

Chapitre II : Modélisation analytique selon Johnson-Champoux- Allard de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux multicouches

Introduction

La transmission, la réflexion et l'absorption sonore des parois minces sont des domaines qui ont été de nombreuses fois traités auparavant. Les premières études sont sorties dans les années 1930. H. Reissner a donné une solution exacte de la transmission sonore d'une structure uni couche plane et l'a appliquée aux plaques minces et épaisses. L'approche a ensuite été approfondie pour la transmission des plaques simples et étendue à des systèmes à double paroi et autres systèmes plus complexes. Nous pouvons trouver dans la littérature une quantité impressionnante d'études sur la transparence acoustique de parois légères [16].

II.1 Présentation du problème

Considérons un matériau poreux soumis à une onde acoustique, et vérifiant les hypothèses suivantes :

- le matériau poreux est homogène et isotrope, saturé par un fluide interstitiel ;
- nous faisons l'hypothèse d'un « squelette rigide » qui n'est pas mis en vibration par les ondes acoustiques ;
- les pores constituent un réseau interconnecté et ouvert sur l'extérieur, de plus, ils peuvent être décrits par une même dimension caractéristique ;
- la dimension caractéristique des pores est supposée faible par rapport à la dimension caractéristique de l'onde ;
- nous nous plaçons dans le cadre de l'acoustique linéaire, si bien que l'on ne considère que les petites variations des grandeurs acoustiques autour de leur valeur à l'équilibre.

Nous choisissons ici une situation classique qui est illustrée par la figure 4. Nous considérons donc une structure constituée de trois milieux consécutifs : un milieu gazeux (1), un milieu poreux rigide (2) et un milieu quelconque (3). Le problème est ici supposé unidimensionnel, c'est-à-dire que nous ne considérons que des ondes incidentes planes perpendiculaires aux interfaces entre les différents milieux. Nous

supposons que les effets de surface sont négligeables, ce qui permet d'écrire des conditions aux limites par continuité.

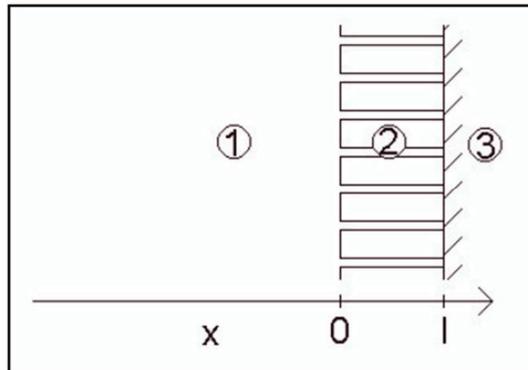


Figure 4 – Un milieu poreux soumis à une onde acoustique plane se propageant en incidence normale dans la direction \vec{e}_x , et adosse à une terminaison rigide [3].

Une onde acoustique incidente sinusoïdale arrive par le milieu gazeux ; elle va être partiellement réfléchiée par le milieu (2), et partiellement transmise dans ce même milieu, arrivée à l'interface du milieu (3), elle va être complètement réfléchiée, puis partiellement réfléchiée par le milieu (1), et ainsi de suite.

L'onde acoustique peut être décrite par la pression en tout point, et les conditions aux limites font aussi intervenir le champ de vitesse ; dans les calculs qui suivent la pression à l'équilibre se simplifie, nous considérerons uniquement la surpression. Dans le milieu (1), nous décomposons la pression acoustique et la vitesse moyenne en onde incidente (i) et réfléchiée (r), soit avec des notations complexes :

$$\begin{cases} p = p_i e^{i(\omega t - kx)} + p_r e^{i(\omega t + kx)} \\ v = v_i e^{i(\omega t - kx)} + v_r e^{i(\omega t + kx)} \end{cases} \quad (2.1)$$

où k est le nombre d'onde du milieu gazeux, p_i pression acoustique incident, p_r pression acoustique réfléchi, v_i vitesse acoustique incident et v_r vitesse acoustique réfléchi.

De même, dans le milieu (2), nous pouvons décomposer la pression acoustique et la vitesse en une onde progressive (+) et une onde régressive (-) :

$$\begin{cases} p = p_+ e^{i(\omega t - k'x)} + p_- e^{i(\omega t + k'x)} \\ v = v_+ e^{i(\omega t - k'x)} + v_- e^{i(\omega t + k'x)} \end{cases} \quad (2.2)$$

où k' est le nombre d'onde du milieu poreux.

