



## Qu'est-ce que c'est un matériau composite

Classe	Exemple	Composantes	Applications
Composites à matrice organique	carton pneus <b>stratifiés</b>	cellulose caoutchouc, acier résines organiques, fibres de verre, carbone, bore etc.	emballages etc. transports structures légères
	plastiques renforcés	résines, fibres courtes	diverses
Composites à matrice minérale	béton  composites C-C composites céramiques	ciment, sable, additifs  C, fibres de C céramiques et fibres céramiques	génie civil aérospatial, aviation, sport, biomécanique composantes thermomécaniques
Composites à matrice métallique		Al/fibres de B Al/fibres de C	aérospatial
Alliages	aciers Alliages d'Al cuivres	C, Fe, Mn, Cr, Al, Cu, Sn etc.	diverses

7

## Qu'est-ce que c'est un matériau composite

- Le concept clé des composites est l'union de deux ou plus matériaux, qui seuls n'ont pas des bonnes qualités mais qui, une fois unis, ont d'excellentes propriétés: *l'union fait la force*.
- En outre, les fibres de renfort ont des propriétés mécaniques nettement meilleures, en termes de rigidité et de résistance, du même matériau en forme massive, parce que la diminution des dimensions caractéristiques implique une amélioration des prestations mécaniques due, d'un côté au fait que la fibre a, par le procédé de fabrication, *une structure plus parfaite du matériau massif* et de l'autre à *la diminution de la probabilité de trouver des défauts importants dans des corps de petites dimensions*.
- Le développement des composites modernes est essentiellement dû à la nécessité de satisfaire les exigences de plus en plus poussées de l'industrie, surtout dans les secteurs:
  - aérospatial et aéronautique;
  - défense;
  - sport;
  - biomécanique.

8

## Qu'est-ce que c'est un matériau composite

- **Types de matériaux composites:** généralement, les composites sont employés sous forme de corps bidimensionnels, plaques ou coques, et en ce qui concerne leur comportement mécanique et l'usage structurel, peuvent être distingués en
  - **composites à fibres courtes:** les fibres sont dispersées aléatoirement dans une matrice isotrope; le comportement mécanique macroscopique est isotrope;
  - **composites à fibre longues:** les fibres sont disposées de façon ordonnée et orientée dans une matrice isotrope; le comportement mécanique macroscopique est globalement anisotrope.
- Ces matériaux sont normalement assemblés pour constituer des macro-matériaux composites, qui sont essentiellement de deux types:
  - **stratifiés:** obtenus par empilement de couches en composite orientées de façon différente; le comportement mécanique macroscopique doit être conçu;
  - **sandwich:** panneaux utilisés pour des usages en flexion; généralement le comportement macroscopique est isotrope dans le plan.

## Qu'est-ce que c'est un matériau composite

- **Principaux constituants des composites à matrice organique:** ils sont deux, la *matrice* et les *fibres*.
- A leur tour, celles-ci sont essentiellement des types suivants:
  - Matrice:
    - résines époxydiques;
    - résines polyuréthanes;
    - résines polyamides;
    - résine phénoliques.
  - Fibres:
    - verre;
    - carbone;
    - kevlar;
    - bore;
    - béryllium.
- Un usage de plus en plus répandu, lié à la protection de l'environnement, est celui des fibres d'origine végétale (chanvre etc.).

## Qu'est-ce que c'est un matériau composite

### ■ Principaux avantages des matériaux composites:

- légèreté;
  - résistance;
  - rigidité;
  - bonne résistance à la fatigue;
  - possibilité de concevoir le matériau selon le besoin (pour les sandwichs et les stratifiés);
  - réduction des coûts de fabrication;
  - réduction du poids et du coût des jonctions.
- Le défaut principal, surtout pour le matériaux à fibres longues, est le coût et, d'un point de vue mécanique, le comportement à la rupture, qui est généralement fragile.
- Le paramètres synthétiques d'évaluation des performances mécaniques d'un composite sont les rapports  $E/\rho$  et  $\sigma_{lim}/\rho$ . Dans le tableau suivant on montre des valeurs typiques.

