

Deuxième partie :
Modélisation de la propagation du son dans un milieu
poreux flexible par la méthode des éléments finis

Chapitre III : Modélisation de la propagation du son dans un milieu poreux flexible

Introduction

La description de la propagation d'ondes dans le cas d'un milieu saturé est plus compliquée que dans le cas des pores vides, car les deux phases, solide et fluide, influencent le comportement macroscopique du milieu. La détermination des caractéristiques acoustiques effectives a été menée par une technique d'homogénéisation [19] [29]. Cette méthode a été utilisée par Boutin et Auriault (1990) pour obtenir les équations macroscopiques par la résolution des problèmes locaux dans le solide et dans le fluide [30] [31].

III.1 Le problème rigide

Dans cette section nous établissons les équations modélisant le passage d'une onde acoustique dans un milieu poreux sec. Nous considérons que le matériau poreux est indéformable c'est-à-dire que le squelette ne peut pas bouger [32]. Cette première étape dans la modélisation nous permet de comprendre le découplage des équations en température d'une part, et celles en déplacement d'autre part [33] [34]. Cela est dû à l'hypothèse d'incompressibilité du fluide.

Pour cette étude, nous commençons par admettre les propriétés suivantes :

- le système est conservatif ce qui justifie l'utilisation d'une équation de conservation de la masse ;
- le fluide est assimilé à un gaz parfait, ce qui nous permet d'utiliser la formule des gaz parfaits ;
- nous nous plaçons en situation adiabatique ;
- le fluide est assimilé à un milieu incompressible, ce qui se traduit par la nullité de la divergence de la vitesse.

III.1.1 Equation au niveau fluide

Les différentes équations s'écrivent :

Equation d'état de gaz parfait :

$$\frac{p}{\rho_0 T_0} = C_p - C_v \text{ dans } \Omega_f \quad (3.1a)$$

ou $\frac{p}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\tau}{T_0}$ (Equation de gaz parfait)

Equation de conservation de la quantité de mouvement pour la vitesse :

$$\rho_0 \frac{\partial v_f}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_f(v_f) \text{ dans } \Omega_f \quad (3.1b)$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v_f = 0 \text{ dans } \Omega_f \quad (3.1c)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement pour la température :

$$\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_t(\tau) \text{ dans } \Omega_f \quad (3.2)$$

avec $\sigma_f(v_f, p) = -pId + \eta_1 \nabla \cdot v_f Id + \eta_2 e(v_f)$ (loi de comportement fluide newtonien)

et $\sigma_t(\tau) = K_d \nabla \tau$ (loi de Kelvin pour la conduction)

Nous reformulons donc les équations données par (3.1)-(3.2) sous la forme :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_f}{\partial t} = -\nabla p + \eta_1 \Delta v_f + (\eta_1 + \eta_2) \nabla(\nabla \cdot v_f) \\ \nabla \cdot v_f = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) \\ \rho_0 C_p \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} = K_d \Delta \tau \end{cases} \quad (3.3)$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air, T_0 la température ambiante, P_0 la pression atmosphérique, C_p la chaleur massique à pression constante, C_v la chaleur massique à volume constant, v_f la vitesse du fluide interstitiel, p la pression, K_d la conductivité thermique, τ la température, η_1 et η_2 sont les viscosités cinématiques du fluide.

III.1.2 Equation au niveau du squelette

La propagation du son dans le solide est décrit localement dans chaque domaine poreux par l'équation de conservation de la dynamique dans le solide qui est défini par :

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma^s(u_s) \quad \text{dans } \Omega_s \quad (3.4)$$

avec $\sigma^s(u_s) = \lambda \left[1 + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \right] u_{k,k} \delta_{ij} + \mu \left[1 + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \right] (u_{i,j} + u_{j,i})$ (la loi de comportement viscoélastique linéaire)

où u_s le déplacement solide, ρ_s la masse volumique du solide, δ_{ij} le symbole de Kronecker, η_s l'amortissement structurel du solide, λ et μ sont les coefficients de Lamé.

