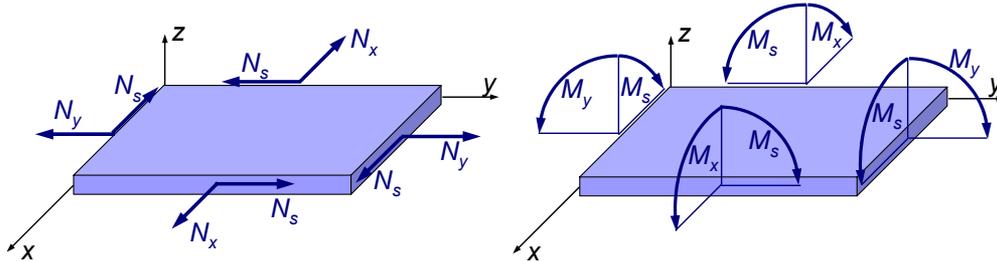


## La loi fondamentale des stratifiés

- Maintenant, on peut procéder au calcul des actions internes; compte tenu des hypothèses faites et de leurs conséquences, en particulier de l'absence de contraintes en direction  $z$ , les seules actions interne qu'on peut calculer avec ce modèle mécanique sont les actions de *membrane* et celles de *flexion*, à savoir les efforts normaux et tangentiels dans le plan moyen et les moments fléchissants et de torsion du plan moyen. Ceux-ci sont indiqués en figure



309



## La loi fondamentale des stratifiés

- Évidemment, les actions internes sont des forces et des moments par unité de longueur.
- A remarquer que pas tous les auteurs utilisent la même nomenclature et même pas la même convention sur les signes (par exemple Jones).
- Celle adoptée ici est cohérente avec la définition même de moment fléchissant ou de torsion, à savoir est celle qu'on obtient naturellement en développant les calculs indiqués ci de suite, dans le repère adopté (comme dans Lekhnitskii ou Vinson-Sierakowski; Vasiliev et Morozov utilisent, de leur côté, un repère orienté négativement).
- La définition des actions internes est classique et immédiate: si  $h$  est l'épaisseur du stratifié, alors

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz, \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz.$$

- En termes de composantes, en utilisant encore la notation de Voigt, il est

310



## La loi fondamentale des stratifiés

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s dz \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s z dz \end{Bmatrix}.$$

- La nature de tenseurs du second ordre de **N** et **M** découle directement de leur définition.
- Le lien entre actions internes et déformations s'obtient en injectant dans les relations ci-dessus la loi de comportement discutée auparavant, et en faisant l'intégration sur l'épaisseur. Dans ce faire, il faut tenir compte du fait, et c'est un point essentiel, que le stratifié est composé de plusieurs couches, en général différente et diversement orientées par rapport au repère global  $\{x,y,z\}$ .
- L'intégration doit être donc coupées en autant de parties distinctes que le nombre de couches composant le stratifié et dans chacune de ces parties il faut prendre en considération la rigidité propre au pli et à son orientation, qu'on appellera  $\delta$ .

311

## La loi fondamentale des stratifiés

- Comme dans le modèle adopté le champ de déformation est unique pour tous les plis et décrit par deux tenseurs qui ne dépendent pas de la coordonnée  $z$ , on a:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}_k dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}] dz = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz \right] \boldsymbol{\kappa}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\sigma}_k z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z \boldsymbol{\kappa}] dz = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz \right] \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \left[ \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z^2 dz \right] \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned}$$

- Dans ces équation,  $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$  indique la matrice  $[Q]$  du pli  $k$  qui est tourné de  $\delta_k$  en sens trigonométrique par rapport au repère global  $\{x,y,z\}$ .

312

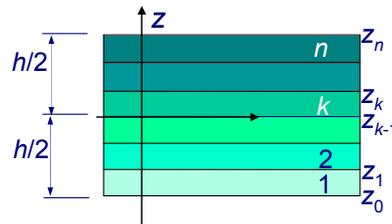
## La loi fondamentale des stratifiés

- Dans le but de rendre plus simple l'écriture des équations, on a utilisé la notation tensorielle au lieu de celle, plus correcte, matricielle, utilisée jusqu'ici; ainsi on fera aussi dans la suite.
- Les bornes d'intégration  $z_{k-1}$  et  $z_k$  sont respectivement les positions des faces inférieure et supérieure du pli  $k$ , selon le schéma de figure (couches numérotées à partir du bas);  $n$  est le nombre total des plis.
- Dans les équations précédentes on pose

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) dz,$$

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z dz,$$

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{Q}_k(\delta_k) z^2 dz.$$



313

## La loi fondamentale des stratifiés

- Comme les  $\mathbf{Q}_k(\delta_k)$  ne dépendent pas de  $z$ , on a

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \mathbf{Q}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \mathbf{Q}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \mathbf{Q}_k(\delta_k).$$

- On parvient donc à la *loi fondamentale des stratifiés*, qui écrite en forme matricielle symbolique est

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}$$

- Celle-ci est une véritable loi de comportement, qui dans le cadre des hypothèses faites lie les actions internes au champ de déformation.

314

## La loi fondamentale des stratifiés

- Ce résultat doit être convenablement commenté.
- En effet, on voit que

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa},$$

et que

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}.$$

- Donc, les actions de membrane sont liées non seulement aux déformations du plan moyen, mais aussi à ses courbures de la même façon, les moments fléchissants et de torsion sont liés non seulement aux courbures du plan moyen, mais aussi à ces déformations.
- Dans d'autres termes, *il y a un couplage entre les actions de membrane et les courbure et entre les moments et les déformations du plan moyen* et ces couplages sont décrits par le même tenseur  $\mathbf{B}$ , qui pour ça est appelé *tenseur de couplage membrane-flexion*.

