

2.6.5.2 Angles d'Euler

On définit aussi le groupe $SO(3)$, ou groupe spécial orthogonal, par :

$$SO(3) = \{M \in O^{3 \times 3} \mid M^T M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$$

On définit le groupe $sO(3)$, ou groupe des matrices antisymétriques, par :

$$sO(3) = \{M \in O^{3 \times 3} \mid M^T = -M\}$$

On décrit une rotation dans l'espace à trois dimensions en utilisant les angles d'Euler (ψ, θ, φ) par le passage d'un système de coordonnées $E(x, y, z)$ à un système de coordonnées $B(X', Y', Z')$ effectuant trois rotations successives comme le montre la figure 2.08 :

- La *précession* qui est le changement graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un objet est la rotation de l'angle ψ ;
- La *nutation* qui est un balancement périodique de l'axe de rotation est la rotation de l'angle θ ;
- La *rotation* est la rotation propre de l'angle φ autour de l'axe OZ' .

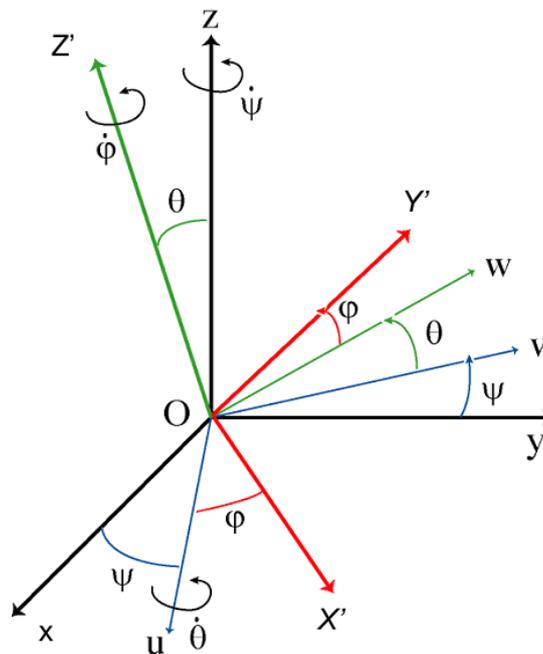


Figure 2.08 : Angles d'Euler

2.6.5.3 Position et orientation de l'hélicoptère

Le principal inconvénient sur l'utilisation d'un cadre de référence du corps fixe C_{xyz} attaché à l'hélicoptère montre l'incapacité d'exprimer la position et l'orientation de l'hélicoptère par rapport à ce cadre du corps fixe. La position et l'orientation des corps rigides sont définies par rapport aux cadres de référence inertielle fixe.

Par conséquent, les équations de position et l'orientation de l'hélicoptère seront les dérivées relatives au cadre de référence de la terre inertielle fixe.

Le système cartésien droitier $O_{x'y'z'}$ est le premier défini comme le cadre de référence de la Terre-fixe. Dans des temps spécifiques, la direction de l'hélicoptère est décrite par l'orientation du cadre du corps fixe relative au cadre de référence de la Terre-fixe.

L'origine de ces cadres est le CG de l'hélicoptère. A l'instant $t = 0$ le CG de l'hélicoptère coïncide par l'origine du $O_{x'y'z'}$.

La position initiale de l'hélicoptère est décrite par le châssis $C_{x_1y_1z_1}$ qui est alignée avec $O_{x'y'z'}$.

L'orientation finale de l'hélicoptère au moment t est décrite par le châssis du corps fixe C_{xyz} .

La figure 2.09 montre les schémas de la dérivation de l'orientation de l'hélicoptère.