III.1.3 Condition d'adhérence

A l'interface, la continuité des vitesses et des contraintes conduit sont

$$\begin{cases} v_f = \frac{\partial u_s}{\partial t} \\ \sigma^f(v_f, p) \vec{n} = \sigma^s(u_s) \vec{n} \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.5)$$

où \vec{n} est le vecteur normal extérieur

Finalement, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v_f}{\partial t} = -\nabla p + (\eta_2 + \eta_1) \nabla (\nabla \cdot v_f) + \eta_2 \Delta v_f & \text{dans } \Omega_f \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot v_f = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \rho_0 C_p \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} = K_d \Delta \tau & \text{dans } \Omega_f \\ \rho_s \frac{\partial u_s}{\partial t} = \lambda \left(1 + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla (\nabla \cdot u_s) + \mu \left(1 + \eta_s \frac{\partial}{\partial t} \right) [\nabla (\nabla \cdot u_s) + \Delta u_s] & \text{dans } \Omega_s \\ v_f = \frac{\partial u_s}{\partial t} & \text{sur } \Gamma \\ \sigma^f(u_f, p) \vec{n} = \sigma^s(u_s) \vec{n} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.6)$$

III.1.4 Linéarisation

Nous considérons une perturbation harmonique ($e^{i\omega t}$) de petite amplitude de l'état d'équilibre thermodynamique ambiant, perturbation liée au passage de l'onde sonore dans l'équation fluide-structure [25]. Nous avons :

$$\begin{cases} v_f = \hat{v}e^{i\omega t} + \bar{v}_s \\ u_s = \hat{u}e^{i\omega t} + \bar{u}_s \\ p = \hat{p}e^{i\omega t} + \bar{p}_s \\ T = \hat{\tau}e^{i\omega t} + \bar{T}_s \end{cases} \quad (3.7)$$

Dans la suite, les partie dynamique $\bar{u}_s, \bar{T}_s, \bar{v}_s$ et \bar{p}_s seront ignorés puisqu'elles peuvent être prise constantes. En outre, comme par la suite nous n'aurons besoin que des termes linéaires de (3.7), et le facteur $e^{i\omega t}$ étant présent sur toutes les termes nous ne travaillons que sur \hat{v}, \hat{u} et \hat{p} que nous notons maintenant respectivement v, u et p . Nous le définissons comme le fait Adeline Augier dans [13] par

$$u_f(x, t) = \int_0^t v_f(x, s) ds \quad (3.8)$$

En utilisant le fait que les variables u_s, v_f et p sont harmoniques en temps c'est-à-dire écrites comme en (3.7) et en utilisant (3.8) c'est-à-dire

$$u_f(x, t) = u_f(x) (e^{i\omega t} - 1) \quad (3.9)$$

$$\text{avec } u_f = \frac{v_f}{i\omega}$$

Nous obtenons le système couplé fluide-structure suivant :

$$\begin{cases} -\rho_0 \omega^2 u_f = -\nabla p + i\omega \left[(\eta_2 + \eta_1) \nabla (\nabla \cdot u_f) + \eta_2 \Delta u_f \right] \text{ dans } \Omega_f \\ \left[\frac{p^0}{P_0} - \frac{\tau^0}{T_0} \right] + \nabla \cdot u_f = 0 \text{ dans } \Omega_f \\ i\omega \rho_0 C_p \tau = i\omega p + K_d \Delta \tau \text{ dans } \Omega_f \\ \rho_s \omega^2 u_s = -(\lambda^* + \mu^*) \nabla (\nabla \cdot u_s) - \mu^* \Delta u_s \text{ dans } \Omega_s \\ u_f = u_s \text{ sur } \Gamma \\ \sigma^f(u_f, p) \vec{n} = \sigma^s(u_s) \vec{n} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{avec } \sigma^f(u_f, p) = -p Id + i\omega \left[\eta_1 \nabla \cdot u_f Id + \eta_2 e(u_f) \right], \quad \sigma^s(u_s) = \lambda^{*tr} e(u_s) Id + 2\mu^* e(u_s),$$

$$\lambda^* = \lambda(1 + \eta_s i) \text{ et } \mu^* = \mu(1 + \eta_s i)$$

où λ^* et μ^* sont les coefficients de Lamé complexe

III.1.5 Evaluation des nombres adimensionnels

Du système (3.6) se dégagent quatre nombre adimensionnels [12] [20].

III.1.5.1 Le nombre de Reynolds R_l :

Le nombre de Reynolds transitoire est défini par :

$$R_l = \frac{\left| \rho_0 \frac{\partial v_f}{\partial t} \right|}{\left| \eta_2 \Delta v_f \right|} \quad (3.11)$$

Le nombre de Reynolds transitoire local peut prendre deux expressions : les équations (3.12) et (3.13).

$$R_{ll} = \frac{\rho_0 \omega l^2}{\eta_2} = \left(\frac{1}{\lambda_b} \right)^2 \quad (3.12)$$

$$\text{avec } \lambda_b = \sqrt{\frac{\eta_2}{\omega \rho_0}} \quad (3.13)$$

La longueur λ_b est une longueur caractéristique de la couche limite visqueuse le long de Γ : lorsque la fréquence ω est très élevée, le terme d'inertie des équations de Navier-Stokes devient prépondérant par rapport au terme visqueux. Ainsi si la fréquence est importante, le fluide se comporte comme un fluide parfait. Néanmoins il se développe une couche limite le long de l'interface fluide-solide Γ , où toute la dissipation visqueuse s'effectue, et l'épaisseur de cette couche limite est λ_b .

