

CHAPITRE 2 MODELISATION LONGITUDINALE ET LATERALE DE L'HELICOPTERE

2.1 Introduction

Ce chapitre décrit tout d'abord les généralités sur l'hélicoptère, sa composition, ses modes de vol, ses applications, les mécanismes de fonctionnement et les équations fondamentales liées à la dérivation du mouvement d'un hélicoptère expliquant respectivement la détermination de la position et l'orientation de l'hélicoptère aux systèmes inertiels et mobile et les angles correspondants. Le mouvement d'équations est obtenu par la mise en œuvre de la Loi de Newton.

Nous développons ensuite une représentation de l'attitude, les paramètres cinétiques, cinématiques et d'efforts, les dynamiques de translation et de rotation, les relations cinématiques et les composantes de poids de l'hélicoptère.

Nous avons publiés dans un Journal Scientifique de notoriété internationale et dans les Journaux Scientifique locaux MADA-ENELSA et MADA-ETI les articles suivants:

- «State feedback control of a helicopter in longitudinal flight», International Journal of Scientific & Technology Research , VOL 1, ISSUE 1 <http://www.ijert.org> (Annexe 2.2).
- «Commande par retour d'état en vol longitudinal d'un hélicoptère», MADA-ENELSA, ISSN, Volume 1, 2015, <http://madarevues.recherches.gov.mg> (Annexe 2.4).
- «Modélisation de mouvement d'un avion dans l'espace d'état» MADA-ETI, ISSN 2220-0673, Volume 2, 2015, <http://madarevues.recherches.gov.mg> (Annexe 2.7).

2.2 Généralités sur l'hélicoptère

L'étymologie du mot *hélicoptère* provient du Grec « *helix* » (hélice) et « *pteron* » (aile). L'histoire de l'*hélicoptère* (appelé aussi *giravion*) a débuté au XX^{ème} siècle et fait partie des aéronefs. Il a montré ses utilisations et ses applications au sein de l'armée lors de la 2^{ème} guerre mondiale ainsi que dans les départements de la police, de la douane, du transport, de l'environnement et aussi dans le domaine civil depuis une quarantaine d'années. L'intérêt d'un hélicoptère réside principalement dans sa capacité à décoller et à atterrir verticalement, ce qui l'affranchit d'une piste.

2.2.1 Composition d'un hélicoptère

Définition 2.01

Les hélicoptères sont des aéronefs avec pilote capable de mener à bien une mission de reconnaissance.

Les hélicoptères sont apparus vers les années 1980 et représentent une étape importante dans le développement de l'aéronautique tant civile que militaire.

Ils permettent en outre le vol stationnaire et offrent une grande agilité, par exemple lors de vol arrière ou latéral, des vols en montagne ou en milieu urbain à basse vitesse.



Figure 2.01 : Composantes d'un hélicoptère

L'évolution des hélicoptères est une évolution logique, résultant du progrès technologique notamment dans le domaine de l'informatique, de l'automatique, de la mécanique, de la robotique. La construction d'hélicoptère repose sur une architecture constituée des éléments suivants (figure 2.01) :

- d'un *fuselage* constitué du poste de pilotage. Le fuselage est la partie qui représente la masse la plus significative de l'hélicoptère et l'énergie cinétique de rotation la plus faible. Ses caractéristiques aérodynamiques sont étudiées afin de réduire sa traînée aérodynamique ;
- des *rotors* qui fournissent la force nécessaire à l'avancement et la force de sustentations qui permet à l'hélicoptère de décoller et de se maintenir à une certaine hauteur. On distingue deux types de configurations de rotors: la configuration à rotor principal avec ou sans rotor de queue qui définit l'*hélicoptère standard* et la configuration à deux, trois ou quatre rotors. Le rotor principal est l'élément le plus influent sur la dynamique de vol de l'hélicoptère. Ce rotor fournit la poussée nécessaire permettant à l'hélicoptère de se déplacer.

Il est constitué d'une voilure (ensemble des pales et du moyeu), d'un mât et d'un plateau cyclique. Le rotor de queue assure la commande du lacet en contrôlant la quantité de poussée produite par les pales.

- d'un *moteur* qui fournit le couple nécessaire pour procéder à la rotation du rotor principal et du rotor de queue. Il existe au moins trois types de moteurs : thermique, électrique ou à turbine. Le choix de ces moteurs s'effectue en fonction du type de mission à réaliser.

- de la *dérive* qui est une aile placée verticalement à l'arrière de la poutre de queue.

Elle contre l'influence du rotor principal qui fait tourner l'appareil dans le sens contraire de sa rotation, assure la stabilité directionnelle de l'appareil et supplée à la fonction anti-coupe du rotor de queue ;

- de l'*empennage horizontal* qui est composé des ailerons horizontaux. Son objectif est de réduire l'altitude à piquer de l'hélicoptère en vol d'avancement en créant une force de déportance vers le bas à l'arrière du centre de gravité.

- d'une *poutre de queue* ;

- d'un *réservoir d'énergie* ;

- et d'un *train d'atterrissage ou train à patin* pour faciliter les manœuvres.

Dans toute la suite, l'hélicoptère est considéré comme un *corps rigide* évoluant dans un espace tridimensionnel. Dans ce cas, le centre de masse de l'hélicoptère ne se trouve pas sur un axe de symétrie mais sur plusieurs systèmes de référence.