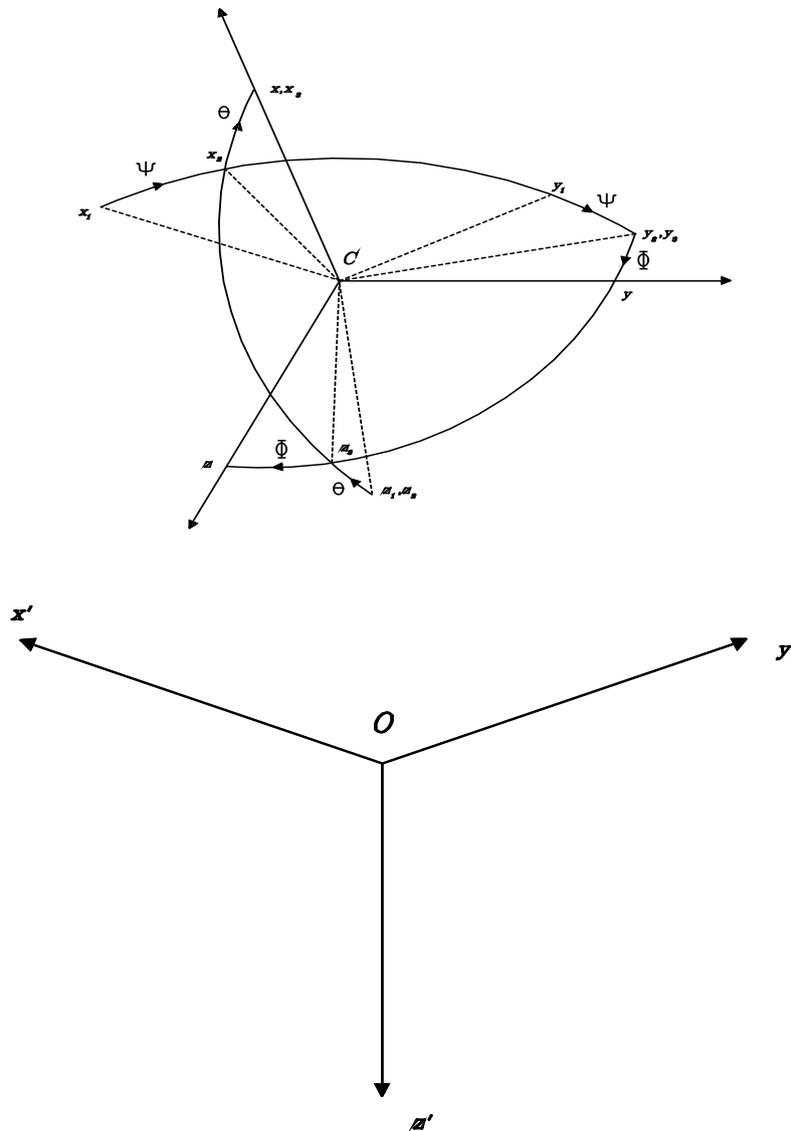


Figure 2.09 : Orientation de l'hélicoptère

A tout instant, l'orientation de l'hélicoptère peut être obtenue en effectuant les trois rotations consécutives relatives au châssis terrestre fixe ; les rotations sont effectuées dans une commande précise, elles ne peuvent pas être considérées comme vecteurs, et ne sont pas commutatives.

Par conséquent, le sens de rotation est important pour la qualité, comme suit :

✓ rotation inverse d'un angle Ψ autour de l'axe C_{z1} (angle du lacet avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$). Cette rotation conduit l'hélicoptère avec la position décrite par C_{x2y2z2} , en portant C_{x2} parallèle au plan C_{xz2} [2.05].

✓ rotation inverse d'un angle θ autour de l'axe C_{y2} (angle du tangage avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Cette rotation fait bouger l'hélicoptère avec la position décrite sur C_{x3y3z3} , en alignant C_{x3} avec l'axe C_x .

✓ rotation inverse d'un angle Θ de l'axe C_{x3} portant les axes pour leur direction finale C_{xyz} (angle du roulis avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$).

2.6.5.4 Matrices de rotation

Définition 2.05 :

Le mouvement d'un système de coordonnées B par rapport à un système de coordonnées E est appelé *rotation simple* de B vers E s'il existe une droite L_{ar} , appelée axe de rotation, dont l'orientation par rapport à B et E reste inchangée entre le début et la fin du mouvement.

La position de l'hélicoptère peut être calculée en dérivant la vitesse des composantes en même temps.

Soit $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ désignent les vecteurs unitaires des C_{xyz} , $\hat{I}', \hat{J}', \hat{K}'$ vecteurs unitaires de $O_{x'y'z'}$, et $\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$, vecteurs unitaires des cadres C_{xyz} , quand $i = 1, 2, 3$.