11



## Qu'est-ce que c'est un matériau composite

	Matériau	$\rho$	E	$\sigma_u$	$E/\rho$ (A)	$\sigma_u/\rho$ (B)	$\rho/\rho_{ac}$	$E/E_{ac}$	$\sigma_u/\sigma_{u ac}$	$A/A_{ac}$	$B/B_{ac}$
		kg/m <sup>3</sup>	MPa	MPa	MN m/kg	kN m/kg					
Forme massive	Acier	7850	210000	360	26,75	45,86	1	1	0,171	1	0,171
	Acier haute résist.	7850	210000	2100	26,75	267,52	1	1	1	1	1
	Alliages d'Al	2700	70000	620	25,93	229,63	0,34	0,33	0,295	0,97	5,01
	Bois	500	30000	15	60,00	30,00	0,06	0,14	0,007	2,24	0,65
	Verre	2500	70000	2100	28,00	840,00	0,32	0,33	1,000	1,05	18,32
	Tungstène	19300	350000	4100	18,13	212,44	2,46	1,67	1,952	0,68	4,63
	Béryllium	1830	300000	700	163,93	382,51	0,23	1,43	0,333	6,13	8,34
	Tytane	4610	115000	1900	24,95	412,15	0,59	0,55	0,905	0,93	8,99
Fibres	Verre E	2540	72400	3500	28,50	1377,95	0,32	0,34	1,667	1,07	30,05
	Verre S	2480	85500	4600	34,48	1854,84	0,32	0,41	<b>2,190</b>	1,29	40,45
	Carbone	1380	190000	1700	137,68	1231,88	0,18	0,90	0,810	5,15	26,86
	Carbone HM	1900	390000	2100	205,26	1105,26	0,24	<b>1,86</b>	1,000	<b>7,67</b>	24,10
	Carbone HR	1850	240000	3500	129,73	1891,89	0,24	1,14	1,667	4,85	<b>41,25</b>
	Kevlar	1500	130000	2800	86,67	1866,67	0,19	0,62	1,333	3,24	40,70
	Bore	2630	385000	2800	146,39	1064,64	0,34	1,83	1,333	5,47	23,22
	Béryllium	1830	300000	1700	163,93	928,96	0,23	1,43	0,810	6,13	20,26
Matrices	Polyèsteres	1200	3000	80	2,50	66,67	0,15	0,01	0,038	0,09	1,45
	Phénoliques	1200	3000	40	2,50	33,33	0,15	0,01	0,019	0,09	0,73
	Époxydiques	1500	5000	80	3,33	53,33	0,19	0,02	0,038	0,12	1,16
	Polyamides	1140	2500	85	2,19	74,56	0,15	0,01	0,040	0,08	1,63

12



## Produits de base et semi-produits

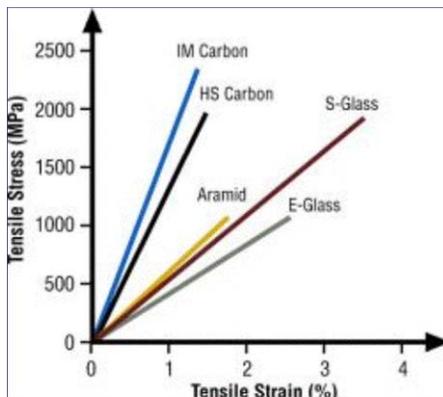
- L'industrie produit toute une série de produits de base et de semi-produits avec qui, ensuite, on assemble les produits finaux.
- Produits de base:
  - fibres;
  - mats;
  - tissus;
  - couches pré-impregnées (*pre-pregs*)
- Les semi-produits (qui sont parfois, surtout dans les applications les plus poussées, le produit final) sont essentiellement:
  - stratifiés;
  - sandwichs.
- Voyons-les rapidement.

13



## Produits de base et semi-produits

- **Fibres**: ce sont le constituant de base du renfort des composites; elles sont produites en bobines, comme un fil quelconque, et la plupart des fois sont en verre ou en carbone.



verre



carbone

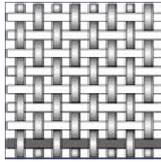


14

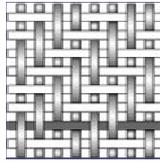


## Produits de base et semi-produits

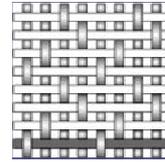
- **Tissus:** souvent, les renforts sont fournis sous forme de tissus; les principaux types de tissus sont:



Taffetas (plain)

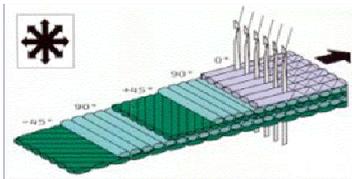


Sergé (twill)

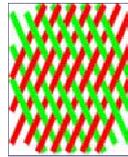


Satin

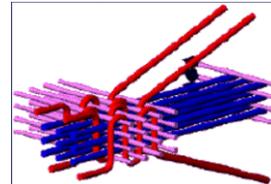
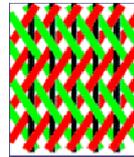
- Il existe aussi des tissus multidirectionnels, pour usages spéciaux (surtout pour des champs de contrainte tridimensionnelle).



Stitched



Braided



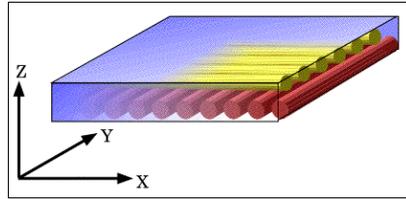
3D

## Produits de base et semi-produits

- **Mats:** ce sont des couches de fibres non tissées, disposées de façon aléatoire, qui sont produits soit secs soit déjà imprégnés de résine. Le comportement mécanique est isotrope.
- Les mats sont utilisés lorsqu'il faut d'un côté légèreté et isotropie, de l'autre des caractéristiques mécaniques non exceptionnelles (les mats n'ont ni une résistance ni une rigidité importante).
- Leurs avantages sont surtout la facilité de mise en œuvre, l'adaptabilité aux formes les plus variées et leur coût, plus faible par rapport aux panneaux à fibres longues orientées.
- **Couches pre-imprégnées (pre-pregs):** ce sont des semi-produits composés de fibres et résine à polymériser (de différentes façons).
- Les fibres peuvent être disposées dans une seule direction ou tissées; le comportement est toujours anisotrope.

