

2.9.4 Modélisation des équations des moments de l'hélicoptère

D'après l'équation (2.35) ci-dessous, nous pouvons écrire les équations des moments de l'hélicoptère [2.04]:

$$\begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{p} - (I_{yy} - I_{zz})qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) \\ M &= I_{yy}\dot{q} - (I_{zz} - I_{xx})pr - I_{xz}(p^2 - r^2) \\ N &= I_{zz}\dot{r} - (I_{xx} - I_{yy})pq - I_{xz}(\dot{p} + rq) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} + \frac{I_{xz}(pq((I_{xx} - I_{yy}) + rq + I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}^2 pq)}{I_{xx}^2 + I_{xx}I_{zz}} + pq \\ &\quad + \frac{I_{xz}(N - L)}{(I_{xx}^2 + I_{xx}I_{zz})} + L \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}} [(I_{zz} - I_{xx})pr - I_{xz}(p^2 - r^2)] + \frac{1}{I_{yy}} M \quad (2.37)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xz}(rq - I_{xy} - I_{zz}) - I_{xz}^2 pq + pq(I_{xx} - I_{yy})}{(I_{xz}^2 + I_{xx}I_{zz})} + \frac{N - I_{xz}^2 L}{(I_{xz}^2 + I_{xx}I_{zz})} \quad (2.38)$$

Avec:

- I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} représentent les moments d'inertie de l'hélicoptère autour des axes x, y et z ;
- I_{xz} est le produit d'inertie de l'aéronef.

2.9.5 Modélisation des équations cinématiques de l'hélicoptère

En utilisant l'équation (2.25), nous pouvons tirer les équations cinématiques de l'hélicoptère qui sont les suivantes [2.04]:

$$\dot{\phi} = p + q \sin\phi \tan\theta + r \cos\phi \tan\theta \quad (2.39)$$

$$\dot{\theta} = q \cos\phi - r \sin\phi \quad (2.40)$$

$$\dot{\psi} = q \sin\phi \sec\theta + r \cos\phi \sec\theta \quad (2.41)$$

2.9.6 Modélisation des équations de navigation de l'hélicoptère

En utilisant les équations (2.18), (2.20) et (2.22), nous pouvons tirer les équations de navigation de l'hélicoptère qui sont les suivantes [2.05] :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

2.9.7 Modélisation des forces extérieures

L'ensemble des composantes du vecteur force extérieure F_x, F_y et F_z le long des axes x, y, z s'écrit alors [2.04] :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \cos \gamma_s \frac{2C_x}{a_0 s} - \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \sin \gamma_s \frac{2C_z}{a_0 s} + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s S_P \bar{V}_F^2 C_{XF}(\alpha_F) \quad (2.43)$$

$$F_y = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \left(\frac{2C_y}{a_0 s} \right) + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_{FN}^2 S_{FN} C_{YFN}(\beta_{FN}) + \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 a_{0T} s_T (\pi R_T)^2 \left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T} s_T} \right) F_T + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S_s \bar{V}_F^2 C_{YS} \frac{V_A}{V_F} \quad (2.44)$$

$$F_z = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \left(\sin \gamma_s \left(\frac{2C_x}{a_0 s} \right) + \cos \gamma_s \left(\frac{2C_z}{a_0 s} \right) \right) + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_T^2 S_{TP} C_{ZTP}(\alpha_{TP}) + S_P \bar{V}_F^2 C_{ZF}(\alpha_F) \quad (2.45)$$

2.9.8 Modélisation des moments

L'ensemble des composantes du vecteur moment L, M, N de l'équation (2.35) le long des axes x, y, z axes s'écrit alors [2.05] :

$$L = \frac{-b}{2} K_\beta \beta_{1s} + h_R \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\frac{2C_y}{a_0 s} \right) \right) + h_T \cdot \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 a_{0T} s_T (\pi R_T)^2 \left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T} s_T} \right) F_T + h_{FN} \cdot \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_{FN}^2 S_{FN} C_{YFN}(\beta_{FN}) \quad (2.46)$$

$$M = \frac{-b}{2} K_\beta \beta_{1s} - h_R \cdot \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\cos \gamma_s \left(\frac{2C_x}{a_0 s} \right) - \sin \gamma_s \left(\frac{2C_z}{a_0 s} \right) \right) + x_{cg} \cdot \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\sin \gamma_s \left(\frac{2C_x}{a_0 s} \right) + \cos \gamma_s \left(\frac{2C_z}{a_0 s} \right) \right) + (l_{TP} + x_{cg}) \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_T^2 S_{TP} C_{ZTP}(\alpha_{TP}) + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S_P l_F \bar{V}_F^2 C_{MF}(\alpha_F) \quad (2.47)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \left(\frac{2C_Q}{a_0 s} + \left(\frac{2I_R}{b l_\beta} \right) \frac{\bar{\Omega}'}{\gamma} \right) - x_{cg} \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\frac{2C_y}{a_0 s} \right) \right) - (l_T + x_{cg}) \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 a_{0T} s_T (\pi R_T)^2 \left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T} s_T} \right) F_T - (l_{FN} + x_{cg}) \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_{FN}^2 S_{FN} C_{YFN}(\beta_{FN}) + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S_s l_F \bar{V}_F^2 C_{NF}(\beta_F) \quad (2.48)$$

Avec :

- ρ est la densité de l'air ;
- R est le rayon de la pale du rotor principal ;
- Ω la vitesse angulaire du rotor principal ;
- a_o la pente courbée de la lame du rotor de queue ;
- s la pente courbée de la lame du rotor principal ;
- C_x, C_y, C_z sont des coefficients de forces du rotor principal.

Ces coefficients sont donnés par la matrice de rotation suivante :

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_w & -\sin\Psi_w \\ \sin\Psi_w & \cos\Psi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xw} \\ C_{yw} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{2C_z}{a_0 s}\right) = -\left(\frac{2C_M}{a_0 s}\right) = -F_0^{(1)} \quad (2.50)$$

Avec :

- Ψ_w est l'angle de dérapage du rotor principal
- C_M le coefficient de la poussée du rotor principal.

2.10 Modèles d'état et d'observation de l'hélicoptère

Dans l'espace d'état, le modèle d'état de l'hélicoptère est représenté par l'équation différentielle matricielle suivante [2.02] [2.10] :

$$\dot{x} = F(x, u_c, t) \quad (2.51)$$

▪ Le vecteur d'état x est alors composé de quatre vecteurs d'état des sous-systèmes de l'hélicoptère définis comme suit :

$$x = [x_f \quad x_{rM} \quad x_{mr} \quad x_c]^T \quad (2.52)$$

▪ La *dynamique du fuselage* est décrite par un modèle de vecteur d'état x_f à neuf variables notées :

$$x_f = [u \quad w \quad q \quad \theta \quad v \quad p \quad \phi \quad r \quad \psi]^T \quad (2.53)$$

Les composantes du vecteur dérivé de la dynamique du fuselage s'écrit :

$$\dot{x}_f = [\dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{q} \quad \dot{\theta} \quad \dot{v} \quad \dot{p} \quad \dot{\phi} \quad \dot{r} \quad \dot{\psi}]^T \quad (2.54)$$

$$\dot{u} = rv - qw - g \sin\theta + X/M_a \quad (2.55)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos\theta \sin\phi + Z/M_a \quad (2.56)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{xy}} [(I_{zz} - I_{xx})pr - I_{xz}(p^2 - r^2)] + \frac{1}{I_{yy}} M \quad (2.57)$$

$$\dot{\theta} = q \cos\phi - r \sin\phi \quad (2.58)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos\theta \sin\phi + \frac{Y}{M_a} \quad (2.59)$$

$$\dot{p} = \frac{(I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} + \frac{I_{xz}(pq((I_{xx} - I_{yy}) + rq + I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}^2 pq)}{I_{xx}^2 + I_{xx}I_{zz}} + pq \quad (2.60)$$

$$+ \frac{I_{xz}(N - L)}{(I_{xx}^2 + I_{xx}I_{zz})} + L$$

$$\dot{\phi} = p + q \sin\phi \tan\theta + r \cos\phi \tan\theta \quad (2.61)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xz}(rq - I_{xy} - I_{zz}) - I_{xz}^2 pq + pq(I_{xx} - I_{yy})}{(I_{xz}^2 + I_{xx}I_{zz})} + \frac{N - I_{xz}^2 L}{(I_{xz}^2 + I_{xx}I_{zz})} \quad (2.62)$$

$$\dot{\psi} = q \sin\phi \sec\theta + r \cos\phi \sec\theta = r \quad (2.63)$$

La dynamique du rotor principal est décrite par un modèle de vecteur d'état x_{rM} à trois composantes des angles de battement notée :

