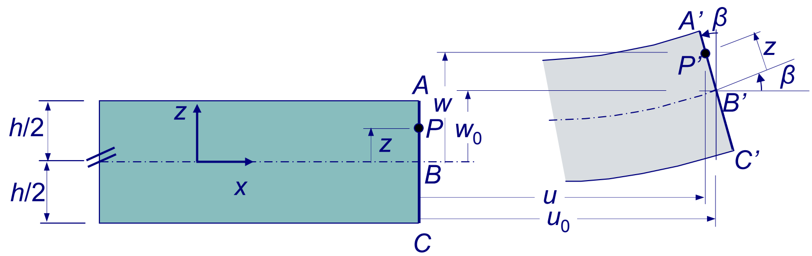
- Même si la théorie classique ne donne pas touts les résultats mécaniques (surtout les déformations et contraintes hors plan), elle est utile en phase de conception et indispensable dans la prédiction des caractéristiques élastiques globales du stratifié.
- Dans la suite, on introduit d'abord le modèle mécanique et donc on déduit la loi fondamentale des stratifiés.
- Dans un deuxième temps, on examinera le comportement hygro-thermo-élastique, encore en théorie classique des stratifiés, et puis le cas simplifié des stratifiés à couches identiques.
- Finalement, on introduira l'utilisation de la représentation polaire en théorie classique des stratifiés, car ceci permet de mieux en comprendre certains aspect fondamentaux.
- On a dit que la théorie classique trouve sa meilleure application en phase de conception. Aujourd'hui, la conception des stratifiés fait encore l'objet de recherches, car on ne dispose pas encore d'une seule méthode capable de répondre à tous les besoins de conception. A cet aspect seront consacrés les chapitres qui suivent.

Le modèle mécanique

- La théorie classique des stratifiés est basée sur les hypothèses suivantes:
  - adhérence parfaite entre les couches;
  - comportement élastique linéaire des couches;
  - petits déplacements, rotations et déformations;
  - épaisseur totale petite;
  - modèle cinématique du Kirchhoff.
- On rappelle que le modèle de Kirchhoff comporte trois hypothèses qui concernent la déformation de chaque segment droit orthogonal au plan moyen, qui reste:
  - rectiligne;
  - orthogonal à la surface moyenne déformée;
  - de la même longueur.
- Le choix de ce modèle cinématique a, c'est bien connu, des conséquences mécaniques importantes; en particulier, nous le verrons, on ne peut pas remonter aux déformations de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque.

Le modèle mécanique

- Considérons donc, voir la figure, quelles sont dans le plan *x*-*z* les conséquences des hypothèses (dans le plan *y*-*z* on a une situation analogue). On cherche le déplacement **u**= (u,v,w) d'un point quelconque *P*, de coordonnées (x,y,z).



- Le point *B* (z=0) se porte en *B*', avec un déplacement vertical w_0, u_0 en direction *x* et v_0 en direction *y*.

Le modèle mécanique

- Le déplacement en direction x d'un point P, situé sur la verticale de B à distance z du plan moyen, sera

$$u = u_0 - z \sin\beta,$$

où β est l'angle que la normale en B' à la surface moyenne forme avec l'axe z. A remarquer que la distance de P' depuis la surface moyenne est toujours z, de par l'hypothèse faite d'indéformabilité du segment vertical.

- Le déplacement de P en direction z sera, de son côté,

$$w = w_0 + z(\cos\beta - 1).$$

- Comme par hypothèse le segment normal au plan moyen reste rectiligne et orthogonal à la surface moyenne déformée, l'angle β est l'angle que le plan tangent à la surface moyenne forme avec l'axe x.

