

La théorie classique

- **Calcul de ν_{12}** : comme pour E_1 , on applique un état de contrainte où seulement σ_1 n'est pas nulle.
- Par définition,

$$\nu_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f}, \quad \nu_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2^l}{\varepsilon_1^l}.$$

- D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que

$$\varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m = \varepsilon_1^l.$$

- finalement, comme pour E_2 , la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation

$$\varepsilon_2^f A_f + \varepsilon_2^m A_m = \varepsilon_2^l A_l.$$

- En injectant dans cette dernière relation les précédentes, on parvient au résultat recherché:

209

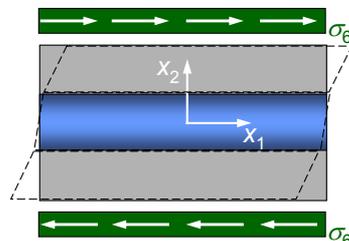


La théorie classique

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m.$$

- Cette équation est formellement identique à la loi des mélanges; en fait, même dans ce cas on a à faire avec un modèle de type parallèle.
- Ainsi que dans le cas de E_1 , cette formule permet des prédictions en bon accord avec les résultats des tests expérimentaux.
- Comme très souvent les valeurs de ν_m et ν_f sont proches, ν_{12} n'est dominé ni par la matrice ni par les fibres.

- **Calcul de G_{12}** : dans ce cas, on applique une sollicitation dans laquelle seule σ_6 n'est pas nulle, voir la figure, où on a mis en évidence même la déformation correspondante.



210



La théorie classique

- L'équilibre du volume élémentaire représentatif impose que ce soit

$$\sigma_6^f = \sigma_6^m = \sigma_6^l,$$

tandis que par le lien élastique on a

$$\sigma_6^f = G_f \varepsilon_6^f, \quad \sigma_6^m = G_m \varepsilon_6^m, \quad \sigma_6^l = G_{12} \varepsilon_6^l.$$

- Finalement, la compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit

$$\varepsilon_6^f A_f + \varepsilon_6^m A_m = \varepsilon_6^l A_l.$$

- En injectant dans cette dernière relation les précédentes, on parvient au résultat recherché:

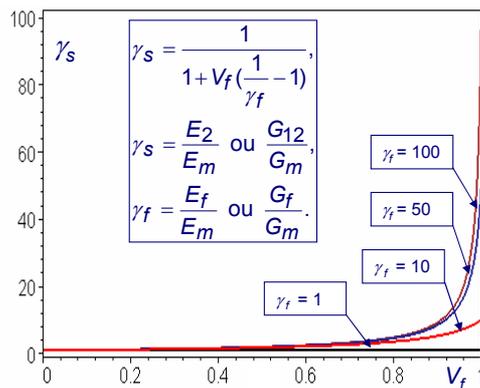
$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m} \rightarrow G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + (1-V_f) G_f}.$$



La théorie classique

- On obtient donc une loi formellement analogue à celle d' E_2 ; en effet, même dans ce cas on a utilisé un modèle de type série.
- Comme pour E_2 , même pour G_{12} on peut faire les mêmes observations, en particulier une différence plutôt marquée avec les données expérimentales et une faible dépendance de G_f : G_{12} est dominé par la matrice, à savoir les fibres influencent très peu le renfort à cisaillement.

- A ce propos, le graphique à côté montre cet aspect: la valeur du module homogénéisé ne change guère par rapport à celui de la matrice, même avec des fibres à haut module, si non pour des fractions volumiques techniquement irréalisables.



Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- Même si la prédiction analytique de la valeur des constantes élastiques homogénéisées est souvent difficile et incertaine, on peut, dans certains cas, donner des limite théoriques à ces valeurs.
- Ceci peut être fait par le biais de techniques variationnelles; par exemple, et pour donner une perspective théorique plus précise de la théorie classique d'homogénéisation, voyons le cas du module d'Young, pour lequel nous recherchons une limite théorique supérieure et inférieure.
- Il faut préciser que ce qui va être présenté est valable en général pour un solide biphasé isotrope, comme c'est le cas d'inclusions de forme variée dispersées de façon aléatoire dans une matrice.
- La technique variationnelle fait usage des principes de minimum de l'énergie complémentaire et de l'énergie potentielle élastique, utilisés respectivement pour déterminer la limite inférieure et supérieure du module d'Young.

213

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- **Limite inférieure:** considérons une barrette de matériau composite soumise à une contrainte normale σ appliquée aux extrémités.
- Un champ de contrainte admissible (qui vérifie les équations d'équilibre et les conditions au bord) est le suivant (axe x_1 longitudinal):

$$\sigma_1^o = \sigma, \quad \sigma_i^o = 0, \quad i = 2, \dots, 6.$$

- Ce champ de contrainte en réalité ne peut pas exister dans le solide, parce que celui-ci est hétérogène. L'énergie de déformation U^o qui appartient à ce champ de contrainte admissible est donc, par le principe de l'énergie complémentaire, supérieure à celle qui appartient au champ de contrainte réel.
- Or, dans le milieu vu comme solide homogénéisé et isotrope, le champ de contrainte réel du à l'application des actions ci-dessus est exactement

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 2, \dots, 6.$$

214

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- Soit E le module d'Young pour le solide homogénéisé de volume Ω ; l'énergie de déformation qui appartient à ce dernier est

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1 \varepsilon_1 dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\sigma^2}{E} dv = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \Omega.$$

tandis que, pour le solide hétérogène,

$$U^o = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1^o \varepsilon_1 dv = \frac{\sigma^2}{2} \left(\int_{\Omega_d} \frac{1}{E_d} dv + \int_{\Omega_m} \frac{1}{E_m} dv \right) = \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{V_d}{E_d} + \frac{1-V_d}{E_m} \right) \Omega,$$

où d indique une grandeur relative à la phase dispersée (l'inclusion) et m une grandeur relative à la matrice. En particulier, les volumes occupés par la phase dispersée et par la matrice sont respectivement

$$\Omega_d = V_d \Omega, \quad \Omega_m = (1-V_d) \Omega,$$

avec V_d la fraction volumique de la phase dispersée.