♣

$$x_{rM} = [\beta_0 \quad \beta_{1c} \quad \beta_{1s}]^T$$

$$K \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} = F \quad (2.64)$$

Où K et F ont pour expression :

$$\beta_0 = -\frac{M_\beta}{I_\beta \Omega^2} + \gamma \left[\frac{\theta_0}{8} (1 + \mu^2) + \frac{\theta_t}{10} \left(1 + \frac{5}{6} \mu^2\right) + \frac{\lambda}{6} - \frac{\mu}{6} \theta_{1s} \right] \quad (2.65)$$

$$\beta_{1s} = \frac{\frac{\mu}{6} \beta_0 + \frac{1}{8} (1 + \mu^2) \theta_{1c}}{\frac{1}{8} \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)} \quad (2.66)$$

$$\beta_{1c} = \frac{\frac{\mu}{3} \theta_0 + \frac{\mu}{4} \theta_t + \frac{\mu}{4} \lambda - \frac{1}{8} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2\right) \theta_{1s}}{\frac{1}{8} \left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right)} \quad (2.67)$$

En vol stationnaire, on a approximativement :

$$\beta_{1s} \equiv \theta_{1c} \quad (2.68)$$

$$\beta_{1c} \equiv -\theta_{1s} \quad (2.69)$$

Les angles de battement du rotor principal sont régis par deux équations différentielles du second ordre de la forme :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_{1c} \\ \ddot{\beta}_{1s} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 2 \\ -2 & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_{1c} \\ \dot{\beta}_{1s} \end{bmatrix} \\ & + \Omega^2 \begin{bmatrix} P^2 - 1 + \frac{\gamma K_1 \mu^2}{16} & \frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right) \\ -\frac{\gamma}{8} \left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right) & P^2 - 1 + \frac{3}{16} \gamma K_1 \mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix} \\ & = \Omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\gamma \mu}{6} \\ \frac{\gamma K_1 \mu}{3} \end{bmatrix} \beta_{0p} + \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\gamma \mu}{3} & -\frac{\gamma \mu}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_t \end{bmatrix} \\ & + \Omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma \mu}{4} \end{bmatrix} \lambda + \Omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1c} \\ \theta_{1s} \end{bmatrix} \\ & + \Omega \begin{bmatrix} -2 & -\frac{\gamma}{8} \\ -\frac{\gamma}{8} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_H \cos \beta_w + q_H \sin \beta_w \\ p_H \sin \beta_w + q_H \cos \beta_w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Le vecteur dérivé des angles de battement a pour expression :

$$\dot{x}_{rM} = [\dot{\beta}_0 \quad \dot{\beta}_{1c} \quad \dot{\beta}_{1s}]^T \quad (2.71)$$

♣

La *dynamique de la combinaison moteur-rotor* est décrite par un modèle de vecteur d'état x_{mr} à trois composantes notées :

$$x_{mr} = [\dot{\Omega} \quad Q_E \quad \dot{Q}_E]^T \quad (2.72)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{I_R} (Q_E - Q_R - G_T Q_T) + \dot{r} \quad (2.73)$$

$$Q_E = -K_3 (\Omega - \Omega_i) \quad (2.74)$$

$$\tau_{e3} \dot{Q}_E + Q_E = K_{e2} (\tau_{e2} \dot{\omega}_f + \omega_f) \quad (2.75)$$

♣

La dynamique de l'action de contrôle du rotor est décrite par un modèle de vecteur d'état x_p à quatre composantes notées :

$$x_{cr} = [\theta_0 \quad \theta_{1s} \quad \theta_{1c} \quad \theta_{0T}]^T \quad (2.76)$$

$$\theta_0 = \frac{(g_{c0} + g_{c1}\eta_c) + (k_g \Delta n)}{1 + \tau_{c4}s} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1s} &= \left[\frac{g_{1s0} + g_{1s1}\eta_{1s} + g_{sc0} + g_{sc1}\eta_c + k_\theta \theta + k_q q + k_{1s}(\eta_{1s} - \eta_{1s0})}{1 + \tau_{c1}s} \right] \cos\Psi_F \\ &+ \left[\frac{g_{1c0} + g_{1c1}\eta_{1c} + k_\phi \phi + k_P P + k_{1c}(\eta_{1c} - \eta_{1c0})}{1 + \tau_{c2}s} \right] \sin\Psi_F \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1c} &= \left[\frac{g_{1c0} + g_{1c1}\eta_{1c} + k_\phi \phi + k_P P + k_{1c}(\eta_{1c} - \eta_{1c0})}{1 + \tau_{c2}s} \right] \cos\Psi_F \\ &- \left[\frac{g_{1s0} + g_{1s1}\eta_{1s} + g_{sc0} + g_{sc1}\eta_c + k_\theta \theta + k_q q + k_{1s}(\eta_{1s} - \eta_{1s0})}{1 + \tau_{c1}s} \right] \sin\Psi_F \\ &= \left[\frac{g_{1c0} + g_{1c1}\eta_{1c} + k_\phi \phi + k_P P + k_{1c}(\eta_{1c} - \eta_{1c0})}{1 + \tau_{c2}s} \right] \cos\Psi_F \\ &- \left[\frac{g_{1s0} + g_{1s1}\eta_{1s} + g_{sc0} + g_{sc1}\eta_c + k_\theta \theta + k_q q + k_{1s}(\eta_{1s} - \eta_{1s0})}{1 + \tau_{c1}s} \right] \sin\Psi_F \end{aligned} \quad (2.79)$$

◆

- Le vecteur d'entrée de control u_c est décrit par un modèle à un vecteur d'état composé de quatre composantes notées :

$$u_c = [\eta_{1s} \quad \eta_{1c} \quad \eta_p \quad \eta_c]^T \quad (2.80)$$

- Le vecteur de sortie y_h de l'hélicoptère est modélisé par une équation affine de la forme suivante :

$$y_h = f(x_h, u_c, t) \quad (2.81)$$

Ce vecteur de sortie y_h est décrit par un système d'équations à quatre composantes de l'hélicoptère. En supposant que le système est propre ($D = 0$), ce vecteur est représenté par la relation suivante :

$$y_h = [u \quad v \quad w \quad \psi]^T \quad (2.82)$$

Avec :

$$u = q + p + \phi \quad (2.83)$$

$$v = w + \phi + r + \psi \quad (2.84)$$

$$w = u + p \quad (2.85)$$

$$\psi = r \quad (2.86)$$

2.11 Linéarisation de l'hélicoptère autour d'un point de fonctionnement

2.11.1 Hypothèses de linéarisation

Les équations décrivant le mouvement d'hélicoptères ont régies par des équations différentielles non linéaires de la forme [2.10] :

$$\dot{x} = Ax + Bu_c + f_a(t) \quad (2.87)$$

La fonction vectorielle $f_a(t)$ inclut le modèle additionnel de la représentation atmosphérique et des bruits que nous négligeons dans ce chapitre.

En linéarisant les équations du mouvement de l'hélicoptère, sous des hypothèses spécifiques, on simplifie les calculs et fournit une description précise sur le comportement de l'hélicoptère.

- Hypothèse 1 :

- La région de flux inversée est ignorée où l'air frappe le bord de fuite de la partie postérieure de la pale plutôt que le bord d'attaque de la partie inférieure de la pale ;
- Les vitesses induites sont uniformes ;
- Les cordes des pales sont supposées constantes ;
- Les caractéristiques de poussée de profil sont linéaires et libres des effets de sustentation et de compressibilité ;
- Le battement vertical des pales est constitué d'un angle de conicité et d'un battement de premier harmonique. Les termes des harmoniques supérieures sont négligeables ;
- Le gradient de portance est supposé constant ;
- Nous supposons que l'évolution du vol en palier et du vol stationnaire est effectuée hors de l'effet de sol ;
- La force de poussée du fuselage est négligée car elle est très faible ;
- Les mouvements de battement du rotor des pales et du rotor de queue sont considérés négligeables car ils sont plus faibles que celui du rotor principal ;
- Le vol de l'hélicoptère est supposé effectuer dans des conditions d'une Atmosphère Standard (une Atmosphère Standard au niveau de la mer concerne une température de 15°C décroissant de -2°C par mille pieds et une pression de $101\,325\text{ kPa}$) ;
- Les perturbations produites par le vent, par exemple celles des rafales sont négligées initialement.

• Hypothèse 2 :

Une linéarisation du modèle de l'hélicoptère est basée sur les petites variations autour d'un point de fonctionnement. Pour des petits mouvements, les termes linéaires seront dominants et une approximation linéaire pourra être faite. Dans ce cas, nous supposons les hypothèses suivantes autour de la condition générale d'équilibre au voisinage de 0 ayant pour conditions initiales :

$$V_o = w_o = p_o = q_o = r_o = \phi_o = L_o = M_o = N_o = 0 \quad (2.88)$$

♣

Ainsi pour les fonctions trigonométriques lors des petites variations, nous supposons par exemple pour les variations de $\delta\theta$:

$$\cos \delta\theta = 1 \text{ et } \sin \delta\theta = \delta\theta \quad (2.89)$$

$$\sin(\theta_0 + \delta\theta) = \sin \theta_0 \cos \delta\theta + \cos \theta_0 \sin \delta\theta = \delta\theta \quad (2.90)$$

$$\cos(\theta_0 + \delta\theta) = \cos \theta_0 \cos \delta\theta - \sin \theta_0 \sin \delta\theta = 1 \quad (2.91)$$

En se basant sur les mêmes hypothèses, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} m\delta\dot{u} &= -mg\delta\theta + X_0 + \delta X \\ m\delta\dot{v} &= mg\delta\phi + Y_0 + \delta Y \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} m\delta\dot{w} &= mg + Z_0 + \delta Z \\ \mathfrak{I}_{xx}\delta\dot{p} &= L_0 + \delta L \\ \mathfrak{I}_{yy}\delta\dot{q} &= M_0 + \delta M \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{xx}\delta\dot{r} &= N_0 + \delta N \\ \delta\dot{\theta} &= \delta q \\ \delta\dot{\phi} &= \delta p \\ \delta\dot{\psi} &= \delta r \end{aligned} \quad (2.94)$$

$\delta X, \delta Y, \delta Z$ sont les valeurs lors des faibles variations des forces externes aérodynamiques et $\delta L, \delta M, \delta N$ sont les valeurs des faibles variations des moments autour du point CG de l'hélicoptère.

On obtient alors :

$$\delta\dot{u} = -g \delta\theta + \delta X/m \quad (2.95)$$

$$\delta\dot{v} = g \delta\phi + \delta Y/m \quad (2.96)$$

$$\delta\dot{w} = \delta Z/m \quad (2.97)$$

Par conséquent, l'approximation des fonctions trigonométriques s'écrit :

$$\sin(\theta_o + \delta\theta) = \sin \theta_o \cos \delta\theta + \cos \theta_o \sin \delta\theta = \sin \theta_o + \theta \cos \theta_o \quad (2.98)$$

$$\cos(\theta_o + \delta\theta) = \cos \theta_o \cos \theta - \sin \theta_o \sin \theta = \cos \theta_o - \theta \sin \theta_o \quad (2.99)$$

$$\hat{I} = \hat{I}_3$$

$$\hat{J} = \cos \phi \hat{J}_3 + \sin \phi \hat{K}_3 \quad (2.100)$$

$$\hat{K} = -\sin \phi \hat{J}_3 + \cos \phi \hat{K}_3$$

$$\hat{n} = d\phi \hat{I} + d\theta \hat{J}_3 + d\psi \hat{K}_2 \quad (2.101)$$

Pour de faibles variations, les substitutions dans (2.100) et (2.101) donnent le résultat des équations suivantes :

$$\begin{aligned} X_o + \Delta X - mg(\sin \theta_o + \theta \cos \theta_o) &= m\ddot{u} \\ Y_o + \Delta Y + mg\phi \cos \theta_o &= m(\dot{v} + u_o r) \\ Z_o + \Delta Z + mg(\cos \theta_o - \theta \sin \theta_o) &= m(\dot{w} - u_o q) \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} L_o + \Delta L &= I_{xx}p - I_{xz}\dot{r} \\ M_o + \Delta M &= I_{yy}\dot{q} \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$N_o + \Delta N = I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p}$$

$$\dot{v} = q$$

$$\dot{\phi} = p + r \tan \theta_o \quad (2.104)$$

$$\dot{\psi} = r \sec \theta_o$$

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_o$$

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= (u_o + u) \cos \theta_o - u_o \theta \sin \theta_o + w \sin \theta_o \\ \frac{dy'}{dt} &= u_o \psi \cos \theta_o + r \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\frac{dz'}{dt} = -(u_o + u) \sin \theta_o - u_o \theta \cos \theta_o + w \cos \theta_o$$

Dans les équations ci-dessus, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ identifient les valeurs perturbées des forces aérodynamiques externes et $\Delta L, \Delta M, \Delta N$ identifient les valeurs perturbées des moments du CG. Lorsque l'hélicoptère est en équilibre, la somme vectorielle de toutes les forces appliquées à l'hélicoptère est égale à zéro.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} X_o - mg \sin \theta_o &= 0 \\ Y_o &= 0 \\ Z_o + mg \cos \theta_o &= 0 \\ L_o = M_o = N_o & \end{aligned} \quad (2.106)$$

◆

En substituant (2.106) dans un modèle de petites variations, les deux ensembles d'équations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned}
 \Delta X - mg\theta \cos \theta_o &= m\dot{u} & (a) \\
 \Delta Z - mg\theta \sin \theta_o &= m(\dot{w} - u_o q) \\
 \Delta M &= I_{yy}\dot{q} & (2.107) \\
 \Delta Y + mg\theta \cos \theta_o &= (\dot{v} - u_o r) & (b) \\
 \Delta L &= I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\
 \Delta N &= I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p}
 \end{aligned}$$

La première série, (2.107a) comprend les termes et moments qui se trouvent dans le plan C_{xy} et ils décrivent le mouvement longitudinal de l'hélicoptère. La deuxième série (2.107b) comprend les termes qui tendent à déplacer le plan de symétrie elle-même. Ces équations sont les équations du mouvement latéral-directionnel, et peuvent être résolues de manière indépendante.

• Hypothèse 3 :

Les dérivées du mouvement sont utilisées afin de formuler les vecteurs force et moment.

Par exemple, les composantes du vecteur force peuvent être écrites sous la forme approximative suivante :

$$\begin{aligned}
 F_x = F_{x_e} + \frac{\partial F_x}{\partial u}u + \frac{\partial F_x}{\partial v}v + \frac{\partial F_x}{\partial w}w + \frac{\partial F_x}{\partial p}p + \frac{\partial F_x}{\partial q}q + \frac{\partial F_x}{\partial r}r + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}}\dot{u} + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{v}}\dot{v} + \\
 \dot{w} + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{p}}\dot{p} + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial F_x}{\partial \dot{r}}\dot{r}
 \end{aligned} \quad (2.108)$$

♣

En appliquant la notation standard *aéro-dérivée* suivante, on obtient :

$$X_u = \frac{\partial F_x}{\partial u}, X_v = \frac{\partial F_x}{\partial v}, X_w = \frac{\partial F_x}{\partial w}, X_p = \frac{\partial F_x}{\partial p}, X_q = \frac{\partial F_x}{\partial q}, X_r = \frac{\partial F_x}{\partial r}$$

On obtient :

$$F_x = F_{x_e} + X_u u + X_v v + X_w w + X_p p + X_q q + X_r r + X_{\dot{u}} \dot{u} + X_{\dot{v}} \dot{v} + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_{\dot{p}} \dot{p} + X_{\dot{q}} \dot{q} + X_{\dot{r}} \dot{r} \quad (2.109)$$

Par exemple, les dérivés de stabilité pour les forces longitudinales peuvent être estimés sur l'approximation de Taylor :

$$\begin{aligned}
 X_a &= \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial a} = \frac{1}{m} \frac{\partial (-T_M a)}{\partial a} = -g \\
 Y_b &= \frac{1}{m} \frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{1}{m} \frac{\partial (T_M b)}{\partial b} = g
 \end{aligned} \quad (2.110)$$

De même, les dérivés de stabilité pour les moments peuvent être estimés par :

$$M_a = \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial M}{\partial a} = \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial [(l_h T_M + K_\beta)] a}{\partial a} = \frac{l_h m g + K_\beta}{I_{xx}} \quad (2.111)$$

$$L_b = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial [(l_h T_M + K_\beta)] b}{\partial b} = \frac{l_h m g + K_\beta}{I_{yy}} \quad (2.112)$$

Par exemple, le développement des moments aérodynamiques ∂L a pour expression :

$$\frac{1}{I_{xx}} \delta L = \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \dots + \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \dots + \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial a} \delta a + \dots + \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta u_i \quad (2.113)$$

En général, les produits des dérivées partielles sont exprimés, par l'expression suivante :

$$L_u = \frac{1}{I_{xx}} \frac{\partial L}{\partial u} \quad (2.114)$$

◆

On applique les mêmes raisonnements de calcul analytique pour les autres forces et les autres moments sur les équations de mouvement de l'hélicoptère, lors des petites variations.

2.11.2 Modèle linéaire des équations de l'hélicoptère

D'après les hypothèses de linéarité définies précédemment, nous obtenons les treize équations d'état linéarisées suivantes :

♣

$$\dot{u} = uX_u + wX_w + qX_q - \theta X_\theta + rX_r + \theta_0 X_{\theta_0} + \theta_{1s} X_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} X_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} X_{\theta_{0T}} \quad (2.115)$$

$$\dot{w} = uZ_u + wZ_w + qZ_q - \theta Z_\theta + vZ_v + pZ_p - \phi Z_\phi + rZ_r + \theta_0 Z_{\theta_0} + \theta_{1s} Z_{1s} + \theta_{1c} Z_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} Z_{\theta_{0T}} \quad (2.116)$$

$$\dot{q} = uM_u + wM_w + qM_q + pM_p + rM_r + \theta_0 M_{\theta_0} + \theta_{1s} M_{1s} + \theta_{1c} M_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} M_{\theta_{0T}} \quad (2.117)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (2.118)$$

$$\dot{v} = vY_v + wY_w + qY_q - \theta Y_\theta + vY_v + pY_p + \phi Y_\phi + rY_r + \psi g \cos \theta + \theta_0 Y_{\theta_0} + \theta_{1s} Y_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} Y_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} Y_{\theta_{0T}} \quad (2.119)$$

$$\dot{p} = uL_u + wL_w + qL_q + vL_v + pL_p + rL_r + \theta_0 L_{\theta_0} + \theta_{1s} L_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} L_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} L_{\theta_{0T}} \quad (2.120)$$

$$\dot{\phi} = p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \quad (2.121)$$

$$\dot{r} = uN_u + wN_w + qN_q + vN_v + pN_p + rN_r + \theta_0 N_{\theta_0} + \theta_{1s} N_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} N_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} N_{\theta_{0T}} \quad (2.122)$$

$$\dot{\psi} = q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \quad (2.123)$$

$$\dot{\beta}_{1s} = -p - \beta_{1s} + B_a \beta_{1c} + B_{1s} \theta_{1s} + B_{1c} \theta_{1c} \quad (2.124)$$

$$\dot{\beta}_{1c} = -q + A_{1s} \beta_{1s} + \frac{1}{\tau_c} \beta_{1c} + A_{1s} \theta_{1s} + A_{1c} \theta_{1c} \quad (2.125)$$

Avec:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X_u \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_{1c}} = L_{\theta_{1c}}, \text{ etc} \quad X_u = \frac{X_u}{M_a} \quad L'_p = \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} L_p + \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} N_p$$

$$k_1 = \frac{I_{xz}(I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad L'_r = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} L_r + \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} N_r$$

$$k_2 = \frac{I_{zz}(I_{zz} - I_{yy})I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \quad k_3 = \frac{I_{xx}(I_{yy} - I_{xx}) - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2}$$

$$M_p = \left(M_p - \frac{2P_e I_{xz}}{I_{yy}} - \frac{R_e(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} \right) \quad M_r = \left(M_r + \frac{2R_e I_{xz}}{I_{yy}} - \frac{P_e(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} \right)$$

$$X_\theta = g \cos \theta \quad Z_\theta = g \cos \phi \sin \theta \quad Z_\phi = \sin \phi \cos \theta \quad Y_\theta = g \sin \phi \sin \theta$$

$$Y_\phi = g \cos \phi \cos \theta$$

◆

2.12 Diagramme du modèle de l'hélicoptère

L'hélicoptère est défini comme étant constitué de plusieurs sous-systèmes dont le fuselage, le rotor principal, le rotor de queue, l'empennage, le moteur,... La Figure ci-dessous illustre le diagramme du modèle de simulation d'un hélicoptère et ces différents sous-systèmes.

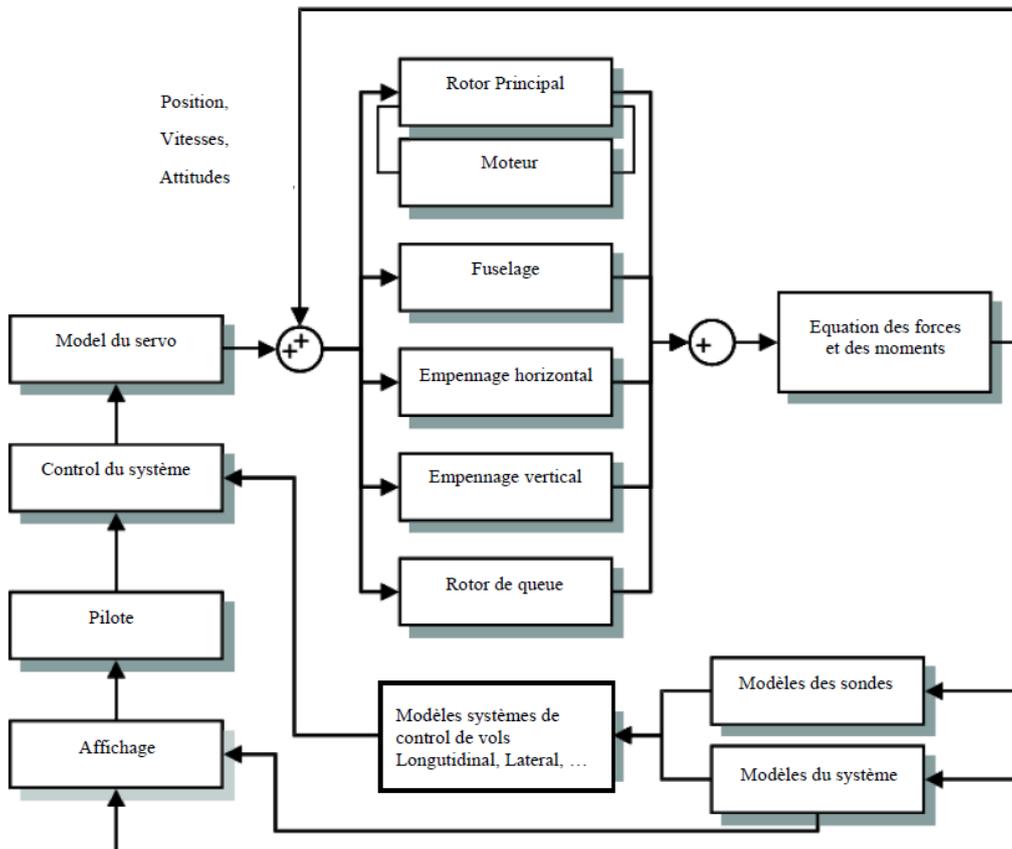


Figure 2.18 : Diagramme du modèle d'un hélicoptère et ces sous-systèmes

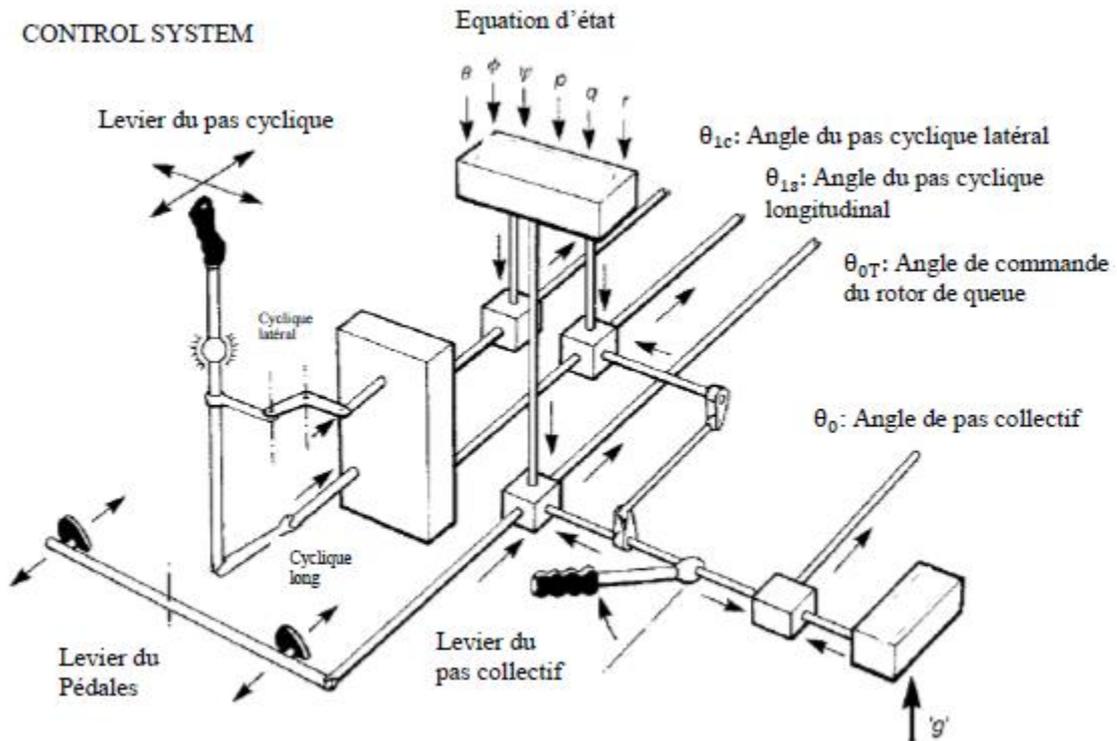
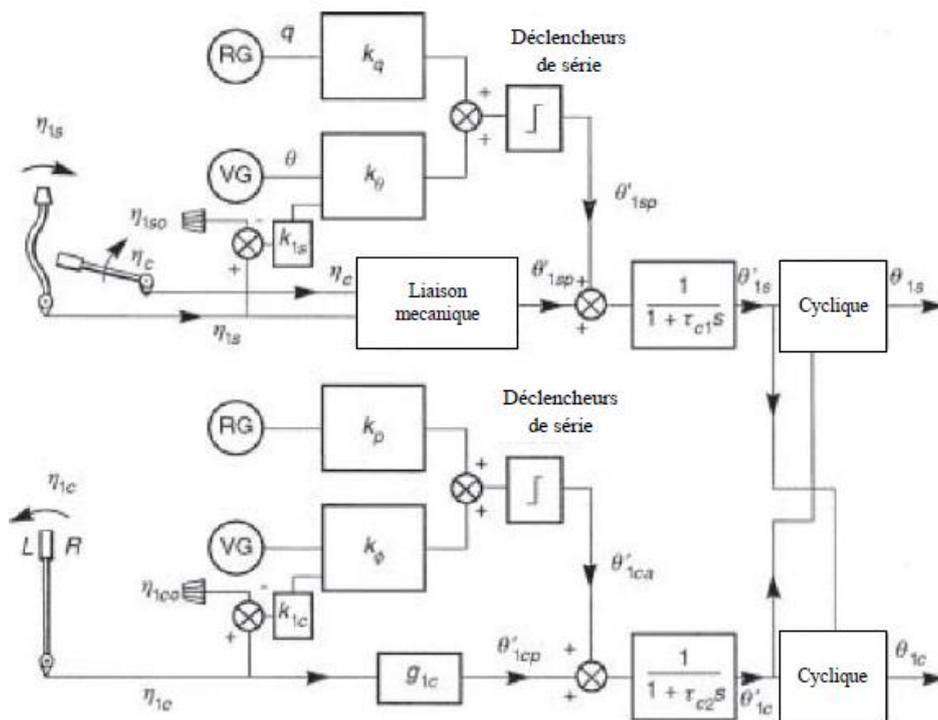