Le modèle mécanique

- Finalement, comme par hypothèse les déplacements et les rotations sont petits, il est

$$\beta \cong \sin\beta \cong \tan\beta = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \cos\beta \cong 1.$$

- Il en suit que dans les hypothèses faite il est

$$u = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x},$$

et d'une manière analogue

$$v = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y},$$

tandis que pour le déplacement vertical on obtient

$$w = w_0 \quad \forall z.$$

- Le déplacement d'un point P de coordonnées (x,y,z) est donc

Le modèle mécanique

$$\mathbf{u}=\left\{\begin{array}{c} u_0(x,y)-z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}\\ v_0(x,y)-z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}\\ w_0(x,y)\end{array}\right\}.$$

- A remarquer que le champ de déplacement est linéaire en *z*.
- Les déformations se calculent facilement: par l'hypothèse que celles-ci sont infinitésimales on a pour le champ de déformations

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}=\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right]-z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x\partial y},$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x}\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x}\right]=0,$$

Le modèle mécanique

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}=\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y}\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y}\right]=0,$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z}=0.$$

- La conséquence, sur le comportement cinématique, des hypothèses faites est donc que le *champ de déformations est plan*.
- Si l'on indique avec **ε°** le tenseur des petites déformations dans le plan moyen,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^o=\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\end{array}\right\},$$

Le modèle mécanique

et avec **κ** l'opposé du tenseur des courbures du plan moyen, assimilable à l'hessian de la fonction $w_0(x,y)$, grâce à l'hypothèse de petits déplacements et rotations,

$$\boldsymbol{\kappa}=\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_s\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix},$$

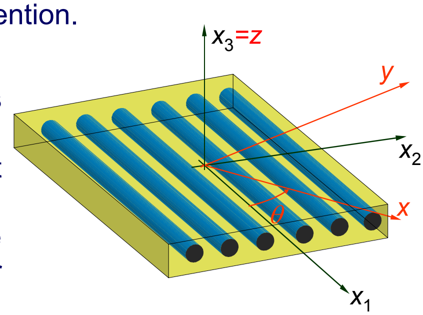
on obtient finalement, pour le tenseur des déformations,

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^o+z\,\boldsymbol{\kappa}\quad\rightarrow\quad\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^o\\ \varepsilon_y^o\\ \varepsilon_s^o\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_s\end{Bmatrix}.$$

- On remarque que les tenseurs plans ont été écrits en notation de Voigt et donc réduits à des vecteurs colonne, comme d'habitude.

La loi fondamentale des stratifiés

- La connaissance du champ de déformations permet de remonter, par le biais du calcul des contraintes, aux résultantes des actions internes, et de lier donc ces dernières aux déformations. Ceci est le but principal de la théorie classique des stratifiés.
- Nous avons vu que, dans le modèle mécanique utilisé, le champ de déformations est plan. Nous nous proposons à présent, en premier lieu, de passer au champ des contraintes.
- Ces passage est seulement apparemment immédiat, alors qu'en réalité il nécessite d'une certaines attention.
- D'abord, fixons la situation de calcul: il faut trouver les contraintes dans une couche comme en figure, en considérant que déformations et contraintes doivent être connues, en général, dans un repère quelconque {x, y, z}, où nous les indiquerons par le symbole ' (ε_i' et σ_i', i=1,...,6).



La loi fondamentale des stratifiés

- Si l'on considère un matériau quelconque, de par le fait qu'on a un état plan de déformation, les contraintes dans un repère quelconque, seront du type

$$\sigma'_i = C'_{1i}\varepsilon'_1 + C'_{2i}\varepsilon'_2 + C'_{6i}\varepsilon'_6, \quad i = 1,\dots,6.$$

- Donc, l'état de contrainte n'est pas, en général, plan. Mais si l'on considère la situation réelle, des matériaux avec renfort directionnel où, voir la figure, la comportement est isotrope transverse, avec direction x_1 de l'axe orthogonal au plan d'isotropie, pour lesquels

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix},$$

La loi fondamentale des stratifiés

alors on reconnaît, en suivant les procédures vues pour une rotation θ autour de l'axe x_3 de la matrice $[C]$, que

$$C'_{14} = C'_{24} = C'_{64} = C'_{15} = C'_{25} = C'_{65} = 0,$$

$$C'_{13} = C_{12}c^2 + C_{23}s^2, \quad C'_{23} = C_{12}s^2 + C_{23}c^2, \quad C'_{63} = -sc(C_{12} - C_{23}),$$

$$s = \sin\theta, \; c = \cos\theta.$$

- La première ligne ci-dessus est vraie même pour le cas plus général de couches orthotrope avec x_3 axe d'orthotropie.
- Il en suit

$$\sigma'_3 \neq 0, \quad \sigma'_4 = \sigma'_5 = 0.$$

- Dans d'autres mots, tandis que l'état de déformation est plan, celui de la contrainte ne l'est pas; en général, en fait,

$$\sigma'_3 = \left(C_{12}c^2 + C_{23}s^2\right)\varepsilon'_1 + \left(C_{12}s^2 + C_{23}c^2\right)\varepsilon'_2 - sc(C_{12} - C_{23})\varepsilon'_6.$$