La vitesse linéaire de l'hélicoptère relative au châssis C_{xyz} et relative au châssis de la Terre-fixe est respectivement [2.06] :

$$\vec{v}_l = u\hat{I} + v\hat{J} + w\hat{K} \quad (2.16) \text{ (a)}$$

$$\vec{v}_l = \frac{dx'}{dt}\hat{I}' + \frac{dy'}{dt}\hat{J}' + \frac{dz'}{dt}\hat{K}' \quad (b)$$

- L'unité des vecteurs du cadre de référence du corps fixe C_{xyz} est écrite relative au cadre $C_{x_3y_3z_3}$ comme [2.07]:

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_3 \\ \hat{J} &= \cos \varnothing \hat{J}_3 + \sin \varnothing \hat{K}_3 \\ \hat{K} &= -\sin \varnothing \hat{J}_3 + \cos \varnothing \hat{K}_3\end{aligned}\quad (2.17)$$

Ainsi, la matrice de rotation autour de l'axe de roulis est exprimée par l'équation :

$$R_{x,\varnothing} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varnothing & \sin \varnothing \\ 0 & -\sin \varnothing & \cos \varnothing \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

- L'unité des vecteurs du cadre $C_{x_3y_3z_3}$ est exprimée relative au cadre $C_{x_2y_2z_2}$ comme :

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \cos \theta \hat{I}_2 - \sin \theta \hat{K}_2 \\ \hat{J}_3 &= \hat{J}_2 \\ \hat{K}_3 &= \sin \theta \hat{I}_2 + \cos \theta \hat{K}_2\end{aligned}\quad (2.19)$$

Ainsi, la matrice de rotation autour de l'axe de tangage est exprimée par l'équation :

$$R_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

- Enfin, l'unité des vecteurs du cadre relatif $C_{x_2y_2z_2}$ au $C_{x_1y_1z_1}$ est exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \cos \psi \hat{I}_1 + \sin \psi \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 &= \sin \psi \hat{I}_1 + \cos \psi \hat{J}_1 \\ \hat{K}_2 &= \hat{K}_1\end{aligned}\quad (2.21)$$

Ainsi, la matrice de rotation autour de l'axe du lacet est exprimée par l'équation :

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

En substituant (2.17) à (2.21) à (2.16a) et en assimilant avec (2.16b), les équations algébriques suivantes sont obtenues pour la vitesse des composantes de l'hélicoptère relatives au châssis terrestres fixes :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx'}{dt} &= U \cos\theta \cos\psi + V (\sin\Phi \sin\theta \cos\psi - \cos\Phi \sin\psi) \\
 &\quad + W(\cos\Phi \sin\theta \cos\psi + \sin\Phi \sin\psi) \\
 \frac{dy'}{dt} &= U \cos\theta \sin\psi + v (\sin\Phi \sin\theta \sin\psi + \cos\Phi \cos\psi) \\
 &\quad + W(\cos\Phi \sin\theta \sin\psi - \sin\Phi \cos\psi) \\
 \frac{dz'}{dt} &= -U \sin\theta + V \sin\Phi \cos\theta + W \cos\Phi \cos\theta
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

En conséquence, la matrice de rotation R qui décrit le passage du système de coordonnées E au système de coordonnées B devient :

$$R = R_{x,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta & -\sin\psi \cos\theta + \cos\psi \sin\theta \sin\phi & \sin\psi \sin\phi + \cos\psi \cos\phi \cos\theta \\ -\sin\psi \cos\theta & \cos\psi \cos\phi + \sin\phi \sin\theta \sin\psi & -\cos\psi \sin\phi + \sin\theta \sin\psi \cos\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix}$$

Cette matrice de rotation appartient donc au groupe des matrices spécial orthogonal car on a :

$$O(3) = \{R \in R^{3 \times 3} | R^T R = I_3 \text{ et } \det(R) = 1\}$$

La matrice transposée R^T représente la matrice de passage du référentiel E au référentiel B . Par conséquent, les coordonnées de la position du CG de l'hélicoptère sont obtenues en intégrant (2.23). Dues à la complexité d'intégration, les équations (2.23) sont souvent linéarisées pour des simples résultats.

2.6.5.5 Cinématique de translation de l'hélicoptère

La cinématique de translation exprime la relation entre le vecteur de la position du CG notée : $p(t) = [x \quad y \quad z]^T$ et le vecteur de la vitesse linéaire du CG noté : $v(t) = [u \quad v \quad w]^T$.

