

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.
Galilée

Chapitre 3

Le code CAVIF

Après avoir fait le choix d'une modélisation de type mélange homogène pour aborder le problème du fractionnement primaire d'un jet de carburant dans un moteur Diesel, il convient à présent d'implanter ce modèle dans le code de calcul le plus adapté à nos besoins.

Le code CAVIF (*Cavitating Internal Flow*), développé à l'IFP par Dumont *et al.* [56, 54], traite déjà de manière eulérienne l'écoulement cavitant à l'intérieur de l'injecteur. C'est un code diphasique tridimensionnel, dérivé du code KMB [73], qui utilise un modèle de mélange pour représenter une phase notée l (carburant liquide) et une phase notée v (vapeur représentant les poches de cavitation). En outre, ce code permet, par la prise en compte de maillages multi-blocs, de calculer des géométries complexes analogues à la réalité, avec également la possibilité de simuler la levée et descente d'aiguille de l'injecteur grâce à un module de mouvement de maillage.

Si l'on considère ce qui a été mis en lumière dans la partie 1.1, il est primordial de prendre en compte les phénomènes intervenant à l'intérieur de l'injecteur pour pouvoir représenter de manière satisfaisante la formation du spray. Une approche eulérienne utilisant un modèle de mélange peut être envisagée simplement dans le code CAVIF. De plus, en étudiant l'atomisation des jets directement avec CAVIF, le couplage avec l'écoulement sortant de l'injecteur sera effectué implicitement.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la description du code CAVIF et de ses schémas numériques. Ensuite, quelques tests numériques, visant à évaluer la diffusion numérique des méthodes utilisées, sont présentés, avant de détailler les modifications apportées au code afin de permettre la prise en compte de la phase gazeuse g .

3.1 Description générale du code

Une présentation succincte du code CAVIF est préalablement nécessaire. Dans la version originale du code, développé par Dumont [54], les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles sont résolues avec les termes de compressibilité et de viscosité (équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement), selon une architecture numérique proche de celle du code KMB [73].

3.1.1 Système d'équations résolu

On rappelle le système d'équations à résoudre, détaillé à la partie 2.4, pour un mélange de carburant f :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{f,ij}}{\partial x_j} \\ p_f = f(\rho_f) \end{cases} \quad (3.1)$$

Le système 3.1 est résolu en exprimant, pour tout point du maillage, la variation temporelle de la masse volumique du mélange f $\left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t}\right)$, celle de la quantité de mouvement dans les trois directions de l'espace $\left(\frac{\partial \rho_f u}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial \rho_f v}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial \rho_f w}{\partial t}\right)$. On en déduit alors aisément les grandeurs physiques ρ_f , u , v , w et ensuite la pression p_f grâce à l'équation d'état $p_f = f(\rho_f)$.

3.1.2 Structure numérique

Comme dans le code KMB [73], CAVIF utilise une formulation ALE¹ [80, 134] pour laquelle les éléments fluides se déplacent avec une vitesse arbitraire, dite "vitesse de grille". Outre sa capacité à traiter des domaines déformables, cette méthode présente l'avantage de décomposer l'opérateur différentiel temporel en trois étapes :

- Étape A : contribution des termes sources (chimie, évaporation du spray).
- Étape B : résolution du gradient de pression et de la diffusion visqueuse.
- Étape C : prise en compte des termes convectifs.

Les étapes A et B sont purement lagrangiennes, puisque le maillage suit le fluide avec sa vitesse (les termes convectifs n'interviennent pas). En revanche, l'étape C est eulérienne car le maillage se déplace avec sa vitesse propre et les termes convectifs, résultant de la différence de vitesse entre le fluide et le maillage, sont pris en compte dans le calcul de la solution.

Le modèle diphasique, présenté au chapitre précédent, traite un seul "pseudo-fluide" dont les caractéristiques physiques évoluent. Ainsi, quand bien même l'écoulement présenterait des changements de phase physiques ("vaporisation" du carburant liquide, par cavitation, ou "recondensation" de la vapeur de carburant, par implosion), le code ne prendrait en compte qu'un seul et même fluide, du fait que les changements de phase sont simplement déduits des variations de la masse volumique du fluide f . L'étape A se limite donc dans CAVIF au calcul de $p_f = f(\rho_f)$.

3.1.3 Discrétisation spatiale

La méthode de discrétisation spatiale utilisée est de type volumes finis. On suppose alors que toute grandeur a une valeur uniforme à l'intérieur d'une maille (ou cellule élémentaire de calcul). On résout donc les équations de grandeurs moyennées

¹ALE : *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*

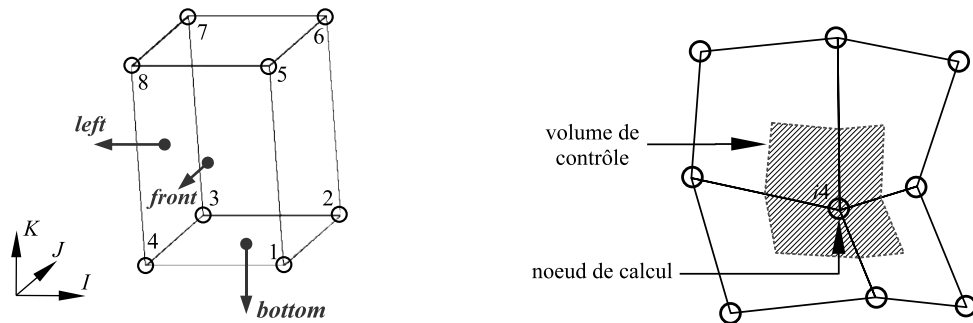
sur un volume de contrôle donné, noté Ω , comme on a pu le voir dans la partie 2.2. Ainsi, pour calculer la divergence d'une grandeur Φ en un point, on utilise le théorème de Gauss-Ostrogradski :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} d\omega = \int_{\partial\Omega} \Phi \cdot n dS \quad (3.2)$$

avec n la normale unitaire à la surface délimitant le volume Ω et dirigée vers l'extérieur. CAVIF utilise des maillages structurés, constitués d'hexaèdres (mailles à six faces), de sorte que l'on peut décomposer cette relation comme la somme des flux traversant chaque face, comme on le verra dans la partie 3.2.2.

Repérage local des nœuds et faces

Afin de repérer les huit nœuds (ou sommets) de chaque maille, on associe à chacun un numéro, conformément à la figure 3.1a. Pour les calculs de flux, il est également utile de repérer chacune des six faces de la maille : la face l (*left*) est la face délimitée par les nœuds 4378, la face r (*right*) par les nœuds 1265, la face b (*bottom*) par les nœuds 4123, la face t (*top*) par les nœuds 8567, la face f (*front*) par les nœuds 4158 et enfin la face d (derrière) par les nœuds 3267. Étant donné que la face r , par exemple, est aussi la face l de la maille voisine de droite, et que le même raisonnement peut être appliqué aux faces t et d , on n'utilise finalement que les trois faces caractéristiques l , b et f pour calculer les flux.



(a) Numérotation locale des nœuds d'une maille (b) Volume de contrôle de quantité de mouvement pour le nœud $i4$, dans une configuration 2D

FIG. 3.1 – Discretisation spatiale dans CAVIF

Repérage des mailles et des nœuds

Les maillages utilisés étant structurés, on repère une maille par l'indice correspondant à son nœud local n° 4, noté $i4$. Les indices de maille sont incrémentés d'abord selon l'axe I , puis selon J et enfin K . L'indice $i4$ d'une maille quelconque est donc déterminé de la manière suivante :

$$i4 = (k-1)*nyp + (j-1)*nxp + i$$

où les indices i , j et k sont les indices du nœud $i4$ selon les axes I , J et K , n_{xp} et n_{yp} sont les nombres de nœuds du maillage dans les directions I et J .

Flagage des nœuds et mailles

A chaque nœud du maillage correspond un certain nombre de *flags* : il s'agit d'indices prenant des valeurs qui renseignent sur la nature de ce nœud. Ainsi, le *flag* de maille, noté f , prend une valeur différente selon que le nœud considéré désigne une maille réelle ou fictive. Le *flag* f renseigne également sur les conditions limites appliquées. Le *flag* de nœud, noté ifv , spécifie la nature du nœud (fluide, paroi, entrée, sortie). Enfin, le *flag* de repère, noté $ifrez$, sert essentiellement à gérer les interfaces entre maillages, en multi-blocs [73].

3.1.4 Les volumes de contrôle

Les vitesses sont localisées aux nœuds, alors que les quantités scalaires (ρ_f , p_f , μ_f) sont définies au centre des mailles. On utilise donc deux volumes de contrôle différents : pour les scalaires il s'agit de la maille elle-même (hexaèdre à 6 faces), alors que le volume de contrôle de la quantité de mouvement est en fait constitué des huit parties d'hexaèdres entourant le nœud concerné (cf. figure 3.1b). Ce volume de contrôle possède donc 24 faces en 3D.