2.2.2 Modes de vol de l'hélicoptère

Suivant le fonctionnement aérodynamique et mécanique de l'hélicoptère, il exécute en principe trois sortes de vols [2.01]:

- le *vol stationnaire* (hover), l'hélicoptère étant immobile par rapport à l'air. Ce vol est réalisé lorsque l'hélicoptère reste à une certaine hauteur par rapport au sol en ayant une vitesse de translation pratiquement nulle. Dans ce mode de vol, l'hélicoptère a la liberté de faire des rotations autour de l'axe E_z . Le vol stationnaire est obtenu lorsque la valeur de la force sustentrice et la valeur de la force de pesanteur sont égales et opposées, c'est à dire quand la portance générée par le rotor s'oppose exactement au poids de l'appareil.

En montée verticale et après avoir franchi le seuil définissant l'effet du sol, l'hélicoptère peut rester en vol stationnaire. Dans ce cas, la force de sustentation doit équilibrer le poids mg de l'hélicoptère qui est la force de trainée D_{vi} sur le fuselage créé par la vitesse induite du rotor principal. Cette force de sustentation correspond à une force de poussée T_M qui est orientée normalement dans la direction négative de l'axe z .

- le *vol vertical* ou *palier* (ascendant ou descendant). Dans le mode de vol vertical, la résultante de deux forces, force aérodynamique et la force totale sont deux forces ayant la même direction mais sont de sens opposés. Le vol est dit ascendant ou descendant suivant que l'effet aérodynamique est supérieur ou inférieur au poids de l'appareil.

Ce mode de vol commence avec l'hélicoptère dans l'effet de sol (DES). Ensuite, le décollage vertical du système peut avoir lieu et le système évolue en mode de montée. Le mode de descente verticale précède l'atterrissage. En absence de perturbation la force de poussée est toujours verticale et en montée elle est supérieure à la somme du poids de l'hélicoptère et de la force de trainée sur le fuselage tandis qu'en descente elle sera inférieure à cette somme.

- le *vol de translation* (horizontal ou incliné). Le vol de translation correspond à tout mouvement d'avancement, en arrière ou sur le côté. Nous considérons que ce mode aura lieu dans des conditions HES. Une inclinaison de la force de poussée par rapport à la verticale produit une composante horizontale connue comme force de traction qui assure la translation du système dans la direction de vol souhaitée tandis que la composante verticale de cette force de poussée doit maintenir le système à une hauteur constante par rapport au sol.

Pour la réalisation de ce déplacement, il faut incliner la force dynamique de l'appareil pour créer une force de traction verticale, latérale ou les deux. On distingue trois types de classement de vol de translation :

- ✓ Les translations verticales. Elles sont définies quand l'hélicoptère se déplace dans deux directions simultanément dans les plans $E_x E_z$ ou $E_y E_z$;
- ✓ Les translations horizontales. Elles sont définies quand l'hélicoptère se déplace dans deux directions simultanément dans le plan xy ou dans les directions E_x ou E_y ;
- ✓ La translation spatiale. Elle est développée dans l'espace $E_x E_y E_z$ suivant les trois directions de déplacement en translation.

2.2.3 Fonctionnement de l'hélicoptère

Un hélicoptère est un aéronef à voilure tournante qui vole grâce à des pales de dimensions différentes, placées respectivement sur le sommet et en bout de queue de l'appareil. Les pales les plus longues sont fixées sur un rotor et sont entraînées en rotation par un moteur. Elles génèrent une force aérodynamique, appelée portance, qui soulève l'appareil et le maintient en l'air.

Pour compenser les effets gyroscopiques induits par la rotation des pales, le rotor stabilise l'hélicoptère en l'orientant suivant la direction désirée.

Dans le poste de pilotage contiennent plusieurs commandes pour faire varier la poussée et l'orientation de l'appareil, en modifiant les angles de pales, afin d'accélérer, ralentir, descendre ou changer de direction.

2.2.4 Applications de l'hélicoptère

Les applications des hélicoptères sont des missions de reconnaissance militaires, de destruction de cibles, à de l'acquisition des données ou de la photographie des objectifs militaires précis au moyen d'une caméra et dans le domaine civil tel que la surveillance du trafic routier, la récolte des données météorologiques, la prévention des incendies de forêts, la recherche rapide dans un très grand secteur pour localiser les victimes d'accident, la localisation ou l'identification des activités suspectes avec une détection visuelle efficace des personnes impliquées, l'inspection des grandes structures (barrages ou ponts à coûts faibles) après cyclone ou tremblement de terre, la construction des cartes topographiques de haute résolution, la mission sur plate-forme off-shore, la photographie des images de très haute résolution en cinématographie, mission de poursuites de voleurs de bovidés...

Définition 2.02

L'*hélicoptère idéal* est un hélicoptère capable de vol à grande vitesse d'avancement (de quelques km à plusieurs centaines de km) et aussi capable de vol stationnaire avec une grande manœuvrabilité dans les espaces confinés et aussi capable d'effectuer des missions de grandes portées.