315



## La loi fondamentale des stratifiés

- Cet effet n'existe pas dans les plaques monocouches et c'est à cause de ça qu'on est obligés de traiter ensemble les cas de membrane et de flexion, souvent présentés séparés dans la théorie classique des plaques.
- Le tenseur  $\mathbf{A}$  est un tenseur de rigidité qui lie les actions et les déformations de membrane, tandis que le tenseur  $\mathbf{D}$  lie les moments et les courbures. Pour cela,  $\mathbf{A}$  est dit *tenseur de rigidité de membrane* et  $\mathbf{D}$  *tenseur de rigidité de flexion*.
- Par la définition même des trois tenseurs qui décrivent, en rigidité, le comportement élastique d'un stratifié, on a que, étant symétriques les tenseurs de rigidité des couches,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^T.$$

316



## Les tenseurs normalisés

- Les trois tenseurs **A**, **B** et **D** ont des dimensions différentes:

$$[\mathbf{A}] = [F/L] \quad (\text{N/m}),$$

$$[\mathbf{B}] = [F] \quad (\text{N}),$$

$$[\mathbf{D}] = [FL] \quad (\text{Nm}).$$

- Par conséquent, les trois tenseurs ne sont pas directement comparables.
- En outre, ces tenseurs sont des tenseurs de rigidité qui décrivent la réponse élastique d'un stratifié ayant une épaisseur totale  $h$ .
- Or, le but principal, déjà annoncé, de la théorie classique est celui de donner une loi capable de simuler le comportement élastique du stratifié multicouches comme si celui-ci était constitué par une seule couche, ayant l'épaisseur totale du stratifié (c'est donc une théorie monocouche).

317

## Les tenseurs normalisés

- Les trois tenseurs décrivent donc le comportement élastique de ce monocouche élastiquement équivalent au stratifié.
- On peut donc se poser la question suivante: quelles sont les caractéristiques élastiques du matériau factice constituant ce monocouche élastiquement équivalent au stratifié?
- Comme on s'est réduit à un monocouche, donc homogène, même si en général anisotrope, la réponse se trouve directement dans la théorie des plaques homogènes (pour **B** c'est conventionnel): les caractéristiques élastiques de ce matériau factice se trouvent à partir des tenseurs de rigidité par le biais des opérations suivantes

$$\mathbf{A}^* = \frac{\mathbf{A}}{h}, \quad \mathbf{B}^* = 2 \frac{\mathbf{B}}{h^2}, \quad \mathbf{D}^* = 12 \frac{\mathbf{D}}{h^3}.$$

- Le symbole \* indique donc les tenseurs normalisés il est simple de constater que les tenseurs normalisés ont tous les mêmes dimensions, celles d'un module  $[FL^{-2}]$ , (MPa), et donc ils sont directement comparables.

318

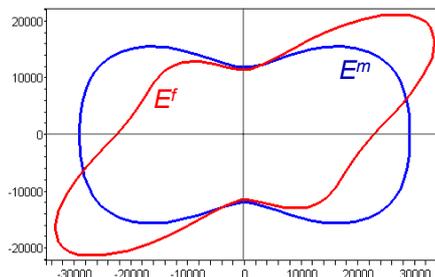
## Les tenseurs normalisés

- En effet, la signification mécanique des tenseurs normalisés est d'être des tenseurs d'élasticité du matériau élastique fictive constituant le monocouche équivalent.
- Or, en général on a que  $\mathbf{A}^*$  est différent de  $\mathbf{D}^*$ , ce qui signifie qu'en réalité c'est comme si le monocouche équivalent était constitué par deux matériaux fictifs différents, un pour le comportement de membrane et un autre pour celui de flexion: ces deux comportements sont différents (ceci est vrai, évidemment, même pour le couplage, mais dans ce cas l'interprétation est moins directe).
- Dans d'autres termes, on a en général à faire avec une plaque qui peut, par exemple, être orthotrope en membrane et en flexion, mais avec des axes d'orthotropie tournés; ou encore, un stratifié peut être isotrope en membrane et complètement anisotrope en flexion et ainsi de suite.
- En outre, même les composantes de rigidité des matériaux fictifs, par exemple leurs constantes techniques, sont différentes.

319

## Les tenseurs normalisés

- Concrètement, ceci implique qu'un même échantillon obtenu d'un stratifié et soumis à des tests de laboratoire, montrera des valeurs différentes, par exemple, du module d'Young équivalent, dans un test de flexion et dans un test de traction.
- Le comportement élastique d'un stratifié vu comme un corps équivalent homogénéisé à un monocouche est donc celui d'un corps complexe, qui se caractérise par un couplage membrane-flexion et par un différent comportement élastique en membrane et en flexion.
- Un exemple est celui de la figure à côté, qui montre le diagramme directionnel du module d'Young en membrane (orthotrope) et en flexion (anisotrope) du même stratifié (séquence  $[30^\circ/-30^\circ/0^\circ/-30^\circ/30^\circ]$  en verre-époxyde).



320

## Inversion de la loi fondamentale des stratifiés

- L'inversion de la loi fondamentale des stratifiés est simple et peut se faire de différentes façons.
- Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o \rightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o) \\ \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M} \rightarrow \\ \boldsymbol{\varepsilon}^o &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{N} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}. \end{aligned}$$

- D'une manière analogue,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^o = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^o + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\boldsymbol{\kappa} \rightarrow \\ \boldsymbol{\kappa} &= -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{M}. \end{aligned}$$

## Inversion de la loi fondamentale des stratifiés

- On pose alors

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{b}_1 &= -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} = -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}, \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \\ \mathbf{b}_2 &= -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}, \end{aligned}$$

et on reconnaît facilement que, de par la symétrie de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T &= \left[ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1} \right]^T = \left[ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^T \right]^{-1} = \\ &= \left[ \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T(\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{B}^T \right]^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{a}. \end{aligned}$$

- Par une démarche semblable, on obtient que  $\mathbf{d}=\mathbf{d}^T$ , tandis que

## Inversion de la loi fondamentale des stratifiés

$$\mathbf{b}_1^T = (-\mathbf{aBD}^{-1})^T = -(\mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{a}^T = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Ba} \neq \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_2^T = (-\mathbf{dBA}^{-1})^T = -(\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{d}^T = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Bd} \neq \mathbf{b}_2.$$