La loi fondamentale des stratifiés

- A stricte rigueur, donc, il n'est pas possible d'utiliser les résultats vus auparavant qui concernent la loi de comportement pour un état plan de contrainte.
- Toutefois, on admet encore que ceci soit possible, dans d'autres mots on considère que ce soit $\sigma'_3=0$.
- Certains auteurs, par exemple Lekhnitskii, Jones, Pedersen, admettent simplement ce fait comme une hypothèse de base de la théorie classique des stratifiés.
- Une justification de cette hypothèse, peut toutefois être trouvée dans ce que normalement on admet même en théorie classique des plaques: sur les surfaces extérieures de la plaque, la valeur de la contrainte σ'_3 est égal à celui des pressions de contact, qui généralement sont inférieures, pour les charges reparties ordinaires, de in ou deux ordres de grandeur par rapport aux contraintes admissibles, auxquelles sont proches les composantes dans le plan du tenseur de la contrainte.

La loi fondamentale des stratifiés

- Ensuite, du moment que l'épaisseur est petite, si les contraintes varient avec continuité, il est vraisemblable que la valeur absolue de σ'_3 reste bornée et donc négligeable par rapport à celui des contraintes dans le plan.
- Cet argument est classique en mécanique des plaques; évidemment, cette approximation ne peut être considérée valable là où on a des états de contrainte triaxiale significatifs, comme c'est le cas des zones d'appui ou d'encastrement et celles d'application des charges concentrées.
- Un commentaire ultérieure concerne la plausibilité mécanique des hypothèses faites: en effet, celles-ci amènent, pour les stratifiés, à deux conséquences importantes.
- La première concerne les contraintes à cisaillement en direction x_3, σ'_4 et σ'_5: comme celles-ci sont nulles, il est en principe impossible l'équilibre d'un élément de plaque sous l'action de charges orthogonales au plan moyen.

- Cette circonstance est bien connue même en théorie classique des plaques et dans ce cas on trouve un remède en faisant appel aux équations d'équilibre.
- La seconde, s'observe directement dans la dernière équation: la contrainte σ'_3 est discontinue à l'interface des couches. Celui-ci est un paradoxe qui dérive du modèle cinématique adopté et qui rend en principe plus délicate l'admissibilité de l'hypothèse que σ'_3 soit négligeable.
- Ces deux paradoxes sont résolus, pour les stratifiés, en faisant appel à des théories d'ordre supérieur.
- Ces indications servent, avec d'autres, à mieux comprendre le champ d'application de la théorie classique des stratifiés, qui, on l'a déjà dit, doit être vue surtout comme un moyen pour prédire le comportement élastique global du stratifié, plutôt que comme une théorie capable de calculer avec la finesse requise les vrais champs de contrainte et de déformation dans le stratifié.

- En admettant donc que l'état de contrainte soit plan, on peut utiliser comme loi de comportement celle déjà introduite,

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix},$$

avec les composantes Q_{ij} fonction des C_{ij}, voir page 155.

- Dan un repère quelconque $\{x, y, z\}$, on aura

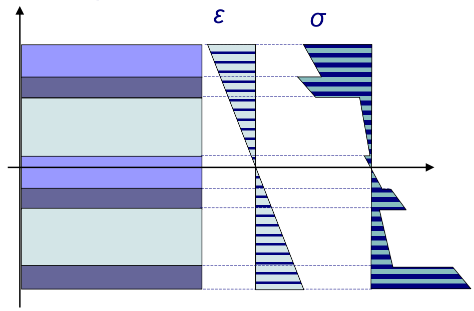
$$\{\sigma\}' = [Q]'\{\varepsilon\}',$$

avec les composantes de la matrice $[Q]'$ données à page 161.

- A se rappeler que dans un repère quelconque, la matrice $[Q]'$ n'est pas, en général, orthotrope, à savoir, la couche se comporte comme un matériau anisotrope.

La loi fondamentale des stratifiés

- Une ultérieure observation est la suivante: dans le modèle adopté, le champ de déformation est unique pour tout les stratifié, à savoir il y a continuité de déformation entre une couche et l'autre.
- Ce n'est pas ainsi pour les contraintes; en fait, dans les formules de la page précédente on observe que, du moment qu'en général les couches sont différentes et diversement orientées, celles-ci ont des rigidités différentes dans la même direction et donc sont différemment sollicitées pour un identique niveau de déformation.
- Un exemple, purement qualitatif, de ce qu'il arrive est celui en figure, qui met en évidence l'existence de discontinuités, qui peuvent être importantes, des contraintes aux interfaces des couches.



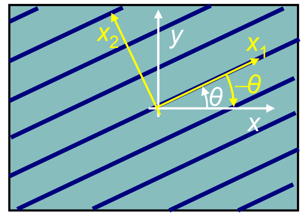
La loi fondamentale des stratifiés

Copyright P. Vannucci – UVSQ
paolo.vannucci@meca.uvsq.fr

- Dans le calcul de la matrice [Q]' avec les formules de page 161 il faut toutefois faire encore attention.
- En fait, ces formules permettent le calcul de la matrice de rigidité au passage du repère $\{x_1, x_2, x_3\}$ au repère $\{x, y, z\}$, tourné de l'angle θ en sens trigonométrique.
- Or, lorsqu'on a à faire avec un stratifié, ce qu'on fait normalement est de fixer un repère unique, propre au stratifié, dans lequel on va exprimer toutes les grandeurs tensorielles et vectorielles de chaque couche et de la plaque en général.
- Ce repère ne coïncide pas généralement avec le repère d'orthotropie de toutes les couches, car celles-ci peuvent avoir une orientation quelconque.
- En effet, les propriétés finales du stratifié s'obtiennent exactement par rotation relative des couches, de façon à optimiser le comportement voulu.
- Soit donc $\{x, y, z\}$ le repère global du stratifié.

La loi fondamentale des stratifiés

- Alors, la situation ordinaire est la suivante, vue dans le plan *x-y:* une couche tournée de l'angle θ par rapport au repère du stratifié, $\{x,y,z\}$.



- Il faut considérer que normalement on connaît les propriétés élastiques de la couche, à savoir la matrice [Q] ou les modules de l'ingénieur correspondants, dans le repère $\{x_1,\ x_2\ x_3\}$, que nous appèlerons *matériel* et qui coïncide avec celui d'orthotropie, avec normalement l'axe x_1 qui est l'axe fort, celui disposé le long des fibres pour les couches à renfort unidirectionnel.
- Ceci implique que le calcul de la matrice [Q]' doit être fait avec les formules vues, mais en considérant que maintenant la rotation à faire à partir du repère d'orthotropie est $-\theta$, et pas θ.
- Donc, si on veut considérer comme angles de rotation ceux mesurés en sens trigonométrique à partir du repère du stratifié

La loi fondamentale des stratifiés

(parce que ce sont ceux-ci en effet les angles qu'on utilise pour le dimensionnement et l'analyse du stratifié), alors dans les formules qui donnent les composantes de [Q]', page 161, il faut changer le signe des puissances impaires de sin θ.

- La matrice qui donne les caractéristiques élastiques d'une couches tournée de θ en sens trigonométrique par rapport au repère du stratifié est donc la suivante:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xs} \\ Q_{xy} \\ Q_{ss} \\ Q_{ys} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4s^3c & s^4 \\ sc^3 & c^4-3s^2c^2 & s^3c-sc^3 & 2(s^3c-sc^3) & 3s^2c^2-s^4 & -s^3c \\ s^2c^2 & 2(sc^3-s^3c) & c^4+s^4 & -4s^2c^2 & 2(s^3c-sc^3) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(sc^3-s^3c) & -2s^2c^2 & (c^2-s^2)^2 & 2(s^3c-sc^3) & s^2c^2 \\ s^3c & 3s^2c^2-s^4 & sc^3-s^3c & 2(sc^3-s^3c) & c^4-3s^2c^2 & -sc^3 \\ s^4 & 4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & 4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{16} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \\ Q_{26} \\ Q_{22} \end{Bmatrix}.$$