215

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- Comme, par le principe de l'énergie complémentaire, $U \leq U^o$, on a la condition

$$\frac{1}{E} \leq \frac{V_d}{E_d} + \frac{1-V_d}{E_m} \rightarrow E \geq \frac{E_m E_d}{V_d E_m + (1-V_d) E_d}.$$

- On reconnaît dans cette limite la valeur d'un module d'un modèle type série, comme c'est le cas de E_2 et G_{12} pour les composites à renfort unidirectionnel.
- Limite supérieure:** considérons à présent la barrette soumise à une élongation longitudinale ε ; un champ de déformation admissible (qui respecte le lien élastique et les conditions au bord) est le suivant:

$$\varepsilon_1^o = \varepsilon, \quad \varepsilon_2^o = \varepsilon_3^o = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_4^o = \varepsilon_5^o = \varepsilon_6^o = 0,$$

où ν est le coefficient de Poisson du solide homogénéisé.

216

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- Ce champ de déformation en réalité ne peut pas exister dans le solide, parce que celui-ci est hétérogène. L'énergie de déformation U^o qui appartient à ce champ de déformation admissible est donc, par le principe de l'énergie potentielle élastique, supérieure à celle qui appartient au champ de déformation réel.
- Or, dans le milieu vu comme un solide homogénéisé et isotrope, l'effectif champ de déformation dû à l'application des déformations ci-dessus est exactement

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0,$$

d'ou il en suit la valeur de l'énergie de déformation, pour un solide homogénéisé ayant module d'Young E et volume Ω ,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_1 \varepsilon_1 dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon^2 dv = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Omega.$$

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- Dans le milieu hétérogène, le champ des contraintes est différent dans les deux phases; de par les équations de Lamé (les deux phases sont isotropes) et pour le champ de déformation admissible considéré, on a

$$\sigma_1^d = \frac{1 - \nu_d - 2\nu\nu_d}{1 - \nu_d - 2\nu_d^2} E_d \varepsilon,$$

$$\sigma_1^m = \frac{1 - \nu_m - 2\nu\nu_m}{1 - \nu_m - 2\nu_m^2} E_m \varepsilon,$$

$$\sigma_2^d = \sigma_3^d = \frac{\nu_d - \nu}{1 - \nu_d - 2\nu_d^2} E_d \varepsilon,$$

$$\sigma_2^m = \sigma_3^m = \frac{\nu_m - \nu}{1 - \nu_m - 2\nu_m^2} E_m \varepsilon,$$

$$\sigma_4^d = \sigma_5^d = \sigma_6^d = 0,$$

$$\sigma_4^m = \sigma_5^m = \sigma_6^m = 0.$$

- Il en suit, pour la valeur de l'énergie de déformation U^o qui appartient à ce champ admissible de déformation,

$$\begin{aligned} U^o &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^o dv = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_d} \sigma_i^d \varepsilon_i^o dv + \int_{\Omega_m} \sigma_i^m \varepsilon_i^o dv \right) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1 - \nu_d - 4\nu\nu_d + 2\nu^2}{1 - \nu_d - 2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1 - \nu_m - 4\nu\nu_m + 2\nu^2}{1 - \nu_m - 2\nu_m^2} E_m (1 - V_d) \right) \Omega. \end{aligned}$$

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- Comme, par le principe de minimum de l'énergie potentielle élastique, $U \leq U^o$, on a la condition

$$E \leq \frac{1-\nu_d-4\nu\nu_d+2\nu^2}{1-\nu_d-2\nu_d^2} E_d V_d + \frac{1-\nu_m-4\nu\nu_m+2\nu^2}{1-\nu_m-2\nu_m^2} E_m (1-V_d).$$

- Dans cette expression, la valeur du coefficient de Poisson homogénéisé, ν , est encore inconnu; on la trouve en utilisant le principe de minimum de l'énergie potentielle élastique, pour lequel U^o doit être minimum par rapport à l'inconnue ν pour obtenir la limite sur E .
- Il doit donc être

$$\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U^o}{\partial \nu^2} \right|_{\frac{\partial U^o}{\partial \nu}=0} > 0.$$

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- En développant les calculs on trouve

$$\frac{\partial U^o}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = \frac{(1-\nu_m-2\nu_m^2)\nu_d E_d V_d + (1-\nu_d-2\nu_d^2)\nu_m E_m (1-V_d)}{(1-\nu_m-2\nu_m^2)E_d V_d + (1-\nu_d-2\nu_d^2)E_m (1-V_d)};$$

$$\frac{\partial^2 U^o}{\partial \nu^2} = 2\varepsilon^2 \Omega \left(\frac{E_d V_d}{1-\nu_d-2\nu_d^2} + \frac{E_m V_m}{1-\nu_m-2\nu_m^2} \right).$$

- Comme les deux phases sont isotropes, et donc les coefficients de Poisson inférieurs à 1/2, on vérifie facilement que la dérivée second est toujours positive; donc, la valeur de ν ci-dessus correspond à un minimum de U^o . En l'injectant dans l'expressions précédente, on obtient l'expression finale pour la limite supérieure de E ; cette dernière est très compliquée et on montre ci de suite la valeur limite de E lorsque $\nu_d = \nu_m$ (les deux valeurs ne sont pas, généralement, très différentes):

$$E \leq V_d E_d + (1-V_d) E_m.$$

Bornes variationnelles sur les modules homogénéisés

- On remarque que cette dernière est exactement la valeur d'un coefficient élastique d'un modèle parallèle, comme pour E_1 et ν_{12} .
- Donc, en théorie classique, les constantes techniques homogénéisées correspondent soit à une limite supérieure, dans les modèles de type parallèle, soit à une limite inférieure, dans les modèles de type série.
- Ceci est important, par exemple, pour comprendre que les prédictions d' E_2 et G_{12} faites avec les formules de la théorie classique sont toujours es prédictions par défaut.
- Ces résultats ont été trouvés par Paul, 1960, dans des études sur les alliages. Ensuite, on a proposé plusieurs modèles, plus fins et liés à diverses morphologies de l'inclusion. Par exemple, on cite les travaux de Hashin et Shtrikman (1963), où la phase dispersée est constituée par des sphères et ceux de Hashin et Rosen (1964), plus proches des composites à renfort unidirectionnel parce que la phase est constituée par des cylindres; on renvoie à la littérature spécialisée pour une analyse plus approfondie.