3.1.5 Les conditions aux limites

L'étude d'écoulements fortement instationnaires et le modèle implanté dans le code CAVIF impliquent, lors des simulations, la propagation de fortes ondes de pression (l'équation d'état considère une phase liquide compressible). Dans le cas du calcul de l'écoulement à l'intérieur de l'injecteur seulement [54], il était alors indispensable de choisir des conditions aux limites capables de prendre en considération les différentes ondes traversant les frontières du domaine de calcul.

Conditions aux limites en entrée

En entrée du domaine de calcul, les conditions limites imposées doivent représenter correctement les oscillations de pression qui ont lieu dans le système d'injection. Une étude numérique unidimensionnelle de l'écoulement en amont de l'injecteur [71] a montré l'existence de fluctuations de pression (~ 10 MPa avec une fréquence de l'ordre de 1 kHz). Ce paramètre est à prendre en compte dans la simulation d'injections de longue durée. On considère donc un modèle de relaxation entre une pression loin en amont de l'entrée de l'injecteur, considérée comme constante, et la pression dans les mailles d'entrée du domaine de calcul. La vitesse d'entrée est alors calculée par la relation de Bernoulli, en la supposant perpendiculaire à la section d'entrée [56].

Conditions aux limites en sortie

Les conditions de sortie implantées dans le code CAVIF sont celles de la formulation NSCBC² [162, 133], afin d'avoir des conditions limites non réfléchissantes et de permettre le passage des poches de cavitation à travers la sortie du domaine de calcul, lorsque celui-ci s'arrête à la sortie de l'orifice d'injection. L'implantation de cette formulation est détaillée par Dumont *et al.* [56]. En revanche, quand on tient compte de la chambre de combustion dans le calcul, on peut considérer celle-ci comme fermée, ce qui permet de s'affranchir du problème des conditions limites en sortie.

Conditions aux limites aux parois

Les parois sont supposées imperméables à l'écoulement : les flux de toutes les grandeurs scalaires sont donc nuls à travers les parois. De plus, des conditions limites d'adhérence sont prises en compte, de sorte que la vitesse du fluide au voisinage de la paroi est fixée égale à celle de la paroi (c'est-à-dire qu'elle est nulle quand les parois sont fixes). Aucune loi de paroi n'est spécifiée, car le maillage est supposé suffisamment fin pour résoudre la couche limite. En outre, la cavitation pouvant se développer au voisinage des parois, l'utilisation d'une loi de paroi n'est pas adaptée à notre problème, car elle pourrait amener à des erreurs.

3.2 Les schémas numériques

Le schéma numérique de convection utilisé dans le code CAVIF est le même que celui développé dans KIVA-II [3]. En revanche, pour l'avancement temporel, on utilise un schéma explicite d'ordre 3, à l'instar de Schmidt dans le code bidimensionnel CAVALRY [152].

3.2.1 Avancement en temps

Contrairement aux codes KIVA-II ou KMB, un schéma de Runge-Kutta [147, 96] d'ordre 3 (RK3) est utilisé pour l'avancement en temps. Ce type de schéma présente de bonnes qualités de précision et de stabilité numérique [79] et a notamment été utilisé avec succès sur des écoulements à nombre de Reynolds élevé par Le et Moin [100].

Abramowitz et Stegun [1] ainsi que Gear [63] donnent différentes formulations de la méthode de Runge-Kutta. Elle consiste à diviser le pas de temps Δt en trois sous-cycles, notés $\kappa = 1, 2, 3$. On affecte alors aux variables calculées à chaque sous-cycle un certain poids (par le biais de coefficients γ et ψ), de manière à calculer la valeur de ces variables physiques à la fin du pas réel. Pour une grandeur scalaire Φ quelconque (ρ_f par exemple) :

$$\Phi^\kappa = \gamma^\kappa \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^\kappa \Delta t + \psi^\kappa \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^{\kappa-1} \Delta t + \Phi^{\kappa-1} \quad (3.3)$$

²NSCBC : *Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*

Pour le bilan de quantité de mouvement, le calcul de la vitesse aboutit à une formulation quelque peu différente :

$$u_i^\kappa = \frac{1}{*\rho_f^\kappa} \left[\gamma^\kappa \left(\frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} \right)^\kappa \Delta t + \psi^\kappa \left(\frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} \right)^{\kappa-1} \Delta t + *\rho_f^{\kappa-1} u_i^{\kappa-1} \right] \quad (3.4)$$

avec $*\rho_f^\kappa$ la masse volumique dans le volume de contrôle de quantité de mouvement, calculée au sous-cycle κ .

Les conditions initiales du premier sous-cycle ($\kappa = 1$) tiennent compte du mouvement de maillage lagrangien, alors qu'aux autres sous-cycles, le maillage est considéré fixe, à la position définie pour le pas de temps réel suivant. Les conditions initiales ont donc la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f^0 = \rho_f^{n-1} \frac{\Omega_{ijk}^n}{\Omega_{ijk}^{n+1}} \\ \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \right)^0 = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} *\rho_f^0 u_i^0 = *\rho_f^{n-1} u_i^{n-1} \frac{*\Omega_{ijk}^n}{*\Omega_{ijk}^{n+1}} \\ \left(\frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} \right)^0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

où on note avec l'exposant n les grandeurs calculées au n -ième pas de temps réel (physique), c'est-à-dire au dernier sous-cycle ($\kappa = 3$). Ω_{ijk} et $*\Omega_{ijk}$ sont respectivement le volume de contrôle des scalaires et le volume de contrôle de quantité de mouvement.

Les valeurs des coefficients γ et ψ sont fixées de manière analogue à ce qui est fait dans le code CAVALRY [152] et sont consignées dans le tableau 3.1.

Sous-cycle	$\kappa = 1$	$\kappa = 2$	$\kappa = 3$
γ	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$
ψ		$-\frac{17}{60}$	$-\frac{5}{12}$

TAB. 3.1 – Coefficients du schéma Runge-Kutta d'ordre 3 utilisés dans le code CAVIF [54]

3.2.2 Schéma de convection

Le schéma QSOU³ [3], qui est le schéma utilisé pour la convection dans le code CAVIF, est une modification d'un schéma proposé par Van Leer [169]. Ce type de schéma est monotone et aurait pu être appelé "méthode du gradient minimal". En effet, pour la convection unidimensionnelle d'une grandeur quelconque Φ , dans le cas où Φ_i est compris entre Φ_{i-1} et Φ_{i+1} , la pente est calculée comme suit :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\text{sign}(\Phi_i - \Phi_{i-1})}{\Delta x} \min(|\Phi_i - \Phi_{i-1}|, |\Phi_{i+1} - \Phi_i|) \quad (3.6)$$

³QSOU : *Quasi-Second-Order Upwind*

avec Φ_i la valeur de la grandeur Φ , au point d'indice i . En revanche, si Φ_i n'est pas compris entre Φ_{i-1} et Φ_{i+1} , la pente est supposée nulle.

Considérons maintenant un cas unidimensionnel, avec tailles de cellules variables ; on pose $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta \Phi_i = \Phi_{i+1} - \Phi_i$. La pente est alors déterminée par :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i = \begin{cases} \text{sign}(\Delta \Phi_i) \min \left(\frac{|\Delta \Phi_i|}{\Delta x_i}, \frac{|\Delta \Phi_{i-1}|}{\Delta x_{i-1}} \right) & \text{si } \Delta \Phi_i \Delta \Phi_{i-1} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

Ainsi, en notant ν le numéro du sous-cycle convectif (étape B ou C), la valeur de $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^\nu$, utilisée pour le calcul des flux entre les cellules i et $i+1$, est donnée par la relation :

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^\nu = \begin{cases} \Phi_i^\nu + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^\nu (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i) \left(1 - \frac{\delta \Omega}{\Omega_i^\nu} \right) & \text{si } \delta \Omega > 0 \\ \Phi_{i+1}^\nu - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^\nu (x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}) \left(1 + \frac{\delta \Omega}{\Omega_{i+1}^\nu} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

où $x_{i+\frac{1}{2}}$ est la coordonnée de la face à travers laquelle passent les flux (entre les cellules i et $i+1$), $\delta \Omega$ est le volume de flux et Ω_i^ν est le volume de la cellule i . La grandeur $\delta \Omega$ est positive si le volume de la cellule $i+1$ augmente par le mouvement de la face notée $i + \frac{1}{2}$ (dans ce cas, la cellule i est la maille *upwind*), alors qu'elle est négative si le volume de la maille $i+1$ diminue (la cellule $i+1$ est alors la maille *upwind*).

Aux frontières du domaine de calcul, près d'une paroi, la condition suivante est imposée :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_i^\nu = 0 \quad (3.9)$$

Pour le cas du voisinage des conditions limites d'entrée, la relation 3.7 est utilisée, en considérant la valeur de Φ imposée en entrée.

Cette méthode est généralisée aux cas tridimensionnels en considérant simplement que les flux dans chaque direction dépendent seulement des gradients dans cette même direction.