Ainsi, l'équation matricielle de la cinématique de translation de l'hélicoptère s'écrit [3.07]:

$$\dot{p}(t) = R v(t)$$

Soit
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

2.6.5.6 Cinématique de rotation de l'hélicoptère

La cinématique de rotation exprime la relation entre les angles d'Euler noté :

$$\eta(t) = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \text{ et les composantes du vecteur vitesse noté : } \omega(t) = [p \quad q \quad r]^T.$$

2.6.5.7 Orientation de l'hélicoptère par rapport à la vitesse angulaire

L'orientation de l'hélicoptère est exprimée par rapport à la vitesse angulaire notée [2.08]:

$$\omega(t) = [p \quad q \quad r]^T \text{ du cadre de référence du corps fixe entre } E \text{ et } B \text{ et exprimé dans } B.$$

On suppose que l'intervalle du temps infinitésimal de l'hélicoptère est soumis à trois rotations infinitésimales $d\psi$, $d\theta$ et $d\phi$ résultant dans une position définie par les angles d'Euler $\psi + d\psi$, $\theta + d\theta$ et $\phi + d\phi$.

Les rotations finies ne pouvant pas être traitées comme des vecteurs, alors les rotations infinitésimales sont considérées comme des vecteurs.

Le vecteur qui représente la rotation infinitésimale est exprimé par la relation :

$$\hat{n} = d\phi \hat{I} + d\theta \hat{J}_3 + d\psi \hat{K}_2 \quad (2.24)$$

La vitesse angulaire est :

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \dot{\phi} \hat{I} + \dot{\theta} \hat{J}_3 + \dot{\psi} \hat{K}_2 \quad (2.25)$$

L'unité des vecteurs du cadre $C_{x_3y_3z_3}$ est exprimée par rapport à l'unité des vecteurs du cadre de référence C_{xyz} , alors il vient :

$$\begin{aligned} \hat{I}_3 &= \hat{I} \\ \hat{J}_3 &= \cos \Phi \hat{J} - \sin \Phi \hat{K} \\ \hat{K}_3 &= \sin \Phi \hat{J} + \cos \Phi \hat{K} \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'unité des vecteurs du cadre $C_{x_2y_2z_2}$ est exprimée par rapport à l'unité des vecteurs du cadre de référence $C_{x_3y_3z_3}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &= \cos \theta \hat{I}_3 + \sin \theta \hat{K}_3 \\ \hat{J}_2 &= \hat{J}_3 \\ \hat{K}_2 &= \sin \theta \hat{I}_3 + \cos \theta \hat{K}_3 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Après la substitution des équations (2.25) et (2.26) à (2.27), l'expression de la vitesse angulaire s'écrit :

$$\vec{\omega} = p \hat{I} + q \hat{J} + r \hat{K}.$$

On obtient les équations différentielles non linéaires qui relient les angles d'orientation de l'hélicoptère relatif au châssis fixes avec les composantes de la vitesse angulaire exprimées dans l'unité des vecteurs du cadre du corps fixe :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= Q \sin \Phi \sec \theta + R \cos \Phi \sec \theta \\ \dot{\theta} &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi \\ \dot{\phi} &= P + Q \sin \Phi \tan \theta + R \cos \Phi \tan \theta \end{aligned} \quad (2.28)$$

La résolution du système d'équations différentielles $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ précédents conduits aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^s (Q \sin \Phi \sec \theta + R \cos \Phi \sec \theta) ds \\ \theta &= \int_0^s (Q \cos \Phi + R \sin \Phi) ds \\ \phi &= \int_0^s (P + \sin \Phi \tan \theta + R \cos \Phi \tan \theta) ds \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.6.6 Composantes de poids dans le cadre du corps fixe

Le poids du cadre de référence du corps fixe est calculé par les équations suivantes [2.09] :

$$\begin{aligned} \vec{W}_g &= mg \hat{K}_1 = -mg \sin \theta \hat{I} + mg \cos \theta \sin \Phi \hat{J} + mg \cos \theta \cos \Phi \hat{K} \\ X_g &= -mg \sin \theta \\ Y_g &= mg \cos \theta \sin \Phi \\ Z_g &= mg \cos \theta \cos \Phi \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.7 Forces aérodynamiques agissant dans l'hélicoptère

Le terme important et très commun en vol terminologie est un vol équilibré qui réfère l'hélicoptère à être équilibré ou dans un mouvement à non-accélération. Un hélicoptère est en vol équilibré lorsque la somme vectorielle de toutes les forces aérodynamiques et la pesanteur agissant sur le centre de gravité sont égales à zéro, ainsi que la somme de tous les moments aérodynamiques agissant sur le centre de gravité.