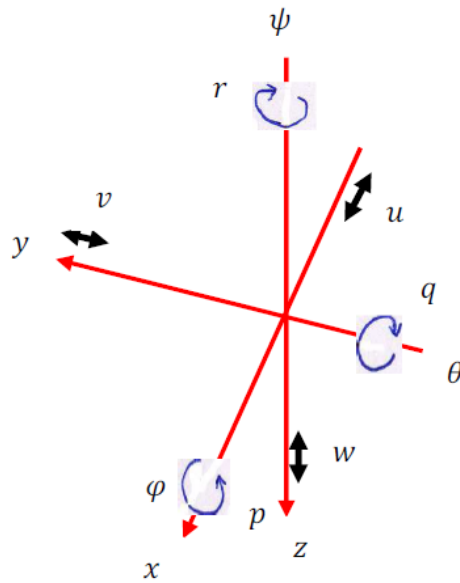


Figure 2.02 : Hélicoptère et ses six degrés de liberté

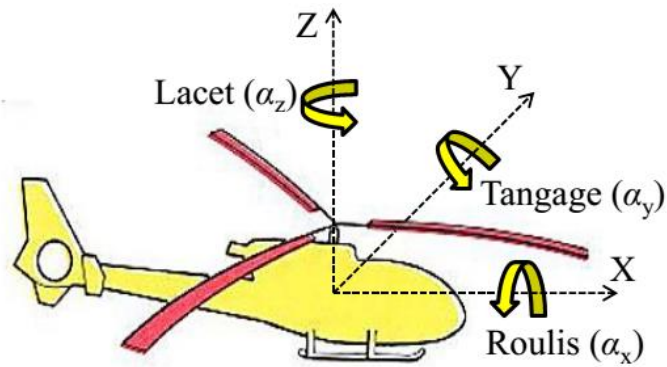


Figure 2.03 : Définition des 6 degrés de liberté d'un hélicoptère

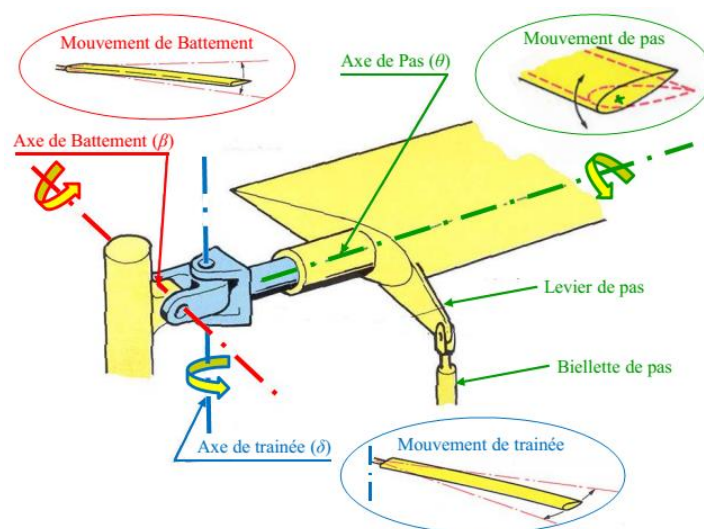


Figure 2.04 : Définition des 3 degrés de liberté d'une pale d'hélicoptère

Définition 2.03 :

L'hélicoptère standard est un aéronef ayant une configuration à un rotor principal et à un rotor de queue. Le rotor principal produit la poussée verticale par la force de sustentation. L'hélicoptère standard peut accélérer dans deux directions, longitudinalement et latéralement si on incline le vecteur de portance.

Un hélicoptère illustré par la figure 2.02 peut être étudié comme un appareil avec six degrés de liberté (DOF: Degree Of Freedom) qui est sujet à des contraintes.

- Sa position change le long de trois axes de coordonnées suivantes : l'axe longitudinal x , l'axe latéral et l'axe vertical z ;
- Son attitude est décrite par les trois angles d'Euler suivants : l'angle de tangage θ , l'angle de roulis ϕ et l'angle de lacet ψ .

2.3 Description des commandes

Il existe une large variété d'aéronefs à voilure tournante. Dans ce document, on s'intéresse uniquement à la formule classique, composée d'un rotor principal, situé au-dessus du fuselage. La figure 2.05 schématise un hélicoptère classique et son cockpit. Pour le piloter, on utilise quatre commandes pilote :

-  le manche collectif, qui s'actionne verticalement ;
-  le manche cyclique, qui s'actionne longitudinalement (avant-arrière) et latéralement (droite-gauche).
-  le palonnier qui est un couple de pédales. Le manche collectif et le manche cyclique permettent de contrôler le rotor principal. Le palonnier permet de contrôler le rotor arrière. Le tableau 2.01 récapitule les commandes disponibles.

Paramètres	Description
DDZ	Manche collectif
DDL	Manche cyclique latéral
DD	Manche cyclique longitudinal
DDN	Palonnier

Tableau 2.01 : Description des commandes disponibles pour un pilote dans un hélicoptère

En première approche, le pilotage d'un hélicoptère s'effectue de la manière suivante :

- ✚ Le manche collectif (DDZ) permet de contrôler la vitesse verticale (w) ;
- ✚ Le manche cyclique latéral (DDL) permet de contrôler les mouvements de roulis (p, φ) ;
- ✚ Le manche cyclique longitudinal (DDM) permet de contrôler les mouvements de tangage (q, θ) ;
- ✚ Le palonnier (DDN) permet de contrôler le cap (r, ψ).