λ_b augmente lorsque la fréquence ω diminue, en prenant pour cadre d'étude le cas où le terme d'inertie transitoire local est du même ordre de grandeur que le terme de viscosité microscopique, nous admettons que le nombre de Reynolds transitoire local est $R_{ll} = O(1)$. Ce qui correspond à une épaisseur de la couche limite λ_b qui est du même ordre de grandeur que la taille des pores.

R_{ll} peut aussi prendre l'expression (3.14) ;

$$R_{ll} = (\omega \tau_d)^2 \quad (3.14)$$

$$\text{avec } \tau_d = l \sqrt{\frac{\rho_0}{\omega \eta_2}} \quad (3.15)$$

où τ_d est le temps mis par l'onde diffusive de cisaillement pour traverser la cellule périodique. Ainsi en prenant $R_l = O(1)$, nous supposons que τ_d est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de la vibration.

III.1.5.2 Le nombre adimensionnel Q :

Il est défini par :

$$Q = \frac{|\bar{\nabla} p|}{|\eta_2 \Delta v_f|} \quad (3.16)$$

Quand l'écoulement est lent, le terme gradient macroscopique de pression, qui force l'écoulement, est du même ordre de grandeur que le terme de dissipation visqueuse locale. Nous écrivons donc :

$$\frac{p/L}{\eta_2 v_f / l^2} = O(1) \quad (3.17)$$

Nous avons ainsi l'estimation (3.16) des nombres Q_l et Q_L :

$$Q_l = \frac{pl}{\eta_2 v_f / l} = O(\varepsilon^{-1}) \text{ soit } Q_L = \frac{p/L}{\eta_2 v_f / L^2} = O(\varepsilon^{-2}) \quad (3.18)$$

III.1.5.3 Le nombre adimensionnel T_l :

$$T_{sl} = \left| \frac{\rho_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}}{\nabla \sigma_s} \right| \quad (3.19)$$

Le nombre sans dimension T_{sl} prend aussi deux expressions : les équations (3.20) et (3.22).

$$T_{sl} = (1/\lambda_s)^2 \quad (3.20)$$

$$\text{avec } \lambda_s = \sqrt{|a|/\rho_s} \quad (3.21)$$

où λ_s est la longueur caractéristique qui constitue l'élasticité du matériau T_{sl} peut aussi prendre l'expression (3.22)

$$T_{sl} = (\omega \tau_s)^2 \quad (3.22)$$

$$\text{avec } \tau_s = l\sqrt{\rho_s/|a|} \quad (3.23)$$

où τ_s est le temps mis par l'onde diffusive de cisaillement pour traverser la cellule périodique. Ainsi pour $T_{sl} > O(\varepsilon^2)$ le phénomène est homogénéisable et si $T_{sl} < O(\varepsilon^2)$ le problème devient quasi-statique.

III.1.5.4 Le nombre adimensionnel T_{il} :

$$T_{il} = \left| \frac{\rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t}}{K_d \Delta T} \right| \quad (3.24)$$

Le nombre adimensionnel T_{il} a pour expression :

$$T_{il} = \frac{\rho_0 C_p \omega}{K_d l^2} = O(\varepsilon^{-2}) \quad (3.25)$$

Elle doit se faire de telle sorte que, au niveau macroscopique, les estimations (3.18), (3.19) et (3.22) soient satisfaites. Nous procédons alors à la normalisation du système (3.13) qui formellement s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_0 \omega^2 u_f = -\nabla p + \varepsilon^2 i \omega \left[(\eta_2 + \eta_1) \nabla (\nabla \cdot u_f) + \eta_2 \Delta u_f \right] \quad \text{dans } \Omega_f \\ \left[\frac{p^0}{P_0} - \frac{\tau^0}{T_0} \right] + \nabla \cdot u_f = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \\ i \omega \rho_0 C_p \tau = i \omega p + \varepsilon^2 K_d \Delta \tau \quad \text{dans } \Omega_f \\ \rho_s \omega^2 u_s = -(\lambda^* + \mu^*) \nabla (\nabla \cdot u_s) - \mu^* \Delta u_s \quad \text{dans } \Omega_s \\ u_f = u_s \quad \text{sur } \Gamma \\ \left[-p Id + i \omega \varepsilon^2 \left[\eta_1 \nabla \cdot u + \eta_2 e(u_f) \right] \right] \vec{n} = \left[\lambda^{*tr} e(u_s) Id + 2\mu^* e(u_s) \right] \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.26)$$

