

2.7 Le caractère Fredholm de l'opérateur

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$$

On est maintenant en mesure de prouver le résultat essentiel de ce chapitre : $\mathcal{L}_{\alpha,s,r}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Nous calculerons une base du noyau de cet opérateur (aux valeurs critiques des paramètres $(\alpha, s, r) = (\alpha_c, s_c, r_c)$), ce qui nous permettra d'utiliser par la suite la réduction de Liapunov-Schmidt pour l'équation (2.5) (forme opérationnelle du problème stationnaire).

Théorème 2.7.1: *L'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.*

Preuve

Rappelons que

$$\mathcal{L}_{\alpha,s,r} = -\Delta_{sr}(\Delta_{sr} + \alpha I).$$

Puisque Δ_{sr} et $(\Delta_{sr} + \alpha I)$ sont des opérateurs de Fredholm d'indice zéro d'après la proposition 2.6.4, le résultat du théorème découle immédiatement de la proposition 1.2.5 (voir [18, Th. 2.5, p.264]).

2.7.1 Le noyau de $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$

Puisque $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ est un opérateur de Fredholm (d'indice zéro), il possède un noyau de dimension finie. Pour effectuer les calculs nécessaires dans notre

analyse, issue de la décomposition de Liapunov-Schmidt, on a besoin d'une base du noyau de $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$. Pour déterminer une telle base, on procédera en utilisant des développements en modes de Fourier dans $\mathcal{H}$.

Proposition 2.7.2: *L'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ possède dans $\mathcal{H}$, un noyau engendré par les vecteurs w_1, w_2, w_3, w_4 , définis par*

$$w_1 = \cos(X + Y), w_2 = \sin(X + Y), w_3 = \cos(X - Y), w_4 = \sin(X - Y).$$

Preuve

Le calcul de $\text{Ker}(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ noyau de $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ se fera directement par la résolution de l'équation linéaire

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) = 0, \tag{2.18}$$

en utilisant un développement de U en série de Fourier.

Rappelons que $(\alpha_c, s_c, r_c) = (2, 1, 1)$, donc

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) = -(\partial_X^4 + 2\partial_X^2 \partial_Y^2 + \partial_Y^4)U - 2(\partial_X^2 + \partial_Y^2)U.$$

Tenant compte des conditions (de périodicité) au bord de Ω vérifiées par les éléments du domaine de $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$, il suffit de chercher les solutions de (2.18) parmi celles qui prennent (en notation complexe) la forme

$$U(X, Y) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{Z}^2} \alpha^{(\sigma_1, \sigma_2)} e^{(i\sigma_1 X + i\sigma_2 Y)}.$$

où $\alpha^{(\sigma_1, \sigma_2)} \in \mathbb{C}$, et puisque les modes constants non nuls n'appartiennent pas à l'espace $\mathcal{H}$, on doit avoir $\alpha^{(0,0)} = 0$. Autrement dit, le terme correspondant à l'indice $(\sigma_1, \sigma_2) = (0, 0)$ ne figure pas dans cette somme.

Sachant que $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ est un opérateur fermé (d'après le théorème 2.7.1), on a

$$\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U) = \sum_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{Z}^2} \left(-(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right) \alpha^{(\sigma_1, \sigma_2)} e^{(i\sigma_1 X + i\sigma_2 Y)}.$$

L'espace des fonctions de type $e^{(i\sigma_1 X + i\sigma_2 Y)}$ étant invariant par l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$, on peut affirmer que $U \in \text{Ker}(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ si et seulement si

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2) = 0.$$

Pour les couples $(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation ci-dessus n'est vérifiée que lorsque $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$.

Ainsi à chaque couple $(\sigma_1, \sigma_2) \in \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$ correspond une solution de l'équation (2.18) :

(1) Pour $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$, on a : $u(X, Y) = e^{i(X+Y)}.$

(2) Pour $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, -1)$, on a : $u(X, Y) = e^{i(X-Y)}.$

(3) Pour $(\sigma_1, \sigma_2) = (-1, 1)$, on a : $u(X, Y) = e^{i(Y-X)}$.

(4) Pour $(\sigma_1, \sigma_2) = (-1, -1)$ on a : $u(X, Y) = e^{-i(X+Y)}$.

On obtient ainsi comme base (réelle) pour $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ les éléments w_1, w_2, w_3, w_4 énoncés dans la proposition.