- Cependant,

$$(\mathbf{b}_1^T)^{-1} = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{Ba})^{-1} = -\mathbf{a}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} = -(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{b}_2^{-1} = (-\mathbf{dBA}^{-1})^{-1} = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{d}^{-1} = -\mathbf{AB}^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{BA}^{-1} \mathbf{B}) = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{B} = (\mathbf{b}_1^T)^{-1},$$

et donc, par l'unicité de l'inverse,

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1^T.$$

- On pose alors

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b},$$

et on obtient donc l'inversion de la loi fondamentale des stratifiés:

323

## Inversion de la loi fondamentale des stratifiés

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}.$$

- Donc, même si la matrice de la loi inverse a conservé la symétrie globale, elle n'a plus toutes les symétries de la matrice de la loi directe, du moment que  $\mathbf{b}$  n'est pas, en général, symétrique.
- En fait, tandis que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{D}$  sont des vrais tenseurs de rigidité, par exemple ils sont définis positifs,  $\mathbf{B}$  ne l'est pas, il n'est pas défini et n'a pas les mêmes symétries de son inverse.
- Par les relations à la page précédentes, on obtient pour  $\mathbf{b}$  une expression semblable à celles obtenues pour  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{d}$ :

$$(\mathbf{b}^T)^{-1} = -\mathbf{AB}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{b} = (\mathbf{B} - \mathbf{DB}^{-1} \mathbf{A})^{-1}.$$

324

## Stratifiés couplés et découplés

- Les effets du couplage membrane-flexion peuvent être mieux évalués à travers la loi inverse des stratifiés.
- En fait, supposons que le stratifié soit soumis seulement à des actions de membrane, à savoir  $\mathbf{M}=\mathbf{O}$ ; alors

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{O} \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{a}\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b}^T\mathbf{N}.$$

- Par le couplage, les actions de membrane provoquent dans le stratifié non seulement une déformation du plan moyen, mais aussi une courbure. Si par exemple le stratifié est soumis seulement à une force membranale monoaxiale  $N_x$ , alors

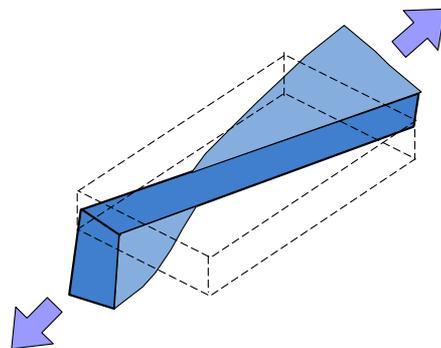
$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_s \end{Bmatrix} = N_x \begin{Bmatrix} b_{xx} \\ b_{xy} \\ b_{xs} \end{Bmatrix}.$$

- A savoir, le stratifié se courbe dans les deux directions et vrille.

325

## Stratifiés couplés et découplés

- Si au contraire on avait appliqué un moment  $M_x$ , on aurait obtenu un résultat analogue pour ce qui concerne les déformations dans le plan moyen.
- Quelques fois, ces effets de déformation dus au couplage membrane-flexion sont recherchés et exploités dans certains buts.
- Par exemple, le couplage qui provoque une torsion comme effet d'une traction (voir la figure) est parfois utilisé dans les hélices des éoliennes et dans les pales d'hélicoptère pour effectuer un contrôle passif automatique du pas de l'hélice.
- Généralement, toutefois, le couplage est un effet parasite non souhaité, et les concepteurs cherchent à l'éliminer (nous verrons comment au chapitre suivant).



326

## Stratifiés couplés et découplés

- On parle alors de *stratifiés découplés*, pour lesquels  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$  et donc

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}.$$

- En outre, dans un tel cas on a immédiatement que

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}^{-1}.$$

- Alors, dans ce cas, et en général seulement dans ce cas, il y a correspondance de symétrie élastique entre tenseurs directes et inverses.
- Dans d'autres termes, pour un stratifié découplé  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{A}$  ont les mêmes symétries élastiques, aussi bien que  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{D}$ .
- Par exemple, si  $\mathbf{A}$  est orthotrope,  $\mathbf{a}$  il l'est aussi et avec les mêmes axes d'orthotropie.

327

## Stratifiés couplés et découplés

- Ceci n'est pas vrai, en général, pour un stratifié couplé pour s'en convaincre, il suffit de considérer, par exemple, la formule qui donne le tenseur  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

- Les éventuelles symétries de  $\mathbf{a}$  sont déterminées par celles de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ , qui ne sont pas, en général, les mêmes.
- Par exemple, un stratifié couplé et avec  $\mathbf{A}$  isotrope aura, en général,  $\mathbf{a}$  complètement anisotrope. On a donc le cas d'une réponse élastique qui n'a pas les mêmes symétries en rigidité et en souplesse.
- Cette situation est typique dans les stratifiés couplés pour cette raison, parler de symétries élastiques pour un stratifié est difficile et délicat. Ce qu'on peut dire est que si une symétrie élastique existe, celle-ci concerne une rigidité ou une souplesse en membrane ou en flexion et pas, en général, l'entier comportement du stratifié.

328

## Stratifiés couplés et découplés

- Nous verrons au chapitre suivant une classe de stratifiés pour lesquels la définition de symétrie élastique est précise et a la même valeur que pour une plaque monocouche.
- Il reste que, en général, on ne peut pas toujours parler d'une symétrie élastique correspondante à une symétrie matérielle, à savoir à une symétrie géométrique sous-jacente, par exemple dans la disposition des couches.
- Il est en fait possible d'obtenir une symétrie élastique quelconque par un nombre suffisant de couches disposées sans aucune symétrie géométrique.
- Tout ça fait comprendre que le concept de symétrie matérielle pour les stratifiés est bien plus délicat et articulé que celui utilisé pour les milieux homogènes, tels les monocouches.
- Ce qui reste, toutefois, c'est qu'on peut toujours se borner à considérer les symétries tensorielles et ceci a une affinité complète avec ce qu'on fait dans le cas des milieux homogènes