Figure 2.19 : Entrées des commandes de la dynamique de l'hélicoptère



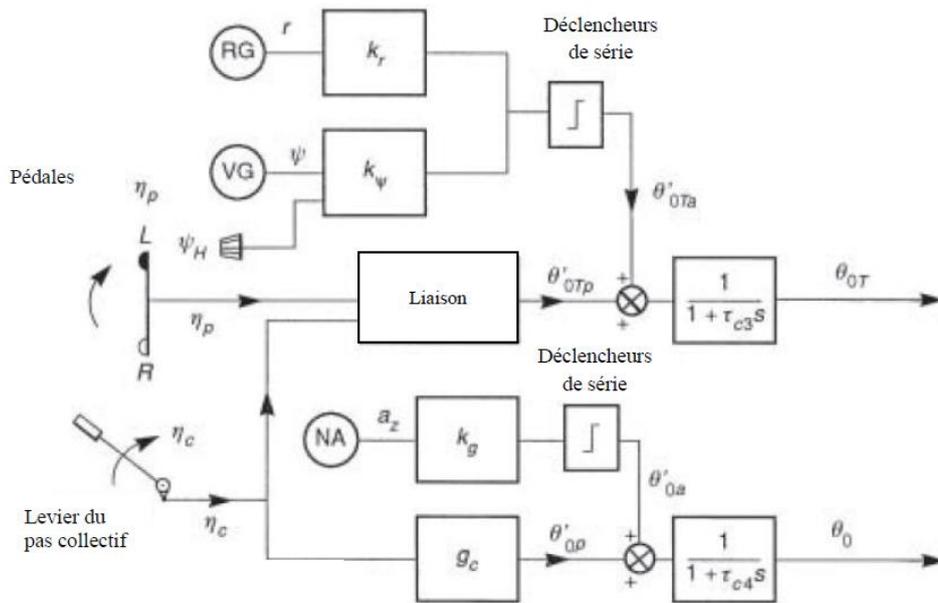


Figure 2.20 : Schéma de principe du système de contrôle de vol hélicoptère

2.13 Equation d'état de l'hélicoptère

Les équations globales de l'hélicoptère en mouvement sont des dérivées. Les forces et les moments des différents éléments d'un hélicoptère, comme le rotor principal, le rotor de queue, le fuselage et l'empennage, sont discutés dans cette section.

L'hélicoptère a six degrés de liberté dans son mouvement et il a neuf variables générales, qui sont u, v, w les composantes de la vitesse des aéronefs dans le centre de gravité, p, q, r taux de roulis, de tangage et de lacet de l'aéronef sur les axes du corps de référence, et φ, θ, ψ les angles d'Euler.

Pour dériver les équations des mouvements de translation et de rotation d'un hélicoptère, l'hélicoptère est considéré comme un corps rigide autour d'un système d'axe fixé au centre de masse de l'aéronef, de sorte que, les axes se déplacent avec le temps de variation de la vitesse des composants sous l'action des forces appliquées. Les angles d'Euler définissent l'orientation du fuselage par rapport à la masse du système d'axes.

Il y a quatre entrées de commande, qui sont : le bâton cyclique longitudinal (η_{1s}), le manche cyclique latérale (η_{1c}), le levier de pas collectif (η_c), et la pédale d'entrée (η_p), qui contrôle le mouvement de l'hélicoptère par rapport à X, Y, Z, L, M et N . Ainsi, les équations du système sont les suivantes :

♣

Les dérivés des six premières variables d'état sont reliés aux six variables d'état. En effet, on a :

$$\dot{x} = u \quad \dot{y} = v \quad \dot{\varphi} = p \quad \dot{\theta} = q \quad \dot{z} = w \quad \dot{\psi} = r$$

Les six autres équations sont obtenues en appliquant la relation fondamentale de la dynamique. En appelant M_a la masse de l'hélicoptère, g l'accélération de la pesanteur, I_{xx} , I_{yy} et I_{zz} les moments d'inertie selon les trois axes et enfin $I_{xz} = I_x I_z$, on obtient :

$$\dot{u} = rv - qw - g \sin\theta + \frac{F_x}{M_a} \quad (2.126)$$

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos\theta \sin\phi + \frac{F_y}{M_a} \quad (2.127)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g \cos\theta \sin\phi + F_z/M_a \quad (2.128)$$

Avec :

- M_a représente la masse de l'hélicoptère;
- g représente l'accélération due à la gravité.

$$\dot{u} = uX_u + wX_w + qX_q - \theta X_\theta + rX_r + \theta_0 X_{\theta_0} + \theta_{1s} X_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} X_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} X_{\theta_{0T}} \quad (2.129)$$

$$\dot{w} = uZ_u + wZ_w + qZ_q - \theta Z_\theta + vZ_v + pZ_p - \phi Z_\phi + rZ_r + \theta_0 Z_{\theta_0} + \theta_{1s} Z_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} Z_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} Z_{\theta_{0T}} \quad (2.130)$$

$$\dot{q} = uM_u + wM_w + qM_q + pM_p + rM_r + \theta_0 M_{\theta_0} + \theta_{1s} M_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} M_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} M_{\theta_{0T}} \quad (2.131)$$

Ainsi, les équations des moments de l'hélicoptère sont les suivantes :

$$\dot{p} = \frac{(I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} + \frac{I_{xz}(pq((I_{xx} - I_{yy}) + rq + I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}^2 pq)}{I_{xx}^2 + I_{xx}I_{zz}} + pq + \frac{I_{xz}(N - L)}{(I_{xx}^2 + I_{xx}I_{zz})} + L \quad (2.132)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{xy}} [(I_{zz} - I_{xx})pr - I_{xz}(p^2 - r^2)] + \frac{1}{I_{yy}} M \quad (2.133)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xz}(rq - I_{xy} - I_{zz}) - I_{xz}^2 pq + pq(I_{xx} - I_{yy})}{(I_{xz}^2 + I_{xx}I_{zz})} + \frac{N - I_{xz}^2 L}{(I_{xz}^2 + I_{xx}I_{zz})} \quad (2.134)$$

Avec :

- I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , représentent les moments d'inertie de l'hélicoptère autour des axes x , y et z ;
- I_{xz} est le produit d'inertie de l'aéronef.

$$\dot{p} = uL_u + wL_w + qL_q + vL_v + pL_p + rL_r + \theta_0 L_{\theta_0} + \theta_{1s} L_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} L_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} L_{\theta_{0T}} \quad (2.135)$$

$$\dot{q} = uM_u + wM_w + qM_q + pM_p + rM_r + \theta_0 M_{\theta_0} + \theta_{1s} M_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} M_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} M_{\theta_{0T}} \quad (2.136)$$

$$\dot{r} = uN_u + wN_w + qN_q + vN_v + pN_p + rN_r + \theta_0 N_{\theta_0} + \theta_{1s} N_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} N_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} N_{\theta_{0T}} \quad (2.137)$$

◆

Comme les variables d'état ($x \ y \ z \ \psi$) n'interviennent pas dans les équations on peut se contenter d'étudier le comportement du vecteur d'état réduit.

$$\dot{\phi} = p + q \sin\phi \tan\theta + r \cos\phi \tan\theta \quad (2.138)$$

$$\dot{\theta} = q \cos\phi - r \sin\phi \quad (2.139)$$

$$\dot{\psi} = q \sin\phi \sec\theta + r \cos\phi \sec\theta \quad (2.140)$$

Où :

- M_a et g sont la masse de l'hélicoptère et l'accélération due à la gravité,
- I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} , représentent les moments d'inertie de l'hélicoptère autour des axes x, y et z ,
- I_{xz} est le produit d'inertie de l'aéronef.