Les vitesses peuvent être reliées à la pression par les équations de la dynamique respective. Dans l'air libre nous avons :

$$\begin{aligned} \rho_0 i \omega v &= \pm i k p \\ v_i &= \frac{p_i}{Z_\infty}, v_r = \frac{p_r}{Z_\infty}, Z_\infty = \rho_0 c_\infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

Quant à l'air dans le milieu poreux, nous l'exprimons par :

$$\begin{aligned} \rho_{eff} i \omega v &= \pm i k p \\ v_+ &= \frac{p_+}{Z_\infty}, v_- = \frac{p_-}{Z_\infty}, Z = \rho_{eff} c_\infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

Z_∞ et Z sont les impédances du milieu (1) et de la partie fluide du milieu (2) respectivement. En tenant compte de la porosité ϕ du milieu (2), nous pouvons définir l'impédance globale Z_{eff} du milieu (2) par :

$$Z_{eff} = \frac{Z}{\phi} \quad (2.5)$$

Cette définition est intéressante car elle décrit l'ensemble du milieu (2) comme un fluide équivalent d'impédance effective Z_{eff} .

Entre (1) et (2), nous supposons la continuité de la pression et du débit de gaz, d'où les conditions aux limites en $x=0$:

$$\begin{cases} p_i + p_r = p_+ + p_- \\ v_i + v_r = \phi (v_+ + v_-) \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous pouvons faire intervenir la porosité pour traduire que le débit est donné par la vitesse moyenne multipliée par la section de l'écoulement, qui dans le milieu poreux est inférieure à celle du milieu (1) proportionnellement à la porosité.

Entre (2) et (3), le milieu (3) étant rigide, nous pouvons écrire la nullité de la vitesse en $x=l$:

$$v_+ e^{-ik'l} + v_- e^{-ik'l} = 0 \quad (2.7)$$

l est l'épaisseur du milieu (2).

Nous obtenons donc trois équations reliant les paramètres des différents milieux, plus les quatre équations de la dynamique, soit sept équations pour huit inconnues. Nous pouvons alors exprimer toutes les quantités en fonction d'une seule, à savoir la pression incidente, ce qui est physiquement satisfaisant. Ce faisant, nous pouvons calculer la part d'énergie réfléchie et d'énergie absorbée par le milieu (2) de manière absolue.

Commençons par éliminer la vitesse dans les équations aux limites :

$$\begin{cases} p_i + p_r = p_+ + p_- \\ \frac{p_i - p_r}{Z_\infty} = \frac{p_+ - p_-}{Z_{eff}} \\ p_+ e^{-ik'l} = p_- e^{-ik'l} \end{cases} \quad (2.8)$$

Exprimons les quantités du milieu (1) en fonction de p_+ . Nous avons :

$$\begin{cases} p_i + p_r = p_+ (1 - e^{-2ik'l}) \\ p_i - p_r = \frac{Z_\infty}{Z_{eff}} p_+ (1 - e^{-2ik'l}) \end{cases} \quad (2.9)$$

D'où nous tirons :

$$\begin{cases} p_i = \frac{p_+}{2} \left((1 + e^{-2ik'l}) + \frac{Z_\infty}{Z_{eff}} (1 - e^{-2ik'l}) \right) \\ p_r = \frac{p_+}{2} \left((1 + e^{-2ik'l}) - \frac{Z_\infty}{Z_{eff}} (1 - e^{-2ik'l}) \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous obtenons ainsi le coefficient de réflexion complexe :

$$r = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_{eff} - itg(k'l)}{Z_{eff} + itg(k'l)} \quad (2.11)$$

$$\tau = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_{eff}}{Z_{eff} + itg(k'l)} \quad (2.12)$$

Au passage, nous voyons que si Z_{eff} et k' sont réels, le coefficient de réflexion est un rapport de nombres complexes conjugués, donc de module 1 : ceci exprime que si s'il n'y a pas de dissipation, l'onde réfléchie est de même intensité que l'onde incidente et l'énergie acoustique est conservée. Le coefficient d'absorption α

est simplement la différence relative d'énergie acoustique entre l'onde incidente et l'onde réfléchie :

$$\alpha = 1 - |r|^2 \quad (2.13)$$

$$TL = -10 \log(\tau_1) \quad (2.14)$$

où TL la transmission loss ou indice d'affaiblissement exprimé en dB, r le coefficient de réflexion, τ_1 le coefficient de transmission et α est le coefficient d'absorption.