## Les modules élastiques du monocouche équivalent

- On a déjà dit que les tenseurs normalisés représentent le comportement d'un matériau factice avec lequel on a réalisé un monocouche équivalent, d'épaisseur égale à celle du stratifié.
- Il a donc un sens de se demander quels sont les modules de l'ingénieur de ce matériau factice, à savoir, quels sont les modules de l'ingénieur du stratifié vu comme constitué par un milieu homogène.
- Les modules sont définis à partir des composantes du tenseur de souplesse, à savoir, dans ce cas, des tenseurs inverses **a**, **b** et **d** normalisés:

$$\mathbf{a}^* = h \mathbf{a} = (\mathbf{A}^* - 3 \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{B}^*)^{-1},$$

$$\mathbf{b}^* = \frac{h^2}{2} \mathbf{b} = \left( \mathbf{B}^* - \frac{1}{3} \mathbf{D}^* \mathbf{B}^{*-1} \mathbf{A}^* \right)^{-1},$$

$$\mathbf{d}^* = \frac{h^3}{12} \mathbf{d} = (\mathbf{D}^* - 3 \mathbf{B}^* \mathbf{A}^{*-1} \mathbf{B}^*)^{-1}.$$

## Les modules élastiques du monocouche équivalent

- Les modules de l'ingénieur sont ensuite définis comme d'habitude, en fonction des composantes des tenseurs de souplesse:

$$E_x^m = \frac{1}{a_{xx}^*}, \quad E_y^m = \frac{1}{a_{yy}^*}, \quad G_{xy}^m = \frac{1}{a_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^m = -\frac{a_{xy}^*}{a_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,x}^m = \frac{a_{xs}^*}{a_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,y}^m = \frac{a_{ys}^*}{a_{yy}^*},$$

$$E_x^f = \frac{1}{d_{xx}^*}, \quad E_y^f = \frac{1}{d_{yy}^*}, \quad G_{xy}^f = \frac{1}{d_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^f = -\frac{d_{xy}^*}{d_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,x}^f = \frac{d_{xs}^*}{d_{xx}^*}, \quad \eta_{xy,y}^f = \frac{d_{ys}^*}{d_{yy}^*}.$$

- Avec  $m$  on indique les modules qui décrivent le comportement de membrane, avec  $f$  ceux du comportement de flexion.
- Les modules de couplage se définissent de la même manière, à travers les composantes de  $\mathbf{b}^*$ , mais en général on ne les utilise pas parce que leur signification mécanique est moins évidente.

331

## Les modules élastiques du monocouche équivalent

- Le calcul des modules de l'ingénieur dans un repère quelconque, tourné de  $\theta$  par rapport au repère global, se fait encore par le biais des formules de transformation analogues à celles de page 163.
- De la même manière, les composantes de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  dans un repère tourné de  $\theta$  par rapport au repère global, et celles des correspondants tenseurs normalisés, se trouvent par les formules de transformation analogues à celles de page 161, introduites pour la matrice  $[\mathbf{Q}]$ , tandis que pour les tenseurs inverses  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{d}$  et leurs correspondants normalisés il faut utiliser les formules de page 162, introduites pour la  $[\mathbf{S}]$ .
- Finalement, il faut prendre en compte le fait que dans la définition des tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}^o$  et  $\boldsymbol{\kappa}$  on a utilisé la notation de Voigt, avec la convention qui en suit sur la composante de déformation au cisaillement. Par conséquent, les transformations par rotation des tenseurs de rigidité et de souplesse ne sont pas identiques. En définitive, tous les tenseurs de rigidité se comportent comme la matrice  $[\mathbf{Q}]$  et tous ceux de souplesse comme la matrice  $[\mathbf{S}]$ .

332

## Les modules élastiques du monocouche équivalent

- Un dernier avertissement au sujet des formules citées ci-dessus: dans celles-ci, le repère de départ était  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , repère matériel de la couche, et celui d'arrivé  $\{x, y, z\}$ , un repère quelconque.
- Maintenant, le repère de départ est le repère global du stratifié, qu'on a appelé  $\{x, y, z\}$ , et celui d'arrivé est un repère quelconque, qu'on appellera  $\{x', y', z'\}$ .
- Donc, par exemple, pour le tenseur **A** la transformation par rotation doit être lue de la manière suivante (pour les autre tenseurs on procède de façon analogue):

$$\begin{Bmatrix} A'_{xx} \\ A'_{xs} \\ A'_{xy} \\ A'_{ss} \\ A'_{ys} \\ A'_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & -4sc^3 & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4s^3c & s^4 \\ -sc^3 & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 - s^3c & 2(sc^3 - s^3c) & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 + s^4 & -4s^2c^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ s^2c^2 & 2(s^3c - sc^3) & -2s^2c^2 & (c^2 - s^2)^2 & 2(sc^3 - s^3c) & s^2c^2 \\ -s^3c & 3s^2c^2 - s^4 & s^3c - sc^3 & 2(s^3c - sc^3) & c^4 - 3s^2c^2 & sc^3 \\ s^4 & -4s^3c & 2s^2c^2 & 4s^2c^2 & -4sc^3 & c^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{xs} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{ys} \\ A_{yy} \end{Bmatrix}$$

333



## Le comportement hydro-thermo-élastique

- A l'instar de tout autre matériau, les composites renforcés par des fibres sont sensibles à la température, qui provoque des déformations.
- Ces actions sont particulièrement importantes pour les stratifiés, qui souvent sont réalisés avec un processus de polymérisation thermique sous pression constante (cuisson à  $\sim 180^\circ\text{C}$ ).
- En outre, il faut considérer la possibilité que le matériau se déforme par absorption d'humidité; ce phénomène se produit dans les composites à matrice organique.
- Voyons donc ce qu'il se passe dans ces circonstances; l'objectif est de trouver une généralisation de la loi fondamentale des stratifiés de sorte à prendre en compte les effets hydro-thermo-élastiques.
- La théorie qui suit est une généralisation au cas des multicouches de la théorie classique des plaques soumises à des variations thermiques, outre qu'à des actions mécaniques.
- Les hypothèses mécaniques de base sont les mêmes déjà vues pour la théorie classique des stratifiés.