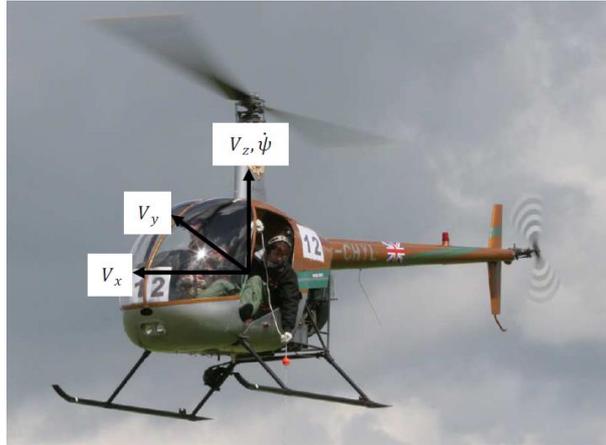


Figure 2.10 : Force temporaire sur l'hélicoptère pendant un vol équilibré

La figure 2.10 ci-dessus représente un hélicoptère en vol en palier équilibré. V est la vitesse totale du CG de l'hélicoptère qui se trouve dans son plan de symétrie. L'angle entre l'axe le cadre du corps fixe qui pointe vers l'avant et le plan du cadre de la Terre fixe $O'_{x'y'z'}$, sont définis comme Θ .

- En général, les forces aérodynamiques ne sont pas appliquées à la CG de l'hélicoptère. Toutefois, quand l'hélicoptère effectue un vol équilibré, toutes les forces en marche sont en équilibre. Puisque le poids agit sur la CG, il peut être considéré, dans ce cas précis, que les forces aérodynamiques agissent ainsi sur la CG.
- La première force aérodynamique est la Poussée T agissant sur l'axe de la carrosserie fixe qui pointe vers la direction avant. La Poussée est produite par une hélice, un turboréacteur ou un moteur de fusée.
- La deuxième force est la Portance L , la vitesse normale du vecteur. La principale composante de la Portance est la force verticale agissant sur les ailes vers le haut. La levée réelle est la somme de toutes les remontées mécaniques produites par des ailes, la queue, et même les hélices.
- La troisième force est la Trainée D , colinéaire vitesse du vecteur de l'hélicoptère. Sa direction est opposée au mouvement de l'hélicoptère. La Trainée est principalement composée du parasite et l'origine médicamenteuse. L'origine médicamenteuse est un effet secondaire de la génération de la Trainée. Le parasite de drogues est créé par les surfaces de l'hélicoptère exposées à l'air.
- La quatrième force est le poids W_g de l'hélicoptère pointant vers le bas.

2.8 Angles d'attaque

L'angle d'attaque défini dans la figure 2.11 ci-dessous affecte les forces aérodynamiques de l'hélicoptère. Pour le mouvement latéral, l'angle de dérapage β_d est défini comme [2.10] :

$$\beta_d = \tan^{-1} \frac{V}{U} \quad (2.31)$$

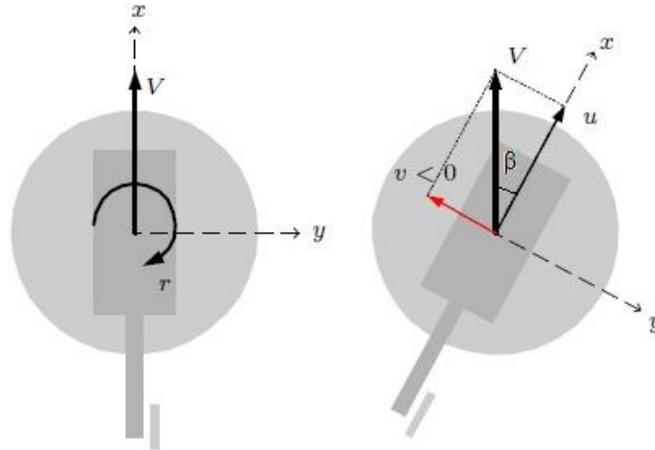


Figure 2.11 : Angle d'attaque

Le comportement de l'hélicoptère est contrôlé par la manipulation des angles des plusieurs parties mobiles sur sa surface. Les composants structurels de l'hélicoptère liés aux actions de contrôle sont représentés dans la figure 2.12.

Les actions de contrôle manipulent principalement les trois moments de la CG ; l'action secondaire de ce type de contrôle change les forces aérodynamiques externes.

La queue horizontale est composée de la partie avant fixée appelée le stabilisateur horizontal, et la partie rare de la queue de l'aile qui est un volet mobile et appelée l'ascenseur.