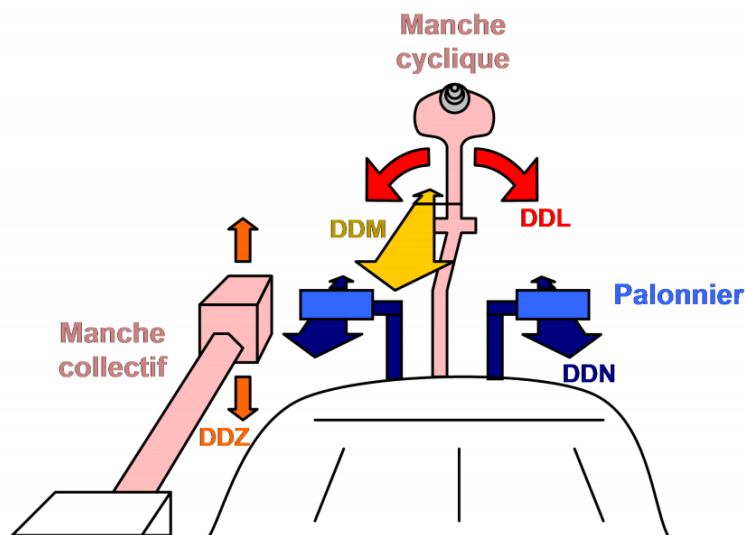


Figure 2.05 : Poste de pilotage d'un hélicoptère

Un hélicoptère (haut) et son poste de pilotage (bas) schématisés. Le collectif et le cyclique permettent de contrôler le rotor principal (rouge clair). Le palonnier permet de contrôler le rotor arrière (bleu clair). On pilote l'axe vertical grâce au collectif (orange), le roulis grâce au cyclique latéral (rouge), le tangage grâce au cyclique longitudinal (jaune) et le lacet grâce au palonnier (bleu).

Monter : pour prendre de l'altitude (w), le pilote tire sur le manche du collectif DDZ. En effet, cela aura pour effet d'augmenter la valeur de la portance, la force de sustentation de l'hélicoptère. C'est cette force qui permet de contrer le poids de l'hélicoptère pour qu'il puisse voler. On dit qu'on « tire » sur le manche collectif pour « prendre de l'altitude ».

Avancer : pour avancer (u), le pilote doit d'abord pousser le cyclique longitudinal vers l'avant (DDM). Cela a pour effet d'incliner l'hélicoptère vers l'avant (q, θ). On dit qu'on « pousse » sur le cyclique longitudinal pour « prendre du tangage » (ou « prendre de l'assiette»). Cette inclinaison oriente la portance vers l'avant. Ainsi l'hélicoptère avance. Par contre, si la portance est orientée vers l'avant, la composante verticale de la portance va diminuer. Il tire donc sur le manche collectif (DDZ) pour conserver l'altitude (w).

Se translater latéralement : pour se déplacer vers la droite (v), le pilote « pousse le cyclique latéral vers la droite » (DDL) et il « tire » sur le collectif (DDZ). Ceci aura pour effet de modifier l'orientation de la portance dans le plan latéral. Ainsi l'hélicoptère s'incline sur le côté (q, φ) en conservant l'altitude (w).

Changer de cap : pour s'orienter vers la droite (v), le pilote « appuie sur la palonnier droit » (DDN). Grâce à cela, la poussée du rotor de queue (à l'arrière) sera augmentée vers la droite. Ainsi, l'hélicoptère s'oriente vers la droite. On dit que l'hélicoptère « change de cap ». Ces exemples simples sont importants à comprendre car ils expliquent le plus simplement possible la démarche à suivre pour piloter l'hélicoptère. Bien évidemment, on ne se déclare pas pilote d'hélicoptère du jour au lendemain. En réalité, c'est un peu plus compliqué : l'hélicoptère est un système naturellement instable. En effet, sans aide au pilotage, si on « lâche » les commandes ne serait-ce qu'un bref instant, on peut rapidement perdre le contrôle de l'appareil.

2.4 Impact de l'instabilité de l'hélicoptère sur le pilotage

On va donc se pencher sur cette « instabilité » pour comprendre ce qui peut se passer.

L'instabilité : effectuons une comparaison entre conduire une voiture, rouler avec un vélo et piloter un hélicoptère, vis-à-vis de l'instabilité de chacun de ces systèmes. Prenons d'abord une voiture sur l'autoroute : si elle est lancée en ligne droite à 130 km/h, et qu'on lâche le volant pendant 2 ou 3 secondes, la voiture continuera sa route presque en ligne droite et déviara très peu de sa trajectoire.

Imaginons maintenant qu'on roule à vélo. Si on lâche le guidon pendant 1 ou 2 secondes, et qu'on ne sait pas maîtriser l'équilibre du vélo sans le guidon, alors on a de fortes risques de tomber assez rapidement. Pour un hélicoptère, c'est bien pire encore : si le pilote manque d'inattention pendant moins d'une seconde, l'hélicoptère peut rapidement se mettre à vriller à cause de son instabilité.

En n'exagérant même pas, on pourrait comparer la stabilité que possède un hélicoptère naturel à la stabilité d'une boule de pétanque qu'on essaye de faire tenir sur une boule de bowling : mathématiquement c'est possible, mais dans la réalité c'est impossible sans une intervention extérieure (notre main). Le pilote doit donc constamment agir sur les commandes pour maintenir son hélicoptère stable.

