

La science antique portait sur des concepts, tandis que
la science moderne cherche des lois.
Henri Bergson, *L'évolution créatrice*

Chapitre 2

Modélisation d'un écoulement multiphasique homogène

L'hypothèse d'écoulement homogène (dit modèle de mélange) fournit la théorie la plus simple d'analyse d'écoulements diphasiques. Des propriétés physiques moyennes adaptées sont déterminées et le fluide est traité comme un pseudo-fluide qui obéit aux équations classiques d'un écoulement monophasique. Toutes les méthodes utilisées en mécanique des fluides peuvent alors être utilisées. Les propriétés moyennes requises sont la vitesse, les propriétés thermodynamiques (température, densité) et les propriétés de transport (viscosité).

Des différences de vitesse, de température et de potentiel chimique entre phases vont engendrer des transferts mutuels de quantité de mouvement, ainsi que de chaleur et de masse. Comme ces échanges se font souvent par le biais d'un processus très rapide, particulièrement lorsqu'une phase est bien dispersée dans une autre, on peut supposer que l'équilibre est atteint. Dans ce cas précis, les valeurs moyennes de vitesse, température et potentiel chimique sont les mêmes que les valeurs pour chacune des phases composant l'écoulement et on a donc un **écoulement en équilibre homogène** [172].

Dans le type d'écoulement multiphasique que l'on se propose d'étudier, les phénomènes thermiques ne semblent pas prépondérants (la cavitation, notamment, est un phénomène purement dynamique). Nous avons fait le choix de nous intéresser précisément à l'effet de l'écoulement à l'intérieur de l'injecteur sur l'atomisation primaire du jet, aussi ne traiterons-nous pas des problèmes de changement de phase liés aux variations de température (phénomènes d'évaporation et de condensation) que l'on rencontre dans une chambre de combustion. La modélisation correspondante ne nécessite donc pas la résolution d'une équation de conservation de l'énergie : nous travaillerons à température constante.

Enfin, le traitement de la turbulence n'apparaît pas explicitement dans notre modèle puisque les équations utilisées sont laminaires. L'interaction entre cavitation et turbulence est pourtant réelle, mais on préfère se concentrer dans cette étude sur les écoulements secondaires très complexes (et fortement couplés avec la cavitation), considérant qu'ils sont prépondérants. Ruiz et He [146] ont montré que la turbulence dans les écoulements cavitants ne peut pas être modélisée comme une turbulence classique et estiment que des études complémentaires sont nécessaires à ce sujet.

Coutier-Delgosha *et al.* [39, 40, 41] ont par exemple tenté d'adapter un modèle de type Baldwin-Lomax et un modèle $k - \varepsilon$ aux écoulements cavitants. Basuki *et al.* [8] ont également introduit un modèle de turbulence, de type $k - \omega$. Mais les résultats obtenus ne montrent pas vraiment une meilleure adéquation avec l'expérience et une phase de calage du modèle est préalablement nécessaire.

2.1 Établissement des équations diphasiques

On considère un écoulement diphasique pour lequel on note l'une des phases par l'indice $k = 1$ et l'autre par l'indice $k = 2$. Ces différentes phases sont des fluides purs non-miscibles. Dans le cas d'une approche eulérienne, on introduit la fonction indicatrice de phase, notée χ_k , qui est définie telle que :

$$\chi_k(M, t) = \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente à l'instant } t \text{ au point } M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

La fonction χ_k vérifie, au sens des distributions, les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + u_{I,j} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} = -n_{k,j} \delta_k \quad (2.2)$$

où $u_{I,j}$ est la vitesse locale de propagation de l'interface, $n_{k,j}$ la normale à l'interface dirigée vers l'extérieur du domaine occupé par la phase k ($n_{1,j} = -n_{2,j}$) et δ_k la distribution de Dirac associée à l'interface vue de la phase k .

On peut alors subdiviser ce mélange diphasique en régions purement monophasiques continues, séparées par des interfaces supposées infiniment minces et sans masse. On écrit ensuite les équations locales instantanées de la mécanique des fluides pour chaque phase k , comme le fait Ishii [88].

2.1.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse pour la phase k s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.3)$$

Afin de rendre valable cette équation quelle que soit la phase, on la multiplie par la fonction indicatrice de phase χ_k :

$$\chi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \chi_k \frac{\partial \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \chi_k \rho_k}{\partial t} - \rho_k \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} - \rho_k u_{k,j} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} = 0 \quad (2.5)$$

et en utilisant la relation 2.2, on a la forme locale du bilan de masse pour un écoulement diphasique :

$$\frac{\partial \chi_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} = -\rho_k (u_{k,j} - u_{I,j}) n_{k,j} \delta_k \quad (2.6)$$

Le terme de droite correspond au flux de matière traversant l'interface. Puisque cette dernière est supposée sans masse, le bilan total des échanges surfaciques est nul :

$$\sum_{k=1}^2 \rho_k (u_{k,j} - u_{I,j}) n_{k,j} \delta_k = 0 \quad (2.7)$$

2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

De même, l'équation instantanée de conservation de la quantité de mouvement à l'intérieur de la phase k peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{k,ij}}{\partial x_j} + \rho_k g_i \quad (2.8)$$

où p_k est la pression dans la phase k et $\tau_{k,ij}$ est le tenseur des contraintes visqueuses, g_i étant une composante de la gravité.

En introduisant la fonction indicatrice de phase χ_k comme dans l'équation 2.4, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i}}{\partial t} - \rho_k u_{k,i} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} - \rho_k u_{k,i} u_{k,j} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} = \\ -\frac{\partial \chi_k p_k}{\partial x_i} + p_k \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi_k \tau_{k,ij}}{\partial x_j} - \tau_{k,ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} + \chi_k \rho_k g_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

ce que l'on peut également écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} = \underbrace{\rho_k u_{k,i} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \rho_k u_{k,i} u_{k,j} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j}}_{(1)} \\ + \underbrace{p_k \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i} - \tau_{k,ij} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \chi_k p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi_k \tau_{k,ij}}{\partial x_j} + \chi_k \rho_k g_i}_{(2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

où les termes (1) et (2) représentent respectivement le transfert de quantité de mouvement lié au transfert de masse et celui lié aux forces extérieures exercées par l'autre phase au niveau de l'interface.

Finalement, comme on l'a fait plus haut, la relation 2.2 permet d'écrire le bilan local de quantité de mouvement pour un écoulement diphasique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} = \underbrace{[-\rho_k u_{k,i} (u_{k,j} - u_{I,j}) - p_k \delta_{ij} + \tau_{k,ij}] n_{k,j} \delta_k}_{(1)+(2)} \\ - \frac{\partial \chi_k p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi_k \tau_{k,ij}}{\partial x_j} + \chi_k \rho_k g_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ quand $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ quand $i \neq j$).

Les interfaces étant supposées sans inertie, mais soumises à des tensions interfaciales, l'équation de bilan surfacique exprimant l'équilibre des forces s'exerçant sur l'interface peut s'écrire :

$$\sum_{k=1}^2 [-\rho_k u_{k,i} (u_{k,j} - u_{I,j}) - p_k \delta_{ij} + \tau_{k,ij}] n_{k,j} \delta_k = f_{s,i} \delta_s \quad (2.12)$$

où $f_{s,i}$ est la force de tension de surface par unité d'aire interfaciale (cf. paragraphe 2.3.3) et δ_s est une distribution de Dirac associée à l'interface.

2.2 Opérateurs de moyenne

Des opérateurs de moyenne sont utilisés de longue date en écoulements diphasiques [170, 47, 68, 84]. L'opérateur mathématique choisi, noté $\langle \cdot \rangle$, doit vérifier un certain nombre de propriétés indispensables à la mise en équation du problème (connues sous le nom d'axiomes de Reynolds [118]) : linéarité, idempotence et commutativité avec les opérateurs de dérivation temporelle et spatiale.