334



## Le comportement hygro-thermo-élastique

- En général, la déformation totale  $\epsilon$  est la somme de trois termes:

$$\epsilon = \epsilon_f + \epsilon_t + \epsilon_c,$$

où  $\epsilon_f$  est la déformation due aux forces appliquées,  $\epsilon_t$  celle due aux variations thermiques et  $\epsilon_c$  celle due à la variation de concentration d'humidité.

- Naturellement, par la loi de Hooke il est

$$\epsilon_f = Z\sigma,$$

et on admet que ce soit

$$\epsilon_t = t\alpha,$$

$$\epsilon_c = c\beta.$$

- Dans ces équations,  $t$  et  $c$  sont respectivement la variation de température et de concentration d'humidité par rapport à un état où on considère nulles les déformations thermiques et hygroscopiques;  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement les tenseurs du second ordre des coefficients de dilatation thermique et hygroscopique.

335

## Le comportement hygro-thermo-élastique

- L'inversion de la loi précédente donne

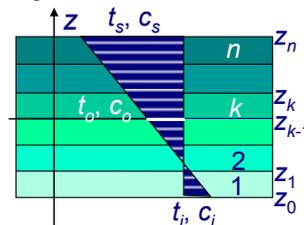
$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_t - \epsilon_c) = E\epsilon - tE\alpha - cE\beta.$$

- Considérons donc le cas d'un stratifié.
- L'hypothèse classique est que le stratifié soit soumis à un flux permanent de chaleur et humidité et que les propriétés physiques soient constantes à travers l'épaisseur; c'est le cas des stratifiés à couches identiques, mais pas seulement.
- Dans cette hypothèse, la variation de  $t$  et de  $c$  à travers l'épaisseur est linéaire et on peut poser, voir la figure,

$$t = t_o + \frac{\Delta t}{h}z, \quad c = c_o + \frac{\Delta c}{h}z, \quad \text{où}$$

$$t_o = \frac{t_s + t_i}{2}, \quad c_o = \frac{c_s + c_i}{2}, \quad \Delta t = t_s - t_i, \quad \Delta c = c_s - c_i.$$

- Par conséquent, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, le champ de contrainte dans la couche  $k$  sera



336

## Le comportement hydro-thermo-élastique

$$\sigma_k = \mathbf{Q}_k(\delta_k) [\boldsymbol{\varepsilon}^o + z\boldsymbol{\kappa}] - \left( t_o + \frac{\Delta t}{h} z \right) \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k) - \left( c_o + \frac{\Delta c}{h} z \right) \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\beta}_k(\delta_k).$$

- Avec évidente signification des symboles,  $\boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k)$  et  $\boldsymbol{\beta}_k(\delta_k)$  indiquent respectivement le tenseur des coefficients de dilatation thermique et hygroscopique du pli  $k$ , tourné de l'angle  $\delta_k$ .
- Si maintenant on utilise cette relation dans le calcul des actions internes  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$ , avec les formules déjà vues en théorie classique, qui conduisent aux tenseurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ , on obtient d'autres termes, qui tiennent compte de l'apport dû aux variations thermiques et hygroscopiques:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} - t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} - c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} - \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

où les tenseurs du second ordre  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  décrivent respectivement, en rigidité, le comportement thermoélastique de membrane, le couplage thermoélastique membrane-flexion et le

337

## Le comportement hydro-thermo-élastique

comportement thermoélastique de flexion. Dans d'autres termes, ils sont les correspondants de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  pour les rigidité thermoélastiques.

- Les tenseurs  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  ont les mêmes rôles mais en ce qui concerne les variations d'humidité.
- Les tenseurs ci-dessus sont donnés par les relations suivantes, qui s'obtiennent immédiatement en injectant dans le calcul des actions internes la formule des contraintes à la page précédente:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k) dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{V} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k) dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k),$$

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k) dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k),$$

$$\text{où } \boldsymbol{\gamma}_k(\delta_k) = \mathbf{Q}_k(\delta_k) \boldsymbol{\alpha}_k(\delta_k).$$

338

## Le comportement hygro-thermo-élastique

- D'une manière analogue on a

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k) dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k),$$

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k) dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k),$$

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k) dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k),$$

$$\text{où } \boldsymbol{\lambda}_k(\bar{\delta}_k) = \mathbf{Q}_k(\bar{\delta}_k) \boldsymbol{\beta}_k(\bar{\delta}_k).$$

- La loi de page 337 généralise la loi fondamentale des stratifiés au cas où on a des effets hygro-thermiques. L'inversion de cette loi peut se faire de la façon suivante: on pose

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M}^* \end{Bmatrix} = t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{Bmatrix} + c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix},$$

et on obtient

## Le comportement hygro-thermo-élastique

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix},$$

équation dont on connaît déjà la relation inverse:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} + \mathbf{N}^* \\ \mathbf{M} + \mathbf{M}^* \end{Bmatrix}.$$

- Donc, en tenant compte de l'expression de  $\mathbf{N}^*$  et  $\mathbf{M}^*$ , on a finalement

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^o \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + t_o \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} + c_o \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta c}{h} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix},$$

où

## Le comportement hygro-thermo-élastique

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a}\mathbf{U} + \mathbf{b}\mathbf{V} = \mathbf{a}[\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}), \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{V} + \mathbf{b}\mathbf{W} = \mathbf{a}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}), \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{U} + \mathbf{d}\mathbf{V} = \mathbf{d}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{b}^T\mathbf{V} + \mathbf{d}\mathbf{W} = \mathbf{d}[\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}), \end{aligned}$$

et de façon analogue

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{a}\mathbf{F} + \mathbf{b}\mathbf{G} = \mathbf{a}[\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}), \\ \mathbf{g}_1 &= \mathbf{a}\mathbf{G} + \mathbf{b}\mathbf{H} = \mathbf{a}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}), \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{b}^T\mathbf{F} + \mathbf{d}\mathbf{G} = \mathbf{d}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{b}^T\mathbf{G} + \mathbf{d}\mathbf{H} = \mathbf{d}[\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}] = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}). \end{aligned}$$