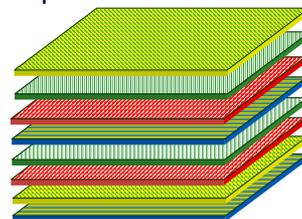
## Produits de base et semi-produits

- L'usage des pre-pregs est réservé à la fabrication des stratifiés ou des couches extérieures des panneaux sandwich.
- Les avantages sont multiples: d'abord, les excellentes performances mécaniques, ensuite la bonne réponse au processus de fabrication.
- En fait, c'est d'abord avec les pre-pregs qu'on obtient les meilleurs résultats en termes d'absence de défauts de fabrication; pour ces raisons, ils sont utilisés pour la fabrication de stratifiés pour les applications de pointe (aviation, espace, sport etc.).
- Considérons maintenant les deux semi-produits, les stratifiés et les panneaux sandwich.



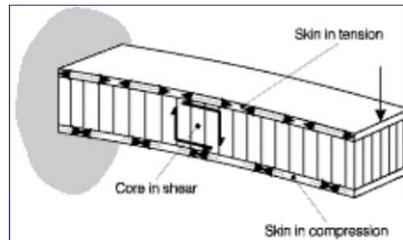
## Produits de base et semi-produits

- **Stratifiés**: ils sont obtenus par empilement de couches, généralement à renfort unidirectionnel ou tissu, disposées selon différentes orientations.
- Généralement, l'assemblage des couches se fait par polymérisation de l'ensemble, parfois par collage (par exemple dans la technologie du bois). Dans le premier cas, donc, la subdivision en couches du produit final est une pure convention.
- Les stratifiés sont utilisés, comme matériaux structuraux, à chaque fois qu'on a, d'un côté, la nécessité d'excellentes performances mécaniques en termes de résistance, rigidité, comportement à la fissuration, et de l'autre, l'exigence de limiter le poids.
- Ces matériaux doivent être conçus selon la nécessité et aujourd'hui se profile l'idée, avec la technologie appropriée, de fabriquer des stratifiés avec une disposition continûment variable des fibres, en direction et quantité.



## Produits de base et semi-produits

- Les principaux secteurs d'utilisation sont donc l'aéronautique et le sport.
- **Panneaux sandwich:** ils sont la généralisation au cas bidimensionnel de la poutre en I.
- Le concept clé est celui de mettre la partie résistante à la flexion là où il faut, à l'extérieur, et de remplir la partie centrale avec un matériau léger (mousses solides, balsa, nids d'abeille) pour faire face à l'effort tranchant.
- Ils sont donc employés lorsque la légèreté est fondamentale dans des structures essentiellement sollicitées en flexion.
- Les secteurs d'application les plus importants sont donc le naval, l'espace, l'aéronautique et le sport.



19

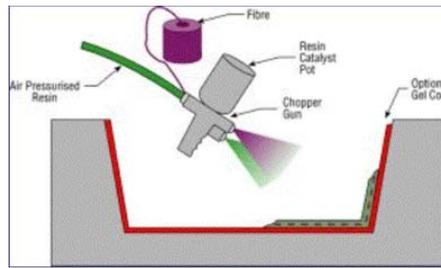
## Technologies de production

- Voyons rapidement certaines des technologies de production parmi les plus employées dans la fabrication des composites.
- Celles-ci sont les technologies suivantes:
  - à jet;
  - par roulage;
  - sous vide;
  - RTM (*Resin Transfer Moulding*);
  - RFI (*Resin Film Infusion*);
  - pre-impregnés (*prepregs*);
  - pultrusion;
  - FW (*Filament Winding*).

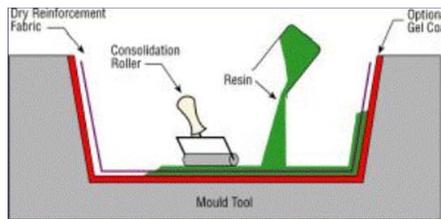
20

## Technologies de production

- **Technologie à jet:** c'est un jet en pression de résine et fibres courtes pré-mélangées.



- **Technologie par roulage:** la résine est appliquée à la main sur une couche de fibres pré-appliquée au moule.

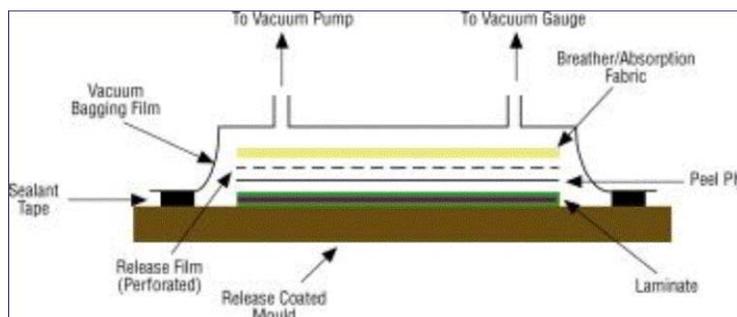


- Dans les deux cas, la polymérisation se fait, normalement, à froid, d'habitude avec ajout d'un catalyseur.

21

## Technologies de production

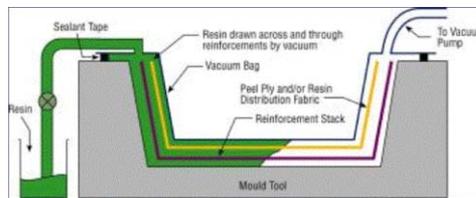
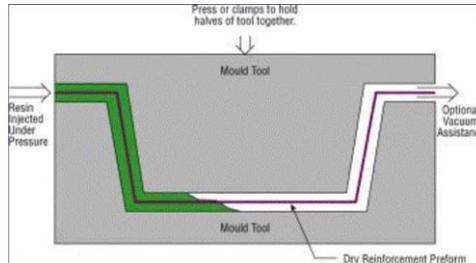
- **Technologie sous vide:** la polymérisation se fait dans un moule sous vide, avec *vacuum bag*, qui permet de comprimer l'objet à la pression atmosphérique.