Étape B

Cette étape concerne uniquement l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les termes de gradient de pression et de diffusion sont déterminés selon la relation suivante :

$$^* \Omega_{ijk}^\kappa \left(\frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} \right)^{\kappa, B} = - \sum_{\beta=1}^{24} p_f^{\kappa-1} A_\beta^{\kappa-1} + \sum_{\beta=1}^{24} \tau_{f,ij}^{\kappa-1} A_\beta^{\kappa-1} \quad (3.10)$$

avec A l'aire de la face concernée et l'indice β se rapportant aux faces du volume de contrôle de quantité de mouvement. La pression p_f est déterminée par l'équation d'état :

$$p_f^\kappa = f(\rho_f^\kappa) \quad (3.11)$$

Étape de convection C

Dans le cas de l'équation de transport d'une quantité scalaire Φ quelconque (ρ_f par exemple), la discrétisation suivante est utilisée :

$$\Omega_{ijk}^{\kappa} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^{\kappa, C} = - \sum_{\alpha=1}^6 \Phi_{\alpha}^{\kappa-1} \delta V_{\alpha}^{\kappa-1} \quad (3.12)$$

où l'indice α se rapporte à l'une des faces du volume de contrôle et δV est défini comme suit :

$$\delta V_{\alpha}^{\kappa} = u_{\alpha}^{\kappa} A_{\alpha}^{\kappa} \quad (3.13)$$

Concernant le bilan de quantité de mouvement, la partie relative à la convection est calculée par la relation :

$${}^* \Omega_{ijk}^{\kappa} \left(\frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} \right)^{\kappa, C} = - \sum_{\beta=1}^{24} u_{i,\beta}^{\kappa-1} \delta M_{\beta}^{\kappa-1} \quad (3.14)$$

La grandeur δM est donnée par :

$$\delta M_{\beta}^{\kappa-1} = \frac{1}{8} (\rho_{ext}^{\kappa-1} \delta V_{ext} - \rho_{int}^{\kappa-1} \delta V_{int}) \quad (3.15)$$

avec δV_{ext} et δV_{int} définis par la relation 3.13 et les indices *ext* et *int* se rapportant aux faces des volumes de contrôle de masse situées de part et d'autre de la face β du volume de contrôle de quantité de mouvement.

3.2.3 Bilan

Le schéma de la figure 3.2 résume la résolution numérique dans le code CAVIF (n est le pas de temps physique alors que κ est le sous-cycle du schéma RK3).

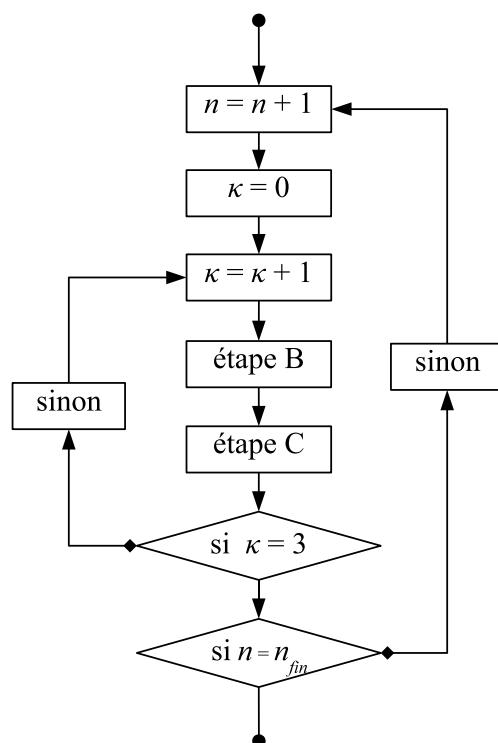


FIG. 3.2 – Résolution numérique dans le code CAVIF

3.3 Étude de la précision des schémas numériques du code

Pour utiliser ce code dans la chambre de combustion, en sortie de l'injecteur, une bonne résolution de l'écoulement nécessite des schémas numériques précis. En effet, les tourbillons pouvant se former en surface du jet doivent être correctement résolus par le maillage, mais on doit également disposer de schémas numériques capables d'éviter leur dissipation prématurée. Des tests d'advection de vortex, similaires à ceux réalisés par Moureau [122] avec le code IFP-C3D [182], sont mis en œuvre avec CAVIF, en résolvant les équations d'Euler (effets de la viscosité négligés), afin de comparer la dissipation numérique de ses schémas d'advection à celle d'autres codes.

Ces tests consistent à advecter un tourbillon gazeux (vapeur de carburant, en l'occurrence) bidimensionnel de 2 centimètres de diamètre dans une boîte de même largeur. On initialise donc un champ de vitesses tourbillonnant sur lequel on superpose un champ convectif constant. Le champ de pression initial est déterminé en fonction de l'équation d'état du modèle ($p_f = \rho_f c_v^2$ dans la vapeur). Le tourbillon initial comprend 21 nœuds dans les deux directions (mailles régulières de taille caractéristique $\Delta x = 1$ mm). Le profil de vitesses initial est gaussien (figure 3.3a), avec une vitesse maximale de 10 m/s. La vitesse d'advection du tourbillon est constante et égale à 20 m/s. Quant au champ de pression initial, il prend alors des valeurs très faibles (de l'ordre de 50 Pa), de manière à conserver les conditions de présence de la phase vapeur seule tout au long du test. Le tourbillon est advecté sur 4 centimètres, soit pendant 2 millisecondes.

3.3.1 Comparaison avec les schémas numériques du code IFP-C3D

La figure 3.3 montre que les schémas de CAVIF (QSOU + RK3) ont le même comportement que le schéma QSOU, implanté dans le code IFP-C3D, accompagné d'un schéma explicite pour l'avancement temporel des termes convectifs. Les profils de vitesse sont identiques et l'énergie cinétique du tourbillon, après advection, est de l'ordre de 30 % de l'ECI (Énergie Cinétique Initiale) dans les deux cas, alors que l'utilisation de limiteurs de pente Superbee-Van Leer [79] (toujours ordre 2 en espace) dans IFP-C3D réduit la dissipation numérique et que le schéma FDC⁴ d'ordre 1 dissipe plus d'énergie cinétique. Ce test met donc en évidence que l'utilisation d'un schéma Runge-Kutta d'ordre 3 n'a pas d'incidence sur la dissipation numérique du schéma spatial.

3.3.2 Étude sur le critère de stabilité CFL

Une autre série d'essais porte sur la stabilité du schéma vis-à-vis de l'augmentation du pas de temps de calcul. Pour cela, on fait varier le critère de stabilité CFL ⁵ [38], qui représente le rapport de la distance parcourue par l'onde la plus

⁴FDC : *Full Donor Cell*

⁵ CFL : nombre de Courant-Friedrichs-Lewy

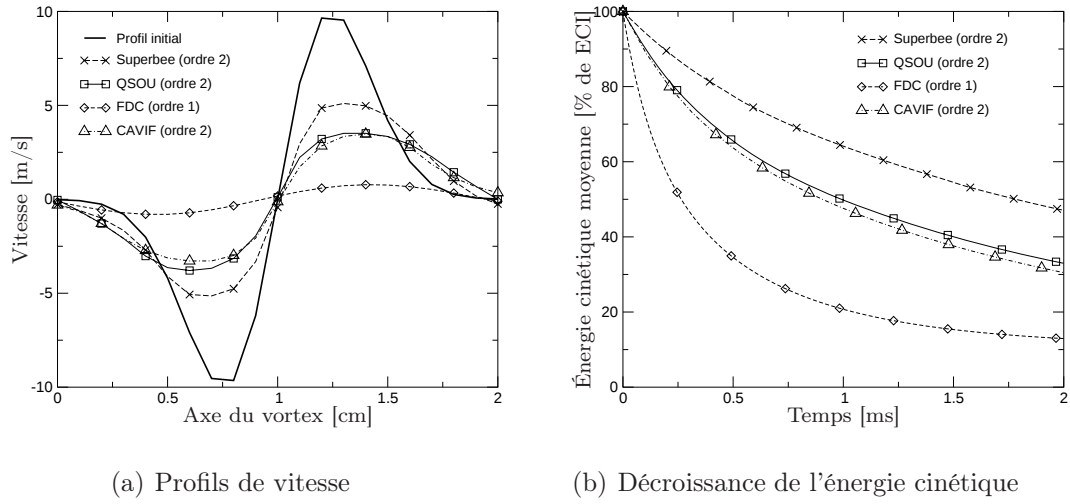


FIG. 3.3 – Comparaison de la diffusion numérique de différents schémas d'advection

rapide de l'écoulement, durant le pas de temps Δt , sur la taille caractéristique Δx d'une maille représentative :

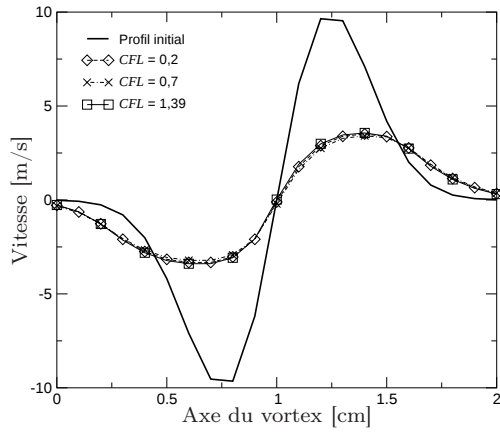
$$CFL = \frac{(|u| + c) \Delta t}{\Delta x} \quad (3.16)$$

où $|u|$ est la norme de la vitesse maximale et c est la vitesse du son dans le fluide considéré. Les tests effectués (figure 3.4) montrent que la précision des schémas numériques de CAVIF reste la même pour différentes valeurs de CFL et que l'on peut augmenter ce critère jusqu'à une valeur limite de 1,39 au-delà de laquelle le calcul diverge. Le schéma RK3 permet donc d'augmenter le pas de temps d'une manière significative sans altérer la précision des résultats (les tests d'advection avec IFP-C3D ont été réalisés pour un CFL de 0,7).