Le modèle peut être considéré comme un système de connexion non linéaire en cascade, c'est-à-dire qu'il a de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) + G(y)U \end{cases} \quad (2.141)$$

L'ensemble des forces X, Y et Z le long de x, y, z et des axes moments L, M, N à propos de x, y, z axes peut être écrit comme :

$$X = \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2\pi R^2 a_0 s \cos\gamma_s \frac{2C_X}{a_0 s} - \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2\pi R^2 a_0 s \sin\gamma_s \frac{2C_Z}{a_0 s} \quad (2.142)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2\pi R^2 a_0 s S_P \bar{V}_F^2 C_{XF}(\alpha_F)$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2\pi R^2 a_0 s \left(\frac{2C_Y}{a_0 s}\right) + \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \bar{V}_{FN}^2 S_{FN} C_{YFN}(\beta_{FN}) \quad (2.143)$$

$$(2.144)$$

$$+ \frac{1}{2}\rho(\Omega_T R_T)^2 a_{0T} S_T (\pi R_T)^2 \left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T} S_T}\right) F_T + \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 S_s \bar{V}_F^2 C_{YS} \frac{V_A}{V_F}$$

$$Z = \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \left(\sin\gamma_s \left(\frac{2C_X}{a_0 s}\right) + \cos\gamma_s \left(\frac{2C_Z}{a_0 s}\right) \right) + \frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \bar{V}_T^2 S_{TP} C_{ZTP}(\alpha_{TP}) \quad (2.145)$$

$$+ S_P \bar{V}_F^2 C_{ZF}(\alpha_F)$$

$$L = \frac{-b}{2} K_\beta \beta_{1s} + h_R \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\frac{2C_Y}{a_0 s} \right) \right) \quad (2.146)$$

$$+ h_T \cdot \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 a_{0T} s_T (\pi R_T)^2 \left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T} s_T} \right) F_T$$

$$+ h_{FN} \cdot \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_{FN}^2 S_{FN} C_{YFN} (\beta_{FN}) \quad (2.147)$$

$$M = \frac{-b}{2} K_\beta \beta_{1s} - h_R \cdot \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\cos \gamma_s \left(\frac{2C_x}{a_0 s} \right) - \sin \gamma_s \left(\frac{2C_z}{a_0 s} \right) \right) \quad (2.147)$$

$$+ x_{cg} \cdot \frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\sin \gamma_s \left(\frac{2C_x}{a_0 s} \right) + \cos \gamma_s \left(\frac{2C_z}{a_0 s} \right) \right)$$

$$+ (l_{TP} + x_{cg}) \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_T^2 S_{TP} C_{ZTP} (\alpha_{TP}) + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S_P l_F \bar{V}_F^2 C_{MF} (\alpha_F) \quad (2.148)$$

$$N = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \pi R^2 a_0 s \left(\frac{2C_Q}{a_0 s} + \left(\frac{2I_R}{bI_\beta} \right) \frac{\bar{\Omega}'}{\gamma} \right) - x_{cg} \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 (\Omega R)^2 a_0 s \left(\frac{2C_Y}{a_0 s} \right) \right) \quad (2.148)$$

$$- (l_T + x_{cg}) \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 a_{0T} s_T (\pi R_T)^2 \left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T} s_T} \right) F_T$$

$$- (l_{FN} + x_{cg}) \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \bar{V}_{FN}^2 S_{FN} C_{YFN} (\beta_{FN}) + \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S_S l_F \bar{V}_F^2 C_{NF} (\beta_F)$$

Avec:

- ρ est la densité de l'air ;
- R est le rayon de la pale du rotor principal ;
- Ω la vitesse angulaire du rotor principal ;
- a_0 la pente courbée de la lame du rotor de queue ;
- s la pente courbée de la lame du rotor principal ;
- C_x, C_y, C_z sont des coefficients de forces du rotor principal.

Ces coefficients sont donnés par la matrice de rotation suivante :

$$\begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_w & -\sin \Psi_w \\ \sin \Psi_w & \cos \Psi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{XW} \\ C_{YW} \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

$$\left(\frac{2C_Z}{a_0 s} \right) = - \left(\frac{2C_M}{a_0 s} \right) = -F_0^{(1)} \quad (2.150)$$

Avec :

- Ψ_w est l'angle de dérapage du rotor principal ;
- C_M le coefficient de la poussée du rotor principal.

$$C_M = \frac{T}{\rho (\Omega R)^2 \pi R^2} \quad (2.151)$$

Les coefficients des principales forces dans le moyeu C-vent axes C_{XW} et C_{YW} sont peut être obtenus par les équations ci-dessous et termes de composantes harmoniques de la lame intégrée les charges aérodynamiques et les harmoniques de battement.

$$\left(\frac{2C_{XW}}{a_0S}\right) = \left(\frac{F_0^{(1)}}{2} + \frac{F_{2c}^{(1)}}{4}\right)\beta_{1c} + \frac{F_{1c}^{(1)}}{2}\beta_0 + \frac{F_{2s}^{(1)}}{4}\beta_{1s} + \frac{F_{1s}^{(1)}}{2} \quad (2.152)$$

$$\left(\frac{2C_{YW}}{a_0S}\right) = \left(\frac{F_0^{(1)}}{2} + \frac{F_{2c}^{(1)}}{4}\right)\beta_{1s} - \frac{F_{1s}^{(1)}}{2}\beta_0 - \frac{F_{2s}^{(1)}}{4}\beta_{1c} + \frac{F_{1c}^{(1)}}{2} \quad (2.153)$$

$$\left(\frac{2C_{ZW}}{a_0S}\right) = -\left(\frac{2C_T}{a_0S}\right) = -F_0^{(1)} \quad (2.154)$$

Où β_0 est l'angle cône et β_{1cw} , β_{1sw} sont les angles harmoniques cycliques de battement.

Les composantes harmoniques d'intégrée lame charges aérodynamiques sont données par les expressions suivantes :

$$F_0^{(1)} = \theta_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{2}\right) + \frac{\mu}{2} \left(\theta_{1sw} + \frac{\bar{P}_{hw}}{2}\right) + \left(\frac{\mu_z - \lambda_0}{2}\right) + \frac{1}{4}(1 + \mu^2)\theta_{tw} \quad (2.155)$$

$$F_{1s}^{(1)} = \left(\frac{\alpha_{1sw}}{3} + \mu \left(\theta_0 + \mu_z - \lambda_0 + \frac{2}{3}\theta_{tw}\right)\right) \quad (2.156)$$

$$F_{1c}^{(1)} = \frac{\alpha_{cw}}{3} - \frac{\mu\beta_0}{2} \quad (2.157)$$

$$F_{2s}^{(1)} = \frac{\mu}{2} \left\{ \frac{\alpha_{1cw}}{2} + \frac{\theta_{1cw} - \beta_{1sw}}{2} - \mu\beta_0 \right\} \quad (2.158)$$

$$F_{2c}^{(1)} = -\frac{\mu}{2} \left\{ \frac{\alpha_{1sw}}{2} + \frac{\theta_{1sw} - \beta_{1cw}}{2} + \mu \left(\theta_0 + \frac{\theta_{tw}}{2}\right) \right\} \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned} F_{1s}^{(2)} = & \frac{\mu^2}{2}\beta_0\beta_{1sw} + \left(\mu_z - \lambda_0 - \frac{\mu}{4}\beta_{1cw}\right)(\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}) - \frac{\mu}{4}\beta_{1sw}(\alpha_{1cw} - \theta_{1cw}) \\ & + \theta_0 \left(\frac{\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}}{3} + \mu(\mu_z - \lambda_0) - \frac{\mu^2}{4}\beta_{1cw}\right) \\ & + \left(\frac{\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}}{4} + \frac{\mu}{2}\left(\mu_z - \lambda_0 - \frac{\beta_{1cw}\mu}{4}\right)\right)\theta_{tw} \\ & + \theta_{1sw} \left(\frac{\mu_z - \lambda_0}{2} + \mu \left(\frac{3}{8}(\bar{p}_{hw} - \lambda_{1sw}) + \frac{\beta_{1cw}}{4}\right)\right) \\ & + \frac{\mu}{4}\theta_{1cw} \left(\frac{\bar{q}_{hw} - \lambda_{1cw}}{2} - \beta_{1sw} - \mu\beta_0\right) - \frac{\delta\mu}{a_0} \end{aligned} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned}
F_{1c}^{(2)} = & (\alpha_{1cw} - \theta_{1cw} - 2\beta_0\mu) \left(\mu_z - \lambda_0 - \frac{4}{3}\mu\beta_{1cw} \right) - \frac{\mu}{4}\beta_{1sw}(\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}) \\
& + \theta_0 \left(\frac{\alpha_{1cw} - \theta_{1cw}}{3} - \frac{\mu}{2} \left(\beta_0 + \frac{\mu}{2}\beta_{1sw} \right) \right) \\
& + \theta_{tw} \left(\frac{\alpha_{1cw} - \theta_{1cw}}{4} - \mu \left(\frac{\beta_0}{3} + \frac{\mu}{8}\beta_{1sw} \right) \right) \\
& + \theta_{1cw} \left(\frac{\mu_z - \lambda_0}{2} + \frac{\mu}{4} \left(\frac{\bar{p}_{hw} - \lambda_{1sw}}{2} - \beta_{1cw} \right) \right) \\
& + \frac{\mu}{4}\theta_{1sw} \left(\frac{\bar{q}_{hw} - \lambda_{1cw}}{2} - \beta_{1sw} - \mu\beta_0 \right)
\end{aligned} \tag{2.161}$$

L'angle fondamental d'incidence du pas collectif du rotor principal θ_0 est exprimé par la relation suivante :

$$\theta_0 = \frac{(g_{c0} + g_{c1}\eta_c) + (k_g\Delta n)}{1 + \tau_{c4}S} \tag{2.162}$$

- g_{c0} et g_{c1} sont des constantes du levier de pas collectif ;
- η_c est l'entrée de contrôle du levier de pas collectif ;
- η_p est l'entrée de contrôle de la pédale.

Les composantes des manches longitudinale et latérale ont pour expression matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta_{1sw} \\ \theta_{1cw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_w & \sin\Psi_w \\ -\sin\Psi_w & \cos\Psi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1s} \\ \theta_{1c} \end{bmatrix} \tag{2.163}$$

- θ_{1sw} est la composante de la manche cyclique longitudinale ;
- θ_{1cw} est la composante de la manche cyclique latérale.

Les angles des pas cycliques longitudinal et latéral ont respectivement pour expression :

$$\begin{aligned}
\theta_{1s} = & \left[\frac{g_{ls0} + g_{1s1}\eta_{ls} + g_{sc0} + g_{sc1}\eta_c + k_\theta\theta + k_qq + k_{1s}(\eta_{1s} - \eta_{1s0})}{1 + \tau_{c1}S} \right] \cos\Psi_F \\
& + \left[\frac{g_{lc0} + g_{1c1}\eta_{1c} + k_\phi\phi + k_pP + k_{1c}(\eta_{1c} - \eta_{1c0})}{1 + \tau_{c2}S} \right] \sin\Psi_F
\end{aligned} \tag{2.164}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{1c} = & \left[\frac{g_{1c0} + g_{1c1}\eta_{1c} + k_\phi\phi + k_pP + k_{1c}(\eta_{1c} - \eta_{1c0})}{1 + \tau_{c2}S} \right] \cos\Psi_F \\
& - \left[\frac{g_{1s0} + g_{1s1}\eta_{ls} + g_{sc0} + g_{sc1}\eta_c + k_\theta\theta + k_qq + k_{1s}(\eta_{1s} - \eta_{1s0})}{1 + \tau_{c1}S} \right] \sin\Psi_F \\
= & \left[\frac{g_{1c0} + g_{1c1}\eta_{1c} + k_\phi\phi + k_pP + k_{1c}(\eta_{1c} - \eta_{1c0})}{1 + \tau_{c2}S} \right] \cos\Psi_F \\
& - \left[\frac{g_{1s0} + g_{1s1}\eta_{1s} + g_{sc0} + g_{sc1}\eta_c + k_\theta\theta + k_qq + k_{1s}(\eta_{1s} - \eta_{1s0})}{1 + \tau_{c1}S} \right] \sin\Psi_F
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Où :

- k_ϕ, k_p, k_θ et k_q sont les gains de rétroaction ;
- k_{lc} et k_{ls} sont les alimentations des gains à terme ;
- η_{1s0} et η_{1c0} sont des constantes réglables par le pilote automatique ;
- η_{1c} est l'entrée de contrôle de la manche cyclique latérale ;
- η_{1s} est l'entrée de contrôle de la manche cyclique longitudinale.

Le rotor de queue permet donc de contrôler le lacet qui fournit une force de poussée sur le côté et produit un moment de lacet autour de l'arbre du rotor principal.

En appliquant la force externe F_y et les moments L et M, l'équation du rotor de queue est déterminée par l'expression :

$$\left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T}S_T}\right) = \frac{1}{3} \frac{\theta_{0T} + K_3 \left(\frac{\eta_\beta}{\lambda_\beta^2}\right)_T \frac{4}{3} (\mu_{zT} - \lambda_{0T})}{1 - K_3 \left(\frac{\eta_\beta}{\lambda_\beta^2}\right)_T (1 + \mu_T^2)} \left(1 + \frac{3}{2} \mu_T^2\right) + \left(\frac{\mu_{zT} - \lambda_{0T}}{2}\right) \quad (2.166)$$

L'entrée de commande du rotor de queue est l'angle θ_{0T} qui exprimé par la relation :

$$\theta_{0T} = \frac{g_{t0} + g_{t1}(g_{ct0}(1 - \eta_p) + (1 - 2g_{ct0})\eta_c) + k_\psi(\psi - \psi_H) + k_r r}{1 + \tau_{c3}s} \quad (2.167)$$

- g_{t0}, g_{t1} sont des constantes de pédales ;
- g_{ct0} est la constante du câble de pédale.

La modélisation de la vitesse de rotation du rotor principal qui est gouverné par le modèle dynamique du moteur se fait de la façon suivante :

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{I_R} (Q_E - Q_R - G_T Q_T) + \dot{r} \quad (2.168)$$

$$Q_E = -K_3(\Omega - \Omega_i) \quad (2.169)$$

$$Q_R = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \Pi R^3 s a_0 \left(\frac{2C_Q}{a_0 S}\right) \quad (2.170)$$

$$Q_R = \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 \Pi R_T^3 s_T a_{0T} \left(\frac{2C_{QT}}{a_{0T} S_T}\right) \quad (2.171)$$

$$Q_R = \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 \Pi R_T^3 s_T a_{0T} \left(\frac{2C_{QT}}{a_{0T} S_T}\right) \quad (2.172)$$

Dans le domaine temporel, le modèle mathématique du rotor est une équation différentielle linéaire à coefficient constant qui s'écrit :

$$\ddot{Q}_E = \frac{1}{\tau_{e1}\tau_{e3}} \{ -(\tau_{e1} + \tau_{e3})\dot{Q}_E - Q_E + K_3(\Omega - \Omega_i + \tau_{e2}\dot{\Omega}) \} \quad (2.173)$$

- Q_E , Q_R et Q_T sont respectivement le couple total du moteur, le couple du rotor principal et le couple du rotor de queue ;
- G_T est le rapport de vitesse du rotor de queue ;
- I_R est l'inertie du système tournant ;
- Ω_i est la vitesse du rotor tournant au ralenti vitesse ;
- K_3 est le gain de la vitesse du rotor.

Pour le rotor principal, les angles de battements sont supposés de faibles variations et l'accélération globale du fuselage et les effets de poids des lames sont négligés.

Le taux de lacet et le taux de dérapage sont supposés faibles par rapport à la vitesse angulaire du rotor en Ω .

En particulier, les hypothèses concernant l'aérodynamique de pales de rotor permettent d'intégrer la charge aérodynamique analytique.