22

## Technologies de production

- **Technologie RTM (*Resin Transfer Moulding*):** le renfort est placé à sec dans le moule; ensuite, on procède à l'injection de résine en pression, parfois avec moule sous vide.
- La polymérisation peut se faire à froid ou à chaud, avec ou sans catalyseur.
- Cette technologie est la plus employée dans la production de grande série de pièces à faibles qualités structurales.
- Parfois, on fait l'injection de la résine non en pression mais sous vide.

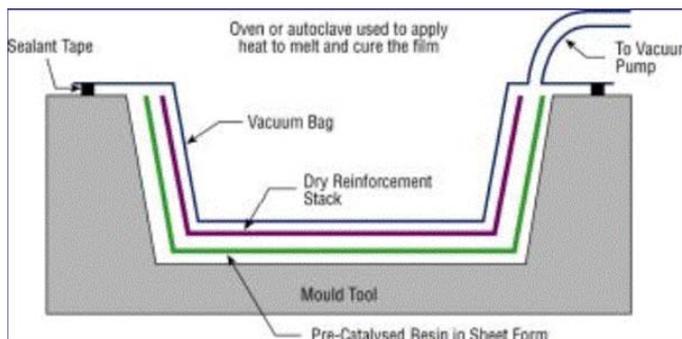


23



## Technologies de production

- **Technologie RFI (*Resin Film Infusion*):** la résine est pré-appliquée à un état semi-solide, sur une couche de support, et le moule est placé sous vide.
- Ensuite, la résine est faite fondre d'abord et polymériser ensuite par l'apport de chaleur.

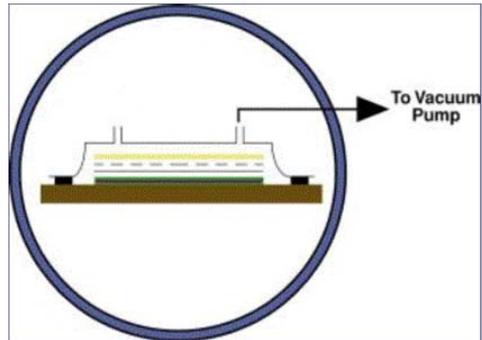


24



## Technologies de production

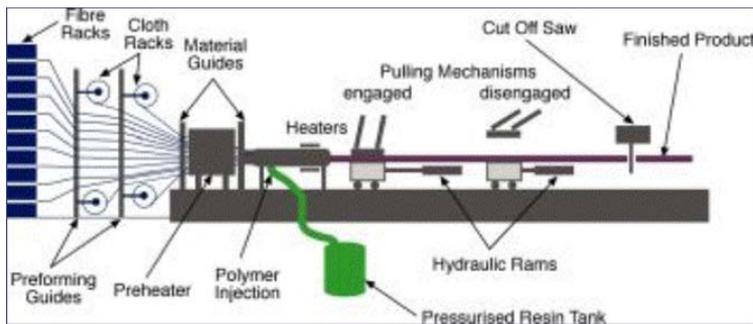
- **Technologie des pre-impregnés (*prepregs*):** cette technologie est la plus utilisée pour fabriquer des stratifiés plans ou même, en autoclave, avec une certaine courbure.
- Le stratifié est préparé à froid, par empilement de différentes couches de pre-impregné.
- Le stratifié est ensuite placé en autoclave ou dans des presses chauffantes, pour polymériser sous pression et à chaud (environ 180°C).
- Cette technologie, très chère, permet d'obtenir des composants mécaniques prisés et de bonne qualité de production, en limitant au minimum les défauts de fabrication.



25

## Technologies de production

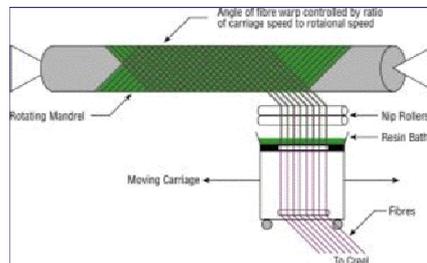
- **Technologie de pultrusion:** elle est employée industriellement pour la production de grande série et en continu de profilés (les mêmes des séries en acier).
- La polymérisation se fait à chaud et rapidement.



26

## Technologies de production

- **Technologie FW (*Filament Winding*):** c'est une technologie industrielle pour la fabrication de pièces à symétrie cylindrique ou quand même avec une section convexe.
- La fibre est pre-impregnée de résine et ensuite enroulée de façon régulière et programmée sur un mandrin de la forme voulue.
- La polymérisation se fait à froid ou à chaud, avec ajout de catalyseur ou de lumière ou de rayons UV.
- C'est une technologie très employée pour la fabrication de réservoirs en pression, mais aussi de grandes pièces, comme le fuselage de fusées ou d'avions.