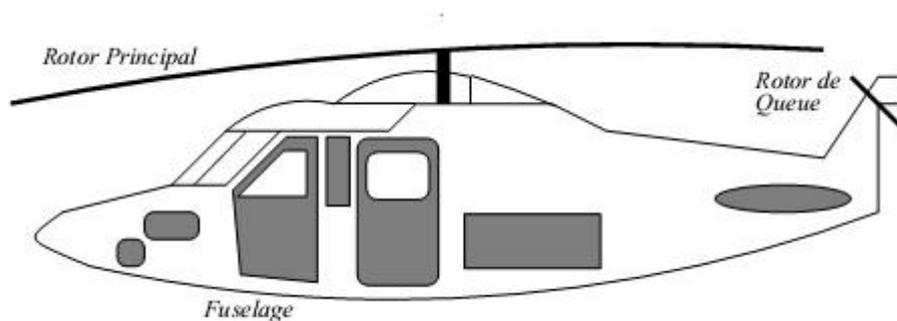


Figure 2.12 : Configuration d'hélicoptère liées aux actions de commande

L'angle de l'ascenseur noté δ_e affecte le mouvement longitudinal. Les changements d'angle de l'ascenseur affectent l'équilibre de la force de la Trainée et encore plus important, le moment du tangage de la CG. Lorsque l'ascenseur est dévié vers le bas, l'angle de l'ascenseur à un signe positif, quand la déviation est vers le haut, l'angle d'ascenseur à un signe négatif.

La partie arrière mobile du stabilisateur vertical est appelée « contrôle de direction ». En contrôlant l'angle de ce contrôle, notée par δ_r , on manipule le moment de direction autour de C_z déplaçant l'axe du cadre du corps fixe.

L'effet du contrôle de direction est utile pour le mouvement directionnel latéral et le manœuvre. L'angle de contrôle a un signe positif lorsque le contrôle est dévié sur le côté gauche de l'axe de symétrie du stabilisateur vertical, et le signe est négatif quand il est dévié sur le côté droit.

Les ailerons sont les parties mobiles placées à l'arrière des ailes. En contrôlant, l'un des angles des ailerons peut changer le roulement de l'hélicoptère.

Les angles des deux ailerons ont des directions opposées dans les deux ailes et ils ne sont pas les mêmes. L'angle total des ailerons est considéré être la somme des deux, l'angle des ailerons gauche et droit.

L'aileron est désigné comme δ_a et $\delta_a = \delta_L + \delta_R$ quand δ_R et δ_L sont respectivement les valeurs absolues des angles des ailerons gauche et droite. L'angle des ailerons est considéré positif lorsque l'aileron droit est dévié vers le bas.

2.9 Modélisation mathématique non linéaire d'un hélicoptère

2.9.1 Modélisation des équations générales du mouvement de l'hélicoptère

Les forces extérieures et les moments des différents éléments de l'hélicoptère, tels que le rotor principal, le rotor de queue sont étudiés dans cette section.

On considère le modèle de l'hélicoptère à six degrés de liberté dans son mouvement.

Le vecteur d'état x du système de l'hélicoptère possède neuf variables d'état général, qui sont :

- u, v, w représentant respectivement les composantes longitudinale, latérale et verticale du vecteur-vitesse de l'hélicoptère par rapport au centre de gravité et relatives à l'air;
- p, q, r représentant respectivement les composantes de la vitesse angulaire de roulis, de tangage et de lacet de l'hélicoptère par rapport aux axes du corps de référence;
- ψ, θ, ϕ représentant respectivement les angles d'Euler de roulis, de tangage et de lacet de l'hélicoptère.

Le vecteur d'état x est la dérivée des composantes des équations des mouvements de base de l'hélicoptère qui est considéré comme un corps rigide autour d'un système d'axe fixé au centre de masse de l'aéronef.

Le système de l'hélicoptère qui contrôle le mouvement de l'hélicoptère par rapport à X, Y, Z, L, M et N possède quatre entrées de commande qui sont :

- η_{ls} : l'entrée de contrôle de la manche cyclique longitudinale ;
- η_{lc} : l'entrée de contrôle de la manche cyclique latérale ;
- η_c : l'entrée de contrôle du levier de pas collectif ;
- η_p : l'entrée de contrôle du levier de pédale.