341

## Le comportement hygro-thermo-élastique

- On observe donc que le lien thermoélastique inverse dépend non pas de 3 tenseurs, mais de 4, car en général  $\mathbf{v}_1$  est différent de  $\mathbf{v}_2$ . Toutefois, les tenseurs thermoélastiques inverses indépendants ne sont pas 4, mais 3, car il y a la relation suivante, qu'on obtient facilement de celles précédentes

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}[\mathbf{V} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}] = \mathbf{a}[\mathbf{d}^{-1}\mathbf{v}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{W})]$$

- La même observation vaut pour le comportement hygro-élastique, pour lequel on a une relation semblable à la précédente:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}[\mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{H}] = \mathbf{a}[\mathbf{d}^{-1}\mathbf{g}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{H})]$$

- C'est utile de faire des observations sur ces résultats.
- D'abord, on confirme le fait que les stratifiés sont des milieux "complexes" par le fait qu'encore une fois le comportement hygro-thermo-élastique en souplesse n'est pas gouverné par des lois totalement "symétriques" par rapport à celles de rigidité.

342

## Le comportement hygro-thermo-élastique

- En fait, on a deux divers tenseurs de couplage thermo- et hygro-élastique, même si pas indépendants.
- C'est important de comprendre la signification des tenseurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{w}$  (pour les tenseurs  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_2$  et  $\mathbf{h}$  vaut un discours analogue).
- En comparant la loi inverse de page 340 avec les relations qui donnent en général les déformations, page 355, on comprends immédiatement ce qui suit.
- Le tenseur  $\mathbf{u}$  décrit les déformations du plan moyen dues à une variation de température constante sur l'épaisseur la signification physique de ses composantes est donc celui des *coefficients de dilatation thermique du monocouche équivalent*. Dans d'autres termes,  $\mathbf{u}$  est pour le stratifié ce que  $\alpha$  est pour la couche.
- Le tenseur  $\mathbf{v}_1$  décrit les déformations du plan moyen pour une variation linéaire antisymétrique de la température sur l'épaisseur; ses composantes ont une signification semblable à celles de  $\mathbf{u}$ , à la différence du champs de température, variable dans ce cas.

343



Copyright P. Vannucci - UVSQ  
pavo.vannucci@meca.uvsc.fr



## Le comportement hygro-thermo-élastique

- Le tenseur  $\mathbf{w}$  décrit les courbures d'origine thermique dues à une variation linéaire antisymétrique de la température sur l'épaisseur ses composantes sont des *coefficients de courbure thermique du monocouche équivalent*.
- Finalement, le tenseur  $\mathbf{v}_2$  décrit les courbures d'origine thermique dues à une variation de température constante sur l'épaisseur; ses composantes ont une signification analogue à celles de  $\mathbf{w}$ , à la différence du champ de température, constant dans ce cas.
- A cause du couplage  $\mathbf{v}_1$ , un stratifié soumis à une variation thermique linéaire et antisymétrique sur l'épaisseur non seulement se courbe, comme une plaque homogène, mais il se dilate aussi dans le plan moyen, de façon différente dans les différentes directions à cause de l'anisotropie (et il est aussi possible d'avoir des directions selon lesquelles la déformation est en réalité une contraction).
- A cause du couplage  $\mathbf{v}_2$ , un stratifié soumis à une variation thermique constante sur l'épaisseur non seulement se

344



Copyright P. Vannucci - UVSQ  
pavo.vannucci@meca.uvsc.fr



## Le comportement hygro-thermo-élastique

déforme dans son plan moyen, mais il se courbe aussi, encore une fois de façon en général différente selon la direction à cause de l'anisotropie.

- Cette circonstance est importante parce que, comme déjà dit, souvent les stratifiés sont produits par polymérisation sous température plutôt élevée (autour de 180°C).
- Donc, si le stratifié a un couplage de type  $\mathbf{v}_2$ , une fois refroidi il ne maintiendra pas la forme originaire et prévue, mais il se courbera (par exemple une plaque devient une coque).
- Par conséquent, le contrôle du couplage thermo-élastique est important en phase de conception d'un stratifié.
- Certaines considérations au sujet des relations entre le couplage élastique et celui thermo- ou hygro-élastique peuvent être faites dans le cas de stratifiés à couches identiques (voir page 360).
- Au contraire, dans le cas de stratifiés à couches quelconques, la seule chose qu'on peut affirmer est qu'un éventuel découplage

## Le comportement hygro-thermo-élastique

élastique ( $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ ) ne comporte pas nécessairement un découplage thermo- ou hygro-élastique ( $\mathbf{V}=\mathbf{G}=\mathbf{O}$ ), et vice-versa.

- Toutefois, si  $\mathbf{V}=\mathbf{O}$  on a que

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}\mathbf{W} = -\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W} = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{U} = -\mathbf{d}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} = -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}.$$

- Dans d'autres termes, on peut avoir des stratifiés couplés élastiquement ( $\mathbf{B}\neq\mathbf{O}$ ), et couplés aussi thermoélastiquement en souplesse ( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\neq\mathbf{O}$ ), mais découplés thermoélastiquement en rigidité ( $\mathbf{V}=\mathbf{O}$ ).
- Si par contre, outre à  $\mathbf{V}=\mathbf{O}$  c'est aussi  $\mathbf{B}=\mathbf{O}$ , alors le découplage est total ( $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2=\mathbf{O}$ ).
- Une situation analogue existe évidemment pour le cas hygroélastique.
- Une considération à part mérite le problème de la rotation du repère. Les tenseurs thermo- et hygro-élastiques sont des tenseurs du second ordre, et écrits en notation de Voigt.