En posant $u = u_f - u_s$ le déplacement relatif, nous obtenons le système en déplacement u et p vérifiant le système fluide-structure suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\rho_0 \omega^2 (u + u_s) = -\nabla p + \varepsilon^2 i \omega [(\eta_2 + \eta_1) \nabla (\nabla \cdot (u + u_s)) + \eta_2 \Delta (u + u_s)] \\
\left[\frac{p^0}{P_0} - \frac{\tau^0}{T_0} \right] + \nabla \cdot (u + u_s) = 0 \\
i \omega \rho_0 C_p \tau = i \omega p + \varepsilon^2 K_d \Delta \tau \\
\rho_s \omega^2 u_s = -(\lambda^* + \mu^*) \nabla (\nabla \cdot u_s) - \mu^* \Delta u_s \\
u = 0 \\
\left[-p Id + i \omega \varepsilon^2 \{ \eta_1 \nabla [\nabla \cdot (u + u_s)] + \eta_2 \varepsilon (u + u_s) \} \right] \vec{n} \\
= \left[\lambda^{*tr} e(u_s) Id + 2\mu^* e(u_s) \right] \vec{n}
\end{array} \right. \quad (3.27)$$

III.2 Homogénéisation des structures périodiques

D'une façon générale, les techniques d'homogénéisation sont destinées à prévoir les propriétés macroscopiques d'un matériau à partir de sa microstructure et des propriétés des constituants à l'échelle locale. Il existe de nombreuses techniques, mais dans le cadre de ce travail, seule la technique d'homogénéisation des structures périodiques sera utilisée [35] [36] [37].

Après une présentation générale de la problématique de l'homogénéisation, la technique d'homogénéisation de structures périodiques sera abordée puis appliquée à la dynamique des milieux poreux et enfin l'utilisation qui en est faite dans le cadre de la thèse est donnée.

III.2.1 Introduction aux méthodes d'homogénéisation

Les matériaux sont toujours hétérogènes d'une échelle ou à une autre. Cette hétérogénéité réside soit dans la présence d'un réseau cristallin à l'échelle moléculaire, soit dans la présence de zones formées de constituants sensiblement homogènes se partageant l'espace [38] [39]. C'est ce dernier type de matériau qui se prête réellement aux techniques d'homogénéisation. Un tel matériau peut être décrit par deux modèles : l'un à l'échelle dite microscopique ou locale où le comportement est hétérogène ; et l'autre à l'échelle dite macroscopique où le comportement est considéré comme homogène.

Le comportement macroscopique des matériaux peut, soit être identifié directement par des essais sur le matériau, soit faire l'objet d'une prédiction de comportement, lorsque le comportement des matériaux constitutifs et leur microstructure sont connus, à l'aide de la technique d'« homogénéisation ». Ces deux méthodes sont évidemment complémentaires. En pratique, les techniques d'homogénéisation servent surtout à comprendre le comportement de matériaux et à prévoir la constitution de nouveaux matériaux. Le comportement estimé doit évidemment être testé par des essais à l'échelle macroscopique [40] [41] [42].

Autrement dit, les méthodes d'homogénéisation cherchent à remplacer le matériau hétérogène par un milieu dit « homogène équivalent » caractérisé par des propriétés effectives (Figure 35).

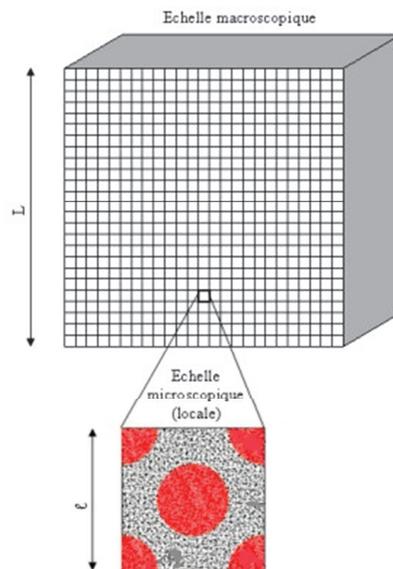


Figure 35 – Milieu poreux périodique à simple-porosité [16].