27

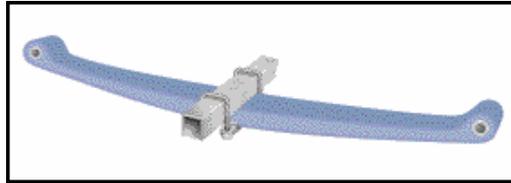
## Quelques exemples d'applications

- Voyons maintenant comme exemples d'application une série de réalisations en matériaux composites à caractère structural, essentiellement dans les secteurs suivants:
  - automobile;
  - ferroviaire;
  - naval;
  - aéronautique;
  - espace;
  - sport.

28

## Quelques exemples d'applications

- Secteur automobile
- Suspensions à lamelles en fibre de verre.



- Utilisation de plastiques renforcés dans des nombreuses parties moulées (portières, pare-choc etc.)

29

## Quelques exemples d'applications

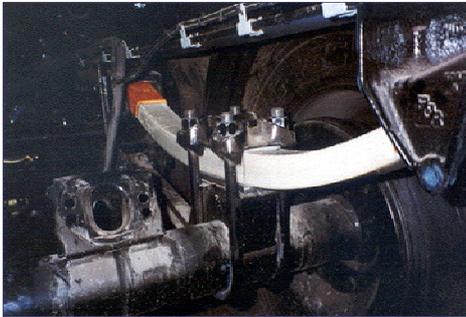
- Le projet EuroSpring: Taxi Spring, suspensions en fibre de verre pour les taxis de Londres.



30

## Quelques exemples d'applications

- **Le projet EuroSpring:** Trailer Spring, suspensions pour camion en fibre de verre.



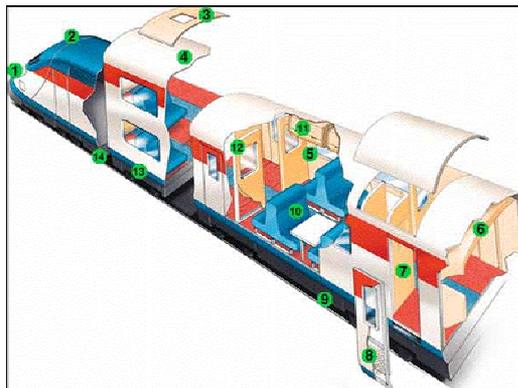
- Poids suspension en acier: 45 kg.
- Poids suspension en composite: 9 kg.
- Epaisseur max: 70 mm.

31



## Quelques exemples d'applications

- **Secteur ferroviaire.**
- Suspensions en fibre de verre.
- Parties moulées non structurales (panneaux isolants et phono-absorbants, pare-choc en panneaux sandwich etc.)



32

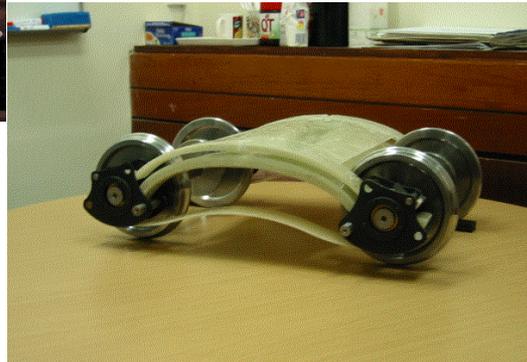


## Quelques exemples d'applications



- **Le projet Eurobogie** (Eureka Project 1841) Suspensions à deux étages en fibre de verre pour wagons marchandises.

- Bogies des wagons marchandises entièrement en fibre de verre, pour la diminution de la pollution sonore.



33

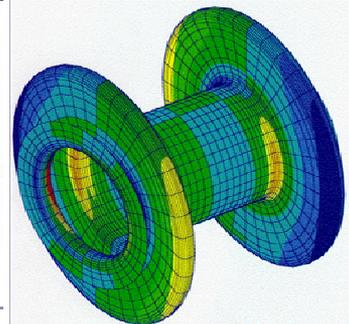
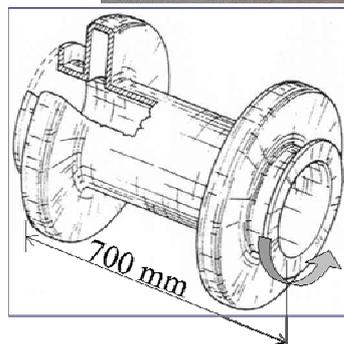
## Quelques exemples d'applications

- **Deux projets pour le TGV** (collaboration ALSTOM, EMSE, ISAT)

- Barre anti-roulis en carbone et acier



- Joint Jacquemin en fibre de verre: transmission de puissance

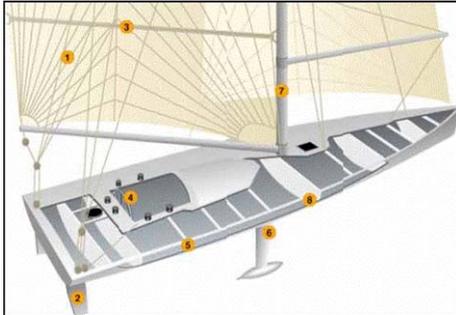


- **Le futur des TGV:** bogies entièrement en fibre de verre.

34

## Quelques exemples d'applications

- Secteur naval.
- Coque en sandwich.
- Structures en composite.
- Mat et voiles en carbone.



35

## Quelques exemples d'applications

- Secteur aéronautique.
- Plusieurs parties structurales et aérodynamiques sont en stratifié ou sandwich (dans l'A380, la pièce qui opère la jonction entre ailes et fuselage est en composite).
- Freins en carbone (brevet Messier-Bugatti): matrice en carbone et fibres non tissées en carbone aussi.