Ainsi, le pilotage d'un hélicoptère naturel est une tâche qui demande toute l'attention du pilote. Par ailleurs, ce n'est pas la seule difficulté que les pilotes rencontrent.

En plus de cette instabilité naturelle, un autre phénomène particulièrement important dans un hélicoptère et peu présent sur d'autres systèmes plus courants est le « couplage aérodynamique » : ce phénomène complexifie d'autant plus le pilotage de ce type d'appareil.

2.5 Impact de l'amplitude de fonctionnement des actionneurs sur les saturations et sur le pilotage

L'orientation des forces créées par le rotor principal et le rotor arrière est possible grâce à un ensemble de vérins qui agissent sur les pales et leurs inclinaisons : ce sont ces vérins qui sont contrôlés par les commandes pilotes sur un hélicoptère naturel. Ces vérins ont une amplitude de fonctionnement donnée.

Si un vérin est entièrement déployé et que l'action du pilote se poursuit au-delà, on dit que le vérin arrive en « bout de course ». On dit aussi que « l'actionneur sature ». Sur un hélicoptère naturel, cela se traduit par le fait que le manche « bloque ».

Le souci c'est que si, à cause de l'instabilité, du couplage, de la vitesse, ou de tout autre problème le pilote a besoin d'utiliser plus de puissance, alors ce phénomène l'en empêchera. Cela peut engendrer une perte de contrôle radicale. En effet, si un vérin sature, alors il va y avoir une perte de portance dans une direction donnée, ce qui peut empêcher l'hélicoptère d'effectuer les mouvements désirés par le pilote. Par exemple, si le pilote souhaite conserver le cap à haute vitesse et que les vérins associés au maintien de cap saturent, alors l'hélicoptère peut perdre du cap, à haute vitesse, très difficile à rattraper : dans un tel cas, l'accident fatal n'est plus très loin. Ainsi, une des conditions indispensables à la certification des aides au pilotage est la non-saturation des actionneurs lors des vols envisagés.

C'est pourquoi l'automaticien doit prendre en compte ce phénomène lors de la conception de ses lois de commande. Par ailleurs, plus le système est couplé, et/ou plus le système est instable, alors plus les saturations sont critiques pour la sécurité des vols.

Un hélicoptère naturel est donc un système :

1. naturellement très instable
2. fortement couplé
3. présentant de sérieux risques de saturations des actionneurs

Ces trois points sont les causes principales - d'origines physique, mécanique et aérodynamique qui font qu'un hélicoptère naturel est difficile à piloter. Pour aider le pilote, des techniques d'aide au pilotage ont été mises en place. Dans cette thèse, on s'intéresse aux aides aux pilotages de type lois de commande uniquement. Ces lois ont pour objectif de simplifier la tâche de pilotage.

En effet, ce type d'aide peut apporter stabilisation, découplage et prise en compte des saturations des actionneurs. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'avoir un modèle de mécanique du vol de l'hélicoptère.

2.6 Equations de base du mouvement de l'hélicoptère

2.6.1 Représentation de l'attitude de l'hélicoptère

2.6.1.1 Système inertiel

Ce paragraphe présente tout d'abord les outils de représentation d'attitude, c'est-à-dire l'orientation d'un objet dans l'espace. Pour analyser le mouvement d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de définir le système de coordonnées inertiel [2.01] [2.02].

Définition 2.04:

On appelle système inertiel, le système de coordonnées NED (North-East-Down) défini à partir d'un plan tangent à la surface de la terre où les trois vecteurs unitaires coïncident respectivement avec les directions Nord-Est et la pesanteur.

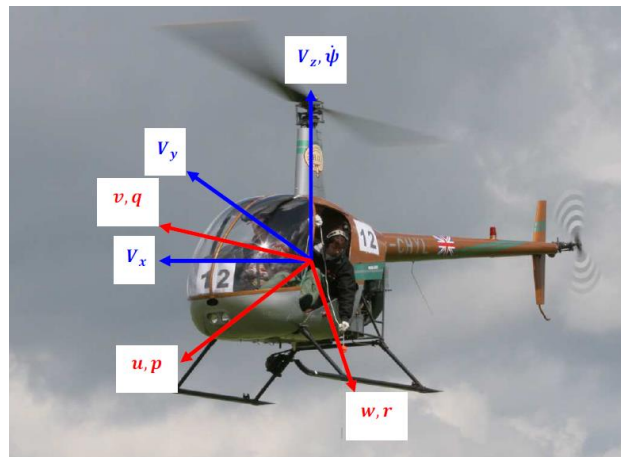


Figure 2.06 : Système de coordination de corps fixe

■ Le mouvement d'équations de base des hélicoptères est la dérivation des équations respectives à l'égard du cadre de référence du corps fixe qui est attaché à l'hélicoptère, ainsi que la position et l'orientation de l'hélicoptère relative au cadre fixe de la Terre-inertiel. Ces dérivées du mouvement sont utilisées afin de formuler la force totale et le couple total sous l'hypothèse d'une représentation du rotor comme étant un système complètement linéaire.

- Le cadre de la Terre-fixe d'inertie rend l'analyse pratique depuis les moments d'inertie et les produits variés selon le temps. Ce n'est pas le cas quand un cadre de référence du corps fixe est considéré, où les moments et les produits d'inertie sont constants.

Le principal objectif des problèmes de modélisation du mouvement d'équations d'un hélicoptère est de l'identifier à un modèle à six degrés de liberté grâce aux lois de la physique.

2.6.1.2 Repères et systèmes de coordonnées du corps fixe

Les repères inertiels et liés au corps présentés dans ce paragraphe sont ceux couramment utilisés en mécanique du vol. Nous définissons les deux repères suivants (voir figure 2.07) :

- Le *repère inertiel E* lié à la terre (Galiléen) où la première loi de Newton s'applique. C'est un repère orthonormé lié à un point de référence O à la surface de la Terre appelé l'origine.

Au repère E est associée la base canonique $\{x', y', z'\}$ où par convention [2.02]:

- $\{x'\}$ pointe vers le Nord;
- $\{y'\}$ pointe vers l'Est;
- $\{z'\}$ pointe vers le centre de la Terre.

- Le *repère mobile B* lié au corps dont l'origine C du cadre de référence de l'organisme fixe C_{xyz} est confondu avec le centre de gravité CG de l'hélicoptère. Au repère mobile B est associée la base canonique $\{I, J, K\}$ ou par convention $\{I\}$ est l'axe du roulis, pointe vers l'avant de l'appareil, $\{J\}$ est l'axe de tangage, orienté à sa droite, $\{K\}$ est l'axe de lacet de l'hélicoptère, dirigé vers le bas ;

- Le plan C_{xz} coïncide avec le plan de symétrie de l'hélicoptère avec les axes C_x et C_z pointant respectivement vers l'avant et vers le bas ;

- L'axe C_y est perpendiculaire au plan de symétrie dans la direction de l'aile droite. Le cadre de référence du corps fixe C_{xyz} est un système droitier.

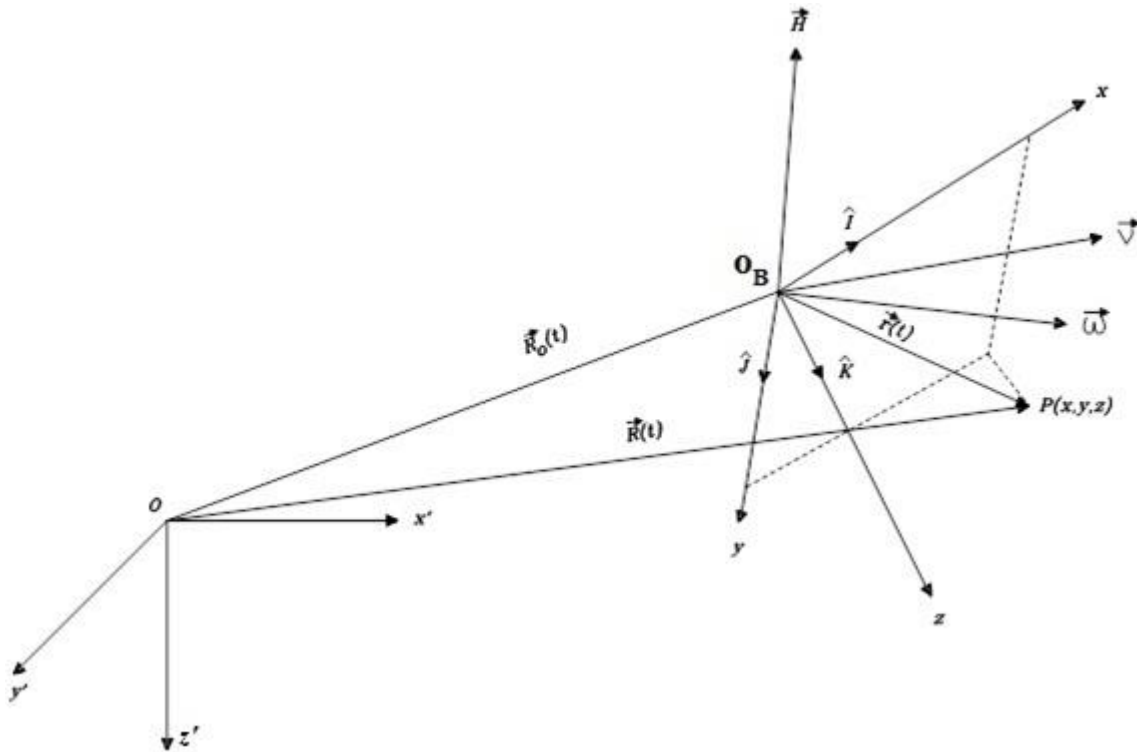


Figure 2.07 : Repères E et B et systèmes d'axes de la mécanique du vol de l'hélicoptère relativement à l'armature terre-fixe

2.6.2 Paramètres cinématiques, cinétiques et d'efforts

2.6.2.1 Paramètres cinématiques

Les paramètres cinématiques constituent l'état du système. L'état comprend quatre vecteurs de trois éléments chacun définissant respectivement la position notée $p(t)$ et la vitesse de centre de gravité (CG) notée $\eta(t)$ ainsi que l'orientation notée $v(t)$ et la vitesse angulaire de l'appareil notée $\omega(t)$. Le CG est centre instantané de rotation [2.03].

Ces quatre paramètres sont donc définis comme suit :

- $p(t) = [x \quad y \quad z]^T$ est le vecteur position du CG par rapport à E et exprimé dans E ,
- $\eta(t) = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$ est le vecteur des angles d'Euler représentant la position angulaire du repère mobile B par rapport à E et exprimé dans E ,
- $v(t) = [u \quad v \quad w]^T$ est le vecteur de la vitesse linéaire du CG par rapport à E exprimé dans B .
- $\omega(t) = [p \quad q \quad r]^T$ est le vecteur de la vitesse de rotation instantané entre E et B et exprimé dans B .

2.6.2.2 Paramètres cinétiques

Les paramètres cinétiques qui caractérisent l'hélicoptère, sont :

- sa *masse* m de l'hélicoptère ;
- le *centre de gravité* (CG) appelé encore *centrage* de l'appareil noté G qui est le point d'application des résultantes de force et de moment ;
- la *matrice d'inertie* I exprimé au point G dans B qui quantifie la résistance de l'appareil à sa mise en rotation.

Soit $\vec{H} = h_x \hat{i} + h_y \hat{j} + h_z \hat{k}$ le vecteur du moment cinétique de l'hélicoptère exprimé dans l'ensemble du vecteur unitaire du cadre du corps fixe.

En appliquant la deuxième Loi de Newton dans tous les moments qui agissent sur le CG, on obtient les composantes du moment angulaire du cadre de référence du corps fixe qui sont exprimées en fonction des moments et produits d'inertie :

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}p - I_{xy}q - I_{xz}r \\ H_y &= I_{yx}p + I_{yy}q - I_{yz}r \\ H_z &= I_{zx}p - I_{zy}q + I_{zz}r \end{aligned} \quad (2.01)$$

D'après les équations (2.01), la *matrice d'inertie* a pour expression :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.02)$$

Où les éléments diagonaux de la matrice d'inertie I sont les moments d'inertie et les autres éléments sont les produits d'inertie qui quantifie une asymétrie géométrique ou massique de l'appareil. D'après les propriétés de symétrie de l'appareil, la matrice d'inertie est peut être approximée par la matrice diagonale de I , Ainsi les produits d'inertie s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum dm(y^2 + z^2), \\ I_{yy} &= \sum dm(x^2 + z^2), \\ I_{zz} &= \sum dm(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

Soient :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum dmx y = I_{yx}, \\ I_{xz} &= \sum dmx z = I_{zx}, \\ I_{yz} &= \sum dmy z = I_{zy} \end{aligned}$$

Les sommes ci-dessus s'appliquent à toutes les masses élémentaires de l'hélicoptère. On suppose que l'appareil est mécaniquement bien équilibré et que C_{xz} est un plan de symétrie de l'hélicoptère, ce qui engendre l'annulation des éléments non-diagonaux de I . On déduit alors que :

$$I_{xy} = I_{yx} = 0 \text{ et } I_{yz} = I_{zy} = 0$$

C'est-à-dire la matrice d'inertie approximée s'écrit à :

$$\tilde{I} = \text{diag} (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})$$

2.6.2.3 Paramètres d'efforts

Les paramètres d'efforts sont les trois forces et les trois moments qui interviennent dans les dynamiques de translation et de rotation de l'hélicoptère. Le développement de ces efforts (forces et moments) constitue le modèle aérodynamique de l'appareil.

Nous notons alors :

- $F_f = [F_x \ F_y \ F_z]^T$ les trois composantes du *vecteur de force* exprimé dans B
- $M_m = [L \ M \ N]^T$ les trois composantes du *vecteur moment* exprimé dans B

Le vecteur force-moment FM des paramètres d'effort possède six composantes et est noté [2.03]:

$$FM = [F_x \ F_y \ F_z \ L \ M \ N]^T$$

2.6.3 Dynamique de translation

Il s'agit ici de déterminer la relation liant les forces F_x , F_y et F_z à l'accélération du CG. Pour cela, on exprime d'abord le vecteur vitesse de translation du centre de gravité dans le repère du corps, dérivée dans E et exprimé dans B . Ainsi, en se référant à la figure 3.68 et en notant $R_0(t)$ le vecteur entre les points O et G .

▪ Les concepts de base de l'analyse cinématique pour tourner les cadres sont utilisés pour calculer le mouvement d'équations. La première étape est de définir un cadre de référence de la Terre-fixe qui est un système droitier cartésien désigné par $Ox' y' z'$. L'hypothèse sous-jacente est que la terre soit fixe dans l'espace, alors que $Ox' y' z'$ est un cadre d'inertie.

▪ Dans la figure 2.03, $\vec{R}_0$ est le vecteur d'origine C relatif au cadre de référence de la Terre-fixe. L'ensemble des vecteurs unitaires du cadre de référence du corps fixe est notée par $\{\hat{I}, \hat{J}, \hat{K}\}$. Le point P est la position dans l'espace de masse d'élément dm de l'hélicoptère. Il est fixé rigidement au cadre de référence du corps fixe.

- La position vectrice de ce point P relatif au cadre de référence du corps fixe est notée par $\vec{r}$.
- Si les coordonnées de P relatif au cadre de référence du corps fixe sont (x, y, z) alors :

$$\vec{r} = x\hat{I} + y\hat{J} + z\hat{K} \quad (2.03)$$

- Si $\vec{R}(t)$ représente la vecteur-position de l'élément de masse dm relatif au cadre de référence de la Terre-fixe, alors :

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} \quad (2.04)$$

- La vitesse de masse d'élément relatif au P au système de référence de la Terre-fixe est donnée par :

$$\vec{v}_p = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_E = \left. \frac{d\vec{R}_O}{dt} \right|_E + \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_E \quad (2.05)$$

Lorsque $\left. \frac{d(o)}{dt} \right|_E$ désigne la dérivée temporelle d'un vecteur dans l'espace relatif au cadre de référence de la Terre-fixe.