La condition fondamentale qui est commune à presque toutes les techniques d'homogénéisation même si elle est seulement implicite pour certaines méthodes est la séparation des échelles, à savoir la séparation entre l'échelle microscopique (échelle d'hétérogénéité) et l'échelle macroscopique à laquelle le milieu équivalent est recherché [43] [44] [45]. Si les échelles sont séparées, cela signifie que le milieu contient un grand nombre d'hétérogénéités dont la dimension est petite par rapport à l'échelle macroscopique. La séparation des échelles peut être exprimée comme suit :

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1 \quad (3.28)$$

où l est la longueur caractéristique microscopique (dimension caractéristique des hétérogénéités) et L est la longueur caractéristique macroscopique (dimension caractéristique du volume de matériau ou du phénomène étudié).

Une fois que la condition de séparation d'échelle est satisfaite, il est alors possible de définir un «volume élémentaire représentatif» (ver) du matériau hétérogène considéré, qui reste suffisamment petit par rapport à la dimension caractéristique de la structure macroscopique et qui doit être suffisamment grande à l'échelle microscopique pour décrire l'hétérogénéité. L'échelle de la structure est dite macroscopique et celle des hétérogénéités est dite microscopique [46] [47].

III.2.2 Homogénéisation des structures périodiques

Parmi les différentes méthodes d'homogénéisation, la technique d'homogénéisation des structures périodiques est une méthode puissante et efficace. Dans le cas de matériaux périodiques, elle permet de déterminer de façon systématique le problème qu'il est nécessaire de résoudre sur la cellule élémentaire pour déterminer les propriétés macroscopiques, ainsi que la structure des équations de conservation et de comportement à l'échelle macroscopique. Cette méthode permet de définir avec précision la notion de comportement homogénéisé. Aussi, le domaine d'application de cette méthode s'étend graduellement [48] [49] [50] [51]. Dans le cadre de cette thèse, cette méthode sera appliquée à des matériaux poreux pour lesquels la distribution des hétérogénéités n'est pas strictement périodique, mais pour lesquels la microstructure est constituée de cellules de tailles sensiblement identiques et de morphologie comparables. Il est alors possible de constituer un modèle périodique à partir d'une cellule « moyenne » reproduite périodiquement, dont les propriétés géométriques sont bien adaptées pour simuler la morphologie réelle [52] [53]. Dans ce qui suit, nous supposons donc que la structure est strictement périodique et nous verrons par la suite l'application pratique.

III.2.3 Cellule de base

Un milieu périodique est défini par une cellule de base reproduite périodiquement dans les différentes directions de l'espace. Le choix de la cellule de base n'est pas unique (Figure 36). Nous pouvons donc prendre plusieurs cellules de base montrées sur la figure. Par contre, les propriétés effectives du matériau sont

déterminées de façon unique et ne dépendent pas du choix de la cellule. En pratique, nous utilisons des cellules de géométrie simple, rectangulaire pour les problèmes plans et parallélépipédique pour les problèmes tridimensionnels.

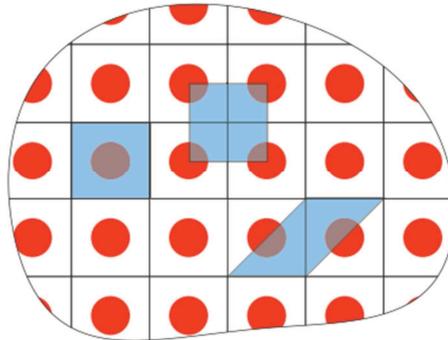


Figure 36 –Plusieurs choix possible de cellules de base pour une structure périodique [12].

III.2.4 Méthode de développements à échelles multiples

La méthode d’homogénéisation de structures périodiques repose sur l’utilisation d’échelles multiples. Elle a été initialement introduite par Bensoussan et al. (1978) [8] et Sanchez-Palencia (1980) [19], puis complétée par une analyse dimensionnelle des équations aux dérivées partielles du problème par Auriault (1991).

III.2.5 Séparation d’échelles

Comme signalée précédemment, la séparation d’échelles est une condition indispensable pour les méthodes de passage micro-macro, et donc pour la méthode d’homogénéisation des structures périodiques. Dans le cas d’une structure périodique, la cellule périodique suffit à décrire la totalité de la structure. Soit L la longueur macroscopique (longueur caractéristique du volume de matériau considéré ou longueur caractéristique macroscopique de la sollicitation).

La séparation d’échelle doit être aussi prise en compte pour les grandeurs physiques. Par exemple, dans le cas d’une propagation d’onde dans un milieu poreux, la méthode ne peut être utilisée que dans le cas où la taille des pores D est beaucoup plus petite que la longueur d’onde λ_a :

$$\frac{D}{\lambda_a} \ll 1 \quad (3.29)$$