2.7.2 Régularité de l'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$

L'opérateur non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$, est un opérateur quadratique associé à l'application bilinéaire

$$\mathcal{N} : D \times D \rightarrow \mathcal{H}$$

définie pour U et V appartenant à D par

$$\mathcal{N}(U, V) = \frac{\alpha}{2} \langle \nabla_{sr} U(X, Y), \nabla_{sr} V(X, Y) \rangle_{\mathbb{R}^2} -$$

$$\frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \nabla_{sr} U(\xi, \eta), \nabla_{sr} V(\xi, \eta) \rangle_{\mathbb{R}^2} d\xi d\eta.$$

Pour l'état critique du problème, en $(U_0, \alpha, s, r) = (0, \alpha_c, s_c, r_c)$, on a

$$D_u \mathcal{N}_{\alpha_c, s_c, r_c}(U_0) = 0.$$

Remarque 2.7.3: (1) L'application non linéaire $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$ est régulière par rapport aux paramètres α, s, r , et en tant que forme quadratique d'une application bilinéaire, $\mathcal{N}_{\alpha, s, r}$ est une application régulière de D vers $\mathcal{H}$.

(2) La partie linéaire dominante du problème (2.5) au voisinage de l'état critique $(0, \alpha_c, s_c, r_c)$ est l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$.

3. RÉDUCTION DU PROBLÈME STATIONNAIRE

Dans l'analyse fonctionnelle non linéaire, il existe plusieurs méthodes pour étudier l'existence des solutions de problèmes stationnaires. Parmi les plus importante, on peut citer la théorie du degré topologique [32, 34, 49], la théorie du point fixe [26, 33, 39], et la théorie de la bifurcation, dans laquelle on dispose de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, voir [2, 30, 20, 35, 44]. Nous étudions l'existence de solutions stationnaires spatialement périodiques du problème (1.1), lequel est reformulé dans le chapitre précédent, comme équation opérationnelle (2.5), dans le cadre fonctionnel défini précédemment. Dans ce chapitre nous allons montrer, que ce problème se réduit à une équation algébrique en dimension finie, qu'on déterminera.

Nous commençons par une brève description de cette méthode d'analyse locale, voir [1, 20]. Cet outil de la théorie de la bifurcation, est essentiel dans ce chapitre, aussi bien du point de vue théorique pour montrer l'existence des structures stationnaires, que du point de vue pratique pour le calcul de ces structures.

3.1 Description de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt

Considérons le problème suivant :

$$\mathcal{L}(U) + \mathcal{N}_\mu(U) = 0 \quad (3.1)$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire (non borné) fermé défini sur un domaine $D(\mathcal{L})$ dense dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, μ un paramètre dans $\mathbb{R}^m$, et $\mathcal{N}_\mu$ une application non linéaire assez régulière de $D(\mathcal{L})$ vers $\mathcal{H}$, telle que $\|\mathcal{N}_\mu(U)\| = O(\|U\|_{D(\mathcal{L})} (\|\mu\| + \|U\|_{D(\mathcal{L})}))$ avec $\mathcal{N}_0(0) = 0$. Supposons aussi, que $\mathcal{L}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro selon la définition 1.2.1.

Un tel opérateur $\mathcal{L}$ possède un noyau $\mathcal{X} = \ker(\mathcal{L})$ de dimension (supposons par exemple) égale à $n \in \mathbb{N}$ et une image $\mathcal{Y} = R(\mathcal{L})$ fermée dans $\mathcal{H}$ de codimension égale aussi à n . Ainsi il existe deux projections continues

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad P(\mathcal{H}) = \mathcal{X}, \quad \text{et} \quad Q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{avec} \quad Q(\mathcal{H}) = \mathcal{Y}.$$

De plus, en posant $\mathcal{Z} = (I - P)(\mathcal{X})$ où I est l'application identité sur $\mathcal{H}$, la restriction de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}$ au sous-espace $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$, réalise une bijection entre $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$ et $\mathcal{Y}$.

Lorsque l'opérateur $\mathcal{L}$ est auto-adjoint (ce qui est notre cas dans la suite), P est la projection orthogonale sur $\ker(\mathcal{L})$ parallèlement à $R(\mathcal{L})$. Ainsi, en prenant

$Q = (I - P)$, l'espace $\mathcal{H}$ se décompose en une somme directe comme suit

$$\mathcal{H} = \ker(\mathcal{L}) \oplus R(\mathcal{L}).$$

Donc toute solution U du problème (3.1) dans $\mathcal{H}$, peut être étudiée selon la décomposition suivante

$$U = U_0 + U_1 \quad \text{avec} \quad U_0 = P(U) \in \ker(\mathcal{L}) \quad \text{et} \quad U_1 = (I - P)(U) \in R(\mathcal{L}).$$

Ainsi le problème (3.1) est équivalent à

$$\begin{cases} P(\mathcal{N}_\mu(U_0 + U_1)) &= 0 & (a) \\ \mathcal{L}(U_1) + (I - P)(\mathcal{N}_\mu(U_0 + U_1)) &= 0 & (b) \end{cases} \quad (3.2)$$

L'inverse de la restriction de l'opérateur $\mathcal{L}$ au sous-espace $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$ étant un opérateur borné de $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{Z} \cap D(\mathcal{L})$, grace au théorème de la fonction implicite, la seconde équation dans (3.2) peut être résolue localement (au voisinage de $(\mu, U_0) = (0, 0)$) pour $U_1 = \mathcal{U}(\mu, U_0)$. En introduisant $U_1 = \mathcal{U}$ dans la première équation de (3.2), on obtient ce qu'on appelle (en théorie de la bifurcation), l'équation de bifurcation, qui caractérise les éléments U_0 de $\ker(\mathcal{L})$ correspondant à une solution de (3.1)

$$\mathcal{G}(U_0, \mu) = 0. \quad (3.3)$$

Ici $\mathcal{G}$ est une application définie de $\ker(\mathcal{L}) \times \mathbb{R}^m$ vers $\ker(\mathcal{L})$ par

$$\mathcal{G}(U_0, \mu) = P(\mathcal{N}_\mu(U_0 + \mathcal{U}(\mu, U_0))). \quad (3.4)$$

En admettant que $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ est une base de $\ker(\mathcal{L})$, il existe n nombres réels a_i tels que

$$U_0 = a_0 u_0 + \dots + a_{n-1} u_{n-1}.$$

En introduisant cette représentation de U_0 dans (3.3), sachant que l'opérateur P est la projection orthogonale sur $\ker(\mathcal{L})$, on obtient ce qu'on appelle la fonction de réduction définie par la fonction vectorielle g suivante

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{où} \quad g = (g_0, \dots, g_{n-1}),$$

où pour tout j compris entre 0 et $(n-1)$

$$g_j(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu) = \langle \mathcal{N}_\mu(U_0 + \mathcal{U}(\mu, U_0)), u_j \rangle. \quad (3.5)$$

Ainsi, au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, à chaque solution $(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu)$ de l'équation réduite

$$g_j(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu) = 0, \quad j = 0, \dots, (n-1), \quad (3.6)$$

correspond une solution de l'équation de bifurcation (3.3).

On peut alors résumer le processus de réduction dans le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 ([1, 20]): *Si la linéarisation de (3.1) (au voisinage du point critique $(U, \mu) = (0, 0)$) est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, alors les solutions de (3.1) sont (localement) en correspondance biunivoque avec les solutions du système d'ordre fini*

$$g_j(a_0, \dots, a_{n-1}, \mu) = 0, \quad j = 0, \dots, (n-1)$$

où, g_j est défini par (3.5).

3.2 Application de la méthode de réduction

Notre but dans ce paragraphe est la mise en œuvre de la méthode de réduction de Liapunov-Schmidt, afin de réduire le problème (2.5), à une équation algébrique en dimension finie, plus commode à traiter. Mais avant de procéder à cette réduction, nous allons rappeler certains résultats, et fixer quelques notations.

Sachant que $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, on décompose $\mathcal{H}$ en une somme directe du noyau et de l'image de $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$

$$\mathcal{H} = \ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \oplus R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$$

Soit P la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$, dont le noyau est $R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$. En notant I l'application identité sur $\mathcal{H}$, P et $(I - P)$ sont deux projections orthogonales bornées sur $\mathcal{H}$.

Pour tout triplet (α, s, r) dans $\mathbb{R}^3$ posons

$$\mathcal{L}_{\alpha, s, r} = \mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c} + \mathcal{L}_{\mu, S, R}$$

avec $\mu = \alpha - \alpha_c = \alpha - 2$, $S = s - s_c = s - 1$ et $R = r - r_c = r - 1$.

L'application $\mathcal{L}_{\mu, S, R}$ ainsi définie est assez régulière en tant que fonction des paramètres μ , S et R , de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathcal{L}(D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}), \mathcal{H})$ espace des applications linéaires bornées de $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ vers $\mathcal{H}$. Ainsi on est prêt à passer au procédé de réduction, en appliquant la décomposition (3.2) au problème (2.5).

3.2.1 Le principe de réduction

Tout élément U de $\mathcal{H}$ peut être décomposé d'une manière unique en une somme de deux éléments, l'un dans le noyau de l'opérateur $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ et l'autre dans son image :

$$U = w + \mathcal{U} \quad \text{où} \quad w = P(U) \in \ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = (I - P)(U) \in R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}).$$

Ainsi, en appliquant la décomposition (3.2), le problème (2.5) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}) + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U})) & = 0 \quad (a) \\ \mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}(\mathcal{U}) + (I - P)(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}) + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U})) & = 0 \quad (b) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Montrons que pour tout élément w dans $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$, il existe exactement un seul élément de $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$ tel que l'équation (3.7.b) soit vérifiée.

Proposition 3.2.1: *Pour tout (w, μ, S, R) au voisinage de $\vec{0}$ dans $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}) \times \mathbb{R}^3$, l'équation (3.7.b) a une solution et une seule $\mathcal{U} = \mathcal{U}(w, \mu, S, R)$ assez régulière dans $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$ telle que $\mathcal{U}(0, 0, 0, 0) = 0$*

Preuve

On peut représenter l'équation (3.7.b) sous la forme

$$\Phi(w, \mu, S, R, \mathcal{U}) = 0,$$

où Φ définie par

$$\Phi(w, \mu, S, R, \mathcal{U}) = \mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}(\mathcal{U}) + (I - P)(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}) + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U}))$$

est une application régulière de $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}) \times \mathbb{R}^3 \times (D(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c}))$ vers $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$. Les espaces $D(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$ et $R(\mathcal{L}_{\alpha_c,s_c,r_c})$ étant munis respecti-

vement de la norme du graphe et de la norme de $\mathcal{H}$. De plus on a

$$\Phi(0, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

Sachant que $\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ est un opérateur de Fredholm, son image $R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ est un sous-espace fermé dans $\mathcal{H}$, donc l'application $\partial_{\mathcal{U}}\Phi(0, 0, 0, 0, 0) = \mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}$ possède un inverse borné de $R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ vers $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$.

Ainsi grâce au théorème de la fonction implicite, il existe une fonction régulière unique $\mathcal{U}(w, \mu, S, R)$ définie dans un voisinage de O dans $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \times \mathbb{R}^3$ à valeurs dans un voisinage de O dans $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c}) \cap R(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$, qui vérifie

$$\Phi(w, \mu, S, R, \mathcal{U}(w, \mu, S, R)) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}(0, 0, 0, 0) = 0.$$

3.2.2 L'équation réduite

Puisque pour chaque triplet de paramètres (μ, S, R) assez petit dans $\mathbb{R}^3$, et pour tout w dans un voisinage de O dans $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ l'équation (3.7.b) a exactement une solution $\mathcal{U}(w, \mu, S, R)$, les éléments du voisinage de O dans $D(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ qui sont solutions de (2.5), prennent la forme $u = w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)$ et vérifient

$$\begin{aligned}
G_{\mu,S,R}(w) &= P(\mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R))) \\
&\quad + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R))) = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Cette équation correspond à l'expression (3.3) du début de chapitre, c'est l'équation de bifurcation. Il est clair que l'ordre de régularité de l'application $G_{\mu,S,R}$ est déterminé par celui de la régularité de $\mathcal{U}$. Les solutions du problème (2.5), proches de la solution triviale, lorsque (μ, S, R) est au voisinage de $(0, 0, 0)$, sont des fonctions de la forme $w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)$ avec w solution de (3.8).

En projetant sur la base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ du sous-espace $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$, l'action de $G_{\mu,S,R}$ sur $\ker(\mathcal{L}_{\alpha_c, s_c, r_c})$ se traduit par ce qu'on appelle la fonction de réduction $\mathbf{g}$

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

avec $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ tel que $\mathbf{g}_j$ pour $j = 1, 2, 3, 4$, sont les fonctions définies de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_j(a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, S, R) &= \langle \mathcal{L}_{\mu,S,R}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)) \\
&\quad + \mathcal{N}_{\mu+2,S+1,R+1}(w + \mathcal{U}(w, \mu, S, R)), w_j \rangle,
\end{aligned}$$

où, $w = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + a_4 w_4$.

Les solutions de l'équation (3.8) sont donc en correspondance biunivoque avec celles de l'équation réduite

$$\mathbf{g}_j(a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, S, R) = 0, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (3.9)$$

Ce fait, est exprimé dans la proposition suivante

Proposition 3.2.2: *Au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^3$, à chaque solution $(a_1, a_2, a_3, a_4, \mu, S, R)$ de l'équation réduite (3.9), correspond une et une seule solution de l'équation (3.8).*

Les symétries du problème (1.1) (ou celles de (2.5)) ont des conséquences importantes sur la fonction $\mathbf{g}$, et par conséquent sur la structure du système réduit (3.9). C'est notre objet d'étude dans le chapitre suivant.