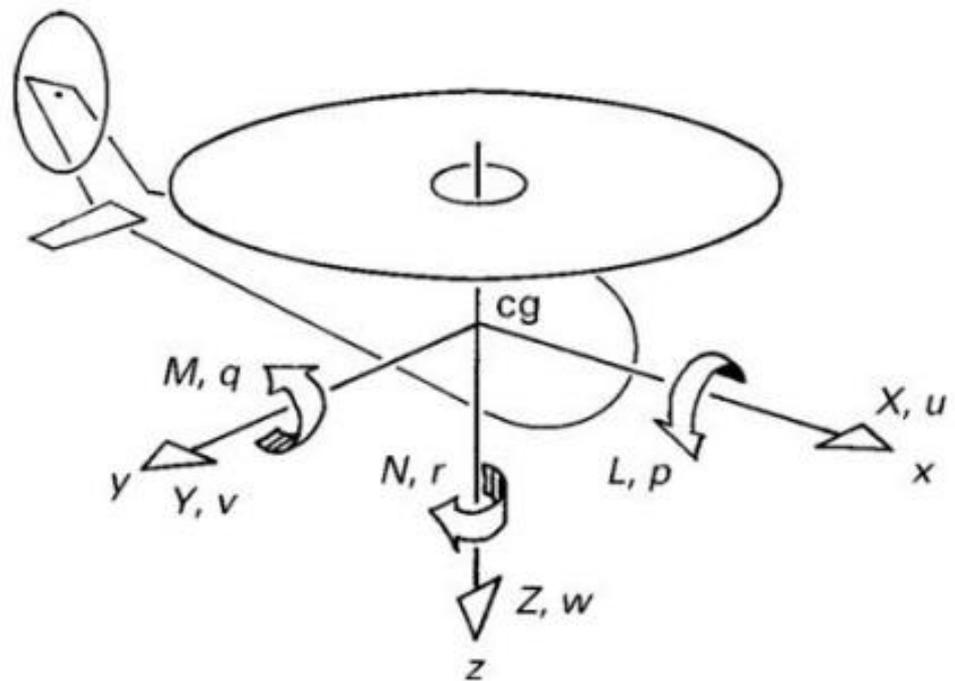


Figure 2.13 : Systèmes d'axes orthogonaux en mouvement de l'hélicoptère

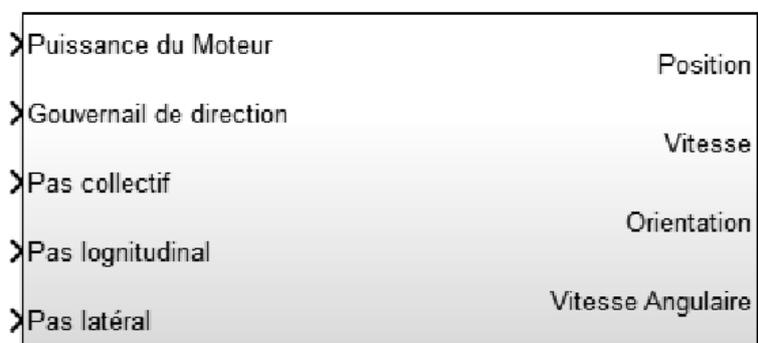


Figure 2.14 : Schéma-bloc du modèle mathématique de l'hélicoptère

La figure 2.14 présente les entrées et les sorties du modèle de l'hélicoptère. Pour mieux étayer le modèle de l'hélicoptère, il a été subdivisé en sous-blocs. Cette division du modèle suit d'une part les entités physiques qui régissent le mouvement de l'hélicoptère et d'autre part les changements de repère pour rendre possibles l'application des lois de la mécanique classique. La figure 2.15 présente cette subdivision du modèle.

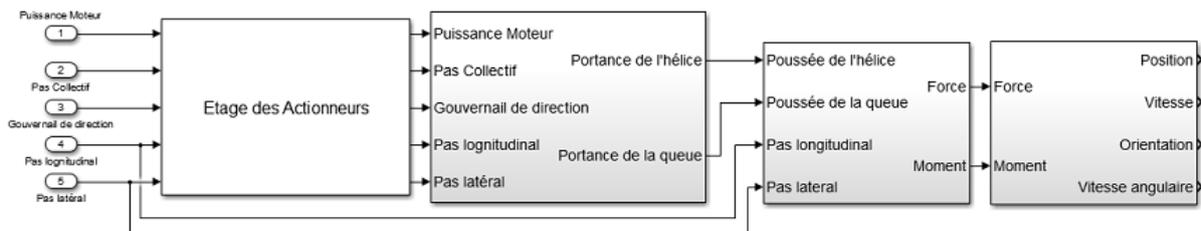


Figure 2.15 : Schéma-bloc du modèle mathématique de l'hélicoptère

Le modèle mathématique se décompose en quatre parties :