$|_E$: Derivation de E.

- La dérivée de la position vectrice $\vec{R}_O$ relative au cadre de référence de la Terre-fixe est égale à la vitesse de la CG. L'équation de la vitesse linéaire $\vec{v}_l$ le long des axes du cadre de référence du corps fixe a donc pour expression :

$$\vec{v}_l = \left. \frac{d\vec{R}_O}{dt} \right|_E = u\hat{I} + v\hat{J} + w\hat{K} \quad (2.06)$$

- La vitesse angulaire du cadre du corps fixe du cadre de référence de la Terre-fixe a pour expression :

$$\vec{\omega} = p\hat{I} + q\hat{J} + r\hat{K}$$

Si on note le vecteur $\vec{r}$ la position de vecteur en rotation du cadre de référence du corps fixe, alors sa dérivée temporelle dans le cadre de référence de la Terre-fixe a pour expression :

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_E = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_B + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (2.07)$$

- Le terme $\frac{d\vec{r}}{dt}|_B$ traduit la dérivée temporelle de la position du vecteur $\vec{r}(t)$ relative au cadre de référence du corps fixe.
- En général, $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}|_B$ désigne la dérivée d'un vecteur venant d'un point de vue d'un observateur dans le cadre de référence du corps fixe.
- Depuis le point P qui est fixée rigidement au cadre de référence du corps fixe, cela donne que $\frac{d\vec{r}}{dt}|_B = \vec{0}$.
- Par conséquent, la vitesse d'élément de masse arbitraire de l'hélicoptère placée au point P est donnée par :

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{R}_o(t)}{dt}|_E + \vec{\omega} \wedge \vec{r}(t) \quad (2.08)$$

Puisque $r(t)$ ne varie pas au cours du temps dans le repère du corps, alors $\frac{d\vec{r}}{dt}|_E = 0$. Ainsi, la vitesse de l'hélicoptère $v_p(t)$ exprimé dans le repère B a pour expression :

$$v_p(t) = v_l(t) + \tilde{\omega}(t)r(t)$$

Où $\tilde{\omega}(t)$ est la matrice antisymétrique associée au vecteur $\omega(t)$, telle que :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

L'accélération du CG par rapport à E et exprimée dans B s'écrit alors :

$$a_{CG} = \dot{v}(t) + \tilde{\omega}(t)r(t)$$

Ou sous forme développée :

$$a_{CG} = (\dot{u}\hat{I} + \dot{v}\hat{J} + \dot{w}\hat{K}) + (u\dot{I} + v\dot{J} + w\dot{K}) \quad (2.09)$$

Ou encore :

$$a_{CG} = (\dot{u} - rv + qw)\hat{I} + (\dot{v} - pw + ru)\hat{J} + (\dot{w} - qu + pv)\hat{K} \quad (2.10)$$

Où :

$$a_{CG} = a_x\hat{I} + a_y\hat{J} + a_z\hat{K} \quad (2.11)$$

Avec des composantes :

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} - rv + qw - x(q^2 + r^2) + y(pq - \dot{r}) + z(pr + \dot{q}) \\ a_y &= \dot{v} - pw + ru - y(p^2 + r^2) + r(qr - \dot{p}) + x(pq + \dot{r}) \\ a_z &= \dot{w} - qu + pv - z(p^2 + r^2) + x(pr - \dot{q}) + y(qr + \dot{p}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

En appliquant la seconde loi de Newton $\sum F_f = M_a a_{CG}$, les relations liants les forces à l'accélération a_{CG} s'écrit :

$$M_a \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - M_a \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Ou sous forme développée :

$$\begin{aligned} X &= M_a(\dot{u} - rv + qw) \\ Y &= M_a(\dot{v} - pw + ru) \\ Z &= M_a(\dot{w} - qu + pv) \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.6.4 Dynamique de rotation

L'égalité du moment dynamique avec le moment des forces dans B s'écrit [2.04]:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} \Big|_E = \frac{d(I\omega)}{dt} \Big|_B + \omega \wedge I\omega = \frac{d(I\omega)}{dt} \Big|_B + \tilde{\omega}I\omega \quad (2.14)$$

La dynamique de rotation de l'appareil s'écrit alors :

$$I \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Ou sous forme développée :

$$\begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{p} - (I_{yy} - I_{zz})qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) \\ M &= I_{yy}\dot{q} - (I_{zz} - I_{xx})pr - I_{xz}(p^2 - r^2) \\ N &= I_{zz}\dot{r} - (I_{xx} - I_{yy})pq - I_{xz}(\dot{p} + rq) \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.6.5 Relations cinématiques

Nous allons représenter les relations de passage entre les repères inertiel E et mobile à travers la représentation des angles d'Euler, ceci pour les vitesses linéaires en angulaires de l'hélicoptère.

2.6.5.1 Groupes matriciels

Soit I_n la matrice identité de $R^{3 \times 3}$. On définit le groupe $O(3)$, ou groupe orthogonal, par:

$$O(3) = \{M \in R^{3 \times 3} | M^T M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$$