Ainsi les hypothèses pour les expressions pour des forces et des moments des rotors sont les suivantes :

- Les effets de compressibilité sont ignorés ;
- Les effets des flux de décrochage sont ignorés ;
- La répartition des vitesses induites au disque du rotor sont linéaires lors des variations longitudinales et latérales ;
- Les coupleurs de pas de la pale et la dynamique de décalage en mouvement de battement sont ignorés ;
- L'interaction des modes d'inclinaison avec le mode de fuselage sont négligés.

L'implémentation de la composante du rotor de queue est basée sur un procédé théorique simplifié lors de la détermination de la caractéristique du rotor de sustentation en vol en palier.

Les coordonnées du système de rotor comprennent X pour le flux d'air à jet libre et Z pour la direction de la poussée. Les couples de la poussée du rotor sont calculés en fonctions du facteur de perte de la lame. Le coefficient de la poussée du rotor de queue C_T est exprimé alors par la relation :

$$C_T = \frac{T_T}{\rho(\Omega_T R_T)^2 \Pi R_T^2 k_{bl}} \quad (2.174)$$

La vitesse induite par v_i peut être calculée par :

$$v_i = \mu_z - \lambda_0 \text{ avec } \lambda_0 = \frac{-\mu_z + \frac{1}{2} C_T}{\sqrt{(\mu^2 + \frac{1}{2} C_T)}} \quad (2.175)$$

En en appliquant la théorie des éléments de pales et une procédure itérative, on obtient finalement :

$$v_i = \frac{a_{0T} s_T}{2} \left[\frac{\mu_z t_{3,1} + \theta_0 t_{3,2} + \theta_1 t_{3,3}}{2 \sqrt{(\mu^2 + \lambda_0^2) + \frac{a_{0T} s_T}{2} t_{3,1}}} \right] \quad (2.176)$$

Les valeurs $t_{3,1}$, $t_{3,2}$ et $t_{3,3}$ sont calculées par :

$$t_{3,1} = \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{4} \mu^2 \quad (2.177)$$

$$t_{3,2} = \frac{1}{2} B^3 + \frac{1}{2} B \mu^2 \quad (2.178)$$

$$t_{3,3} = \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu^2 \quad (2.179)$$

Une fois les valeurs de $t_{3,1}$, $t_{3,2}$ et $t_{3,3}$ déterminées, la vitesse induite est de nouveau calculée en utilisant l'expression du coefficient de la poussée du rotor de queue :

$$C_T = 2v_i \sqrt{(\mu^2 \lambda_0^2)} \quad (2.180)$$

La poussée du rotor de queue peut alors être calculée par l'équation suivante :

$$T_T = \frac{\Pi}{180} \rho k_{bl} \Pi (\Omega_T R_T^2)^2 \quad (2.181)$$

Où l'effet de blocage k_{bl} , de l'ailette est donné par l'expression :

$$k_{bl} = (1 - b_{t1}) \frac{u_A^2}{v_{bl}^2} + b_{t1}, \{u_A \leq v_{bl}\} \quad (2.182)$$

$$k_{bl} = b_{t2}, \{u_A \geq v_{bl}\} \quad (2.183)$$

- v_{bl} est la vitesse de transition ;
- b_{t1} et b_{t2} , sont des constantes de blocage du rotor de queue.

On calcule alors la hauteur de la commande de base collective θ_0 par l'expression :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{180} [-T_T \delta_3 \tan \delta_3] + \theta_{bias} + \theta_c$$

Où :

- θ_c est la hauteur de la commande de base collective ;
- le biais est un θ_{biais} préréglé de pas collectif ;
- T_T est la poussée du rotor de queue ;
- δ_3 est l'angle d'inclinaison charnière pour le pas découplage.

Les composantes du fuselage et l'empennage sont implémenté dans l'hélicoptère en utilisant la loi aérodynamique. Le moteur est commandé par un système de régulation qui détecte un changement de la vitesse du rotor Ω exigeant un changement de débit de carburant ω_f .

On obtient alors une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$\tau_{e1} \dot{\omega}_f + \omega_f = K_{e1} \Delta \Omega \quad (2.184)$$

- τ_{e1} est la constante de temps du moteur ;
- K_{e1} est la pente de la chute de la vitesse du rotor lors du ralenti de vol d'urgence à l'écoulement de carburant maximale.

En notant respectivement $\Delta \Omega$ et Ω_i les changements de vitesse du rotor et du ralenti de vol, on a :

$$\Delta \Omega = \Omega - \Omega_i \quad (2.185)$$

- Ω est la vitesse du rotor au débit de carburant maximal d'urgence.

Le couple moteur Q_E répond au changement de débit de carburant et décrit par un décalage de l'écoulement de carburant et le débit est régi par l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\tau_{e3} \dot{Q}_E + Q_E = K_{e2} (\tau_{e2} \dot{\omega}_f + \omega_f) \quad (2.186)$$

- K_{e2} est le gain;
- τ_{e2}, τ_{e3} sont les constantes de temps.

En combinant les résultats ci-dessus, on obtient une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$\ddot{Q}_E = \frac{1}{\tau_{e1} \tau_{e3}} \{ -(\tau_{e1} + \tau_{e3}) \dot{Q}_E - Q_E + K_3 (\Omega - \Omega_i + \tau_2 \dot{\Omega}) \} \quad (2.187)$$

En notant $Q_{E_{max}}$ le couple moteur maximal, l'équation différentielle du second ordre normalisée s'écrit :

$$(\tau_{e1}\tau_{e3})\ddot{\bar{Q}}_E + (\tau_{e1} + \tau_{e3})\dot{\bar{Q}}_E + \bar{Q}_E = \frac{K_3}{Q_{E_{max}}} [(\Omega - \Omega_i)\tau_{e2}\dot{\Omega}] \quad (2.188)$$

$$\bar{Q}_E = \frac{Q_E}{Q_{E_{max}}} K_3 = K_{e1}K_{e2} \quad (2.189)$$

$$K_3 = -\frac{Q_{E_{max}}}{\Omega_i \left(1 - \frac{\Omega_m}{\Omega_i}\right)} \quad (2.190)$$

En notant $q_{e2} = \ddot{\bar{Q}}_E = \dot{q}_{e1}$ et $q_{e1} = \dot{\bar{Q}}_E$, on obtient un modèle d'état d'ordre 2 pour la représentation matricielle des rotors de l'hélicoptère.

L'expression du moment du moteur est donnée par la relation :

$$Q_E = \frac{P_E T_h}{\Omega}$$

Le produit $P_E T_h$ représente la puissance du moteur. Il est supposé que le couple total du rotor principal Q_E coïncide avec le couple moteur Q_M c'est-à-dire $Q_E = Q_M$.

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X_u \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_{1c}} = L_{\theta_{1c}}, \text{ etc} \quad X_u = \frac{X_u}{M_a}$$

$$\dot{u} = uX_u + wX_w + qX_q - \theta X_\theta + rX_r + \theta_0 X_{\theta_0} + \theta_{1s} X_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} X_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} X_{\theta_{0T}}$$

$$\dot{w} = uZ_u + wZ_w + qZ_q - \theta Z_\theta + vZ_v + pZ_p - \phi Z_\phi + rZ_r + \theta_0 Z_{\theta_0} + \theta_{1s} Z_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} Z_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} Z_{\theta_{0T}}$$

$$\dot{q} = uM_u + wM_w + qM_q + pM_p + rM_r + \theta_0 M_{\theta_0} + \theta_{1s} M_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} M_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} M_{\theta_{0T}}$$

$$\dot{\theta} = q \cos\phi - r \sin\phi$$

$$\dot{v} = vY_v + wY_w + qY_q - \theta Y_\theta + vY_v + pY_p + \phi Y_\phi + rY_r + \psi g \cos\theta + \theta_0 Y_{\theta_0} + \theta_{1s} Y_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} Y_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} Y_{\theta_{0T}}$$

$$\dot{p} = uL_u + wL_w + qL_q + vL_v + pL_p + rL_r + \theta_0 L_{\theta_0} + \theta_{1s} L_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} L_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} L_{\theta_{0T}}$$

$$\dot{\phi} = p + q \sin\phi \tan\theta + r \cos\phi \tan\theta$$

$$\dot{r} = uN_u + wN_w + qN_q + vN_v + pN_p + rN_r + \theta_0 N_{\theta_0} + \theta_{1s} N_{\theta_{1s}} + \theta_{1c} N_{\theta_{1c}} + \theta_{0T} N_{\theta_{0T}}$$

$$\dot{\psi} = q \sin\phi \sec\theta + r \cos\phi \sec\theta$$

$$\dot{\beta}_{1s} = -p - \beta_{1s} + B_a \beta_{1c} + B_{1s} \theta_{1s} + B_{1c} \theta_{1c}$$

$$\dot{\beta}_{1c} = -q + A_{1s} \beta_{1s} + \frac{1}{\tau_c} \beta_{1c} + A_{1s} \theta_{1s} + A_{1c} \theta_{1c}$$