- le premier bloc est le plateau cyclique qui est l'élément central du contrôle de l'hélicoptère
- le deuxième bloc illustre la génération des forces aérodynamiques mises en jeu au niveau de l'hélicoptère
- le troisième bloc détaille la répartition de la poussée sur les différents axes et la génération des différents couples sur l'engin. Il explicite l'expression des forces aérodynamiques dans le repère véhicule.
- le quatrième bloc présente les équations de mouvement d'un solide rigide dans l'espace

2.9.2 Modélisation des équations des forces et des moments de l'hélicoptère

Les expressions analytiques pour les forces et les moments sur les divers composants d'hélicoptère sont décrits dans les quatre paragraphes qui suivent. Les forces et les moments sont orientés vers un système d'axes corps fixes et centrées sur le centre de gravité/ masse de l'hélicoptère, comme illustré dans la figure 2.16.

En général, les axes sont orientés suivant un angle par rapport aux axes principaux d'inertie, avec la direction x vers l'avant le long de certaines lignes de référence du fuselage commode.

Les équations du mouvement pour les six degrés de liberté de fuselage sont assemblées en appliquant les lois du mouvement de Newton concernant les forces et les moments appliqués aux accélérations de translation et de rotation qui en résultent.

Les expressions pour les vitesses et les accélérations d'inertie dans le système d'axes fuselage fixes ont dérivées des équations du mouvement résultant de la forme classique indiquée ci-dessous.

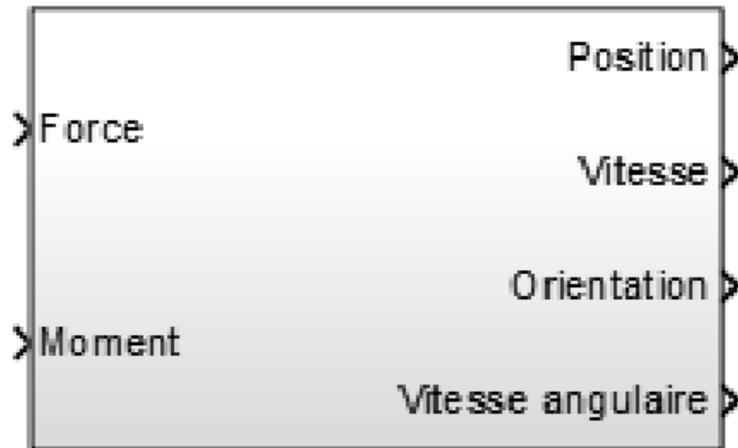


Figure 2.16 : Schéma-bloc des équations d'un corps rigide

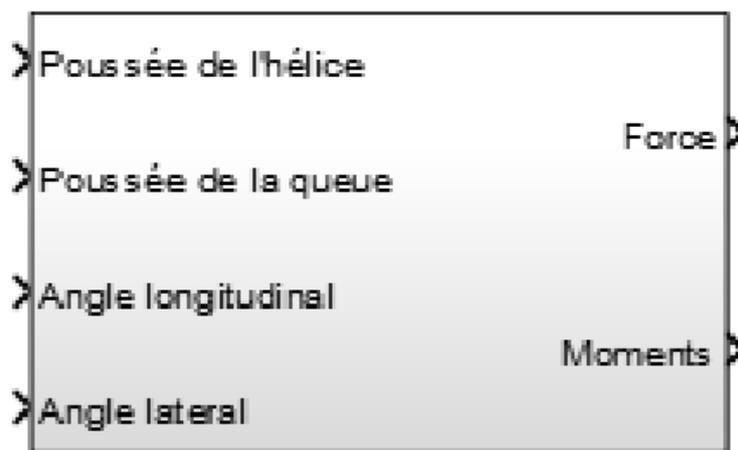


Figure 2.17 : Schéma-bloc des Forces et des Couples

2.9.3 Modélisation des équations des forces de l'hélicoptère

D'après l'équation (2.12) nous pouvons écrire les équations des forces de l'hélicoptère [2.03]:

$$\dot{u} = rv - qw - g \sin\theta + \frac{F_x}{M_a} \quad (2.32)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos\theta \sin\phi + \frac{F_y}{M_a} \quad (2.33)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos\theta \cos\phi + \frac{F_z}{M_a} \quad (2.34)$$