221



Les formules de Ekvall

- Différentes tentatives ont été faites, de façon semi empirique, numérique ou théorique, pour améliorer les prédictions de la théorie classique. Voyons-en quelques uns ci de suite.
- Ekvall (1961) a proposé une modification des formules d' E_1 et E_2 pour prendre en compte l'état de contrainte triaxial induit dans la matrice par la présence des fibres:

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E'_m, \quad E_2 = \frac{E_f E'_m}{V_f E'_m + (1 - V_f) E_f (1 - \nu_m^2)}$$

- Dans ces formules, il est

$$E'_m = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m^2}$$

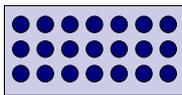
- Toutefois, quantitativement cette correction n'est pas significative pour $\nu_m < 1/4$.

222

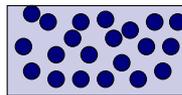


Solutions élastiques avec contiguïté

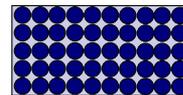
- La théorie classique considère, au moins implicitement, le fait que la disposition des fibres soit uniforme et régulière.
- Toutefois, la disposition des fibres n'est généralement pas régulière, mais plutôt les fibres semblent se disposer de façon aléatoire.
- Donc, par exemple, certaines fibres seront en contact entre elles et cela peu, au moins en partie, préjuger l'adhérence à la matrice, tandis que d'autres seront isolées. Évidemment, plus la fraction volumique des fibres est grande, plus est probable que celles-ci se trouvent proches et à contact.
- Cet aspect peut être considéré par le biais du *facteur de contiguïté* C , introduit par Tsai (1964). C varie entre 0, fibres isolées, et 1, fibres toutes à contact, voire la figure. Dans la réalité, la valeur de C augmente avec V_f .



$C=0$



$0 < C < 1$



$C=1$

223



Solutions élastiques avec contiguïté

- En tenant compte du facteur de contiguïté et par une approche élastique dans laquelle la solution est trouvée comme combinaison linéaire entre le cas $C=0$ et le cas $C=1$, Tsai a obtenu les formules suivantes:

$$E_1 = k[E_f V_f + E_m(1 - V_f)]$$

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m)(1 - V_f)] \left[(1 - C) \frac{k_f(2k_m + G_m) - G_m(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_m) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} + C \frac{k_f(2k_m + G_f) - G_f(k_f - k_m)(1 - V_f)}{(2k_m + G_f) + 2(k_f - k_m)(1 - V_f)} \right]$$

$$\nu_{12} = (1 - C) \frac{k_f \nu_f (2k_m + G_m) V_f + k_m \nu_m (2k_f + G_m) (1 - V_f)}{k_f (2k_m + G_m) - G_m (k_f - k_m) (1 - V_f)} + C \frac{k_m \nu_m (2k_f + G_f) (1 - V_f) + k_f \nu_f (2k_m + G_f) V_f}{k_f (2k_m + G_m) - G_f (k_f - k_m) (1 - V_f)}$$

224



Solutions élastiques avec contiguïté

$$G_{12} = (1-C)G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m)(1-V_f)}{2G_m + (G_f - G_m)(1-V_f)} + CG_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)(1-V_f)}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m)(1-V_f)},$$

$$k_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}, \quad k_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}.$$

- Le coefficient k est le *facteur d'alignement des fibres*, introduit par Tsai pour tenir compte des imperfections dans les directions des fibres; sa valeur, à déterminer expérimentalement et qui varie surtout en fonction du processus de fabrication, varie très peu, entre 0.9 et 1.
- La valeur du facteur de contiguïté C doit aussi être déterminée expérimentalement, pour diverses valeurs de la fraction volumique V_f .

Les équations de Halpin et Tsai

- Les théories d'homogénéisation plus fines expriment les résultats par le biais de formules plutôt compliquées et souvent d'application limitée (voir le cas précédent des solutions avec contiguïté).
- Dans le but d'obtenir des formules fiables et simples pour la prédiction des modules homogénéisés, Halpin et Tsai (1969) ont proposé des équations obtenues essentiellement par interpolation de résultats trouvés obtenus par des théories micromécaniques différentes.
- En particulier, Halpin et Tsai ont démontré que la *solution de Hermann* (1967), qui est une généralisation du *modèle autocohérent de Hill* (1965), peut être réduite aux équations approximées suivantes qui concernent E_2 , G_{12} ou ν_{23} :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f}, \quad \text{où} \quad \eta = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \xi}.$$

Les équations de Halpin et Tsai

- Dans les équations de Halpin-Tsai, M représente un module parmi E_2 , G_{12} ou ν_{23} , et M_f les modules correspondants pour les fibres, E_f , G_f ou ν_f , tandis que M_m pour la matrice, E_m , G_m ou ν_m .
- Pour ce qui concerne E_1 et ν_{12} , Halpin et Tsai continuent à prendre les formules de la théorie classique.
- Le coefficient ξ est une mesure du renfort du matériau composite, renfort donné à la matrice par la présence des fibres.
- ξ dépend de la géométrie des fibres, de leur disposition et de la condition de chargement. Généralement ξ doit être déterminé expérimentalement et ceci est le point faible des équations de Halpin-Tsai, surtout parce que, comme déjà dit, ξ dépend aussi de la condition de chargement.
- En particulier, pour des fibres circulaires disposées régulièrement sur un réseau à mailles carrées et pour $V_f = 0.55$, Halpin et Tsai, par comparaison avec les données expérimentales, ont trouvé la valeur $\xi = 2$ pour E_2 et $\xi = 1$ pour G_{12} .

Les équations de Halpin et Tsai

- Cependant, Hewitt et de Malherbe proposent pour la valuation de G_{12} la formule semi empirique suivante pour ξ , qui semble donner une meilleur adéquation avec les données de l'expérience:

$$\xi = 1 + 4V_f^{10}.$$

- En théorie, ξ peut varier entre 0 et ∞ ; on remarque facilement que pour $\xi = 0$,

$$\frac{1}{M} = \frac{V_f}{M_f} + \frac{1-V_f}{M_m},$$

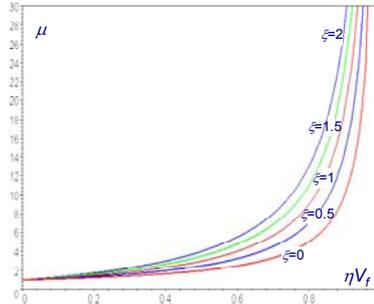
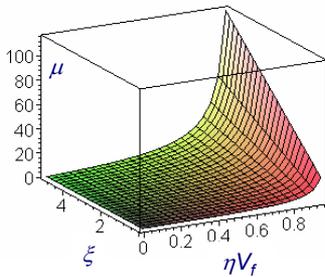
à savoir on obtient le résultat typique du modèle de type série, qui comme vu représente la limite inférieure. A l'opposé, pour $\xi = \infty$,

$$M = V_f M_f + (1 - V_f) M_m,$$

qui est le résultat typique du modèle de type parallèle, qui représente la limite supérieure.

Les équations de Halpin et Tsai

- Donc, dans un certain sens, comme déjà anticipé ξ représente une mesure du renfort donné à la matrice par les fibres: plus grande est ξ , plus les fibres contribuent au renfort structural de la matrice.
- Pour ce qui concerne la quantité η , on peut vérifier que pour des inclusions rigides $\eta = 1$, pour un matériau homogène $\eta = 0$ et pour des vides $\eta = -1/\xi$.
- Le terme ηV_f peut être interprété comme une fraction volumique réduite (parce que $\eta \leq 1$). En figure, on montre la variation de $\mu = M/M_m$ en fonction de ηV_f pour différentes valeurs de ξ .



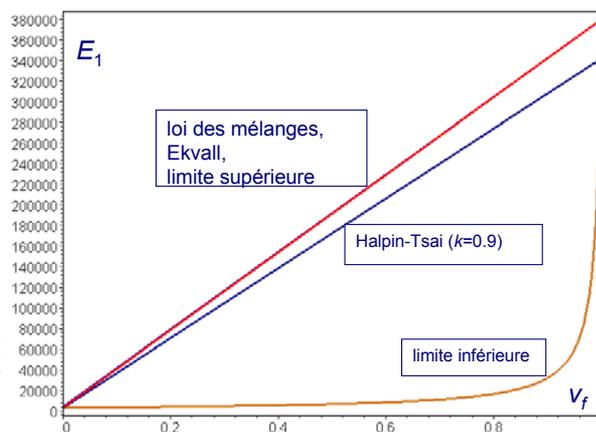
229

Comparaison entre les différentes théories

- Pour conclure, on montre des diagrammes qui permettent de comparer les résultats des différentes théories présentées.
- Les graphiques concernent le cas d'un composite carbone-époxyde, avec les valeurs suivantes des constantes techniques:

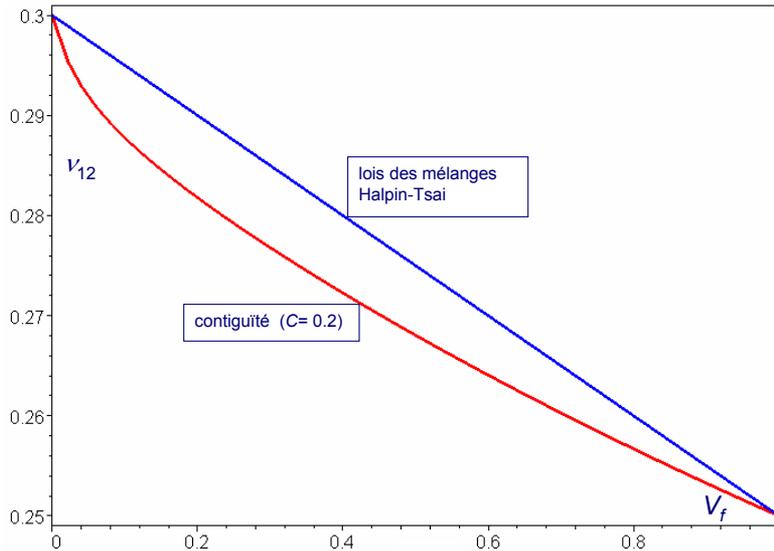
- $E_m = 3.45$ Gpa
- $E_f = 380$ Gpa
- $G_m = 1.327$ GPa
- $G_f = 152$ GPa
- $\nu_m = 0.3, \nu_f = 0.25$

- D'une manière générale, on observe que la dispersion des données est assez importante pour E_2 et G_{12} , beaucoup moins pour E_1 et ν_{12} .



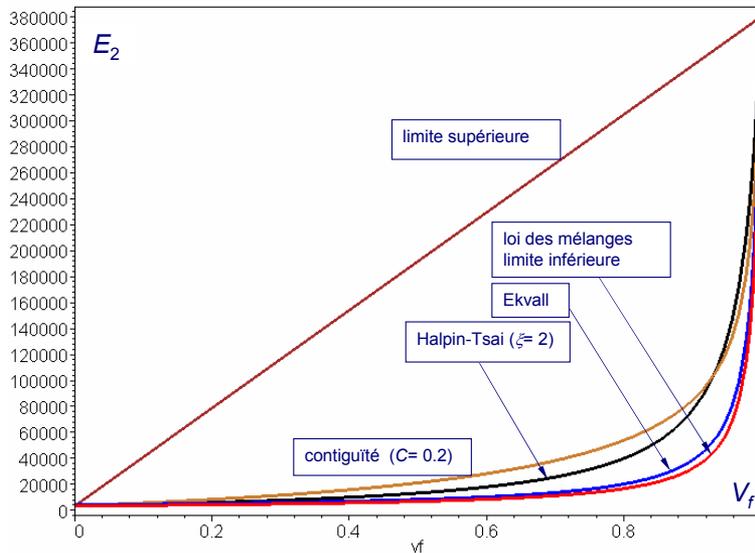
230

Comparaison entre les différentes théories



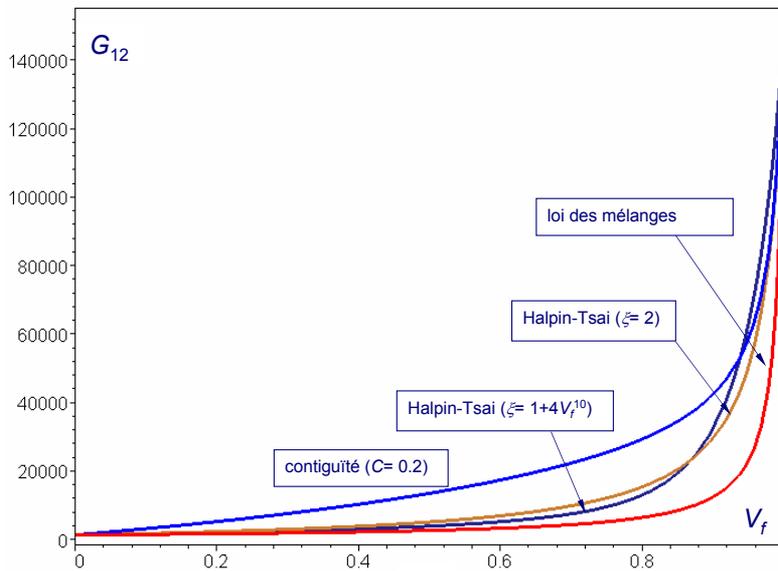
231

Comparaison entre les différentes théories



232

Comparaison entre les différentes théories



233

Chapitre 4

■ Critères de résistance pour les composites

<input type="checkbox"/> Généralités	235
<input type="checkbox"/> Nécessité de critères <i>ad hoc</i> pour les matériaux anisotropes	237
<input type="checkbox"/> Le critère de la contrainte maximale	248
<input type="checkbox"/> Le critère de la déformation maximale	253
<input type="checkbox"/> Le critère de Tsai-Hill	257
<input type="checkbox"/> Le critère de Hoffmann	268
<input type="checkbox"/> Le critère de Tsai-Wu	272
<input type="checkbox"/> Comparaison avec les données de l'expérience	277
<input type="checkbox"/> Homogénéisation des caractéristiques de résistance	282

234

Généralités

- L'analyse de résistance d'un matériau hétérogène et anisotrope présente des problèmes inexistantes dans le cas de matériaux classiques, monophasés et isotropes.
- Ceci a eu comme effet la proposition d'un certain nombre de critères de résistance conçus *ad hoc* pour ce type de matériaux.
- Dans la suite, nous nous occuperons surtout d'une couche orthotrope, car c'est le cas d'intérêt pour les applications.
- D'une manière synthétique, on peut dire que les effets de l'anisotropie sur la résistance et sur la formulation d'un critère de résistance sont principalement:
 - la variation des caractéristiques de résistance avec la direction;
 - ceci implique, entre autres, la nécessité de caractériser la résistance, à travers des tests expérimentaux, dans certaines directions privilégiées, en particulier dans les directions d'orthotropie (en outre, les tests dans d'autres directions seraient très compliqués);
 - la non coaxialité de contraintes et déformations: dans la direction de la contrainte maximale on n'a pas, en général, la direction de la plus grande déformation.

235

Généralités

- De son côté, l'hétérogénéité influence le phénomène de la rupture, ou en tout cas de l'obtention d'un état limite, par un effet de structure interne au milieu, ce qui comporte:
 - l'occurrence de divers mécanismes de rupture (par exemple le *pull-out*, à savoir l'arrachement des fibres, l'instabilité locale des fibres comprimées, l'endommagement de la matrice etc.);
 - l'influence sur la propagation des fissures, souvent positive;
 - la différente résistance en traction et compression.
- Dans la suite, nous nous bornerons à analyser le problème de la formulation d'un critère de résistance pour un milieu anisotrope homogène, dans lequel l'hétérogénéité n'apparaît pas dans la formulation du modèle.
- Dans d'autres mots, nous nous bornerons à analyser le problème de la résistance d'une couche en composite du point de vue macroscopique. Naturellement, ceci implique qu'on renonce à analyser tous les phénomènes localisés, cités ci-dessus, qui difficilement peuvent être saisis par une analyse de synthèse.

236

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- On a dit que l'anisotropie a plusieurs effets sur la résistance; en particulier, il faut observer que, comme les caractéristiques de résistance varient avec la direction, il n'est pas forcément la contrainte maximale qu'il faut contrôler.
- En effet, ce qu'il faut comparer ce n'est pas la plus grande contrainte principale avec la valeur de la résistance dans cette direction principale, mais plutôt le champ de la contrainte effective avec le champ de la contrainte admissible.
- Dans d'autres mots, tandis que dans un matériau isotrope la résistance est indépendante de l'orientation de l'état de la contrainte appliquée (si l'on tourne les directions principales de la contrainte rien ne change), dans un matériau anisotrope la résistance est fonction de l'orientation du champ de contraintes, à parité de tous les autres facteurs.
- En particulier, dans une couche orthotrope, la résistance est fonction de l'orientation des contraintes principales par rapport aux axes d'orthotropie.

237

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- La plus grande partie des données expérimentales de résistance concernent un test monoaxial; l'usage d'un critère de résistance permet, c'est bien connu, d'interpréter le résultat de ces tests même pour des champs de contraintes multiaxiaux.
- Pour un matériau anisotrope, une difficulté ultérieure est que ces tests donnent des valeurs de résistance monoaxiale dans des directions particulières. Il faut donc en tenir compte dans le critère de résistance.
- Le but est, comme toujours, celui d'obtenir des surfaces ou courbes limite dans l'espace des contraintes, avec lequel comparer l'état de contraintes actuel.
- Toutefois, dans l'usage des courbes ou surfaces limite on perd des informations sur le type de crise qui se produit: pour cette raison, ces critères s'appellent aussi phénoménologiques, au sens qu'ils sont en mesure de saisir, plus ou moins bien, le moment de la crise, mais pas sa raison, le mécanisme de rupture.

238

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- Dans d'autres critères, au contraire, on considère des possibles mécanismes macroscopiques de rupture et on postule que ceux-ci n'interagissent pas entre eux; dans ces critères (contrainte ou déformation maximale), on détermine donc le mécanisme de rupture, au moins macroscopiquement (comme déjà dit, dans toutes ces approches on renonce *a priori* à connaître dans le détail la raison locale, micromécanique de la crise)
- Il faut aussi spécifier que, contrairement au cas des métaux, dans les composites la crise est pratiquement toujours une crise de rupture: les composites communs (carbone-époxyde, verre-époxyde etc.) ont un comportement *fragile*, sans phase plastique.
- Les surfaces ou courbes limite sont donc des enveloppes limite de rupture, pas de plasticité.
- En général, pour une couche orthotrope, 5 sont les données nécessaires à déterminer la crise, et donc 5 sont les tests indépendants nécessaires à caractériser une couche orthotrope vis-à-vis de sa résistance.

239

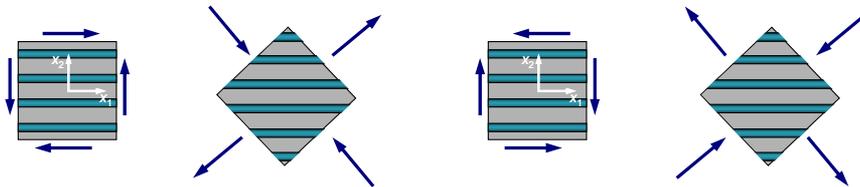
Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- En fait, il faut connaître:
 - X_t : contrainte limite de traction en direction x_1 ;
 - X_c : contrainte limite de compression en direction x_1 ;
 - Y_t : contrainte limite de traction en direction x_2 ;
 - Y_c : contrainte limite de compression en direction x_2 ;
 - S : contrainte limite à cisaillement.
- A remarquer que dans la suite les paramètres de résistance sont tous considérés comme des quantités positives.
- Les paramètres de résistance sont au moins 5 parce qu'en général la résistance à la traction est différente de celle à la compression, pour diverses raisons.
- En particulier, si x_1 est la direction des fibres (comme normalement on fait), alors en général on observe que $X_c < X_t$, tandis que $Y_c > Y_t$.
- Ceci parce qu'en direction longitudinale (x_1) les fibres résistent bien à la traction et moins bien à la compression, pour des effets d'instabilité locale des fibres.

240

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- En direction transversale (x_2), c'est le contraire: en fait, tandis que la matrice domine la résistance à la compression, à la traction celle-ci est influencée par la présence des fibres et donc par l'interface fibres-matrice, qui généralement n'assure pas le même niveau de résistance; en outre, la matrice, qui a souvent un comportement fragile, a normalement une résistance à la compression meilleure que celle à la traction.
- Finalement, la résistance aux cisaillement, assurée essentiellement par la matrice, ne dépend pas du signe des contraintes de cisaillement, comme on comprends facilement pour des raisons de symétrie, voir la figure.



241

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- Un autre problème causé par l'anisotropie, vis-à-vis de l'élaboration d'un critère de résistance, est celui relatif à la décomposition de l'énergie de déformation en parties sphérique et déviatorique.
- En fait, c'est bien connu que le critère de Huber-Hencky-von Mises, normalement accepté comme critère de plasticité pour les alliages isotropes, peut être interprété comme un critère dans lequel on limite l'énergie de déformation déviatorique ou de *distorsion*, à savoir la partie d'énergie de déformation qui est liée aux changements de formes mais pas de volume.
- Les deux tenseurs des contraintes et des déformations peuvent être décomposés en parties sphérique et déviatorique,

$$\sigma = \sigma_S + \sigma_D, \quad \sigma_S = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \mathbf{I}, \quad \sigma_D = \sigma - \sigma_S,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D, \quad \varepsilon_S = \frac{1}{3} \text{tr} \varepsilon \mathbf{I}, \quad \varepsilon_D = \varepsilon - \varepsilon_S,$$

242

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- Le présupposé de base pour l'application du critère de Huber-Hencky-von Mises est que la partie déviatorique du tenseur des contraintes produise seulement un état déviatorique de déformation, de sorte à ce qu'on puisse isoler la partie d'énergie de déformation due aux distorsions, la seule limitée dans le critère cité.
- Dans d'autres mots, la variation de volume concernant la partie déviatorique du tenseur des contraintes doit être nulle:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma}_D) = 0 &\rightarrow \text{tr} \left[\mathbf{Z} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \right) \right] = 0 \rightarrow \\ 3\text{tr}(\mathbf{Z} \boldsymbol{\sigma}) - \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{Z} \mathbf{I}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

- En forme indiciale, la condition ci-dessus est

$$\sigma_{ij} Z_{hhkk} = 3Z_{jjkl} \sigma_{kl}, \quad h, i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

à savoir

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} [Z_{1111}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) + Z_{2222}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) + Z_{3333}(2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11})] + \\ &+ \frac{2}{3} [Z_{1122}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + Z_{1133}(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{22}) + Z_{2233}(\sigma_{33} + \sigma_{22} - 2\sigma_{11})] + \\ &+ 2(Z_{1123} + Z_{2223} + Z_{3323})\sigma_{23} + 2(Z_{1113} + Z_{2213} + Z_{3313})\sigma_{13} + \\ &2(Z_{1112} + Z_{2212} + Z_{3312})\sigma_{12} = 0. \end{aligned}$$

- Cette quantité n'est pas nulle en général et donc, pour un corps anisotrope, un état de contrainte déviatorique comporte aussi une variation de volume.
- D'ailleurs, ceci est la logique conséquence de ce qu'on a déjà observé, lorsqu'on a discuté des couplages entre contraintes et déformations, page 72 et suivantes, où on a remarqué, par exemple, qu'une contrainte de cisaillement est accompagnée aussi par une déformation normale etc.
- Pour un matériau orthotrope, la relation ci-dessus, écrite dans le repère d'orthotropie, devient

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

$$\frac{1}{3}[Z_{1111}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) + Z_{2222}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) + Z_{3333}(2\sigma_{33} - \sigma_{22} - \sigma_{11})] + \frac{2}{3}[Z_{1122}(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{33}) + Z_{1133}(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{22}) + Z_{2233}(\sigma_{33} + \sigma_{22} - 2\sigma_{11})] = 0.$$

- Le problème donc subsiste, aussi bien que, on le vérifie facilement, pour les cas des symétries d'ordre 3, 4 et 6 (isotropie transverse).
- Toutefois, si l'on considère le cas de la symétrie du cube, à savoir d'une orthotropie où

$$Z_{1111} = Z_{2222} = Z_{3333}, \quad Z_{1122} = Z_{1133} = Z_{2233},$$

alors on vérifie facilement que la condition ci-dessus est respectée.

- Donc, pour un matériau à symétries cubique, il est toujours possible de séparer la partie d'énergie de déformation déviatorique de celle sphérique. En théorie, donc, pour ces matériaux il est encore possible, du moins comme approche macroscopique, l'utilisation du critère de Huber-Hencky-von Mises.

245

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- Physiquement, ceci signifie qu'un matériau à symétrie cubique subit, par effet de champs de contraintes sphériques, seulement des variations de volume, pas de forme.
- Ceci n'est pas vrai, en général, même pour un solide orthotrope: à cause des différences de rigidité le long des axes d'orthotropie, un cube de matériau orthotrope se transforme, par une action de type hydrostatique, en un parallélépipède, pas en un cube.
- Le cas de l'isotropie peut être vu comme un cas particulier de la symétrie cubique; en outre, on vérifie facilement, à l'aide des équations de Lamé, que

$$\sigma_S = \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_S, \quad \sigma_D = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_D.$$

- Le requis fondamental, en effet, pour cette décomposition, est que les modules d'Young et les coefficients de Poisson dans les trois directions de symétrie soient les mêmes, et pour ça il suffit la symétrie cubique, l'isotropie n'est pas nécessaire.

246

Nécessité de critères *ad hoc* pour les matériaux anisotropes

- Pour terminer, on montre ici un tableau avec des valeurs typiques des paramètres de rigidité et de résistance de couches en composite à renfort unidirectionnel (source: Jones; les modules et les paramètres de résistance sont en GPa).

Propriété	Verre-époxyde	Bore-époxyde	Carbone-époxyde	Kevlar-époxyde
E_1	54	207	207	76
E_2	18	21	5	5.5
ν_{12}	0.25	0.3	0.25	0.34
G_{12}	9	7	2.6	2.1
X_t	1.035	1.38	1.035	1.38
Y_t	0.028	0.083	0.041	0.028
S	0.041	0.124	0.069	0.044
X_c	1.035	2.76	0.689	0.276
Y_c	0.138	0.276	0.117	0.138

247

Le critère de la contrainte maximale

- Le critère de la contrainte maximale est un critère qui ne prend pas en compte les interactions possibles entre les différents mécanismes de rupture, car il est basé sur la comparaison entre les contraintes effectives et les paramètres de résistance du matériau
- Comme ces paramètres sont connus seulement dans les directions d'orthotropie, est dans ces directions qu'il faut faire la comparaison.
- Ceci implique que ce critère compare les contraintes calculées dans le repère d'orthotropie avec les paramètres de résistance du matériau.
- En définitive, on assume qu'on est à un état de crise si une au moins des 5 conditions suivantes n'est pas respectée:

$$-X_c \leq \sigma_1 \leq X_t,$$

$$-Y_c \leq \sigma_2 \leq Y_t,$$

$$|\sigma_6| \leq S.$$

248

Le critère de la contrainte maximale

- En définitive, c'est comme si on devait vérifier 5 critères au lieu d'un seul.
- L'éventuelle condition non respectée indique aussi le mécanisme de crise; par exemple, si la condition non respectée est $\sigma_2 \leq Y_t$, alors la crise se produit par excès de traction en direction orthogonale aux fibres et donc par rupture de la matrice.
- On insiste sur le fait que la comparaison se fait dans le repère d'orthotropie, le seul dans lequel on connaît les paramètres de résistance.
- Symboliquement, et en accord avec ce qu'on a fait auparavant, on indique ce repère avec les axes $\{x_1, x_2\}$, avec par convention, dans le cas de renfort unidirectionnel, x_1 coïncident avec la direction des fibres, et donc les contraintes seront indiquées dans ce repère avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$, tandis qu'un autre repère sera indiqué avec $\{x, y\}$ et les contraintes dans ce dernier repère avec $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_s$.
- Le passage d'un repère quelconque, où l'on connaît les contraintes, à celui d'orthotropie se fait avec les formules vues au chapitre 2:

249



Le critère de la contrainte maximale

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\} \rightarrow \{\sigma\} = [T]^{-1}\{\sigma'\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$$

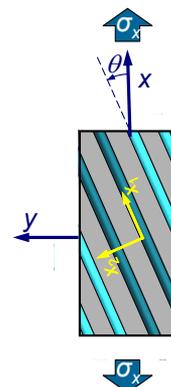
- Le critère, dans un repère quelconque, est donc ($s = \sin\theta, c = \cos\theta$):

$$-X_c \leq c^2\sigma_x + s^2\sigma_y - 2cs\sigma_s \leq X_t,$$

$$-Y_c \leq s^2\sigma_x + c^2\sigma_y + 2cs\sigma_s \leq Y_t,$$

$$|cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| \leq S.$$

- Considérons alors le cas d'une couche à renfort unidirectionnel soumise à un état de contrainte monoaxial, de traction ou de compression, variable avec l'angle θ par rapport à l'axe x_1 , voir la figure.



250



Le critère de la contrainte maximale

- Par rapport au repère d'orthotropie, l'état de contrainte est biaxial, pour un angle θ quelconque. En utilisant la formule de rotation on a

$$-\frac{X_c}{\cos^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{X_t}{\cos^2 \theta},$$

$$-\frac{Y_c}{\sin^2 \theta} \leq \sigma_x \leq \frac{Y_t}{\sin^2 \theta},$$

$$|\sigma_x| \leq \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.$$

- On peut donc tracer les courbes correspondantes à chacune des conditions ci-dessus. Alors, σ_x limite est, pour chaque orientation, la valeur qui correspond à la courbe inférieure.
- A titre d'exemple, on reporte le cas d'un composite verre-époxyde, dont les caractéristiques sont indiquées ci de suite. On a tracé deux diagrammes, un avec les courbes pour le cas de traction monoaxiale, l'autre pour la compression.

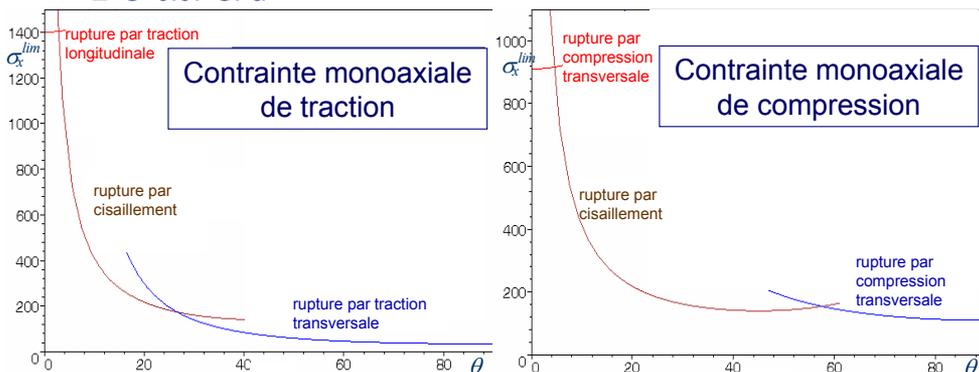
251



Le critère de la contrainte maximale

- Caractéristiques mécaniques du composite verre-époxyde utilisé:

- | | |
|--|------------------|
| <input type="checkbox"/> $X_t=1.4$ GPa | $E_1=46$ GPa |
| <input type="checkbox"/> $X_c=0.91$ GPa | $E_2=10$ GPa |
| <input type="checkbox"/> $Y_t=0.035$ GPa | $G_{12}=4.6$ GPa |
| <input type="checkbox"/> $Y_c=0.11$ GPa | $\nu_{12}=0.31$ |
| <input type="checkbox"/> $S=0.07$ GPa | |