II.2 Modélisation des matériaux multicouches

Nous avons vu dans le chapitre I que les propriétés acoustiques des matériaux poreux homogènes peuvent être prédites à partir des paramètres descriptifs de la géométrie des pores ou du squelette, et descriptifs des propriétés structurelles du squelette grâce à des modèles semi-phénoménologiques ou empiriques.

Les propriétés acoustiques des matériaux à structure multicouche peuvent elles aussi être prédites, mais leur calcul s'avère automatiquement plus compliqué dans la mesure où les propriétés de toutes les couches doivent être prises en compte ainsi que le couplage entre les couches successives. Une méthode a été développée afin de décrire ce type de matériaux à l'aide d'une matrice de transfert résultant des propriétés de l'ensemble des couches.

II.3 Principe

Nous nous appuyons dans cette thèse sur la méthode de la matrice de transfert décrite dans l'ouvrage de la référence [16]. Nous considérons une structure composée de n couches supposées homogènes, isotropes, et de dimensions latérales infinies. La structure multicouche est représentée à la figure 5.

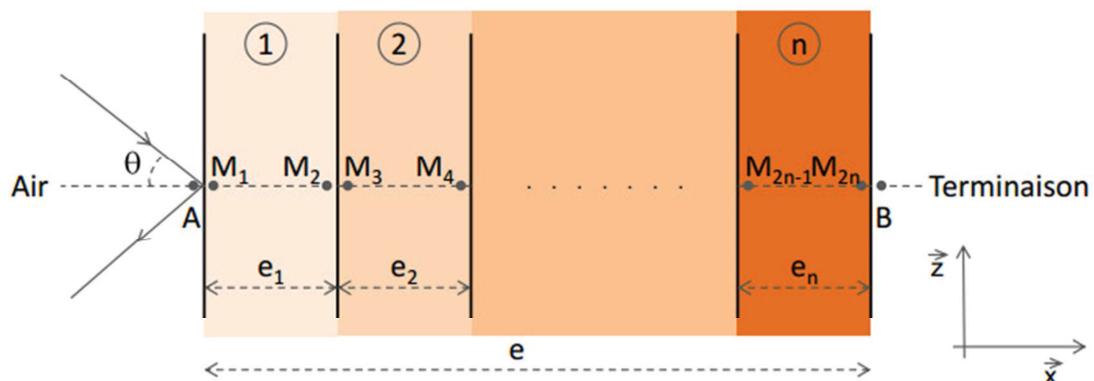


Figure 5 – Représentation de la structure multicouche considérée [1].

Nous nous intéressons uniquement dans cette thèse à des couches de matériaux poreux, caractérisées par un comportement fluide-équivalent ou poroélastique. Ainsi la matrice de résolution est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & -e^{j2k \cos \theta z} & 1 & e^{j2k \cos \theta z} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & e^{j2k \cos \theta z} & 1 & (-\beta_{pl} - 1)e^{j2k \cos \theta z} & (\beta_{pl} - 1) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e^{j2k \cos \theta z} & 1 & e^{j2k \cos \theta z} & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -e^{j2k \cos \theta z} & 1 & (-\beta_{pl} - 1)e^{j2k \cos \theta z} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ A_i \\ B_i \\ A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ \dots \\ A_n \\ B_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

Les A_i sont les amplitudes de pression dans la couche i

les variables β_{pli} correspondent aux plaques i :

$$\beta_{pli} = \frac{Z_{pl}(\theta, \omega) \cos \theta}{\rho_0 c} \quad (2.16)$$

si la plaque i est un milieu poreux, alors

$$Z_{pl} = \rho_0 c Z_{mp} \quad (2.17)$$

si la plaque i est une plaque simple flexible :

$$Z_{pl} = \frac{B_{pl} (k_s \sin \theta)^4 - \rho_{pl} e_{pl} \omega^2}{i\omega} = \frac{\omega^2 \rho_{pl} e_{pl} \left(\frac{c_{pl}^4 \sin^4 \theta}{c^4} - 1 \right)}{i\omega} \quad (2.18)$$