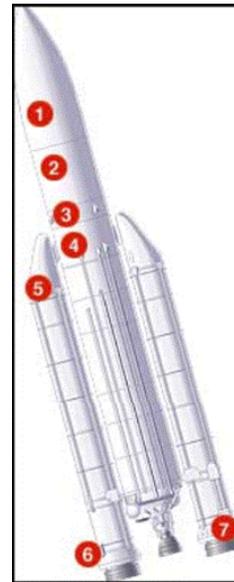
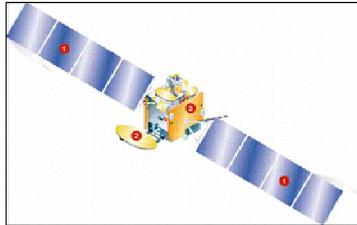


- Pales des hélices et des turbines, même à contrôle passif du pas.

36

## Quelques exemples d'applications

- **Secteur espace.**
- Parties structurales de stellites et de vecteurs (sandwich Al-C, stratifiés en C et B).
- Protections thermiques et structures à déformation thermique directionnelle nulle.
- L'épargne d'un kg de poids structural dans un satellite pour télécommunications permet sa substitution avec du matériel électronique pour la réalisation de canaux de transmission dont la location permet de financer le coût de mise en orbite du satellite!



37

## Quelques exemples d'applications

- **Secteur sport.**
- Coques et freins en carbone pour voitures de compétition (F1 et formule endurance).
- Vélos de compétition en carbone.
- Canoës et kayaks en fibre de verre ou de carbone.
- Skis et raquettes de tennis en composite, avec aussi contrôle passif ou actif des vibrations par systèmes piézoélectriques.



38

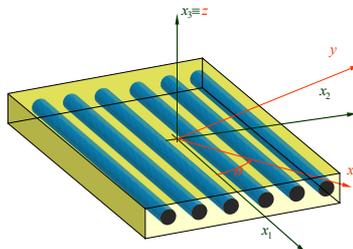
## Généralités sur la mécanique des composites

- **Les composites à fibres longues, des matériaux à concevoir:** l'usage des matériaux composites permet de résoudre brillamment les problèmes structuraux où les propriétés de résistance et rigidité doivent se concilier avec les nécessités de légèreté
- En outre, les différents paramètres qui déterminent le comportement final d'un composite structural offrent au concepteur un vaste champ d'action, où la conception optimale du matériau s'affirme comme nouvelle discipline de la mécanique structurale.
- Cependant, les matériaux composites, par leur nature de *matériaux complexes* posent au concepteur des nouveaux problèmes, avec des *phénomènes parfois inattendus et inconnus dans les matériaux traditionnels*.
- **La description des composites à différentes échelles:** étant constitué de deux phases, un composite est par sa nature un matériau *hétérogène*.

39

## Généralités sur la mécanique des composites

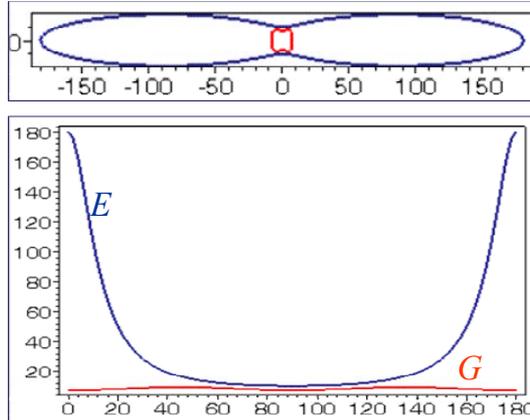
- En outre, pour les composites renforcés par des fibres longues, l'orientation du renfort détermine la dépendance de la direction de résistance et rigidité; la réponse mécanique du matériau : les composites sont souvent des *matériaux anisotropes*.
- Ces deux aspects jouent un rôle décisif à des échelles différentes: au niveau *microscopique* l'hétérogénéité et au niveau *macroscopique* l'anisotropie.
- **L'analyse macroscopique: l'anisotropie:** une couche renforcée par des fibre orientées a toujours un comportement orthotrope.



40

## Généralités sur la mécanique des composites

- Un exemple: le diagramme, directionnel et Cartésien, du module d'Young et du module à cisaillement pour une couche en carbone-epoxyde à renfort unidirectionnel,  $V_f=0.7$ .



41

## Généralités sur la mécanique des composites

- **L'analyse microscopique: l'hétérogénéité.** Le but de l'analyse microscopique est de récupérer, de la connaissance des propriétés des phases et de la géométrie du composite, les lois qui décrivent le comportement du composite au niveau macromécanique comme matériau homogène: on cherche donc des *lois d'homogénéisation*.
- Il existe plusieurs *théories* et *modèles d'homogénéisation*; l'approche classique considère un volume élémentaire et significatif de composite et, pour un comportement isotrope linéaire des deux constituants, obtient les lois d'homogénéisation dans l'hypothèse d'adhérence parfaite entre fibres et matrice.
- **Mécanique de la rupture des composites** : le comportement à la rupture des composites est influencé par différents facteurs qui en compliquent l'analyse et la possibilité de saisir le phénomène avec un critère général et fiable comme pour les matériaux homogènes et isotropes.