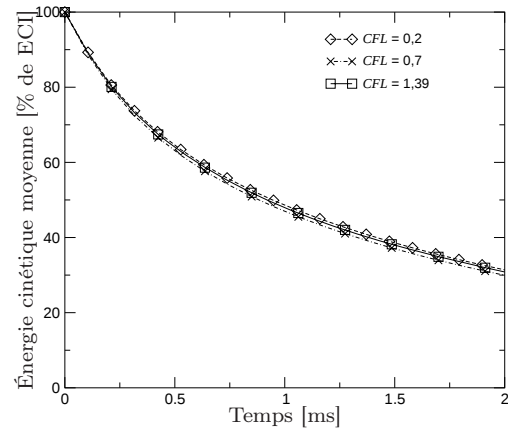
3.3.3 Étude de sensibilité à la résolution spatiale

La sensibilité des schémas de CAVIF au raffinement des maillages est éprouvée, afin d'en évaluer l'ordre de convergence (figure 3.5). Les résultats font état de la dissipation la plus faible pour le tourbillon le mieux résolu par le maillage (100×100 mailles). Comme prévu, la dissipation numérique diminue à mesure que le maillage est plus fin, tout en gardant à l'esprit que le profil initial de vitesses résolu n'est pas le même en fonction du raffinement du maillage.

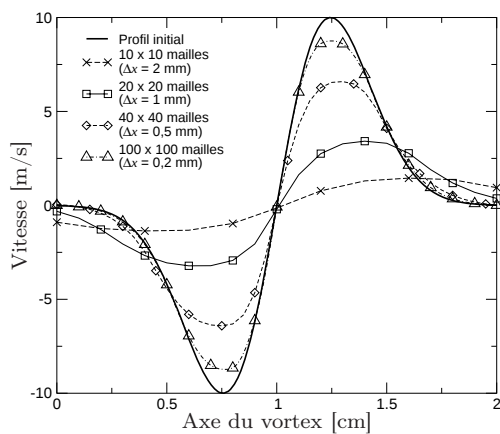
Il est alors possible de calculer la norme L^2 de l'erreur relative E_{L^2} , qui est fonction de la discrétisation spatiale utilisée. Si $E_{L^2} = \mathcal{O}(\Delta x^p)$, on dit que la méthode numérique est d'ordre p ou encore que l'ordre de convergence de la méthode est p . La figure 3.6 permet ainsi de vérifier que le schéma numérique du code CAVIF est d'ordre compris entre 1 et 2 en espace, pour un mélange purement gazeux.



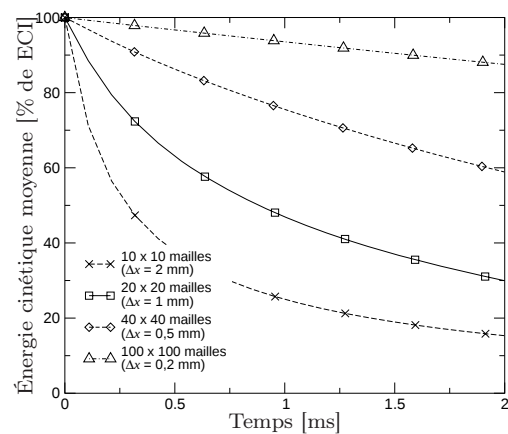
(a) Profils de vitesse



(b) Décroissance de l'énergie cinétique

FIG. 3.4 – Étude sur la condition CFL du calcul

(a) Profils de vitesse



(b) Décroissance de l'énergie cinétique

FIG. 3.5 – Étude sur la sensibilité à la résolution spatiale

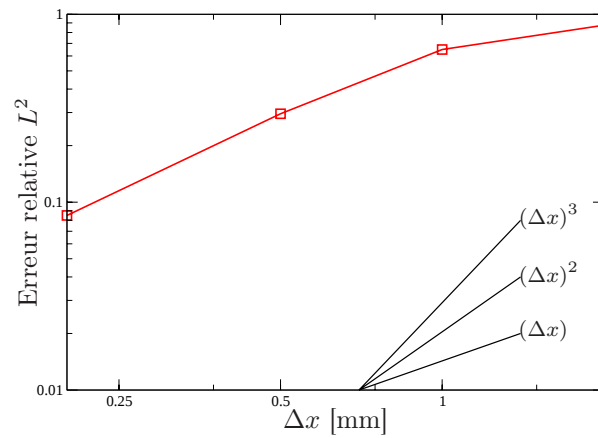


FIG. 3.6 – Ordre de convergence du schéma numérique de CAVIF : variation de l'erreur relative en fonction de la taille caractéristique des mailles de calcul

Les schémas numériques de CAVIF mettent donc en lumière des problèmes de précision, mais ne présentent pas un obstacle majeur à la poursuite de l'étude de l'atomisation. En effet, le présent test est très discriminatoire et met en évidence volontairement les faiblesses des schémas numériques afin de les comparer aisément.

3.4 Implantation de la phase gazeuse g

Au regard des tests numériques précédents, on se propose d'utiliser CAVIF pour ajouter une phase g qui représente le gaz de la chambre de combustion. On traite donc désormais un mélange m constitué du carburant f et du gaz g .

3.4.1 Système d'équations résolu

Le nouveau système d'équations à résoudre pour un mélange m , détaillé dans la partie 2.6, est rappelé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \rho_m u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{m,ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho_m Y_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m Y_f u_j}{\partial x_j} = 0 \\ p_m = f(\rho_m, Y_f) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

De manière analogue à ce qui est présenté plus haut, le système 3.17 est résolu en exprimant, pour tout point du maillage, la variation temporelle de la masse volumique du mélange ($\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$), celle de la quantité de mouvement dans les trois directions de l'espace ($\frac{\partial \rho_m u}{\partial t}$), ($\frac{\partial \rho_m v}{\partial t}$) et ($\frac{\partial \rho_m w}{\partial t}$), ainsi que celle de la quantité transportée ($\frac{\partial \rho_m Y_f}{\partial t}$). On en déduit alors les grandeurs physiques ρ_m , u , v , w et Y_f , et ensuite la pression p_m grâce à l'équation d'état $p_m = f(\rho_m, Y_f)$.

Toutes les relations liées à la discrétisation dans le code CAVIF et établies dans la partie 3.2 restent donc valables, en remplaçant les indices f (comme pour ρ_f , p_f , μ_f) par des indices m . La relation 3.11, quant à elle, devient simplement :

$$p_m^\kappa = f(\rho_m^\kappa, \frac{(\rho_m Y_f)^\kappa}{\rho_m^\kappa}) \quad (3.18)$$

La quantité $\rho_m Y_f$ est traitée comme une grandeur scalaire (donc comme ρ_m). Concrètement, cela consiste à ajouter une espèce fictive dans le code CAVIF, comme il en existe dans le code KMB. Numériquement, les relations 3.3 et 3.12 sont donc appliquées, comme pour toute autre grandeur scalaire, avec $\Phi = \rho_m Y_f$.

3.4.2 Implantation de l'équation d'état

La plus grande partie des modifications à apporter au code CAVIF concerne l'implantation de l'équation d'état $p_m = f(\rho_m, Y_f)$. Comme il a été décrit dans la partie 2.7.2, il s'agit en fait d'une grille de valeurs discrètes qu'il faut exploiter pour un calcul précis de la pression p_m du mélange, pour un couple de valeurs données (ρ_m, Y_f) quelconques.

Plusieurs solutions s'offrent à nous, parmi lesquelles une régression directe de la surface, sur toute la plage de valeurs de ρ_m et Y_f , qui permettrait l'établissement d'une relation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ continue. Une autre approche consiste à utiliser les

réseaux de neurones pour, là encore, établir une relation analytique. Enfin, une troisième méthode prend en considération chaque maille de la grille tabulée, en réalisant une interpolation bilinéaire pour chacune d'elles.

Dans tous ces cas de figure, la distribution initiale des valeurs, servant à l'approximation de la surface $p_m = f(\rho_m, Y_f)$, doit être particulièrement soignée, de manière à bien représenter les zones à forts gradients (par une discrétisation plus fine).

Avant tout, l'intuition pourrait mener à envisager de diviser l'équation d'état en trois sous-parties, selon que le carburant est constitué de liquide pur, de vapeur pure ou bien du mélange diphasique $l + v$ (cf. paragraphe 2.7.2), ce qui présenterait l'avantage de faciliter l'approximation en traitant séparément chacune de ces sous-parties. Mais l'utilisation de la relation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ nécessiterait dans ce cas de connaître la nature de la pseudo-phase carburant f , afin d'utiliser la sous-partie concernée, ce qui n'est pas possible avec la seule connaissance de ρ_m et Y_f .

La régression polynomiale directe

Dans un premier temps, une régression polynomiale est réalisée, à Y_f fixé, pour les différentes courbes d'équation $p_m = f(\rho_m)$. La pression p_m peut alors être écrite en fonction des différents coefficients de régression A_j :

$$p_m = A_0 + A_1 \rho_m + A_2 \rho_m^2 + \dots + A_j \rho_m^j + \dots + A_n \rho_m^n = \sum_{j=0}^n A_j \rho_m^j \quad (3.19)$$

La courbe présentant les pentes et irrégularités les plus fortes est celle pour laquelle $Y_f = 0$ (cette courbe correspond en fait à l'équation d'état régissant le carburant, détaillée dans la partie 2.5). La stratégie consiste donc à trouver le degré de régression minimal n permettant de bien représenter cette courbe. Ce degré de polynôme devrait ainsi s'avérer suffisant pour la régression des autres courbes d'équation $p_m = f(\rho_m)$, correspondant au reste des valeurs de Y_f .

Ensuite, la méthode choisie consiste à approcher les différentes valeurs des coefficients A_j , par une régression polynomiale selon Y_f , de sorte que l'on puisse reconstruire la surface d'équation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ complètement :

$$A_j = B_{0j} + B_{1j} Y_f + B_{2j} Y_f^2 + \dots + B_{ij} Y_f^i + \dots + B_{mj} Y_f^m = \sum_{i=0}^m B_{ij} Y_f^i \quad (3.20)$$

où les coefficients de régression B_{ij} forment une matrice de taille $(m+1) \times (n+1)$.

La relation de régression de la surface représentative de l'équation d'état complète s'écrit alors comme la somme de polynômes :

$$p_m = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^m B_{ij} Y_f^i \right) \rho_m^j \quad (3.21)$$

Cependant, la surface à interpoler présente de très fortes pentes (selon l'axe ρ_m , mais également selon l'axe Y_f lorsque le carburant est liquide) ce qui rend une régression directe difficile, même à des ordres élevés. Plutôt que chercher directement une approximation de la surface d'équation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$, il peut alors s'avérer

judicieux d'opérer des transformations adéquates sur la surface, de manière à en faciliter la régression. Ainsi, l'équation $p_m = f(\ln \rho_m, Y_f)$ a par exemple une forme moins contraignante pour l'interpolateur (la figure 3.7a en représente une partie), mais des "vaguelettes", caractéristiques de la régression polynomiale, apparaissent néanmoins. En outre, lors de l'application de la transformation inverse pour revenir à l'équation d'origine $\rho_m = f(p_m, Y_f)$, les niveaux ne sont pas les mêmes que ceux de la surface d'origine (figure 3.7b à comparer avec la figure 2.7a). Cet exemple met en évidence les limites de cette méthode, d'autant plus qu'il ne concerne qu'une partie de l'équation d'état (cas où $\rho_v < \rho_f < \rho_l$), alors qu'il est nécessaire de l'appliquer à la plage de valeurs complète, accentuant les difficultés d'approximation.

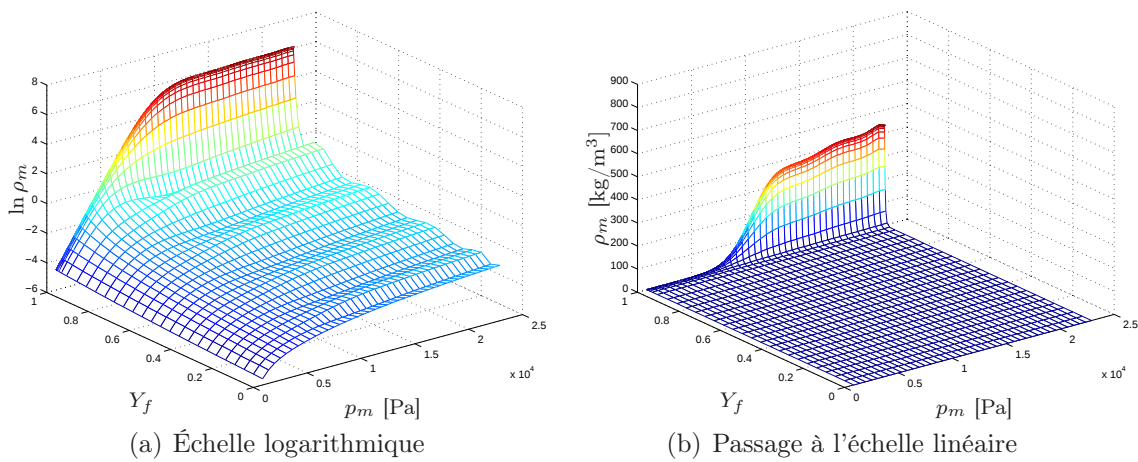


FIG. 3.7 – Résultat de la régression polynomiale de la surface représentant l'équation d'état du mélange $m = (l + v) + g$, pour le cas où $\rho_v < \rho_f < \rho_l$

L'ajout de points dans la distribution initiale, visant à améliorer la précision de la régression, a aussi pour effet pervers de la rendre plus difficile, car le système peut s'avérer "sur-contraint". De même, l'augmentation de l'ordre de régression ne fait qu'accroître l'apparition de "vaguelettes". La surface d'équation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ est donc trop irrégulière pour une régression polynomiale de ce type.

Les réseaux de neurones

Les réseaux de neurones sont une classe d'algorithmes d'apprentissage statistique qui offrent des perspectives intéressantes pour la régression de courbes mathématiques. En effet, ils permettent la prédiction de valeurs inconnues *a priori* à partir d'un ensemble de valeurs connues, dites d'apprentissage. Il s'agit d'une fonction mathématique comprenant, comme toute fonction, des variables et un résultat ; elle comprend de plus des paramètres ajustables appelés poids. Les poids sont initialisés aléatoirement avant l'apprentissage, puis modifiés de manière itérative jusqu'à l'obtention d'un compromis satisfaisant entre la précision de l'approximation sur l'ensemble d'apprentissage et sur un ensemble de validation disjoint du précédent [51].

Considérant un ensemble de données, on peut ainsi ajuster un réseau de neurones à ces données en calculant convenablement les paramètres du réseau : il s'agit donc d'une méthode de régression, analogue aux méthodes de régression linéaire ou

polynomiale [50]. Mais pour obtenir un modèle non-linéaire de précision donnée, un réseau de neurones a besoin de moins de paramètres ajustables que les méthodes de régression classiques. Cette parcimonie des réseaux de neurones résulte du fait que le nombre de poids ajustables varie linéairement avec le nombre de variables du processus à modéliser, alors qu'il varie exponentiellement pour la plupart des autres approximateurs [83]. En règle générale, toute fonction bornée suffisamment régulière peut être approchée avec une précision arbitraire, dans un domaine fini de l'espace de ses variables, par un réseau de neurones comportant une couche de neurones cachés en nombre fini, possédant tous la même fonction d'activation, et un neurone de sortie linéaire [82].

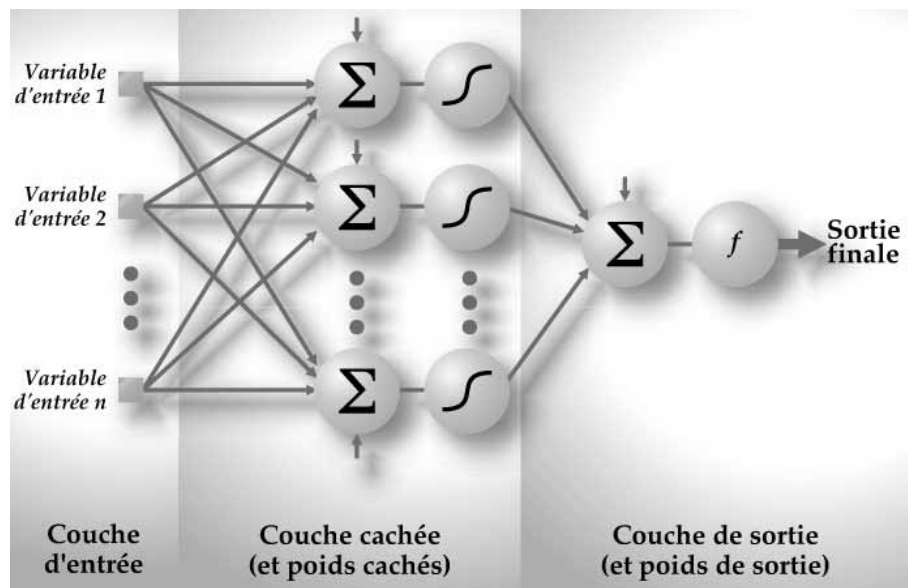


FIG. 3.8 – Topologie d'un réseau de neurones : dans chaque unité de la couche cachée, les variables sont combinées de façon linéaire, puis le réseau de neurones applique une transformation non-linéaire à chacune de ces combinaisons et finalement, les valeurs résultant des unités cachées sont combinées de façon linéaire pour obtenir la valeur prédite [52]