252



Le critère de la déformation maximale

- Le critère de la déformation maximale est comme celui de la contrainte maximale, à la seule différence que dans ce cas les limites sont posées sur les déformations:

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon c} &\leq \varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon t}, \\ -Y_{\varepsilon c} &\leq \varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon t}, \\ |\varepsilon_6| &\leq S_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

- Avec $X_{\varepsilon c}$ etc. on a indiqué les déformations limite.
- Les déformations peuvent être exprimées en fonction des contraintes et, par les formules de rotation, on peut écrire les conditions ci-dessus dans un repère quelconque:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} = [S][T]^{-1}\{\sigma'\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}.$$

253

Le critère de la déformation maximale

- On obtient donc les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} -X_{\varepsilon c} &\leq \frac{1}{E_1} [(c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2cs(1 + \nu_{12})\sigma_s] \leq X_{\varepsilon t}, \\ -Y_{\varepsilon c} &\leq \frac{1}{E_2} [(s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2cs(1 + \nu_{21})\sigma_s] \leq Y_{\varepsilon t}, \\ \frac{1}{G_{12}} |cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| &\leq S_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

- D'ailleurs, le comportement à la rupture des composites le plus souvent est fragile, comme déjà dit: la rupture se produit à la limite de la phase élastique.
- Si donc on accepte cette hypothèse, c'est alors évident que

$$X_{\varepsilon c} = \frac{X_c}{E_1}, \quad X_{\varepsilon t} = \frac{X_t}{E_1}, \quad Y_{\varepsilon c} = \frac{Y_c}{E_2}, \quad Y_{\varepsilon t} = \frac{Y_t}{E_2}, \quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{12}}.$$

254

Le critère de la déformation maximale

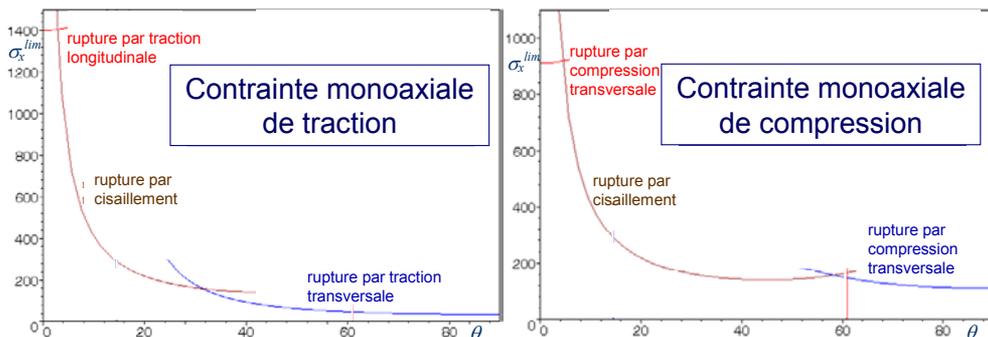
- Dans un tel cas, les conditions limite deviennent

$$\begin{aligned}
 -X_c &\leq (c^2 - \nu_{12}s^2)\sigma_x + (s^2 - \nu_{12}c^2)\sigma_y - 2cs(1 + \nu_{12})\sigma_s \leq X_t, \\
 -Y_c &\leq (s^2 - \nu_{21}c^2)\sigma_x + (c^2 - \nu_{21}s^2)\sigma_y + 2cs(1 + \nu_{21})\sigma_s \leq Y_t, \\
 |cs\sigma_x - cs\sigma_y + (c^2 - s^2)\sigma_s| &\leq S.
 \end{aligned}$$

- On voit donc que rien ne change par rapport au critère de la contrainte maximale, pour la vérification au cisaillement, tandis que dans la vérification des contraintes normales il y a uniquement l'apparition des coefficients de Poisson: ceci modifie seulement légèrement les résultats précédents, obtenus avec le critères de la contrainte maximale.
- On reporte encore le cas de la couche en verre-époxyde soumise à une contrainte monoaxiale variable en orientation: les résultats sont très peu différents des précédents, à confirmation de ce qu'on a dit ci-dessus.

Le critère de la déformation maximale

$$\begin{aligned}
 -\frac{X_c}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} &\leq \sigma_x \leq \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta}, \\
 -\frac{Y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} &\leq \sigma_x \leq \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta}, \\
 |\sigma_x| &\leq \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}.
 \end{aligned}$$



Le critère de Tsai-Hill

- Le critère de Tsai-Hill est un critère phénoménologique que Tsai (1968) a élaboré pour les couches en composite à partir du critère de Hill (1950), créé pour des matériaux orthotropes quelconque.
- Le critère de Hill est une généralisation du critère de Huber-Hencky-von Mises, où par contre, à différence de ce dernier, on prends en considération toute l'énergie de déformation, pas seulement celle de distorsion, parce que, on l'a vu ci dessus, dans le cas anisotrope il n'est pas, en général, possible de séparer la partie d'énergie de distorsion de celle de changement de volume
- Le critère de Hill se formule, dans le repère d'orthotropie, de la façon suivante:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\sigma_4^2 + 2M\sigma_5^2 + 2N\sigma_6^2 \leq 1.$$

- Les coefficients F , G , H , L , M et N sont les paramètres de résistance de Hill; ils sont à interpréter comme des valeurs limite d'élasticité pour les matériaux ductiles et de rupture pour les fragiles.

257



Le critère de Tsai-Hill

- Tsai a simplement adapté le calcul de ces paramètres au cas d'une couche orthotrope pour faire cela, il a simplement considéré des cas de chargement particulièrement simples.
- Si $\sigma_6 \neq 0$, $\sigma_i = 0$ pour $i=1, \dots, 5$, alors le critère se réduit à

$$2N\sigma_6^2 = 1 \rightarrow N = \frac{1}{2\sigma_6^2}.$$

- Mais si on est à l'état limite, alors σ_6 prend sa valeur limite, qui est S_{xy} ; donc:

$$N = \frac{1}{2S_{xy}^2}.$$

- De façon analogue, en posant successivement $\sigma_4 \neq 0$ et $\sigma_5 \neq 0$ avec les autres composantes de la contrainte nulles, on obtient

$$L = \frac{1}{2S_{yz}^2}, \quad M = \frac{1}{2S_{xz}^2}.$$

258