## Le comportement hydro-thermo-élastique

- Donc leurs composantes dans un repère  $\{x',y',z\}$  tourné de l'angle  $\theta$  par rapport au repère  $\{x, y, z\}$  se trouvent grâce à des formules analogues à celles de page 160.
- En particulier, celles de  $\{\sigma\}$  concernent évidemment les tenseurs de rigidité (**U**, **V**, **W**, **F**, **G** et **H**), tandis que celles de  $\{\varepsilon\}$  concernent les tenseurs de souplesse ( **$\alpha$** ,  **$\beta$** ,  **$u$** ,  **$v_1$** ,  **$v_2$** ,  **$w$** ,  **$f$** ,  **$g_1$** ,  **$g_2$**  et  **$h$** ); on a donc, par exemple en ce qui concerne **U** et **u**,

$$\begin{cases} U'_x \\ U'_y \\ U'_s \end{cases} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} U_x \\ U_y \\ U_s \end{cases}, \quad \begin{cases} u'_x \\ u'_y \\ u'_s \end{cases} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_s \end{cases}.$$

- Comme déjà dans le cas des tenseurs élastiques, même cette fois il faut faire attention au fait que lorsque les formules de rotation citées sont utilisées pour tourner dans le repère global du stratifié les propriétés d'une couche décrite dans son repère matériel, il faut changer de signe les puissances impaires de  $\sin\theta$ .

347



## Le comportement hydro-thermo-élastique

- Les matrices de transformation sont donc, pour cette opération et toujours pour ce qui concerne **U** et **u**,

$$\begin{cases} U_x \\ U_y \\ U_s \end{cases} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} U_1 \\ U_2 \\ U_6 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_s \end{cases} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{cases}.$$

- Evidemment, pour les autres tenseurs on applique les mêmes transformations.
- Les dimensions des différents tenseurs sont les suivantes ( $\tau$  indique une température)

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= [1/\tau] \quad (1/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{v}_1] &= [L/\tau] \quad (\text{m}/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{v}_2] &= [1/(L\tau)] \quad (1/\text{m } ^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{w}] &= [1/\tau] \quad (1/^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

348



## Le comportement hygro-thermo-élastique

- Donc, les tenseurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  n'ont même pas les mêmes dimensions, tandis que  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  oui. Ceci n'arrive pas aux tenseurs de rigidité thermoélastique, qui ont les dimensions suivantes

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}] &= [F/L\tau] \quad (\text{N/m } ^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{V}] &= [F/\tau] \quad (\text{N}/^\circ\text{C}), \\ [\mathbf{W}] &= [FL/\tau] \quad (\text{Nm}/^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

- Ceux-ci peuvent être normalisés comme  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{U}}{h}, \quad \mathbf{V}^* = 2 \frac{\mathbf{V}}{h^2}, \quad \mathbf{W}^* = 12 \frac{\mathbf{W}}{h^3}.$$

- Les dimensions sont alors  $[F/L^2\tau]$  ( $\text{N/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ). Les tenseurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{w}$  ne sont pas normalisés, généralement, parce qu'ils ont déjà la signification physique et les dimensions recherchées (coefficients de dilatation, ou de courbure, thermique).

## Le cas des stratifiés à couches identiques

- La plupart des stratifiés sont des stratifiés à couches identiques, à savoir constituées du même matériau et avec la même épaisseur.
- Cette classe de stratifiés n'est pas importante que par les applications, mais aussi pour les aspects théoriques. En fait, seulement dans le cas où les couches sont identiques on peut obtenir des règles générales sur le comportement et la conception des stratifiés, comme on verra au chapitre suivant.
- La circonstance d'avoir des couches identiques comporte des simplifications dans les résultats trouvés jusqu'ici.
- D'abord, avec la numérotation des couches déjà introduite (voir page 313), on a immédiatement que

$$z_k = -\frac{h}{2} + k \frac{h}{n} = \frac{2k-n}{2n} h.$$

- En outre, la rigidité des couches dépend seulement de l'orientation, pas du matériau, qui est le même pour tous les plis.

## Le cas des stratifiés à couches identiques

- En définitive, en injectant dans les formules des pages 314, 338 et 339 on obtient

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

$$\mathbf{U} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(\delta_k), \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \gamma(\delta_k), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \gamma(\delta_k),$$

$$\mathbf{F} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \lambda(\delta_k), \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \lambda(\delta_k), \quad \mathbf{H} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \lambda(\delta_k).$$

- Les coefficients  $b_k$  et  $d_k$  sont donnés par les formules qui suivent:

$$b_k = 2k - n - 1,$$
$$d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2).$$

- A remarquer que la somme des  $b_k$  est nulle tandis que celle des  $d_k$  vaut  $n^3$ .

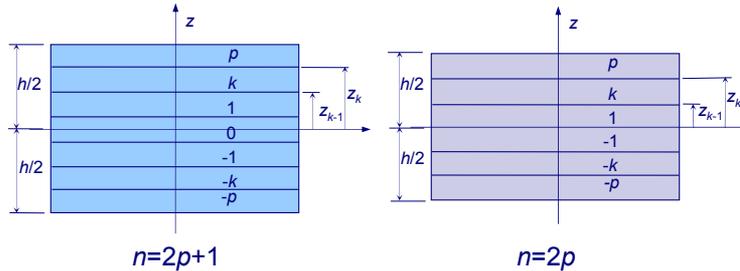
351

## Le cas des stratifiés à couches identiques

- On remarque d'abord que le comportement en membrane, tenseurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{F}$ , ne dépend pas de la position des plis dans la séquence: changer la séquence des couches sans en changer l'orientation ne varie pas les rigidités de membrane. On peut démontrer que ceci est vrai même pour le cas de stratifiés à couches non identiques.
- Ceci ne se produit pas pour les tenseurs de couplage et de rigidité en flexion: la position d'une couche dans la séquence d'empilement influe linéairement sur le couplage et quadratiquement sur la rigidité de flexion.
- Nous verrons que cette circonstance est ce qui principalement rend très difficile la conception des stratifiés par rapport aux propriétés de flexion.
- Dans la suite, il sera utile aussi une autre numérotation des couches, faite à partir du plan moyen et représentée dans la figure qui suit.

352

## Le cas des stratifiés à couches identiques



- Dans ce cas, on a que

$$z_k = \frac{2k+1}{2} \frac{h}{n}, \quad z_{k-1} = \frac{2k-1}{2} \frac{h}{n}, \quad \text{pour } n = 2p+1,$$

$$z_k = k \frac{h}{n}, \quad z_{k-1} = (k-1) \frac{h}{n} \quad \text{si } k > 0,$$

$$z_k = (k+1) \frac{h}{n}, \quad z_{k-1} = k \frac{h}{n} \quad \text{si } k < 0,$$

pour  $n = 2p$ .

353

## Le cas des stratifiés à couches identiques

- Alors on obtient

$$b_k = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2p+1, \\ 2k - \frac{k}{|k|}, \quad b_0 = 0 & \text{si } n = 2p; \end{cases} \quad d_k = \begin{cases} 12k^2 + 1 & \text{si } n = 2p+1, \\ 12k^2 - 12|k| + 4, \quad d_0 = 0 & \text{si } n = 2p. \end{cases}$$

- Avec cette numérotation, les sommations qui apparaissent dans les définitions de **A**, **B**, **D** etc. sont faites de  $k=-p$  à  $k=p$ .
- Ces formules permettent de constater facilement que les coefficients  $b_k$  varient linéairement avec la position de la couche et qu'ils ont une distribution antisymétrique par rapport au plan moyen.
- Quant aux coefficients  $d_k$ , ils varient quadratiquement et ont une distribution symétrique par rapport au plan moyen.

354

## L'utilisation de la méthode polaire

- On introduit ici l'utilisation de la méthode polaire dans la théorie classique des stratifiés, car elle permet de mieux montrer certaines propriétés et résultats généraux concernant les stratifiés à couches identiques.
- Les lois de composition des tenseurs qui décrivent le comportement des stratifiés (**A**, **B**, **D**, **U** etc.) s'appliquent à toute représentation tensorielle, non seulement donc aux composantes Cartésiennes, mais aussi à celles polaires (d'ailleurs, il suffit de considérer les relations de page 170 pour s'en convaincre).
- Cette observation nous offre immédiatement les composantes polaires des tenseurs propres au stratifié. Il faut en outre rappeler que la rotation à faire subir aux composantes tensorielles est  $-\delta_k$ , si  $\delta_k$  est l'angle dont il est tourné en sens trigonométrique la couche  $k$  par rapport au repère global du stratifié.
- Si les symboles  $\bar{\cdot}$ ,  $\hat{\cdot}$  et  $\bar{\cdot}^*$  superposés à une quantité indiquent respectivement le comportement de membrane, de couplage et de flexion, alors on a, pour le cas de stratifié à couches identiques,

355



## L'utilisation de la méthode polaire

tenseur **A** :

$$\bar{T}_0 = h T_0,$$

$$\bar{T}_1 = h T_1,$$

$$\bar{R}_0 e^{4i\bar{\phi}_0} = \frac{h}{n} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n e^{4i\delta_k},$$

$$\bar{R}_1 e^{2i\bar{\phi}_1} = \frac{h}{n} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n e^{2i\delta_k};$$

tenseur **B** :

$$\hat{T}_0 = 0,$$

$$\hat{T}_1 = 0,$$

$$\hat{R}_0 e^{4i\hat{\phi}_0} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1 e^{2i\hat{\phi}_1} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n b_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur **A\*** :

$$\bar{T}_0^* = T_0,$$

$$\bar{T}_1^* = T_1,$$

$$\bar{R}_0^* e^{4i\bar{\phi}_0} = \frac{1}{n} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n e^{4i\delta_k},$$

$$\bar{R}_1^* e^{2i\bar{\phi}_1} = \frac{1}{n} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n e^{2i\delta_k};$$

tenseur **B\*** :

$$\hat{T}_0^* = 0,$$

$$\hat{T}_1^* = 0,$$

$$\hat{R}_0^* e^{4i\hat{\phi}_0} = \frac{1}{n^2} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=1}^n b_k e^{4i\delta_k},$$

$$\hat{R}_1^* e^{2i\hat{\phi}_1} = \frac{1}{n^2} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=1}^n b_k e^{2i\delta_k};$$

356



## L'utilisation de la méthode polaire

tenseur **D** :

$$\tilde{T}_0 = \frac{h^3}{3} \frac{T_0}{4},$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{h^3}{3} \frac{T_1}{4},$$

$$\tilde{R}_0 e^{4i\tilde{\varphi}_0} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} R_0 e^{4i\varphi_0} \sum_{k=1}^n d_k e^{4i\tilde{\delta}_k},$$

$$\tilde{R}_1 e^{2i\tilde{\varphi}_1} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} R_1 e^{2i\varphi_1} \sum_{k=1}^n d_k e^{2i\tilde{\delta}_k}.$$

tenseur **D\*** :

$$\tilde{T}_0^* = T_0,$$

$$\tilde{T}_1^* = T_1,$$

$$\tilde{R}_0^* e^{4i\tilde{\varphi}_0} = \frac{1}{n^3} R_0 e^{4i\varphi_0} \sum_{k=1}^n d_k e^{4i\tilde{\delta}_k},$$

$$\tilde{R}_1^* e^{2i\tilde{\varphi}_1} = \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\varphi_1} \sum_{k=1}^n d_k e^{2i\tilde{\delta}_k}.$$

- On observe alors que la partie isotrope de **B** est nulle, et donc que ce tenseur est composé par des termes à moyenne nulle. Pour les stratifiés à couches identiques, découplage et isotropie de **B** coïncident.
- En outre, pour cette raison, on a, voir page 170, que  $B_{xy} = B_{ss}$ .

357

## L'utilisation de la méthode polaire

- Au contraire, pour les tenseurs **A\*** et **D\*** la partie isotrope est la même et elle est identique à celle de la couche de base. Ceci signifie que le comportement moyen (partie isotrope) du monocouche équivalent est identique au comportement moyen de la couche de base.
- En outre, pour ces stratifiés, à couches identiques, on a pu, pour chaque quantité, séparer la partie qui tient aux propriétés de la couche de base de celle qui est déterminée par la séquence des couches et de leur orientation.
- Nous verrons que cette séparation est importante dans les techniques de conception des stratifiés.
- Le même type de résultats on l'a pour les tenseurs qui décrivent le comportement hygro-thermo-élastique.
- En nous bornant aux seuls tenseurs **U**, **V** et **W**, nous avons en fait (pour les tenseurs **F**, **G** et **H** on a des résultats semblables):

358