Le calcul de la valeur prédite par un réseau de neurones se compose de quelques étapes simples (figure 3.8). Premièrement, on calcule une série de combinaisons linéaires des variables explicatives (ρ_m et Y_f dans notre cas) :

$$\phi_i = A_i + B_i \rho_m + C_i Y_f \quad (3.22)$$

où A_i , B_i et C_i sont les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ combinaison linéaire. La seconde étape consiste à appliquer une transformation non-linéaire à chacune des combinaisons linéaires (on parle de fonction d'activation) afin d'obtenir les valeurs de ce que l'on appelle les unités cachées ou neurones qui forment ensemble la couche cachée. La fonction d'activation couramment utilisée est la tangente hyperbolique [51] :

$$h_i = \tanh(\phi_i) = \frac{e^{\phi_i} - e^{-\phi_i}}{e^{\phi_i} + e^{-\phi_i}} \quad (3.23)$$

où h_i est la $i^{\text{ème}}$ unité cachée. L'utilisation d'une telle fonction de transfert avec une expansion infinie dans ses termes joue un rôle fondamental dans la capacité d'un réseau de neurones de capter les dépendances de haut niveau entre les variables explicatives [52]. Finalement, les unités cachées sont recombinaées linéairement afin de calculer la valeur prédite par le réseau de neurones :

$$p_m = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i h_i \quad (3.24)$$

où n est le nombre d'unités cachées du réseau et les coefficients β_0 et β_i sont ceux de la combinaison linéaire.

La figure 3.8 résume le fonctionnement d'un réseau de neurones et, dans le cas qui nous intéresse, la fonction recherchée a la forme suivante :

$$\begin{aligned} p_m &= \beta_0 + \beta_1 \tanh(A_1 + B_1 \rho_m + C_1 Y_f) \\ &\quad + \beta_2 \tanh(A_2 + B_2 \rho_m + C_2 Y_f) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \beta_n \tanh(A_n + B_n \rho_m + C_n Y_f) \\ &= \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \tanh(A_i + B_i \rho_m + C_i Y_f) \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'architecture optimale est obtenue en choisissant un nombre de neurones n suffisant pour que le réseau reproduise la partie déterministe de la fonction à interpoler (pas trop "rigide"), sans pour autant présenter des oscillations non-significatives dues à un nombre de neurones trop élevé (on parle alors de "surajustement").

Les premiers tests montrent des résultats plus prometteurs pour l'approximation de la courbe après transformations appropriées ($\ln p_m = f(\ln \rho_m, Y_f)$), plutôt que directement pour la surface $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ qui comporte de trop fortes irrégularités. Le réglage optimal est obtenu pour l'utilisation de 20 neurones cachés, mais les résultats demeurent assez médiocres pour des valeurs de Y_f proches de 1 (figure 3.9), d'autant plus que l'erreur est amplifiée lorsqu'on applique la transformation inverse (exponentielle) qui ramène à la fonction de départ ($p_m = f(\rho_m, Y_f)$).

L'augmentation du nombre de points d'apprentissage, même dans les zones de fort gradient, ne corrige pas sensiblement ce manque de précision. Les très fortes irrégularités de la courbe ne permettent donc pas à cette méthode de satisfaire à notre problématique.

L'interpolation bilinéaire par morceaux

L'interpolation bilinéaire d'une surface d'équation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ consiste à trouver les coefficients A , B , C et D tels que :

$$p_m = A + B \rho_m + C Y_f + D \rho_m Y_f \quad (3.26)$$

Compte tenu de la forme irrégulière de cette surface et des fortes pentes (figures 2.7 et 2.8), une interpolation bilinéaire par morceaux est nécessaire. Concrètement, il s'agit de déterminer les coefficients A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} et D_{ij} pour chacune des

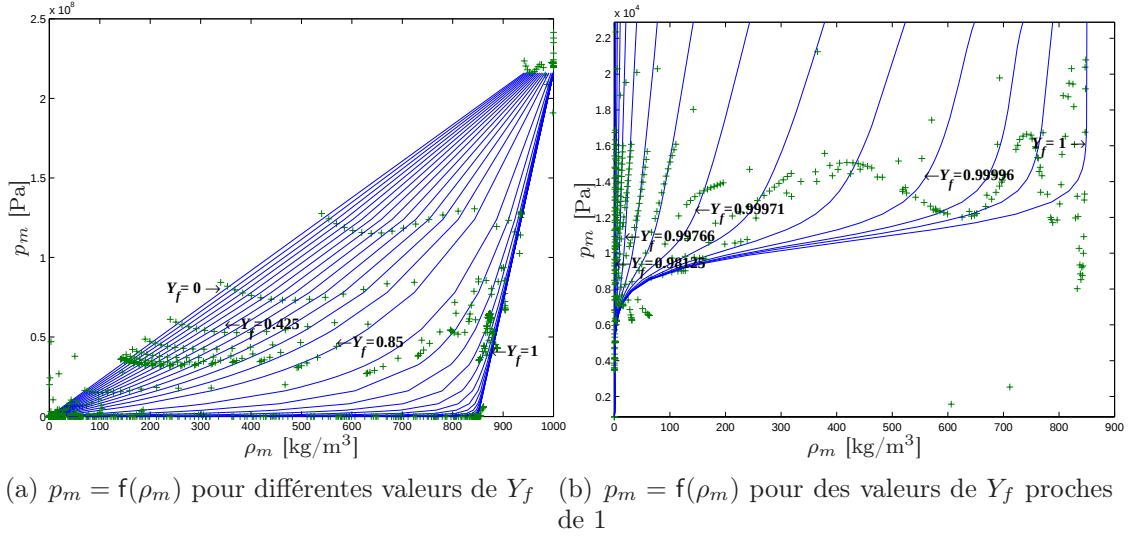


FIG. 3.9 – Interpolation de l'équation d'état $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ par un réseau de neurones (trait continu — : courbe théorique; croix + : valeurs ponctuelles, choisies arbitrairement, calculées par la relation analytique issue du réseau de neurones)

mailles (i, j) de la grille (figure 3.10), délimitée par les quatre points de coordonnées $[Y_f(i), \rho_m(i, j)]$, $[Y_f(i+1), \rho_m(i+1, j)]$, $[Y_f(i), \rho_m(i, j+1)]$ et $[Y_f(i+1), \rho_m(i+1, j+1)]$. La surface obtenue par interpolation est un paraboloïde hyperbolique, puisqu'elle doit passer par les quatre points définis ci-dessus.

On cherche donc à résoudre le système linéaire suivant pour chaque couple (i, j) :

$$\begin{cases} p_m(j) &= A_{ij} + B_{ij} \rho_m(i, j) &+ C_{ij} Y_f(i) &+ D_{ij} \rho_m(i, j) Y_f(i) \\ p_m(j) &= A_{ij} + B_{ij} \rho_m(i+1, j) &+ C_{ij} Y_f(i+1) &+ D_{ij} \rho_m(i+1, j) Y_f(i+1) \\ p_m(j+1) &= A_{ij} + B_{ij} \rho_m(i, j+1) &+ C_{ij} Y_f(i) &+ D_{ij} \rho_m(i, j+1) Y_f(i) \\ p_m(j+1) &= A_{ij} + B_{ij} \rho_m(i+1, j+1) &+ C_{ij} Y_f(i+1) &+ D_{ij} \rho_m(i+1, j+1) Y_f(i+1) \end{cases}$$

qui peut également s'écrire sous forme matricielle :

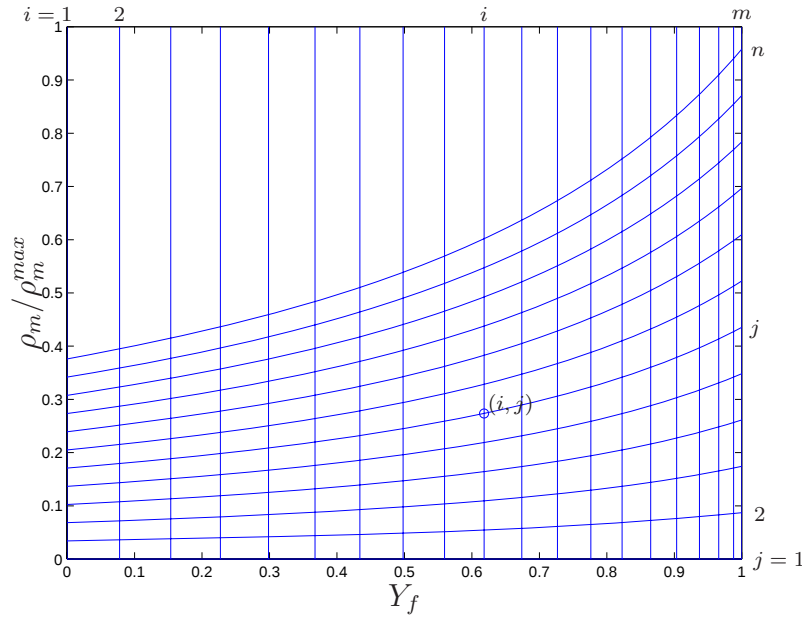
$$[P] = [M] [Q] \quad (3.27)$$

en posant :

$$[P] = \begin{bmatrix} p_m(j) \\ p_m(j) \\ p_m(j+1) \\ p_m(j+1) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q] = \begin{bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ C_{ij} \\ D_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

ainsi que :