avec c_{pl} est la vitesse de flexion : $c_{pl} = \left[\left(\frac{B_{pl}}{\rho_{pl} e_{pl}} \right) \omega^2 \right]^{1/4}$ et B_{pl} est le module de

rigidité à la flexion : $B_{pl} = \frac{E_{pl} e_{pl}^3}{12(1 - \nu_{pl}^2)}$

II.4 Prise en compte des vibrations du milieu poreux

Jusqu'à présent, le milieu poreux était supposée totalement rigide, et le modèle ne prenait pas en compte les vibrations de la structure. Les mouvements du milieu poreux peuvent diminuer les phénomènes de viscosité, et modifier l'affaiblissement. Cela provoque des puits d'absorption.

L'effet de viscosité dépend de la vitesse relative définie par $V_{relat} = V_{part} - V_{vib}$ si les vibrations de la plaque sont négligeables devant les déplacements particuliers, alors $V_{relat} \approx V_{part}$ et le modèle proposé reste valide. Mais si elles sont du même ordre de grandeur, alors toutes les données sont modifiées ; les phénomènes de vibrations doivent être pris en compte et les impédances du milieu poreux modifiées.

Pour tenter d'intégrer ces phénomènes vibratoires dans le modèle en conservant l'approche théorique des milieux poreux, nous proposons d'utiliser une impédance effective (équivalent) pour les milieu poreux : Z_{eff} . Elle est composée d'une impédance de viscosité (Z_{visc}) et d'une impédance de vibration (Z_{vib}). Ces deux impédances sont couplées en parallèle comme suit (Figure 6) :

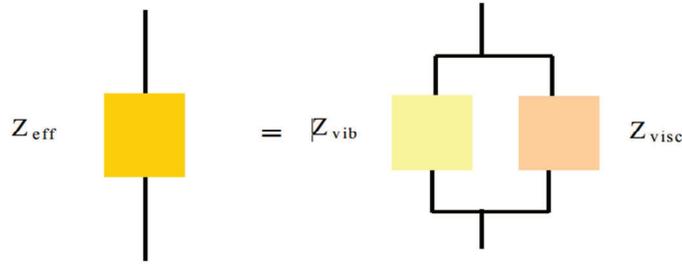


Figure 6 – Schéma représentant l'impédance effective du milieu poreux, prenant en compte les vibrations propres de la plaque [16].

L'impédance est donnée par analogie avec un système mécanique. En effet si nous considérons que la vitesse des particules d'air est donnée par $V_{part} = \frac{\Delta P}{Z_{eff}}$, la vitesse

de la plaque par $V_{vib} = \frac{\Delta P}{Z_{vib}}$ et la vitesse dans les perforations par $V_{relat} = \frac{\Delta P}{Z_{visc}}$

$$\text{alors } \frac{\Delta P}{Z_{eff}} = \frac{\Delta P}{Z_{vib}} + \frac{\Delta P}{Z_{visc}} \quad (2.19)$$

$$\text{et } Z_{visc} = Z_{mp} \rho_0 c = Z_{MP}, Z_{vib} = \omega^2 \rho_{pl} e_{pl} \left(\frac{c_{pl}^4 \sin^4 \theta}{c^4} - 1 \right) / i\omega \quad (2.20)$$

avec $Z_{MP} = \sqrt{\rho(\omega) * K(\omega)}$

où $\rho(\omega)$ est la masse volumique effective et $K(\omega)$ le module de compressibilité dynamique du modèle de Johnson-Champoux-Allard.

L'expression de l'impédance effective du milieu poreux est :

$$Z_{eff} = \frac{Z_{vib} \cdot Z_{visc}}{Z_{vib} + Z_{visc}} \quad (2.21)$$

II.5 Méthode de résolution

Le calcul des propriétés acoustiques d'une structure multicouche grâce à la méthode de la matrice de transfert [17] repose sur le processus suivant :

1. Evaluation de la matrice de transfert de chaque couche composant le matériau ;
2. Calcul des matrices d'interface permettant d'assurer la continuité des grandeurs acoustiques entre deux couches successives ;
3. Evaluation de la matrice de transfert globale par compilation de toutes les matrices de transfert et d'interface ;
4. Résolution du problème en fixant une condition limite à l'extrémité du matériau, nous considérons généralement :
 - une terminaison rigide d'impédance infinie ;
 - une terminaison semi-infinie.
5. Calcul des propriétés acoustiques α ou TL .

Les caractéristiques des matériaux poreux utilisés sont présentées dans les Tableaux 2 et 3.

Tableau 2-Paramètres de la plaque testée [17]

$\rho_{pl} (kg.m^{-3})$	$E_{pl} (Pa)$	ν_{pl}	η_{pl}
1100	$2.62 \cdot 10^9$	0.45	0.0624

Tableau 3-Propriétés des matériaux utilisés [2].

Matériau	Laine de verre	Laine de verre1	Fibreux textile	Mousse	Mousse1	Mousse polymère	Mousse polymère1
$L(m)$	29	25	23	24	22	18.9	30
$\sigma_R(Nm^{-4}s)$	105	35	23	6.6	17	57	5.6
ϕ	0.95	0.98	0.95	0.98	0.97	0.97	0.98
α_∞	1	1	1	1.03	1.02	1.54	1.15
$\Lambda(\mu m)$	35.1	60	54.1	200	240	24.6	90.7
$\Lambda'(\mu m)$	105.3	150	162.3	380	490	73.8	272.1
$E(KPa)$	1.4	10	17	292.8	505	214	190
ν	0	0.45	0	0.2	0.3	0.3	0.3
η	0.1	0.2	0.1	0.06	0.07	0.115	0.07
$\rho(Kgm^{-3})$	17	9.1	58	11.2	10	46	28

II.6. Indice d'affaiblissement (TL) appliqué au modèle de Johnson-Champoux-Allard pour différentes configurations

Les configurations que nous avons utilisées ci-après sont :

- Milieu Poreux-Air-Mur rigide ;
- Milieu Poreux-Air-Plaque flexible ;
- Air-MP-Mur rigide ;
- Air-MP-Plaque flexible ;
- Milieu Poreux flexible-Air ;
- Milieu Poreux flexible-Air-Mur rigide ;
- Plaque-Air-Plaque.

Exemple : Nous prenons le cas de la configuration MP-Air-Plaque flexible (incidence plane).

Les champs de pression ainsi que les vitesses normales dans les 3 régions sont :

Région I :

$$P_I = e^{-ik_0z} (A_0 e^{ik_0x} + B_0 e^{-ik_0x}) \text{ et } V_I = -\frac{e^{-jk_0z}}{\rho_0 c_0} (A_0 e^{ik_0x} - B_0 e^{-ik_0x}) \quad (2.22)$$

Région II :

$$P_{II} = e^{-ik_1z} (A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}) \text{ et } V_{II} = -\frac{e^{-jk_1z}}{\rho_1 c_1} (A_1 e^{ik_1x} - B_1 e^{-ik_1x}) \quad (2.23)$$

Région III :

$$P_{III} = e^{-jk_2z} A_2 e^{jk_2x} \text{ et } V_{III} = -A_2 \frac{e^{-jk_2z}}{\rho_2 c_2} e^{jk_2x} \quad (2.24)$$

avec $\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k_i x = k_i \sin \theta \\ k_i z = k_i \cos \theta \end{pmatrix}$ et le nombre d'onde $k_i = \frac{\omega}{c_i}$, $\rho_{0,1,2}$ et $c_{0,1,2}$ correspond à la

masse volumique et la célérité des régions I, II, III. Dans la plupart des cas, les 3 régions sont composées d'air.

La plaque est considérée comme mince nous pouvons appliquer la continuité des vitesses particulières de chaque côté de la plaque. L'expression générale de l'impédance de plaque est utilisée sur les limites de plaque :

$$Z_{pl} = \frac{\Delta P}{V} \Big|_{z=z_p} \quad (2.25)$$

Les conditions aux limites sont :

En $z=0$: il y a continuité des vitesses normales et de la pression :

$$P_I(x=0, z) = P_{II}(x=0, z) \text{ et } V_I(z=0) = V_{II}(z=0) \quad (2.26)$$

En $z=d_1$:

$$P_{II}(x=d_1, z) = P_{III}(x=d_1, z) \\ \text{ et } V_{II}(x=d_1, z) = V_{III}(x=d_1, z) = i\omega u_{pl}(x, t) \quad (2.27)$$

où u_{pl} est le déplacement de la plaque.

L'équation de plaque flexible est donnée par :

$$B_{pl} \nabla^4 u_{pl}(x, t) + \rho_{pl} e_{pl} \frac{\partial^2 u_{pl}(x, t)}{\partial t^2} = p_{III}(x = d_1, z) - p_{II}(x = d_1, z) \quad (2.28)$$

La solution u_{pl} de (2.28) est de la forme : $u_{pl}(x, y, t) = B_2 e^{i\omega t} e^{-i(k_x x)}$

L'application des conditions limites donne sur les amplitudes de pression donnent le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \left[1 - \frac{Z_{mp}}{\rho_0 c_0}\right] & \left[1 + \frac{Z_{mp}}{\rho_0 c_0}\right] & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[-\frac{e^{jk_1 d_1}}{\rho_1 c_1}\right] & \left[\frac{e^{-2jk_1 d_1}}{\rho_1 c_1}\right] & \left[-\frac{1}{\rho_2 c_2}\right] & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-jk_1 d_1} & -e^{jk_1 d_1} & e^{-jk_2 d_1} & Z_{pl} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-ik_2 d_1}}{\rho_2 c_2} & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0$$

avec $Z_{mp} = \sqrt{\rho_1 K}$, $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$

$$\rho_1 = \rho_0 \alpha_\infty \left(1 + \frac{\sigma_R \phi}{i\omega \alpha_\infty \rho_0} \sqrt{1 + \frac{4i\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 \omega}{\sigma_R \Lambda^2 \phi^2}} \right),$$

$$K = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \frac{1}{1 + \frac{8\eta}{i\Lambda'^2 \text{Pr} \omega \rho_0} \sqrt{1 + i\rho_0 \frac{\omega \text{Pr} \Lambda'^2}{16\eta}}}}$$

où ρ_1 masse volumique effectif, K module de compressibilité dynamique, c_1 célérité dans le matériau, c_2 célérité de l'air.

Nous résolvons le système en exprimant A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 en fonction de l'amplitude de l'onde incidente A_0 . Le choix de A_0 n'a pas d'incidence sur les résultats.

Les coefficients énergétiques sont :

$$\text{La réflexion : } r = \frac{|B_0|^2}{|A_0|^2}$$

$$\text{La transmission : } \tau_1 = \frac{|A_2|^2}{|A_0|^2}$$

$$\text{Le coefficient d'absorption : } \alpha = 1 - r^2$$

$$\text{L'indice d'affaiblissement : } TL = -10 \log(\tau_1)$$

Dans ce qui va suivre, nous allons appliquer ces différents modèles aux différentes configurations citées plus haut.

II.7 Résultats

Sur la figure 7, nous voyons effectivement que les valeurs moyennes caractérisées oscillent entre 10 et 70 dB pour une épaisseur de seulement 23 cm de matériau dans la configuration «MP-Air-Mur rigide». Tandis que dans la figure 8, elle est comprise entre -10 à 50 dB. L'indice d'affaiblissement négatif montre que le son ne passe pas c'est-à-dire que le son est réfléchi. Nous remarquons aussi que l'indice d'affaiblissement est maximum dans les deux configurations pour le cas de mousse 1. Cela est due au fait que la mousse 1 possède une résistivité de l'air plus importante.

Pour la configuration «MP-Air-Mur rigide» (Figure 7), l'ordre de l'indice d'affaiblissement est le suivant :

$$TL_{\text{Mousse1}} > TL_{\text{Laine de verre}} > TL_{\text{Mousse polymère}} > TL_{\text{Laine de verre 1}} > TL_{\text{Fibre textile}} > TL_{\text{Mousse polymère}} > TL_{\text{Mousse}}$$

Pour la configuration «MP-Air-Plaque flexible», l'ordre de l'indice d'affaiblissement est de 80 dB (Figure 8). Les courbes de l'indice d'affaiblissement sont confondues. Ce qu'il faut remarquer que dans la Figure 7 c'est-à-dire la configuration «MP-Air-Mur rigide» que la transmission loss atteint la valeur 70 dB pour 4000 Hz, alors que pour la configuration «MP-Air-Plaque flexible», la valeur maximale de l'indice d'affaiblissement est de 90 dB. Nous voyons aussi qu'elle est minimum pour le cas de la mousse de l'ordre de 50 dB et maximum pour la mousse 1 qui ne dépasse pas 80 dB (Figure 7). Les matériaux restant oscillent entre 40 et 65 dB.