En pratique, les seules moyennes utilisables sont les moyennes spatio-temporelles qui ne satisfont aux axiomes de Reynolds qu'à la condition que l'écoulement vérifie certaines hypothèses d'homogénéité ou de stationnarité :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} f d\omega \quad \text{et} \quad \langle f \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f d\tau \quad (2.13)$$

Ces opérateurs de moyenne sont équivalents, à condition qu'ils vérifient les axiomes de Reynolds. Il est donc inutile de préciser le type d'opérateur retenu pour l'établissement des équations moyennées.

On peut alors définir α_k comme le taux de présence de la phase k tel que :

$$\alpha_k = \langle \chi_k \rangle \quad (2.14)$$

On définit ensuite la moyenne eulérienne de phase [49] d'une grandeur quelconque f , notée $\langle f \rangle^k$:

$$\langle f \rangle^k = \frac{1}{\alpha_k} \langle \chi_k f \rangle \quad (2.15)$$

soit, pour le cas où $f = \rho_k$:

$$\langle \chi_k \rho_k \rangle = \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \quad (2.16)$$

De même, pour toute grandeur f quelconque, on peut écrire :

$$\langle \chi_k \rho_k f \rangle = \alpha_k \langle \rho_k f \rangle^k \quad (2.17)$$

Il est alors pratique de définir une moyenne pondérée par la masse volumique, pour les problèmes à masse volumique variable. Pour une grandeur quelconque f , cette moyenne, appelée moyenne de Favre [60, 88] et notée \tilde{f}^k , est définie comme suit :

$$\langle \rho_k \rangle^k \tilde{f}^k = \langle \rho_k f \rangle^k = \frac{1}{\alpha_k} \langle \chi_k \rho_k f \rangle \quad (2.18)$$

2.3 Le modèle HEM

Quand on considère un écoulement en équilibre homogène, on écrit les équations du modèle HEM¹ en sommant sur les deux phases les équations diphasiques locales instantanées.

2.3.1 Conservation de la masse

Partons de la forme locale de l'équation de conservation de la masse 2.6 et, en sommant sur les deux phases présentes dans le mélange, on obtient :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \rho_k}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,j}}{\partial x_j} = - \sum_{k=1}^2 \rho_k (u_{k,j} - u_{I,j}) n_{k,j} \delta_k \quad (2.19)$$

le terme de droite s'annulant, d'après l'équation 2.7 du bilan à l'interface. En appliquant l'opérateur de moyenne défini au paragraphe 2.2, l'équation 2.19 devient :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \rangle}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k u_{k,j} \rangle}{\partial x_j} = 0 \quad (2.20)$$

ce qui, en utilisant les relations 2.16 et 2.18 sur les moyennes, équivaut à :

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \widetilde{u_{k,j}}^k}{\partial x_j} = 0 \quad (2.21)$$

où $\widetilde{u_k}^k$ est la vitesse moyenne, au sens de Favre, de la phase k .

On simplifie l'écriture en notant \sum pour $\sum_{k=1}^2$. Il résulte de l'équation 2.21 que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \widetilde{u_{k,j}}^k \right] = 0 \quad (2.22)$$

On peut alors définir les grandeurs de mélange, en supposant que l'interface est infiniment mince :

$$\begin{cases} \rho_m = \sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \\ \rho_m u_{m,j} = \sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \widetilde{u_{k,j}}^k \end{cases} \quad (2.23)$$

ce qui nous amène naturellement à l'équation de conservation de la masse pour le mélange :

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,j}}{\partial x_j} = 0} \quad (2.24)$$

¹HEM : *Homogeneous Equilibrium Model*

2.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Comme précédemment, on part de l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement 2.11, puis en utilisant le bilan à l'interface 2.12 et en sommant sur les deux phases, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j}}{\partial x_j} &= f_{s,i} \delta_s \\ - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k p_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \chi_k \tau_{k,ij}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^2 \chi_k \rho_k g_i & \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'application de l'opérateur de moyenne conduit alors à réécrire l'équation 2.25 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k u_{k,i} \rangle}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k u_{k,i} u_{k,j} \rangle}{\partial x_j} &= \langle f_{s,i} \delta_s \rangle \\ - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \langle \chi_k p_k \rangle}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \langle \chi_k \tau_{k,ij} \rangle}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^2 \langle \chi_k \rho_k g_i \rangle & \end{aligned} \quad (2.26)$$

ce qui, d'après les relations sur la moyenne, aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \widetilde{u_{k,i}^k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \widetilde{u_{k,i}^k} \widetilde{u_{k,j}^k} \right] &= \langle f_{s,i} \delta_s \rangle \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum \alpha_k \langle p_k \rangle^k \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum \alpha_k \langle \tau_{k,ij} \rangle^k \right] + \sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k g_i & \end{aligned} \quad (2.27)$$

En introduisant les grandeurs de mélange suivantes :

$$\begin{cases} \rho_m u_{m,i} u_{m,j} = \sum \alpha_k \langle \rho_k \rangle^k \widetilde{u_{k,i}^k} \widetilde{u_{k,j}^k} \\ p_m = \sum \alpha_k \langle p_k \rangle^k \\ \tau_{m,ij} = \sum \alpha_k \langle \tau_{k,ij} \rangle^k \end{cases} \quad (2.28)$$

on peut alors écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange diphasique :

$$\boxed{\frac{\partial \rho_m u_{m,i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_{m,i} u_{m,j}}{\partial x_j} = \langle f_{s,i} \delta_s \rangle - \frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{m,ij}}{\partial x_j} + \rho_m g_i} \quad (2.29)$$

2.3.3 La tension de surface

A l'interface entre deux fluides, il existe des interactions moléculaires, en général de répulsion : les milieux n'étant pas miscibles, l'existence d'une force à la surface de contact permet de séparer les deux fluides et éviter leur imbrication ou leur mélange. On appelle tension de surface ou tension capillaire cette force surfacique permettant de maintenir deux fluides en contact le long d'une interface commune. On la note σ et elle a la dimension [Pa.m].

Le bilan de la quantité de mouvement à l'interface permet d'écrire une fermeture pour l'équation 2.29 :

$$\langle f_{s,i} \delta_s \rangle = -\sigma (\nabla_s \cdot n) n \delta_s \quad (2.30)$$

où σ est supposée constante et la divergence surfacique de la normale n à l'interface $\nabla_s \cdot n$ représente sa courbure locale moyenne.

2.3.4 La viscosité

Dans l'équation 2.29, le terme $\tau_{m,ij}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses pour le mélange diphasique. Dans le cas d'un fluide isotrope et newtonien, il s'écrit :

$$\tau_{m,ij} = \mu_m \left(\frac{\partial u_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{m,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{m,k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.31)$$

Le calcul de la viscosité laminaire μ_m du mélange diphasique est un problème qui a été étudié par de nombreux auteurs : de manière intuitive, il est possible de l'évaluer par une moyenne appropriée des viscosités des phases 1 et 2, supposées constantes, ce qui permet de tendre, quand le mélange devient monophasique, vers la valeur de la viscosité couramment admise pour chacune des phases. Le tableau 2.1 regroupe certaines de ces expressions issues de la littérature.

Expression utilisée	Référence
$\frac{1}{\mu_m} = \frac{Y_1}{\mu_1} + \frac{1 - Y_1}{\mu_2}$	McAdams <i>et al.</i> [113]
$\mu_m = Y_1 \mu_1 + (1 - Y_1) \mu_2$	Cicchitti <i>et al.</i> [33]
$\mu_m = \frac{\alpha_1 u_1 \mu_1 + (1 - \alpha_1) u_2 \mu_2}{\alpha_1 u_1 + (1 - \alpha_1) u_2}$	Dukler <i>et al.</i> [53]
$\mu_m = \frac{\mu_1 \mu_2}{(1 - \alpha_1) \mu_1 + \alpha_1 \mu_2}$	Benkenida [14]
$\mu_m = \alpha_1 \mu_1 + (1 - \alpha_1) \mu_2$	Kubota <i>et al.</i> [95]

TAB. 2.1 – Expressions répertoriées dans la littérature pour le calcul de la viscosité d'un mélange diphasique

La relation établie par Kubota *et al.* [95] paraît être la plus cohérente avec la définition 2.28 du tenseur des contraintes visqueuses du mélange $\tau_{m,ij}$.

2.4 Modélisation de l'écoulement à l'intérieur d'un injecteur

A l'intérieur d'un injecteur s'écoule le carburant, à la fois sous forme liquide l et sous forme vapeur v due au phénomène de cavitation. On considère le carburant (ou fuel) comme un mélange homogène f constitué des phases l et v . De nombreux auteurs [46, 95, 32, 7, 153, 42] utilisent de telles méthodes pour la modélisation d'écoulements cavitants et Dumont [54] propose une synthèse bibliographique très complète à ce sujet.

Le modèle à résoudre pour traiter ce type d'écoulement comporte donc une équation de conservation de la masse qui s'écrit à l'instar de l'équation 2.24 :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.32)$$

où la vitesse de mélange est notée u pour alléger l'écriture. On considère donc que la vitesse de la phase liquide et de la phase vapeur sont les mêmes localement (pas de glissement entre phases). La densité du carburant ρ_f est déterminée en fonction des densités des phases liquide et vapeur pures :

$$\rho_f = (1 - \alpha_v)\rho_l + \alpha_v\rho_v \quad (2.33)$$

De même, à partir de l'équation 2.29, on déduit l'équation de quantité de mouvement, en négligeant les effets capillaires et ceux dus à la gravité :

$$\frac{\partial \rho_f u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_f u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{f,ij}}{\partial x_j} \quad (2.34)$$

Le calcul de $\tau_{f,ij}$ nécessite la détermination de la viscosité μ_f du mélange liquide-vapeur. En suivant l'exemple de Kubota *et al.* [95] qui considèrent des écoulements cavitants, on choisit simplement une moyenne arithmétique des viscosités des phases vapeur et liquide supposées constantes :

$$\mu_f = (1 - \alpha_v)\mu_l + \alpha_v\mu_v \quad (2.35)$$

2.5 Équation d'état pour un écoulement homogène diphasique

Comme on l'a vu plus haut, la difficulté principale d'une modélisation de type mélange réside dans l'écriture d'une équation d'état adaptée, basée sur la thermodynamique, pour la détermination de la pression. Avva *et al.* [7] écrivent une équation de conservation de l'enthalpie du mélange, en faisant une hypothèse d'équilibre thermique localement. Plus simplement, comme le font par exemple Cooper [37], Delannoy et Kueny [46] ou plus récemment Schmidt *et al.* [153], on va chercher à trouver une relation barotrope du type $p_f = f(\rho_f)$ pour fermer notre système.

Pour cela, Schmidt [152] part néanmoins du bilan sur l'enthalpie du mélange établi par Avva *et al.* [7]. Il montre que, dans les conditions classiques d'un injecteur Diesel, le terme de conduction thermique et le terme visqueux sont négligeables, ce qui réduit le bilan d'énergie à une accumulation d'enthalpie et un travail dû à la pression. Ces termes décrivant une transformation réversible, Schmidt suggère alors d'utiliser plutôt une hypothèse isentropique qui se traduit par :

$$dp = c_f^2 d\rho \quad (2.36)$$

Il nous faut donc déterminer la vitesse du son c_f du mélange diphasique de carburant liquide-vapeur avant de procéder à l'intégration de cette relation 2.36.

2.5.1 Vitesse du son d'un mélange diphasique

A l'image de Wallis [172], on considère un écoulement diphasique ($k = 1$ et 2) stationnaire et sans changement de phase dont on se propose de faire une analyse unidimensionnelle. On applique une vitesse $-U$ à l'ensemble du système, afin de ne conserver que les ondes de pression. Dans le nouvel espace de référence, on a alors la vitesse u'_k pour la phase k :

$$u'_k = u_k - U \quad (2.37)$$

On considère un écoulement homogène à l'équilibre, c'est-à-dire que la vitesse relative entre phases est nulle et que les deux phases ont une seule et même vitesse $u'_m = \tilde{u}'_1 = \tilde{u}'_2$. D'autre part, dans cet écoulement homogène, les forces de tension superficielle sont négligées ($\langle f_s \delta_s \rangle = 0$).

Pour un tel écoulement stationnaire, en ne prenant pas en compte les forces dues à la viscosité et à la gravité, le bilan de quantité de mouvement de l'équation 2.29 devient simplement :

$$\frac{d\rho_m u'_m u'_m}{dx} = -\frac{dp_m}{dx} \quad (2.38)$$

et peut se développer comme suit :

$$u'_m \frac{d\rho_m u'_m}{dx} + \rho_m u'_m \frac{du'_m}{dx} = -\frac{dp_m}{dx} \quad (2.39)$$

Pour le même écoulement stationnaire, le bilan de masse (équation 2.24) s'écrit alors :

$$\frac{d\rho_m u'_m}{dx} = 0 \quad (2.40)$$

permettant ainsi d'éliminer le premier terme dans la relation 2.39 :

$$\rho_m u'_m \frac{du'_m}{dx} = -\frac{dp_m}{dx} \quad (2.41)$$

D'autre part, la définition 2.23 donne la masse volumique du pseudo-fluide m :

$$\rho_m = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \quad (2.42)$$

en notant $\langle \rho_k \rangle^k = \rho_k$ pour alléger l'écriture. Sachant que, par définition, $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$, l'équation 2.41 devient :

$$[(1 - \alpha_2)\rho_1 + \alpha_2\rho_2] u'_m \frac{du'_m}{dx} = -\frac{dp_m}{dx} \quad (2.43)$$

Intéressons-nous maintenant au bilan de masse 2.6 pour la phase k , en considérant que les échanges de masse à l'interface sont nuls (écoulement homogène sans changement de phase). Pour un tel écoulement stationnaire, il se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{d\chi_k \rho_k u_k}{dx} = 0 \quad (2.44)$$

En appliquant l'opérateur de moyenne et en conservant les mêmes conventions d'écriture ($\langle \rho_k \rangle^k = \rho_k$ et $\tilde{u}_k^k = u'_m$), on a :

$$\frac{d\alpha_k \rho_k u'_m}{dx} = 0 \quad (2.45)$$

Cette équation se développe de la manière suivante :

$$\rho_k u'_m \frac{d\alpha_k}{dx} + \alpha_k u'_m \frac{d\rho_k}{dx} + \alpha_k \rho_k \frac{du'_m}{dx} = 0 \quad (2.46)$$

Par ailleurs, on peut relier la masse volumique ρ_k à la pression du mélange ($p_m = p_1 = p_2$) et, en utilisant une hypothèse isentropique, on introduit la vitesse du son c_k dans la phase k :

$$\frac{d\rho_k}{dx} = \frac{\partial \rho_k}{\partial p_m} \frac{dp_m}{dx} = \frac{1}{c_k^2} \frac{dp_m}{dx} \quad (2.47)$$

L'équation 2.46 se transforme alors comme suit :

$$\frac{d\alpha_k}{dx} + \frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2} \frac{dp_m}{dx} + \frac{\alpha_k}{u'_m} \frac{du'_m}{dx} = 0 \quad (2.48)$$

Sachant que $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$, en sommant cette relation sur les deux phases, on obtient :

$$-\frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{d\alpha_2}{dx} + \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \right] \frac{dp_m}{dx} + \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{u'_m} + \frac{\alpha_2}{u'_m} \right] \frac{du'_m}{dx} = 0 \quad (2.49)$$

ce qui se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{1}{u'_m} \frac{du'_m}{dx} = - \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \right] \frac{dp_m}{dx} \quad (2.50)$$

Le gradient de pression peut être remplacé en utilisant l'équation 2.43 et il vient :

$$\frac{1}{u'_m} \frac{du'_m}{dx} = \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \right] [(1 - \alpha_2)\rho_1 + \alpha_2\rho_2] u'_m \frac{du'_m}{dx} \quad (2.51)$$

ce qui se simplifie en :

$$\frac{1}{u_m'^2} = \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \right] [(1 - \alpha_2)\rho_1 + \alpha_2\rho_2] \quad (2.52)$$

Les ondes de compressibilité se déplacent dans le domaine à la vitesse $c_m = u'_m$, si bien qu'une relation permettant le calcul de la vitesse du son c_m d'un mélange diphasique homogène peut finalement être écrite :

$$\frac{1}{c_m^2} = [(1 - \alpha_2)\rho_1 + \alpha_2\rho_2] \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \right] \quad (2.53)$$

Pour le cas du mélange diphasique de carburant f (cf. partie 2.4) constitué de liquide l et de vapeur v , la vitesse du son c_f est donc donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{c_f^2} = [(1 - \alpha_v)\rho_l + \alpha_v\rho_v] \left[\frac{(1 - \alpha_v)}{\rho_l c_l^2} + \frac{\alpha_v}{\rho_v c_v^2} \right]} \quad (2.54)$$

Brennen [25] établit également la relation 2.53, pour un écoulement diphasique sans changement de phase (liquide 1 et gaz 2). En supposant que le gaz est parfait et a un comportement polytropique (la pression est proportionnelle à ρ_2^K), il remarque que, lorsqu'une des deux phases considérées est beaucoup plus compressible que l'autre, on peut réécrire l'équation 2.53 sous la forme :

$$\frac{1}{c_m^2} = [(1 - \alpha_2)\rho_1 + \alpha_2\rho_2] \left[\frac{(1 - \alpha_2)}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{K p_m} \right] \quad (2.55)$$

où p_m est la pression du mélange des composants 1 et 2, K étant le coefficient de détente polytropique du gaz ($K = 1, 4$ dans le cas d'une transformation adiabatique, K tend vers 1 dans le cas isotherme).

Minnaert [115] le premier identifia une des caractéristiques les plus notables d'un tel mélange liquide-gaz : la vitesse du son du mélange peut être beaucoup plus faible que celle de chacun des constituants pris séparément. Les données expérimentales de Karplus [91] ainsi que Gouse et Brown [67] sont venues plus tard corroborer ces observations (figure 2.1). En outre, les mesures de l'expérience correspondent à la théorie isotherme, ce qui signifie que les transferts de chaleur entre les bulles et le liquide sont suffisants pour maintenir le gaz des bulles à une température pratiquement constante.

En utilisant les caractéristiques typiques d'un gazole commercial, la célérité dans le carburant f , calculée par la relation 2.54, est représentée sur la figure 2.2. Le mélange f a, lui aussi, une vitesse du son c_f plus faible que celle de la vapeur et du

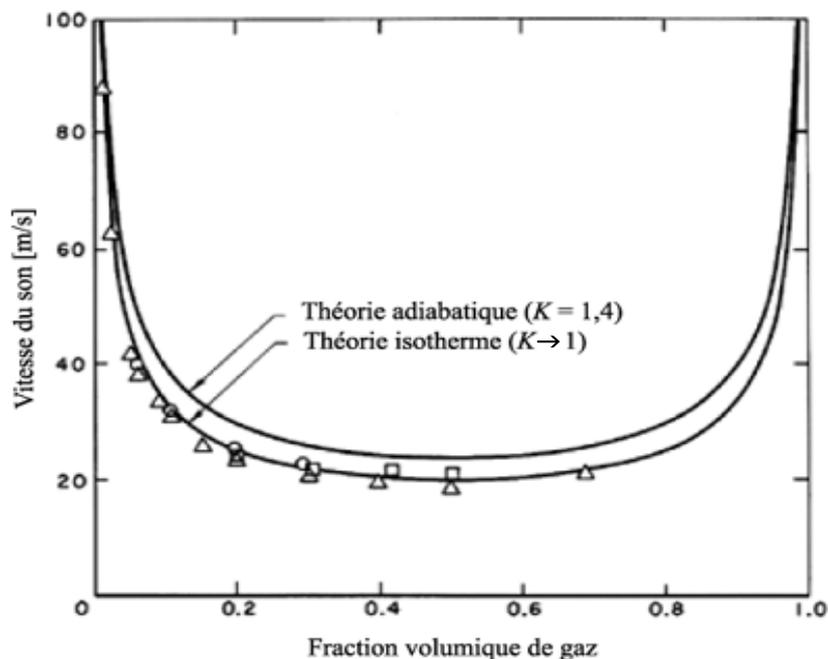


FIG. 2.1 – Vitesse du son d'un mélange diphasique composé d'eau liquide et de bulles d'air à la pression atmosphérique pour $K = 1,4$ et $K \rightarrow 1$: comparaison avec les données expérimentales de Karplus ainsi que celles de Gouse et Brown [25]

liquide, puisque c_f chute même jusqu'à une valeur de 2 m/s environ. Dumont [54] explique cet état de fait par les multiples réflexions des ondes de pression, dues aux nombreuses interfaces traversées, dans un milieu liquide comportant des bulles réparties de façon homogène, ce qui fait chuter la vitesse de propagation. Le nombre de Mach de l'écoulement indique alors des conditions supersoniques, avec des transitions brusques aux frontières des régions cavitantes [43].

Rappelons enfin que la relation 2.54 a été établie pour un mélange homogène sans changement de phase, ce qui pourrait être une explication supplémentaire aux faibles vitesses du son obtenues.

2.5.2 Intégration d'une équation d'état basée sur la vitesse du son

Lorsque l'on prend en considération le changement de phase, pour le cas du mélange purement diphasique f (constitué de carburant sous forme vapeur et liquide) à une température T_f fixée, la pression du mélange p_f va varier entre deux points : le "point de rosée", c'est-à-dire la valeur de la pression, notée P_v^{sat} , à partir de laquelle les premières gouttes de liquide apparaissent dans la vapeur, et le "point de bulle", c'est-à-dire la pression, notée P_l^{sat} , à partir de laquelle apparaissent les premières bulles de vapeur dans le liquide. On note alors ρ_v la densité du mélange pour le cas limite où la pression atteint P_v^{sat} et ρ_l pour le cas où la pression atteint P_l^{sat} . Ainsi, dans le mélange diphasique considéré où $P_v^{sat} < p_f < P_l^{sat}$, on a $\rho_v < \rho_f < \rho_l$.

Pour déterminer une relation du type $p_f = f(\rho_f)$, il nous faut partir de l'hypothèse

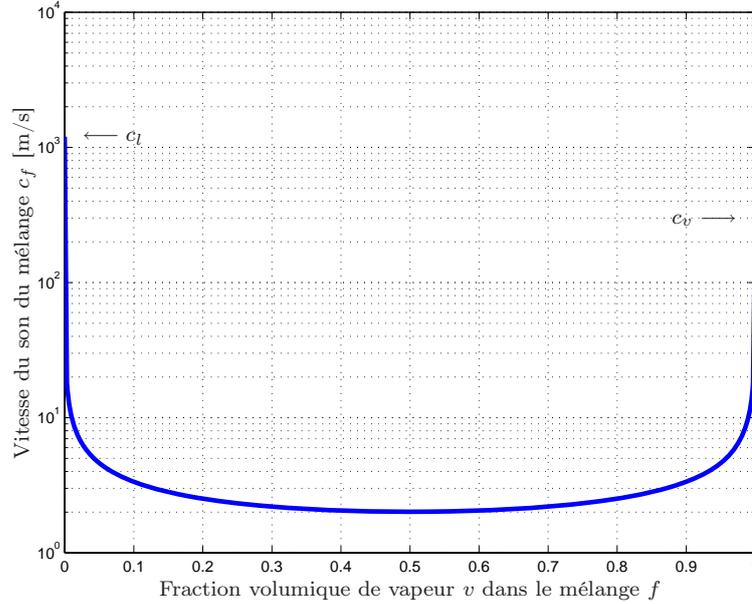


FIG. 2.2 – Vitesse du son c_f d'un mélange diphasique composé de carburant sous forme vapeur v de vitesse du son $c_v = 300$ m/s et de carburant sous forme liquide l de vitesse du son $c_l = 1200$ m/s

isentropique pour le mélange diphasique (équation 2.36) et, en utilisant l'expression de la vitesse du son c_f établie plus haut (équation 2.54), il vient que :

$$dp = [(1 - \alpha_v)\rho_l + \alpha_v\rho_v]^{-1} \left[\frac{(1 - \alpha_v)}{\rho_l c_l^2} + \frac{\alpha_v}{\rho_v c_v^2} \right]^{-1} d\rho \quad (2.56)$$

où ρ_l , ρ_v , c_l et c_v sont considérées constantes.

On intègre alors l'équation 2.56 pour $\rho_v < \rho_f < \rho_l$:

$$\int_{P^{sat}}^{P_f} dp = \int_{\rho_v}^{\rho_f} \left[\frac{1}{(1 - \alpha_v)\rho_l + \alpha_v\rho_v} \right] \left[\frac{\rho_l c_l^2 \rho_v c_v^2}{(1 - \alpha_v)\rho_v c_v^2 + \alpha_v \rho_l c_l^2} \right] d\rho \quad (2.57)$$

Cette intégration peut se simplifier par le biais d'un changement de variable. D'après la relation 2.33 il vient que :

$$d\rho = (\rho_v - \rho_l)d\alpha \quad (2.58)$$

Ainsi l'intégration précédente devient, après changement de variable :

$$\int_{P^{sat}}^{P_f} dp = \int_1^{\alpha_v} \left[\frac{\rho_v - \rho_l}{(1 - \alpha)\rho_l + \alpha\rho_v} \right] \left[\frac{\rho_l c_l^2 \rho_v c_v^2}{(1 - \alpha)\rho_v c_v^2 + \alpha\rho_l c_l^2} \right] d\alpha \quad (2.59)$$

soit, après intégration :

$$p_f - P_v^{sat} = P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v c_v^2 (\rho_l + \alpha_v(\rho_v - \rho_l))}{\rho_l (\rho_v c_v^2 - \alpha_v(\rho_v c_v^2 - \rho_l c_l^2))} \right] - P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v^2 c_v^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right] \quad (2.60)$$

avec P_{vl} une constante telle que :

$$P_{vl} = \frac{\rho_v c_v^2 \rho_l c_l^2 (\rho_v - \rho_l)}{(\rho_v^2 c_v^2 - \rho_l^2 c_l^2)} \quad (2.61)$$

La figure 2.3 représente la partie purement diphasique de l'équation d'état établie ci-dessus.

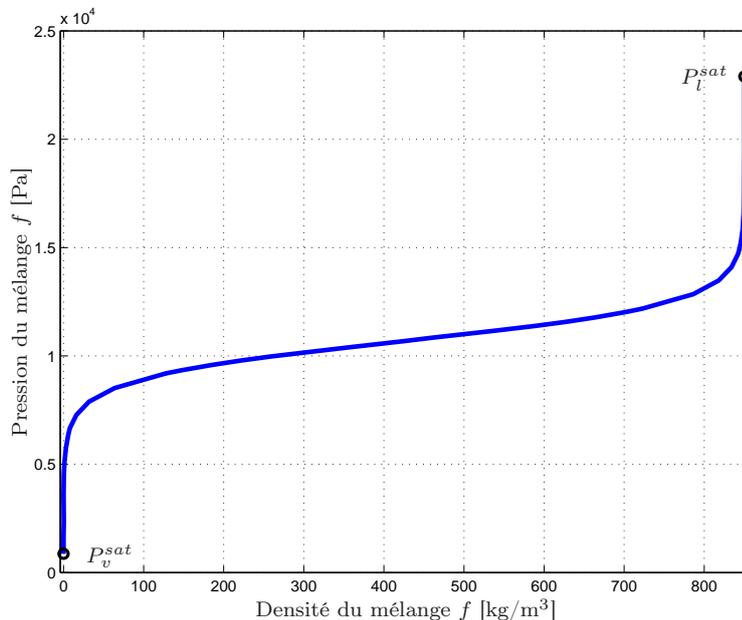


FIG. 2.3 – Partie purement diphasique (mélange de carburant liquide et vapeur) de l'équation d'état barotrope $p_f = f(\rho_f)$ ($\rho_v = 9,58 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $\rho_l = 850 \text{ kg/m}^3$, $c_v = 300 \text{ m/s}$ et $c_l = 1200 \text{ m/s}$)

2.5.3 Les phases pures

L'une des originalités du modèle de cavitation développé par Schmidt [152] réside dans le fait de prendre en compte la compressibilité des deux phases pures, alors que les études antérieures les considéraient comme incompressibles. La compressibilité est connue pour être significative en phase terminale du *collapse* d'une bulle, comme l'expliquent Knapp *et al.* [93] au moyen de modèles unidimensionnels.

Cas de la vapeur pure

Dans de telles conditions, on a $\rho_f < \rho_v$ et $p_f < P_v^{sat}$. On considère la vitesse du son c_v constante à l'intérieur de la vapeur pure et, à l'instar de Schmidt [152], on utilise comme précédemment une hypothèse isentropique :

$$\int_0^{p_f} dp = \int_0^{\rho_f} c_v^2 d\rho \quad (2.62)$$

soit :

$$\boxed{p_f = \rho_f c_v^2} \quad (2.63)$$

Cas du liquide pur

Pour le cas purement liquide, où $\rho_f > \rho_l$, l'hypothèse isentropique dans le liquide nous permet là encore d'écrire :

$$\int_{P_l^{sat}}^{p_f} dp = \int_{\rho_l}^{\rho_f} c_l^2 d\rho \quad (2.64)$$

en considérant, comme pour le cas de la vapeur pure, la vitesse du son c_l constante. Après intégration, on obtient :

$$p_f - P_l^{sat} = (\rho_f - \rho_l)c_l^2 \quad (2.65)$$

soit :

$$p_f = P_l^{sat} + (\rho_f - \rho_l)c_l^2 \quad (2.66)$$

2.5.4 Cas particuliers

Cas du point de rosée

Au point de rosée où α_v vaut 1, l'équation 2.60 devient :

$$p_f = P_v^{sat} + P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v^2 c_v^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right] - P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v^2 c_v^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right] = P_v^{sat} \quad (2.67)$$

ce qui est conforme à l'hypothèse du point de rosée. Afin d'assurer la continuité de l'équation d'état en ce point particulier, les relations 2.63 et 2.67, nous amènent à poser :

$$p_f = P_v^{sat} = \rho_v c_v^2 \quad (2.68)$$

Cas du point de bulle

Dans le cas où α_v vaut 0 (point de bulle), l'équation 2.60 devient :

$$p_f = P_v^{sat} + P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v \rho_l c_v^2}{\rho_v \rho_l c_v^2} \right] - P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v^2 c_v^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right] = P_v^{sat} - P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v^2 c_v^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right] \quad (2.69)$$

Au point de bulle, on a par définition $p_f = P_l^{sat}$ ce qui revient à écrire que :

$$P_l^{sat} = P_v^{sat} - P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v^2 c_v^2}{\rho_l^2 c_l^2} \right] \quad (2.70)$$

On peut alors réécrire la relation 2.60 valable dans le cas où $\rho_v \leq \rho_f \leq \rho_l$:

$$p_f = P_l^{sat} + P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v c_v^2 (\rho_l + \alpha_v (\rho_v - \rho_l))}{\rho_l (\rho_v c_v^2 - \alpha_v (\rho_v c_v^2 - \rho_l c_l^2))} \right] \quad (2.71)$$

2.5.5 Bilan

La pression p_f du mélange de carburant liquide et vapeur est donc déterminée de la manière suivante (figure 2.4) :

$$p_f = \begin{cases} \rho_f c_v^2 & \text{si } \rho_f < \rho_v \\ P_l^{sat} + P_{vl} \ln \left[\frac{\rho_v c_v^2 (\rho_l + \alpha_v (\rho_v - \rho_l))}{\rho_l (\rho_v c_v^2 - \alpha_v (\rho_v c_v^2 - \rho_l c_l^2))} \right] & \text{si } \rho_v \leq \rho_f \leq \rho_l \\ P_l^{sat} + (\rho_f - \rho_l) c_l^2 & \text{si } \rho_f > \rho_l \end{cases} \quad (2.72)$$

avec ρ_v , ρ_l , c_v et c_l constantes fixées en fonction des caractéristiques physiques des fluides considérés. P_{vl} et P_l^{sat} sont respectivement déterminées par les équations 2.61 et 2.70.

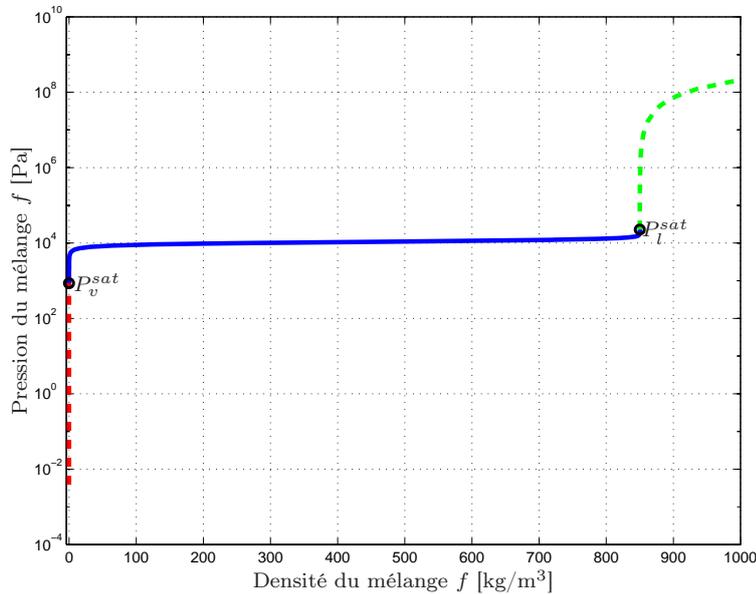


FIG. 2.4 – Équation d'état barotrope $p_f = f(\rho_f)$ utilisée pour le mélange de carburant liquide et vapeur ($\rho_v = 9,58 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $\rho_l = 850 \text{ kg/m}^3$, $c_v = 300 \text{ m/s}$ et $c_l = 1200 \text{ m/s}$)

Cette relation est continue (de classe \mathcal{C}^0), y compris pour les cas limites du point de rosée et du point de bulle.

2.6 Modélisation de l'écoulement en sortie d'un injecteur

On souhaite maintenant prendre en compte également le gaz (air) de la chambre de combustion. Pour cela, ce gaz est considéré comme une nouvelle phase g que l'on ajoute à la modélisation proposée dans la section 2.4. Ainsi, le mélange homogène f va être associé au gaz g pour former un nouveau mélange m homogène d'un point de vue dynamique (sans glissement).

Ce nouveau modèle peut donc être considéré comme une "sur-couche" du modèle décrit jusqu'ici : **le fluide m est ainsi un mélange "diphase" dont l'un des constituants, le carburant f , est lui-même un mélange diphase.** Dans ces conditions, on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de transfert direct de vapeur de cavitation vers le gaz de la chambre : cette vapeur demeure sous la forme de poches strictement incluses dans la phase liquide du carburant.

Ce type de modélisation "triphase" peut surprendre car la vapeur v des bulles de cavitation est également un gaz. On pourrait donc imaginer se ramener à un mélange purement diphase, constitué de liquide l , d'une part, et d'un mélange gazeux $\{v+g\}$, d'autre part. Si cette approche serait utile pour la prise en compte de l'évaporation des gouttes de liquide formées, elle nous conduirait en revanche à une impasse quant au traitement de la cavitation par une équation d'état barotrope telle que décrite dans la partie 2.5. On fait donc l'hypothèse que l'intégralité de la vapeur présente dans l'écoulement est due uniquement aux effets dynamiques (cavitation), et non à l'évaporation.

L'équation de conservation de la masse pour le mélange m s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.73)$$

avec u la vitesse du mélange m (qui est également la vitesse du mélange f , car on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre phases). Le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial \rho_m u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{m,ij}}{\partial x_j} \quad (2.74)$$

Un traceur permettant de déterminer la présence de carburant f dans le mélange m devient alors nécessaire. On choisit d'introduire, comme le fait Vallet [167] (cf. annexe A), la fraction massique de carburant Y_f (à l'intérieur du mélange m) définie comme suit :

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{Y_f}{\rho_f} + \frac{(1 - Y_f)}{\rho_g} \quad (2.75)$$

avec le terme $(1 - Y_f)$ qui représente la fraction massique de gaz dans le mélange m . On peut relier la fraction massique de carburant Y_f à sa fraction volumique α_f par la relation suivante :

$$\rho_m Y_f = \alpha_f \rho_f \quad (2.76)$$

La résolution du système d'équations de la mécanique des fluides nécessite donc l'ajout d'une équation de transport de la grandeur Y_f , qui revient à écrire un bilan de masse pour le mélange f :

$$\frac{\partial \rho_m Y_f}{\partial t} + \frac{\partial \rho_m Y_f u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.77)$$

Enfin, la viscosité μ_m du mélange est déterminée par une moyenne arithmétique des viscosités du carburant f et du gaz g :

$$\mu_m = \alpha_f \mu_f + (1 - \alpha_f) \mu_g \quad (2.78)$$

où μ_f est issue du calcul de l'équation 2.35 et μ_g est la viscosité du gaz considéré.

Par rapport à une écriture triphasique plus conventionnelle décrite en annexe B, l'approche adoptée offre la possibilité de n'utiliser que le sous-modèle concernant le mélange f , dans un cas sans gaz. Quoi qu'il en soit, cette annexe B montre que les deux formulations possibles ($f + g$ ou $l + v + g$) sont équivalentes.

2.7 Équation d'état pour le mélange carburant-gaz

Nous faisons l'hypothèse que l'équation d'état barotrope 2.72 est raisonnable pour traiter l'équilibre liquide-vapeur ($l + v$) de l'écoulement cavitant, qui est complètement piloté par la pression locale. En revanche, cette équation d'état n'a plus de sens pour prendre en compte le mélange carburant-gaz ($f + g$), qui est piloté par des phénomènes de mélange. Imaginons une boîte, remplie initialement de gaz et de carburant liquide, dont on diminue la pression : on observera la formation de vapeur à l'intérieur du liquide, mais les fractions massiques de carburant Y_f et de gaz g (à l'intérieur de l'ensemble du mélange m) demeureront indépendantes de la pression.

Le mélange m carburant-gaz est donc lui-même constitué d'un mélange f de carburant régi par l'équation d'état établie dans la partie 2.5 et d'un gaz que l'on va considérer comme parfait et isotherme. Le comportement du mélange m est ainsi défini pour les deux cas limites où l'on est en présence de carburant pur ($Y_f = 1$) ou de gaz pur ($Y_f = 0$). Mais qu'en est-il quand toutes ces phases coexistent ? L'objet de cette partie est donc de proposer une méthode permettant de déterminer une relation continue du type $p_m = f(\rho_m, Y_f)$.

2.7.1 Cas du gaz pur

Le gaz de la chambre de combustion est traité comme un gaz parfait :

$$p_g = \rho_g r_g T_g \quad (2.79)$$

où p_g est la pression du gaz, T_g sa température, considérée comme constante, et $r_g = \frac{R}{W_g}$ avec R la constante universelle des gaz parfaits et W_g la masse molaire du gaz.

On peut également considérer que le gaz g subit des transformations polytropiques : la pression du gaz p_g est alors proportionnelle à ρ_g^K , avec K le coefficient de détente polytropique. Une hypothèse isentropique nous conduirait à fixer $K = 1,4$. Mais pour une hypothèse isotherme ($K \rightarrow 1$), la relation obtenue ($p_g = C\rho_g$, avec C une constante) est conforme à la loi des gaz parfaits.

2.7.2 Détermination de la relation $p_m = f(\rho_m, Y_f)$

Le cas du carburant pur ayant été traité dans la partie 2.5, il reste à définir l'équation d'état du mélange m , lorsque celui-ci est constitué à la fois de carburant f et de gaz g .

L'établissement de cette relation se base sur l'hypothèse principale d'équilibre thermodynamique à l'interface entre les phases f et g . Considérant qu'il n'y a pas d'échanges thermiques entre phases pour le phénomène considéré (cavitation), cela revient à poser $p_f = p_g$. Nous verrons plus loin que cette hypothèse, classique pour un écoulement diphasique, doit cependant être précisée, pour le cas où la phase de carburant f est constituée uniquement de vapeur.

Connaissant ρ_m d'après la résolution de l'équation 2.73 et Y_f grâce à l'équation 2.77, il reste à déterminer une relation du type $p_m = f(\rho_m, Y_f)$ pour fermer

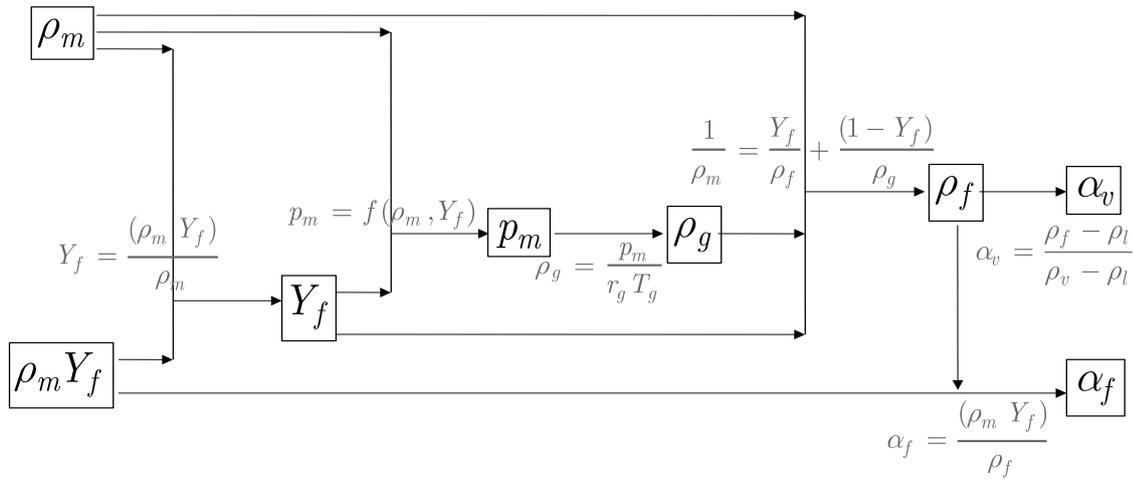


FIG. 2.5 – Schéma de résolution du modèle prenant en compte les phases carburant (à la fois liquide et vapeur) et gaz

le système d'équations du modèle présenté dans la partie 2.6, comme le montre le schéma de la figure 2.5.

Pour la détermination de la fonction $p_m = f(\rho_m, Y_f)$, l'équation 2.75 est la seule disponible pour relier ρ_m et Y_f . Mais elle ne permet pas le calcul de la pression directement, car il reste deux inconnues : ρ_f et ρ_g . Finalement, l'unique moyen de relier les grandeurs p_m , ρ_m et Y_f est de calculer $\rho_m = f(p_m, Y_f)$, puis de tabuler cette relation afin de pouvoir l'utiliser sous la forme souhaitée : $p_m = f(\rho_m, Y_f)$. Pour cela, la condition nécessaire est que la relation tabulée soit bijective², c'est-à-dire que :

$$\forall p_m \text{ et } Y_f \text{ fixés, } \exists \text{ une seule valeur de } \rho_m \text{ telle que } \rho_m = f(p_m, Y_f)$$

Les relations 2.72 et 2.79 sont strictement croissantes et, quelle que soit Y_f fixée entre 0 et 1, la fonction $\rho_m = f(p_m, Y_f)$ est également strictement croissante. La condition précédente est ainsi vérifiée et la bijectivité de la relation est démontrée. Cette relation strictement croissante permet aussi d'assurer, en tout point, une vitesse du son du mélange c_m réelle, en vérifiant que :

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{d\rho_m}{dp_m} > 0 \quad (2.80)$$

La méthode de tabulation, résumée par le schéma de la figure 2.6, consiste tout d'abord à fixer un couple de valeurs (ρ_f, Y_f) . Il est possible de déterminer la pression du carburant p_f , correspondant à la valeur de la masse volumique ρ_f choisie, au moyen de l'équation d'état 2.72 régissant le carburant (rappelons que, dans cette relation, α_l et α_v désignent respectivement la fraction volumique de liquide et de vapeur à l'intérieur du carburant f , soit $\alpha_l + \alpha_v = 1$). Grâce à l'hypothèse d'équilibre

²L'intérêt de la bijection est qu'à tout élément de l'ensemble de départ (antécédent), correspond exactement un élément de l'ensemble d'arrivée (image) ; on dit donc qu'un antécédent admet une unique image par f . On peut ainsi définir une application f^{-1} appelée application réciproque de f , qui va "dans l'autre sens" (associant à toute image son unique antécédent), et telle que $f \circ f^{-1}$ et $f^{-1} \circ f$ soient les applications identiques des ensembles respectifs. f^{-1} est aussi une bijection.

thermodynamique à l'interface carburant-gaz, on peut alors supposer $p_g = p_f (= p_m)$, ce qui conduit à la détermination de la masse volumique du gaz ρ_g , ce gaz étant considéré comme parfait (équation 2.79). Le calcul de la masse volumique ρ_m du mélange correspondant est alors rendu possible par la relation 2.75, la fraction massique de carburant Y_f ayant été fixée au préalable.

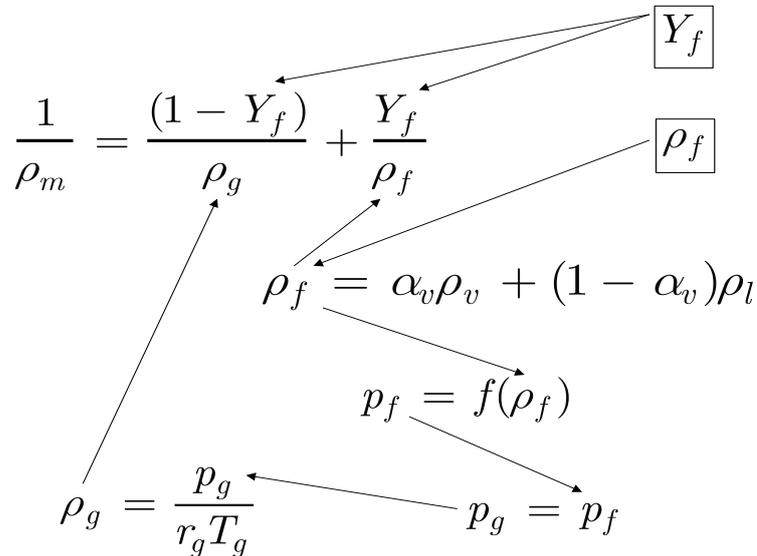


FIG. 2.6 – Schéma de construction de la relation $\rho_m = f(p_m, Y_f)$

On va alors réaliser cette opération pour un certain nombre de valeurs du couple (ρ_f, Y_f) , situées à l'intérieur de la plage de valeurs pouvant être atteintes au cours d'un calcul (typiquement $0 \leq \rho_f \leq 1000 \text{ kg/m}^3$ et $0 \leq Y_f \leq 1$). Le résultat est la construction d'une grille dont le support est la surface d'équation $\rho_m = f(\rho_f, Y_f)$, c'est-à-dire $\rho_m = f(p_m, Y_f)$ puisque fixer ρ_f revient à fixer p_m .

La grille obtenue est une surface continue, comportant trois parties qui correspondent aux trois parties de l'équation d'état du mélange f (équation 2.72).

Cas d'un carburant diphasique (constitué de vapeur et de liquide)

Pour le cas où la cellule élémentaire de calcul comprendrait simultanément les phases carburant diphasique ($l + v$) et gaz (g), l'équation d'état est une surface représentée sur la figure 2.7.

Cette surface présente de très forts gradients, dus principalement au rapport de densités élevé entre le liquide et le gaz et également à la raideur de l'équation d'état du carburant f (figure 2.3, page 76). Le raffinement de la grille est donc primordial de manière à bien représenter numériquement ces sauts violents, lors de l'implantation dans le code de calcul.

Cas d'un carburant constitué de liquide pur

La figure 2.8 représente la partie de l'équation d'état pour laquelle le liquide et le gaz seulement coexistent. Là encore, de forts gradients incitent à raffiner la grille de tabulation aux endroits les plus critiques.

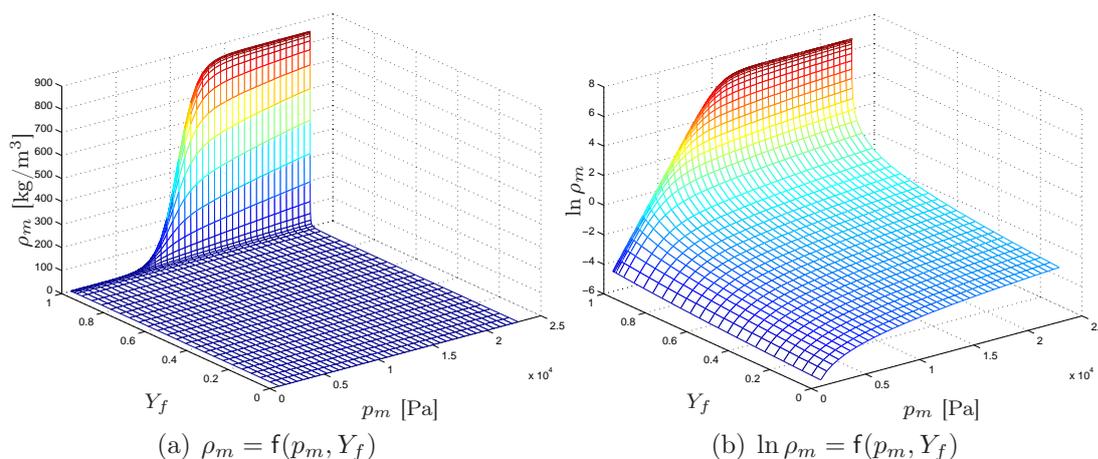


FIG. 2.7 – Équation d'état du mélange $m = (l + v) + g$, pour le cas où $\rho_v < \rho_f < \rho_l$

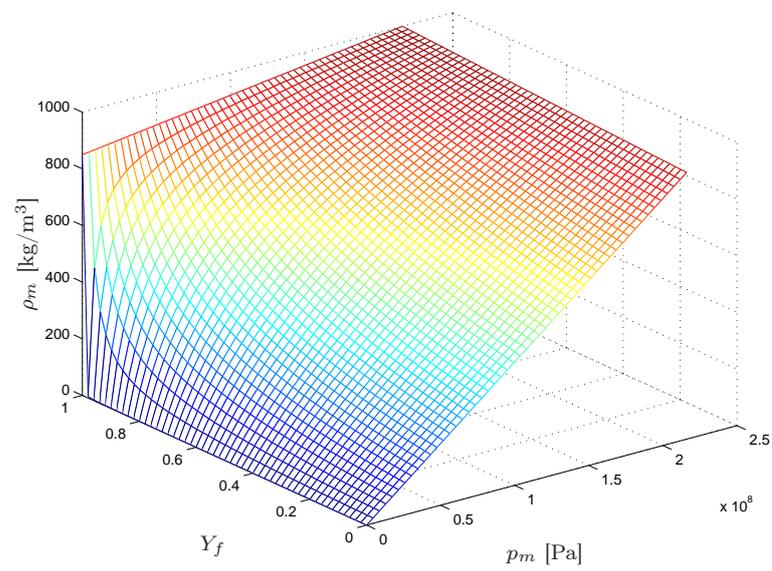
Cas d'un carburant constitué de vapeur pure

Comme pour les cas précédents, on pourrait construire une surface correspondant à une partie de l'équation d'état. Mais étant donné que le mélange contient uniquement du gaz g et de la vapeur v , celui-ci n'est plus diphasique et l'hypothèse selon laquelle $p_g = p_f$ à l'interface carburant-gaz n'est plus valable (un mélange gazeux devrait au contraire tenir compte des pressions partielles de chaque constituant).

Toutefois, d'après ce qui a été établi plus haut, la présence de bulles de cavitation (donc de la phase vapeur) à l'intérieur du carburant est dépendante de la pression. Le carburant est constitué de vapeur pure pour une plage de pressions s'étendant de 0 à P_v^{sat} ($\simeq 10^3$ Pa d'après l'équation 2.68, avec des caractéristiques physiques classiques pour un gazole) et peut contenir de la vapeur jusqu'à une pression P_l^{sat} ($\simeq 2 \cdot 10^4$ Pa d'après l'équation 2.70).

Dès la sortie de l'orifice d'injection, l'écoulement n'est plus confiné et le cisaillement à l'intérieur du liquide est moins important, surtout en périphérie du jet. Les dépressions locales ayant engendré la cavitation disparaissent et la pression tend alors à dépasser le seuil de présence de vapeur pure (P_v^{sat}). La résolution numérique dans le code CAVIF implique donc que le contact direct entre vapeur et gaz est hautement improbable : la fraction volumique de vapeur dans le carburant, à proximité du gaz, demeure strictement inférieure à 1 ce qui signifie qu'un film liquide demeure entre le gaz et la vapeur.

Physiquement, cela a pour effet de provoquer le *collapse* des bulles de cavitation à proximité de l'interface avec l'air. Autrement dit, la vapeur de carburant ne viendra jamais au contact direct du gaz g pour se mélanger avec lui car elle sera toujours recondensée à l'intérieur de la phase f , ce qui est conforme aux observations expérimentales de Miranda *et al.* [116] par exemple.

FIG. 2.8 – Équation d'état du mélange $m = l + g$

2.8 Conclusion

Pour la représentation des écoulements multiphasiques auxquels on s'intéresse, un modèle de mélange a été choisi, c'est-à-dire que l'on considère les différentes phases en présence comme étant un seul pseudo-fluide, noté m , dont les propriétés physiques varient en fonction de sa constitution. Une attention particulière doit en outre être portée au modèle puisqu'on souhaite observer le phénomène de cavitation qui semble surpasser de nombreux autres effets présents. Les principales hypothèses du modèle adopté sont résumées ci-après :

- Bien que l'écoulement soit turbulent, la cavitation est considérée comme le phénomène prépondérant et les équations résolues supposent un écoulement laminaire. L'hypothèse consiste donc à résoudre les écoulements secondaires et recirculations en même temps que la cavitation, en négligeant les effets de la turbulence.
- La tension de surface ainsi que les forces dues à la gravité sont considérées comme négligeables au regard des phénomènes violents résolus.
- Le glissement entre phases n'est pas pris en compte : on suppose qu'il existe une seule et même vitesse u_m pour le mélange des différentes phases.
- Le "macro-modèle" diphasique, constitué d'une phase carburant f et d'une phase gazeuse g , contient un "sous-modèle" diphasique puisque le carburant f peut aussi bien se présenter sous forme liquide l que vapeur v due à la cavitation.
- Le comportement du carburant f est gouverné par une équation d'état barotrope, comme fréquemment lorsque l'on traite d'écoulements cavitants.
- L'équation d'état régissant le mélange m est basée sur une hypothèse d'équilibre thermodynamique à l'interface entre les phases f et g : la pression p_m représente donc la pression du mélange m .

Enfin, la stabilité numérique de la méthode utilisée pour modéliser les phénomènes de cavitation et d'atomisation apparaît primordiale dans le contexte de la simulation numérique. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons à l'implantation du modèle présenté ici dans un code de calcul tridimensionnel.