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_m(i, j) & Y_f(i) & \rho_m(i, j) Y_f(i) \\ 1 & \rho_m(i+1, j) & Y_f(i+1) & \rho_m(i+1, j) Y_f(i+1) \\ 1 & \rho_m(i, j+1) & Y_f(i) & \rho_m(i, j+1) Y_f(i) \\ 1 & \rho_m(i+1, j+1) & Y_f(i+1) & \rho_m(i+1, j+1) Y_f(i+1) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

FIG. 3.10 – Grille d'interpolation dans le plan (Y_f, ρ_m)

En utilisant la méthode des moindres carrés pour la résolution du système, on calcule les coefficients de la fonction de régression comme suit [131] :

$$[Q] = \left([M]^T [M] \right)^{-1} [M]^T [P] \quad (3.30)$$

où $[M]^T$ est la matrice transposée de $[M]$. Cependant, afin d'éviter des matrices singulières (dont le déterminant serait nul, c'est-à-dire non-inversibles), il est nécessaire d'opérer préalablement une normalisation, pour chaque maille (i, j) , du type :

$$\Phi^{norm} = \frac{2\Phi - (\Phi^{max} + \Phi^{min})}{(\Phi^{max} - \Phi^{min})} \quad (3.31)$$

où Φ représente aussi bien ρ_m que Y_f , et Φ^{norm} varie donc entre -1 et 1 .

Les différents coefficients A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} et D_{ij} ayant été calculés et tabulés dans le code CAVIF, un algorithme particulier doit alors permettre de déterminer, pour tout couple (ρ_m, Y_f) issu de la résolution du système de Navier-Stokes, la maille (i, j) correspondante, et les coefficients à utiliser pour le calcul de la pression p_m . Comme le résume la figure 3.11, on considère d'abord la valeur de Y_f et l'on parcourt, par itérations successives sur i , les différentes valeurs tabulées de $Y_f(i)$. Lorsque la condition $Y_f(i) < Y_f < Y_f(i+1)$ est vraie, on parcourt alors les valeurs tabulées de $\rho_m(i, j)$, par itérations successives sur j , jusqu'à ce que $\rho_m(i, j) < \rho_m < \rho_m(i, j+1)$.

Cependant, la condition précédente sur ρ_m n'est pas suffisante pour conclure quant à l'appartenance du point O , défini par le couple (ρ_m, Y_f) , à la maille (i, j) . Une ambiguïté subsiste du fait que la grille d'interpolation n'est pas orthogonale (figure 3.12).

Il est alors nécessaire de prendre en compte une condition supplémentaire, pour connaître la position de ce point O par rapport au segment défini par les points E (de coordonnées $[Y(i), \rho_m(i, j)]$) et F (de coordonnées $[Y(i+1), \rho_m(i+1, j)]$). Ainsi,

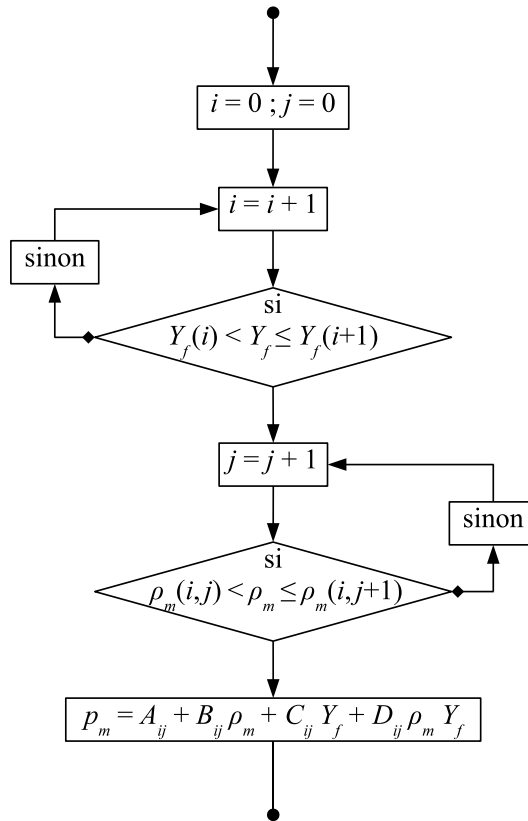


FIG. 3.11 – Algorithme de calcul de la pression p_m pour un couple (ρ_m, Y_f) , d'après la grille d'interpolation

le point O appartient à la maille (i, j) (c'est-à-dire qu'il se situe "au-dessus" du segment EF) si et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EO} \right) \cdot \left(\overrightarrow{EH} \wedge \overrightarrow{FG} \right) > 0 \quad (3.32)$$

Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, le point O se situe à l'intérieur d'un plan dont l'indice j est inférieur. L'algorithme permet alors de parcourir les mailles à i constant et en faisant décroître j afin de repérer la maille (i, j) contenant le couple (ρ_m, Y_f) , en prenant toujours comme condition la relation 3.32.

En choisissant une distribution suffisamment fine dans les zones où les gradients sont les plus forts (91 points selon Y_f et 129 selon ρ_m , soit un tableau de 11 739 valeurs), on obtient des résultats d'interpolation très satisfaisants. D'autre part, cet algorithme est relativement efficace puisqu'il affecte très peu le temps de calcul.

La figure 3.13 compare les courbes théoriques $p_m = f(\rho_m)$ pour différentes valeurs de Y_f , avec des valeurs ponctuelles choisies aléatoirement et calculées grâce à l'algorithme d'interpolation décrit ci-dessus.

Les figures 3.14 et 3.15 présentent les mêmes résultats, en focalisant sur la partie de l'équation d'état qui concerne un carburant f constitué à la fois de liquide l et de vapeur v et qu'on ne peut discerner sur la figure 3.13 compte tenu de l'échelle de l'axe représentant la pression p_m . La figure 3.14 présente les courbes $p_m = f(\rho_m)$

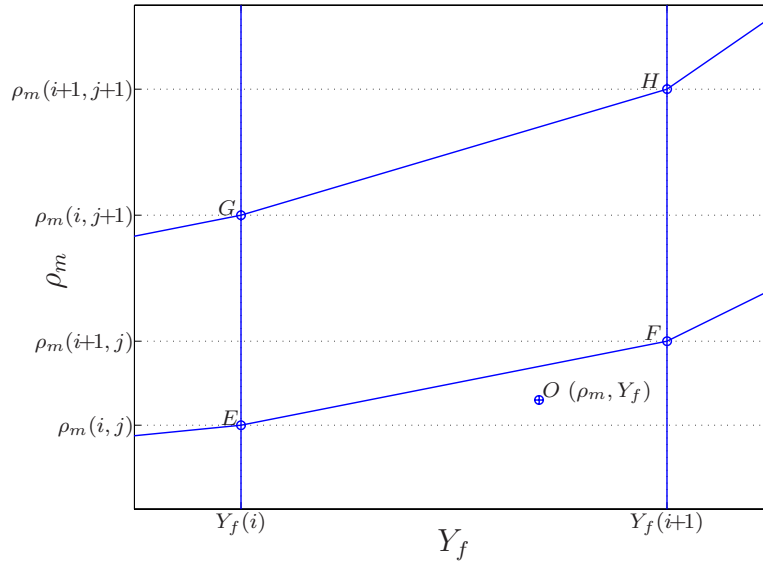


FIG. 3.12 – Zoom sur la grille d'interpolation : cas d'un couple (ρ_m, Y_f) qui respecte les conditions $Y_f(i) < Y_f < Y_f(i+1)$ et $\rho_m(i, j) < \rho_m < \rho_m(i, j+1)$, mais qui n'appartient pourtant pas à la maille (i, j)

pour des valeurs de Y_f comprises entre 0 et 0,85 alors que la figure 3.15 concerne les valeurs de Y_f proches de 1.

Enfin, pour les mêmes raisons d'échelle, on représente sur la figure 3.16 la partie de l'équation d'état qui assure la transition entre un carburant diphasique ($f = l+v$) et un carburant purement liquide.

3.4.3 Modification des conditions aux limites

Une dernière modification à apporter au code concerne les conditions aux limites ; en effet, l'emploi des conditions NSCBC nécessite la connaissance de la vitesse du son du mélange dans toute maille de sortie. Dans le cas où $Y_f = 1$, la vitesse du son est déterminée par la relation établie par Wallis (relation 2.54 et figure 2.2). En revanche, quand on n'est plus en présence de carburant pur ($Y_f < 1$), la valeur de cette vitesse demeure inconnue. Cette indétermination est levée en faisant la même hypothèse que précédemment, à savoir une hypothèse isentropique :

$$c_m^2 = \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \quad (3.33)$$

On cherche donc à calculer $\left(\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right)$ pour tout couple (ρ_m, Y_f) , afin de déterminer la vitesse du son. La discrétisation utilisée est la suivante :

$$\left.\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right|_i = \frac{p_m(i, j+1) - p_m(i, j)}{\rho_m(i, j+1) - \rho_m(i, j)} \quad (3.34)$$

ce qui permet alors d'écrire pour Y_f donné :

$$c_m^2 = \left.\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right|_{Y_f} = \left(\frac{Y_f(i+1) - Y_f}{Y_f(i+1) - Y_f(i)}\right) \left.\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right|_i + \left(\frac{Y_f - Y_f(i)}{Y_f(i+1) - Y_f(i)}\right) \left.\frac{\partial p_m}{\partial \rho_m}\right|_{i+1} \quad (3.35)$$

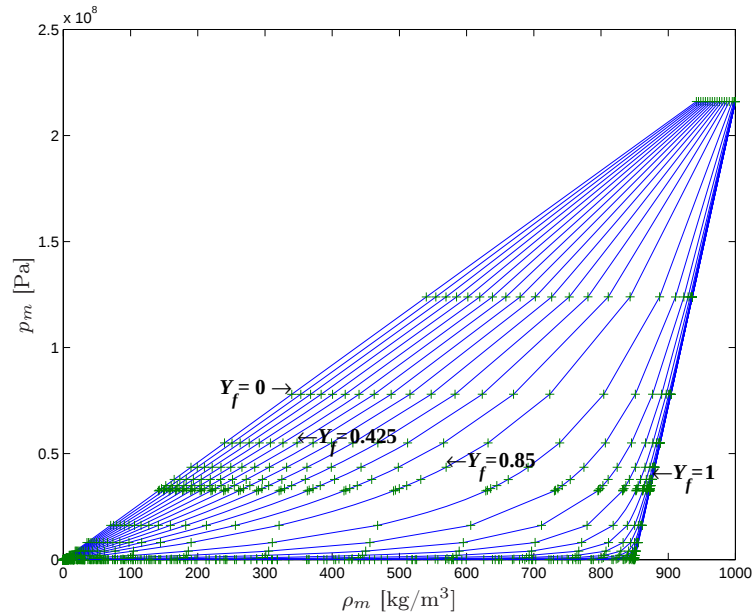


FIG. 3.13 – Interpolation sur l'ensemble de l'équation d'état (trait continu — : courbe théorique ; croix + : valeurs ponctuelles, choisies arbitrairement, calculées par l'algorithme présenté à la figure 3.11)

Notons toutefois que, lorsqu'on est en présence d'une chambre remplie de gaz, il n'est le plus souvent pas nécessaire d'utiliser ces conditions aux limites de sortie puisqu'on considère alors que la chambre est fermée, comme dans un moteur réel.

3.4.4 Conclusion

Nous disposons désormais d'un code capable de gérer un carburant f , pouvant être lui-même partiellement sous forme vapeur v ou liquide l , et un gaz g , ce qui permet de simuler une injection en prenant en compte l'écoulement cavitant à l'intérieur de l'injecteur et l'atomisation primaire du jet à l'intérieur de la chambre de combustion. L'étape suivante consiste donc à évaluer numériquement et valider le nouveau modèle implanté.

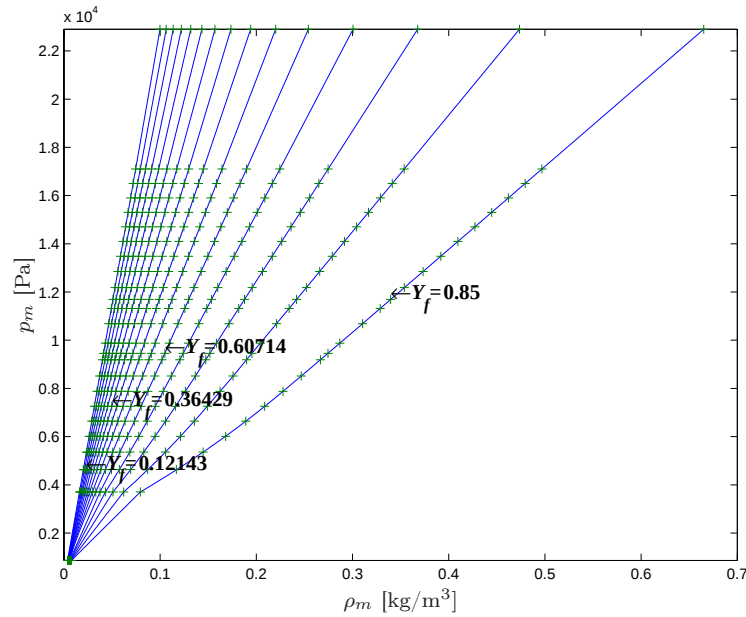


FIG. 3.14 – Interpolation par morceaux sur la partie de l'équation d'état du mélange $m = (l+v)+g$, pour le cas où $\rho_v < \rho_f < \rho_l$ et $0 < Y_f < 0,85$ (trait continu — : courbe théorique; croix + : valeurs ponctuelles calculées par l'algorithme)

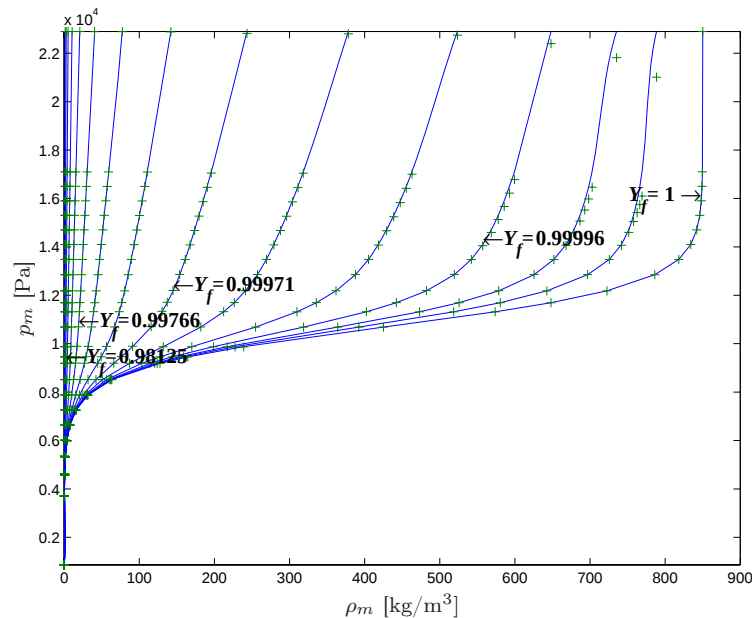


FIG. 3.15 – Interpolation par morceaux sur la partie de l'équation d'état du mélange $m = (l+v)+g$, pour le cas où $\rho_v < \rho_f < \rho_l$ et $Y_f \rightarrow 1$ (trait continu — : courbe théorique; croix + : valeurs ponctuelles calculées par l'algorithme)

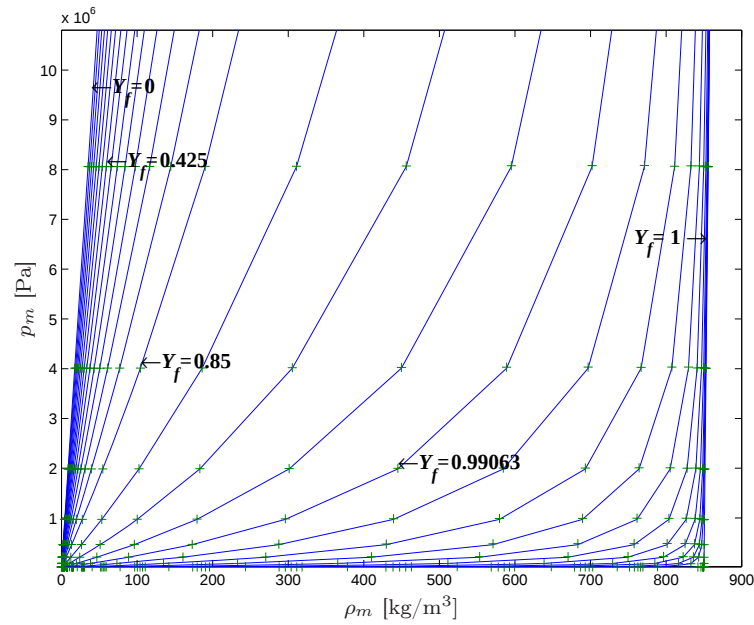


FIG. 3.16 – Interpolation par morceaux sur la partie de l'équation d'état assurant la transition entre le mélange $m = l + g$ et $m = (l + v) + g$ (trait continu — : courbe théorique ; croix + : valeurs ponctuelles calculées par l'algorithme)