42



## Généralités sur la mécanique des composites

- **Problèmes typique des stratifiés:** en mécanique des stratifiés, on trouve des phénomènes et problèmes inconnus dans les matériaux classiques, comme par exemple:
  - délaminage: rupture interlaminaire provoquée par les contraintes interlaminaires;
  - contraintes résiduelles: leur présence dépend beaucoup du processus de fabrication; en particulier, si polymérisé à chaud un stratifié sera toujours soumis à des contraintes interlaminaires résiduelles qui peuvent être très importantes et surtout d'évaluation difficile;
  - contraintes aux bords: on peut montrer, par des modèles analytiques, qu'en fonction de la séquence d'empilement et du chargement, on peut avoir une concentration des efforts aux bords libres, qui peut être même très importante et provoquer le délaminage;
  - analyse de la rupture: la rupture complète d'un stratifié est un phénomène progressif et souvent difficile à saisir, aussi bien au niveau analytique que, pour ce qui concerne son évolution, expérimental.

45

## Généralités sur la mécanique des composites

- **La conception optimale des stratifiés:** il s'agit d'une opération souvent difficile.
- Les difficultés typiques rencontrées en optimisation des stratifiés sont:
  - forte non linéarité (optimisation non convexe);
  - multi-modalité;
  - multiplicité des objectifs;
  - nombre de variable souvent important;
  - solutions qui parfois se présentent en forme continue;
  - difficultés relatives à la représentation élastique: les transformations Cartésiennes sont extrêmement complexes et ne s'appuient pas sur des invariants tensoriels (comme aussi la technique des *lamination parameters* basée sur les paramètres de Tsai et Pagano).
- Les règles et les méthodes utilisées dans la pratique sont peu nombreuses, souvent il s'agit d'approche très simplifiées, qui limitent beaucoup le champ des possibilités.

46

## Généralités sur la mécanique des composites

- **Vers l'automation des choix de conception:** la conception optimale des stratifiés est encore aujourd'hui sujet de recherche.
- En fait, les composites en général et les stratifiés en particulier sont des matériaux *complexes* et *compliqués* et pour leur conception il faut déterminer nombreux paramètres et concilier différents objectifs, parfois en contraste entre eux.
- Le concepteur doit donc opérer des nombreux choix (à partir, par exemple, du choix du meilleur matériau avec qui réaliser un stratifié), pour lesquels la simple expérience parfois n'est pas suffisante.
- L'objectif du futur est donc de parvenir à un système en mesure d'effectuer les choix automatiquement, sur la base de critères définis mathématiquement: c'est *l'optimisation globale des stratifiés*.

47



## Bibliographie essentielle

- **Mécanique des matériaux composites en général:**
  - Lekhnitskii S. G., **1944:** *Anisotropic plates*. Édition anglaise: S. W. Tsai & T. Cheron, 1968. Gordon & Breach.
  - Lekhnitskii S. G., **1950:** *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Édition anglaise : P. Fern, 1963. Holden-Day.
  - Jones R. M., **1975:** *Mechanics of composite materials*. Mc Graw-Hill.
  - Tsai S. W., Hahn H. T., **1980:** *Introduction to Composite Materials*. Technomic.
  - Tsai, S. W., **1985:** *Composite design guide*. Technomic.
  - Turvey G. J., Marshall I. H., **1995:** *Buckling and postbuckling of composite plates*. Chapman & Hall (edited).
  - Pedersen P., **1997:** *Elasticity, anisotropy, laminates*. Cours d'élasticité téléchargeable à l'adresse web [www.fam.dtu.dk/html/pp.html](http://www.fam.dtu.dk/html/pp.html)
  - Vautrin A., **1997:** *Mechanics of Sandwich Structures*, Kluwer (edited).
  - Vasiliev V. V., Morozov E. V., **2001:** *Mechanics and analysis of composite materials*. Elsevier.
  - Reddy J. N., **2004:** *Mechanics of composite plates and shells: theory and analysis*. 2<sup>nd</sup> Edition. CRC Press.

48



## Bibliographie essentielle

### ■ Conception de stratifiés en composite:

- Abrate S., **1994**: Optimal design of laminated plates and shells. *Composite Structures*, v.29, 269-286 (article de synthèse).
- Barbero E. J., **1998**: Introduction to composite materials design. Taylor & Francis.
- Gürdal Z., Haftka R. T. & Hajela P., **1999**: Design and optimization of laminated composite materials. J. Wiley & Sons, New York.

49

## Bibliographie essentielle

### ■ Des sites internet sur les composites:

- <http://www.netcomposites.com/>
- <http://www.mdacomposites.org/> (applications au génie civil)
- <http://callisto.my.mtu.edu/> (cours en ligne et applicatifs MatCad)
- <http://composite.about.com/>

- **Remerciements**: pour les informations et les illustrations des projets européens Eurospring et Eurobiege du programme d'aide à la recherche Eureka, on remercie le Professeur Giorgio Jeronimidis de l'Université de Reading, UK.

50

## Chapitre 2

### ■ Anisotropie: analyse et méthodes de représentation

<input type="checkbox"/> Qu'est que l'anisotropie et quels problèmes comporte	53
<input type="checkbox"/> La loi de Hooke pour un solide anisotrope	55
<input type="checkbox"/> Notation tensorielle	61
<input type="checkbox"/> Notation de Voigt	63
<input type="checkbox"/> Notation de Pedersen	68
<input type="checkbox"/> Signification physique des composantes élastiques	72
<input type="checkbox"/> Rotation du repère	76
<input type="checkbox"/> Les symétries élastiques: Principe de Neumann	88
<input type="checkbox"/> Les différentes symétries élastiques	96
<input type="checkbox"/> Les symétries des cristaux	125

## Chapitre 2

<input type="checkbox"/> Les constantes techniques d'élasticité	132
<input type="checkbox"/> Bornes sur les modules élastiques	145
<input type="checkbox"/> Le cas d'état plan de contrainte	150
<input type="checkbox"/> Rotation du repère dans le plan	159
<input type="checkbox"/> Les paramètres de Tsai et Pagano	164
<input type="checkbox"/> Les paramètres polaires de Verchery	168
<input type="checkbox"/> Des exemples de matériaux anisotropes	172

## Qu'est que l'anisotropie et quels problèmes comporte

- L'anisotropie est la dépendance d'une propriété physique de la direction.
- Les propriétés qui nous intéressent ici sont celles qui concernent la réponse mécanique d'un solide, en résistance et en rigidité.
- Dans ce chapitre, nous nous occuperons essentiellement de la description de la réponse mécanique de solides anisotropes pour ce qui concerne la rigidité, en renvoyant au chapitre 4 pour une présentation du comportement à la rupture des solides anisotropes. Le comportement anisotrope d'un solide comporte une série de problèmes supplémentaires par rapport au cas isotrope.
- Tout d'abord, les grandeurs qui décrivent le comportement mécanique, soient-elles de composantes tensorielles ou des modules de l'ingénieur, généralement ne sont pas des quantités invariantes, mais dépendent de la direction, à cause du comportement anisotrope, et donc représentent la réponse du matériau dans une direction bien précise, pas en sens absolu.

53

## Qu'est que l'anisotropie et quels problèmes comporte

- Ensuite, ces constantes sont en nombre majeur que dans le cas isotrope (ce qui comporte, par exemple, que la caractérisation expérimentale d'un matériau anisotrope nécessite un nombre majeur de mesures indépendantes).
- En outre, dans un calcul il faut souvent exprimer les caractéristiques mécaniques dans un repère tourné; les formules qui permettent ce passage sont compliquées et rendent difficiles beaucoup de problèmes de conception.
- D'autres problèmes sont causés par la différence quantitative dans la réponse mécanique directionnelle, qui peut amener à des phénomènes locaux dangereux (par exemple, le délaminage dans les stratifiés), mais aussi par l'impossibilité d'appliquer des critères de résistance classiques, comme celui de Huber-Hencky-von Mises.
- Le calcul de vérification et de conception avec les matériaux anisotropes est donc, en général, plus compliqué et plus lourd qu'avec les matériaux isotropes.

54

## La loi de Hooke pour un solide anisotrope

- On se borne ici à l'analyse du comportement élastique linéaire, en petites déformations, d'un solide anisotrope de Green, pour lequel on définit un potentiel élastique  $V$ .
- Le solide est chargé par des forces de volume  $\mathbf{q}$  et des forces de surface  $\mathbf{p}$  sur une partie de sa frontière.
- On applique un champ de déplacements cinématiquement admissibles et infinitésimal  $\mathbf{du}$ , tel donc à pouvoir négliger la variation des forces appliquées.
- Le travail des forces appliquées est alors (théorème de Clapeyron)

$$\begin{aligned}
 dW &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{du} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{du} \, ds = \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} \, dv + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{du} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{du} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{du}) \, dv = \\
 &= \int_{\Omega} (\mathbf{q} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{du} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{du}) \, dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, dv.
 \end{aligned}$$

## La loi de Hooke pour un solide anisotrope

- La quantité

$$dV = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

représente la variation d'énergie potentielle interne par unité de volume en correspondance d'une variation infinitésimale de l'état de déformation.

- Dans le cas d'un corps élastique, cette quantité  $dV$  doit être une différentielle exacte; en fait, la variation totale, par unité de volume, de l'énergie potentielle interne lors d'une transformation d'un état  $A$  à un état  $B$ , doit être, dans un tel cas, indépendant du parcours d'intégration:

$$V = \int_A^B dV = V_B - V_A \Leftrightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}.$$

- On obtient donc la *formule de Green*:

## La loi de Hooke pour un solide anisotrope

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

- En développant en série de Taylor on a

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = V(0) + \left. \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots$$

- Si on admet qu'à l'état initial  $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$  et si on pose  $V=0$ , en approximant  $V$  au premier terme non nul, on a

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

avec les coefficients  $E_{ijkl}$  qui sont les composantes d'un tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre,  $\mathbf{E}$ , et telles que, par le théorème de Schwarz,

## La loi de Hooke pour un solide anisotrope

$$E_{ijkl} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right|_0 = E_{klij}.$$

- Si l'on applique alors la formule de Green à la fonction  $V(\boldsymbol{\varepsilon})$  et si l'on tient compte de la relation ci-dessus, qui établit l'existence des *symétries majeures des indices*, on a

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon},$$

qui est la *loi de Hooke généralisée*; elle établit la linéarité entre les composantes de la contrainte et celles de la déformation; les composantes  $E_{ijkl}$  sont les *modules d'élasticité* (Lekhnitskii), et  $\mathbf{E}$  est le *tenseur élastique*, ou *tenseur de rigidité élastique*.

- Une approche alternative consiste à postuler le comportement linéaire, à savoir la loi de Hooke généralisée; ensuite, par la formule de Green et le théorème de Schwarz, on obtient les symétries majeures pour les modules élastiques: