

### 1.10 Modelage des matrices de sensibilité

*Définition 1.06 :*

Nous définissons deux indicateurs de performance à partir de la norme  $H_\infty$  sur les matrices de sensibilité et sensibilité complémentaire par [1.05]:

$$M_S = \|S\|_\infty \text{ et } M_T = \|T\|_\infty$$

$M_S$  et  $M_T$  correspondent à un pic de la courbe de gain de chacun des transferts considérés.

Des valeurs de  $M_S$  et  $M_T$  grands indiquent une faible performance du système ainsi qu'une faible robustesse vis-à-vis des perturbations pouvant l'affecter. Des valeurs typiques sont données par :  $M_S \leq 2$  (6 dB) et  $M_T \leq 1,25$  (2dB).

#### 1.10.1 Marge de module

La marge du module est donc la plus petite distance du point critique au lieu de transfert en boucle ouverte :

$$\Delta M = 1/M_S \quad (1.29)$$

#### 1.10.2 Bande passante en boucle fermée

La bande passante en boucle fermée est définie par la pulsation de coupure  $\omega_c$  pour laquelle :

$$\|S(j\omega_c)\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.30)$$

### 1.11 Différentes formes de modèles d'erreurs

| <i>Forme du modèle d'erreurs</i> | <i>Processus perturbé <math>\tilde{G}</math></i> | <i>Condition de robustesse en stabilité</i> | <i><math>W_{2h}</math></i> |
|----------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------|
| Additive directe                 | $[G + \Delta_{ns}]$                              | $\ W_2 K S\ _\infty < 1$                    | $W_2 G^{-1}$               |
| Additive inverse                 | $[(I + G \Delta_{ns})^{-1} G]$                   | $\ W_2 G S\ _\infty < 1$                    | $W_2 K^{-1}$               |
| Multiplicative directe en sortie | $[(I + \Delta_{ns}) G]$                          | $\ W_2 T\ _\infty < 1$                      | $W_2$                      |
| Multiplicative directe en entrée | $G[(I + \Delta_{ns})]$                           | $\ W_2 T'\ _\infty < 1$                     | $W_2$                      |
| Multiplicative inverse en sortie | $[(I + \Delta_{ns})^{-1} G]$                     | $\ W_2 S\ _\infty < 1$                      | $W_2 (GK)^{-1}$            |
| Multiplicative inverse en entrée | $[G(I + \Delta_{ns})^{-1}]$                      | $\ W_2 S'\ _\infty < 1$                     | $W_2 (KG)^{-1}$            |

**Tableau 1.01 : Différentes formes de modèles d'erreurs**

### 1.12 Gabarit de la robustesse en stabilité

Dans le cas général, on peut mettre les différentes conditions de robustesse en stabilité du système perturbé en boucle fermée sous la forme [1.05] [1.06]:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \|W_{2h}T\|_{\infty} < 1 \quad (1.31)$$

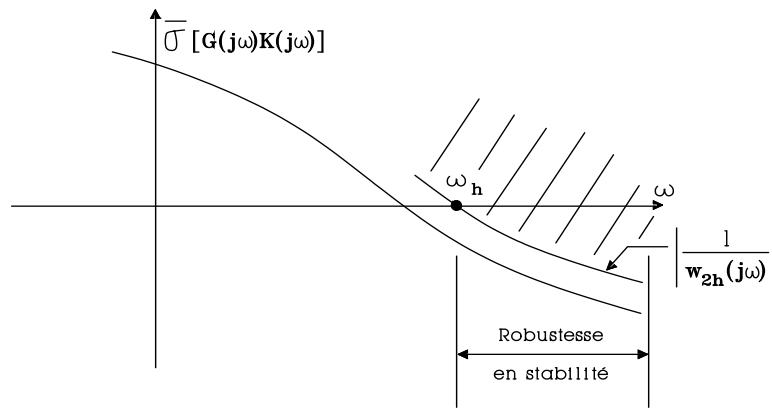
Cette inégalité est équivalente à :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \bar{\sigma}[T(j\omega)] < \frac{1}{|W_{2h}(j\omega)|} \quad (1.32)$$

En utilisant la propriété des valeurs singulières et l'inégalité (1.32), nous avons :

$$\forall \omega \in (\omega_h, +\infty), \bar{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] < \frac{1}{|W_{2h}(j\omega)|} \quad (1.33)$$

Nous obtenons le gabarit de la robustesse en stabilité de la figure 1.13 :



**Figure 1.13 : Gabarit de la robustesse en stabilité**

### 1.13 Robustesse en performance

Nous dirons que le système bouclé perturbé satisfait la robustesse en performance si la condition de performance nominale est vérifiée pour toute une classe de processus de matrices de transfert  $\tilde{G}$ , différent de  $G$  par l'une quelconque des formes de représentation des incertitudes de modèle.

*Définition 1.07:*

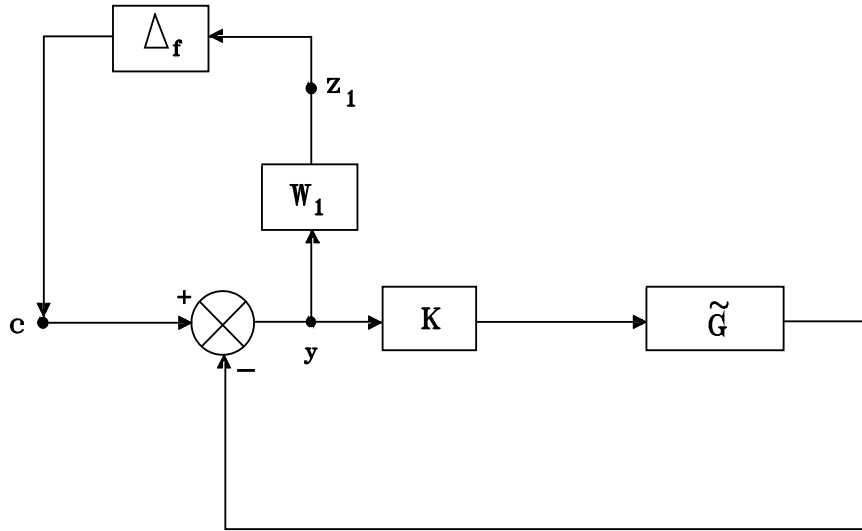
Rechercher la robustesse en performance revient à fixer un majorant noté  $\varepsilon_y$  de l'erreur  $y$  du système perturbé, qui est supérieur à la norme  $-\infty$  de sa matrice de sensibilité  $\tilde{S}$  en fonction de la fréquence  $\omega$ .

La spécification de la robustesse en performance du système perturbé est définie par :

$$\|\tilde{S}(j\omega)\|_{\infty} < \varepsilon_y \quad (1.34)$$

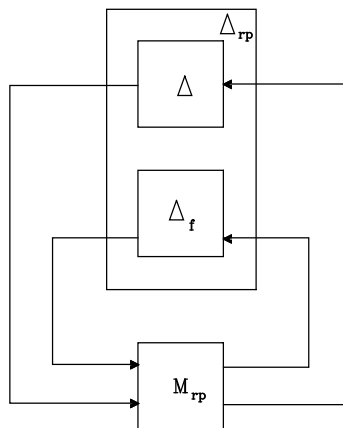
La matrice de transfert de robustesse en performance est calculée entre la consigne  $c$  et la sortie pondérée  $z_1$  de la figure 1.15. Elle est notée  $M_{rp}$ .

L'introduction entre le vecteur d'entrée  $c$  et le vecteur de sortie  $z_1$  d'une matrice d'erreurs fictives  $\Delta_f$  avec  $\|\Delta_f\|_\infty < 1$  permet de transformer le schéma d'analyse de robustesse en performance de la figure 1.01 en un schéma d'analyse de la robustesse en stabilité. Nous obtenons alors le schéma - bloc de la figure 1.14.



**Figure 1.14 : Schéma bloc du système perturbé avec introduction du modèle d'erreur fictive**

En isolant respectivement les erreurs de modèle  $\Delta_f$  et  $\Delta$ , nous obtenons le schéma bloc de la figure 1.15.



**Figure 1.15 : Schéma bloc du système perturbé pour l'analyse de la robustesse en performance**

*Théorème 1.05 :*

Sous les hypothèses suivantes :

- ❖ tous les pôles de la matrice de transfert nominale du système en boucle fermée sont à partie réelle négative ;
- ❖ la matrice des erreurs de modèle ne possède pas des pôles à partie réelle négative.

Le système de la figure 1.16 est stable pour toute matrice  $\Delta_{rp}(s) \in \underline{\Delta}(s)$  telle que  $\|\Delta_{rp}\|_{\infty} < 1$ , si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \|M_{rp}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad (1.35)$$

Avec

$$\Delta_{rp} = \{diag[\Delta, \Delta_f]\} \quad (1.36)$$

## 1.14 Synthèse $H_{\infty}$

### 1.14.1 Résolution par les équations de Riccati

La synthèse  $H_{\infty}$  des systèmes linéaires à temps continu propose un cadre général pour le calcul d'un correcteur en manipulant des concepts fréquentiels. Elle permet de prendre en compte des objectifs de stabilité, de marges de stabilité et de modelage de différentes matrices de transfert. Nous exposons dans ce paragraphe la notion de problème standard et la méthode de résolution du problème  $H_{\infty}$  standard par l'équation algébrique matricielle de Riccati.

Nous décrivons également l'algorithme  $\gamma$  – itération pour la résolution du problème  $H_{\infty}$  standard. La synthèse  $H_{\infty}$  permet de prendre en compte, à priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier de charges, simplifiant ainsi la synthèse. En effet, les spécifications fréquentielles sont naturellement prises en compte par la synthèse  $H_{\infty}$ . Les spécifications temporelles classiques (temps de montée, rejection de perturbations, atténuation de bruit, découplage, erreur statique, dépassement) peuvent être facilement interprétées dans le domaine fréquentiel.

Le second avantage est d'ordre méthodologique. En effet le critère  $H_{\infty}$  est construit directement à partir du cahier de charges, ce qui est particulièrement intéressant pour des spécifications nombreuses et complexes. Or les spécifications sont facilement traduisibles en terme de gabarits fréquentiels. Et les gabarits fréquentiels correspondent aux pondérations en entrée et en sortie que l'on trouve dans la synthèse  $H_{\infty}$  pondérée.

Ainsi, le choix des gabarits se fait de façon méthodologique. Le troisième avantage est basé sur la représentation fréquentielle. Or cette représentation fréquentielle est à la base de l'analyse de la robustesse par le théorème du petit gain et son extension à la  $\mu$ -analyse.

La synthèse  $H_\infty$  permet de synthétiser des correcteurs robustes en prenant en compte explicitement des incertitudes dynamiques.

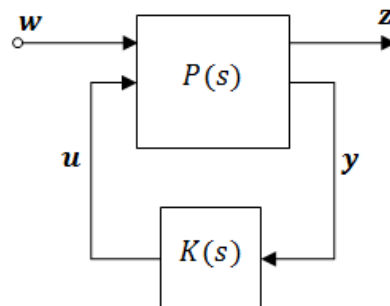
De plus, cette approche peut être étendue à la désensibilisation de la boucle fermée aux incertitudes paramétriques et aux non-linéarités.

En d'autres termes, on utilise un critère unique pour ajuster au mieux le compromis performance/robustesse. Enfin, l'approche fréquentielle est une approche naturelle pour l'amortissement des modes souples puisqu'il s'agit de contraindre les pics de résonance sur certains transferts de la boucle fermée.

### 1.14.2 Le problème $H_\infty$ standard

Le modèle incertain du système étant défini, il s'agit de calculer une loi de commande compatible avec la structure en contre-réaction de la figure 1.16 et qui confère au système la meilleure insensibilité aux éventuelles incertitudes et perturbations tout en lui permettant d'atteindre un niveau de performance satisfaisant. Cela implique le choix d'une structure de commande par la définition de spécifications fonctionnelles et le choix d'une méthode de synthèse.

La synthèse  $H_\infty$  utilise la notion de problème standard, qui est représenté sur la figure 1.16, la matrice de transfert du processus augmenté  $P(s)$  modélise les interactions dynamiques entre deux ensembles de vecteurs d'entrées et deux ensembles de vecteurs de sorties.



**Figure 1.16 : Problème  $H_\infty$  standard**

- ✚ Le vecteur  $w$  représente des entrées extérieures, telles que des signaux de référence, des perturbations, des bruits ;
- ✚ Le vecteur  $u$  représente les commandes ;
- ✚ Le vecteur  $z$  représente des signaux de sortie pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement ;
- ✚ Le vecteur  $y$  représente les écarts ou les mesures disponibles pour élaborer la commande.

Partant de la matrice de transfert  $G(s)$  du processus à commander en boucle ouverte, il s'agit de construire un nouveau processus augmenté en boucle ouverte notée  $P(s)$  contenant des vecteurs d'entrées et de sorties additionnels  $w$  et  $z$  et éventuellement des dynamiques supplémentaires.

Ces dynamiques correspondent à des pondérations fréquentielles qui sont introduites sur les  $w$  et  $z$  pour prendre en compte le contenu spectral des perturbations ou spécifier des domaines de performance.

La matrice de transfert du processus augmenté  $P(s)$  décrit les interconnexions entre les vecteurs  $w, u, z$  et  $y$ .

En effectuant une partition cohérente de la matrice de transfert avec les dimensions du processus augmenté  $P(s)$ , nous avons, d'après la loi de commande de Duc et Font :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Le paradigme en théorie de la synthèse  $H_\infty$  des systèmes linéaires à temps continu repose sur la structure de commande en contre-réaction du correcteur  $K(s)$ . D'après la figure 1.17, le processus augmenté  $P(s)$  est rebouclé sur le correcteur  $K(s)$  défini par la loi de commande :

$$u = K(s)y \quad (1.38)$$

La matrice de transfert entre  $w$  à  $z$  du système bouclé est une Transformation Linéaire Fractionnelle inférieure ( $LFT_l$ ) définie par [1.07] [1.08]:

$$z = F_l(P, K)w \quad (1.39)$$

Avec

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K (I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (1.40)$$

L'étude consiste alors à synthétiser une loi de commande  $u$  qui assure en même temps un minimum d'effet des vecteurs  $w$  et  $z$ .

L'objectif principal de la synthèse  $H_\infty$  des systèmes linéaires à temps continu est d'assurer la stabilité de la boucle fermée ainsi qu'un certain degré de performance, mais aussi de réduire la sensibilité de la structure de commande en présence de variations paramétriques et d'éventuelles perturbations affectant le modèle du système à commander.

*Définition 1.08:*

La synthèse  $H_\infty$  des systèmes linéaires à temps continu est définie par le *problème  $H_\infty$  optimal* suivant :

$P(s)$  étant donné, minimiser  $\|F_l(P, K)\|_\infty$  sur l'ensemble des correcteurs  $K(s)$  qui stabilisent le système bouclé de manière interne entre les entrées exogènes et les sorties régulées.

*Définition 1.09:*

La synthèse  $H_\infty$  des systèmes linéaires à temps continu est définie par le *problème  $H_\infty$  sous optimal* suivant :

$P(s)$  et  $\gamma > 0$  étant donnés, trouver un correcteur  $K(s)$  qui stabilisent le système bouclé de manière interne et qui minimise  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

Les correcteurs assurant la plus petite valeur possible de  $\gamma$  seront dits optimaux ou centraux. Le *minimum de  $\gamma$*  est noté  $\gamma_o$  et appelé gain ou atténuation  $H_\infty$  – optimal.

*Remarque :* Sous sa forme la plus simple, le *problème  $H_\infty$  standard* est un problème de réjection de perturbations. A partir du système bouclé exprimé sous la forme standard de la figure 1.15, il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation de vecteurs d'entrées  $w$  sur le comportement du système référant aux travaux de Basar et Bernhard.

### 1.14.3 Résolution du problème $H_\infty$

Nous présentons dans ce paragraphe les techniques de résolution par variable d'état des problèmes  $H_\infty$  optimaux et sous optimaux. Nous pouvons envisager deux différentes méthodes pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard, utilisant la représentation d'état et la matrice d'interconnexion  $P(s)$  :

❖ premièrement l'approche de l'équation algébrique matricielle de Riccati (AMRE);

Nous présentons ci-dessous l'approche par l'équation algébrique matricielle de Riccati, dans laquelle la valeur optimale de  $\gamma$  est recherchée par dichotomie (algorithme de Glover et Doyle).

Résolution du problème  $H_\infty$  standard par l'équation de Riccati.

On considère le processus augmenté  $P(s)$  défini par le travail de Hinrichsen et de Pritchard basé sur les équations de Riccati :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Cette équation est associée à la description interne suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (1.42)$$

$D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$ ,  $D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$  avec  $m_1 \geq p_2$  et  $p_1 \geq m_2$ . Enfin  $n$  désignera la dimension de la matrice d'évolution d'états  $A$ , c'est-à-dire, l'ordre du processus augmenté  $P(s)$ .

La solution par variable d'état n'est applicable que si les cinq hypothèses suivantes sont vérifiées :

- ❖ H1 :  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable.
- ❖ H2 : Les matrices  $D_{21}$  et  $D_{12}$  sont de rang plein.
- ❖ H3 : Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rang} \left( \begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2$  et  $\text{rang} \left( \begin{bmatrix} j\omega I - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2$
- ❖ H4 :  $D_{12}^T(D_{12}, C_1) = (I, 0)$  et  $D_{21}^T(B_1^T) = (I, 0)$
- ❖ H5 :  $D_{22} = 0$  et  $D_{11} = 0$

Les deux dernières hypothèses sont des hypothèses simplificatrices de normalisation.

*Théorème 1.06 :*

Pour ces cinq hypothèses, le correcteur  $K(s)$  stabilise le système de manière interne et assure  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si : les équations de Ricatti ont des solutions stabilisantes  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (1.43)$$

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (1.44)$$

- Et les solutions à ces équations vérifient :

$$X_\infty \geq 0; \quad Y_\infty \geq 0; \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (1.45)$$

Les conditions de positivité (1.45) assurent une stabilité interne du système linéaire. L'existence de solutions stabilisantes traduit la contrainte :  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

- Et que si  $K(s) = D_K + C_K(I - A_K)^{-1} B_K$  est une réalisation minimale du correcteur, la matrice d'état du système est :

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Et sa stabilité interne est équivalente à la stabilité  $A_{BF}$ .

#### 1.14.4 Algorithme pour calculer le gain $H_\infty$ optimal $\gamma_o$

Cet algorithme est connu sous le nom de  $\gamma$  – itération. Nous savons d'après le théorème du petit gain que la boucle fermée est plus robuste que la norme de chaque transfert en boucle fermée. Néanmoins, on ne sait pas déterminer  $\gamma_o$  sous la contrainte  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ . Par contre, en fixant  $\gamma$ , le problème est soluble et convexe.

Le problème standard  $H_\infty$  admet une solution s'il existe un correcteur  $K(s)$  qui satisfait la contrainte  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

L'algorithme  $\gamma$  – itération est établie, selon les travaux de Packard, d'Apkarian, de Gahinet et de Becker comme suit [1.09]:

- ❖ On initialise le processus avec un intervalle  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  contenant  $\gamma_o$ ;
- ❖ A chaque itération on élimine une moitié de cet intervalle en testant les conditions des équations des solutions stabilisantes (1.43), (1.44) et (1.45).
- ❖ On prend la moyenne arithmétique :

$$\gamma = \frac{1}{2} (\gamma_{min} + \gamma_{max}) \quad (1.47)$$

Et  $\gamma$  devient alors  $\gamma_{max}$  s'il existe une solution ; autrement il devient  $\gamma_{min}$ . Si ces conditions sont satisfaisantes alors nous avons  $\gamma > \gamma_o$  et la moitié droite de l'intervalle sera enlevée (sinon la gauche). Cette approche dichotomique permet d'obtenir un  $\gamma$  plus proche de la valeur optimale  $\gamma_o$  avec suffisamment d'itération.

L'itération s'arrête lorsque la longueur de l'intervalle tombe en-dessous de la précision désirée pour  $\gamma_o$ . Mais à chaque itération, il est nécessaire d'effectuer le test de la valeur de  $\gamma$  qui exige de vérifier les étapes suivantes :

- ❖ Calcul du spectre des matrices Hamiltoniennes :

$$\begin{aligned} H_\infty &= \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \\ H_\infty &= \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Si ces spectres contiennent des valeurs propres imaginaires pures, nous pouvons conclure alors que  $\gamma < \gamma_o$  et ainsi passer à l'itération suivante.

- ❖ Calculs des sous espaces invariants stables  $\begin{bmatrix} P_X \\ Q_X \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} P_Y \\ Q_Y \end{bmatrix}$  de  $H_\infty$  et  $J_\infty$ . Si  $P_X$  ou  $P_Y$  est singulière, nous pouvons conclure que  $\gamma < \gamma_o$  et ainsi passer à l'itération suivante.

Sinon il faut calculer les solutions stabilisantes des équations de Riccati :

$$X_\infty = Q_X P_X^{-1} \quad Y_\infty = Q_Y P_Y^{-1}$$

- ❖ Position de  $\gamma$  par rapport à  $\gamma_o$

L'optimum est caractérisé par l'égalité  $\rho(X_\infty Y_\infty) = \gamma_o^2$ . Le problème standard  $H_\infty$  admet une solution, s'il existe un correcteur  $K(s)$  qui satisfait la contrainte  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

$$K(s) = F_l(K_C(s), \Phi(s)) \quad (1.49)$$

Où  $\Phi(s)$  est une matrice de dimension  $n \times n$  arbitraire vérifiant  $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$ , et  $K_C(s)$  est définie par la représentation d'état suivante :

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 B_2^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2 \quad (1.50)$$

Avec  $Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$

En particulier, le correcteur central correspondant à  $\Phi(s) \equiv 0$ , admet la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_2^T \\ -B_2^T X_\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

La mise en œuvre de cette solution consiste donc à utiliser tout d'abord les résultats de l'équation (1.49) pour approcher la valeur optimale de  $\gamma$  par la procédure  $\gamma$ -itération.

Puis à calculer le correcteur central en appliquant les équations (1.50) et (1.51).

#### 1.14.5 Solution générale des problèmes $H_\infty$ réguliers

On donne ici la caractérisation de  $\gamma_{opt}$  et les formules du correcteur central  $K_C$  pour le problème régulier sous-optimal. Les résultats sont qualitativement les mêmes mais les formules sont plus complexes. L'hypothèse  $D_{22} = 0$ , est toujours maintenue puisqu'elle correspond à un simple changement de variable pour le correcteur. Si  $K(s)$  résout le problème sous-optimal avec  $D_{22}$  mis à zéro, alors  $K(I + D_{22}K)^{-1}$  résout le problème original par référence aux travaux de Font, Glover et Mc Farlane.

Les contreparties des équations de Riccati sont obtenues en remplaçant les expressions des Hamiltoniens par [1.09]:

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -C_1^T D_{11} & -C_1^T D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 I - D_{11}^T D_{11} & -D_{11}^T D_{12} \\ -D_{12}^T D_{11} & -D_{21}^T D_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_{11}^T C_1 & B_1^T \\ D_{12}^T C_1 & B_2^T \end{bmatrix}$$

$$J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ -B_1^T B_1 & -A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^T & C_2^T \\ -B_1 D_{11}^T & -B_1 D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2 I - D_{11} D_{11}^T & -D_{11} D_{21}^T \\ -D_{21} D_{11}^T & -D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_{11} B_1^T & C_1 \\ D_{21} B_1^T & C_2 \end{bmatrix}$$

*Théorème 1.07 :*

Avec les trois premières hypothèses de la résolution du problème  $H_\infty$  standard par l'équation de Ricatti et avec  $D_{22} = 0$ , il existe un correcteur stabilisant de façon interne tel que  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si pour  $\gamma > \gamma_o$ . L'analogie du correcteur central  $K_C$  pour le problème normalisé est construit comme suit [1.10]:

❖ Par le calcul de la matrice  $D_C$  telle que :

$$\sigma_{\max}(D_{11} + D_{12}D_CD_{21}) < \gamma \quad (1.52)$$

$$\text{Si } D_{12} = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_{12} \\ 0 \end{bmatrix} W^T \text{ et } D_{21} = Z[\Sigma_{12}, 0] \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

$$\text{Et la contrainte est équivalente à } \sigma_{\max} = \left( \begin{bmatrix} U_1^T D_{11} V_1 + \Sigma_{12} W^T D_C Z \Sigma_{21} & U_1^T D_{11} V_2 \\ U_2^T D_{11} V_1 & U_2^T D_{11} V_2 \end{bmatrix} \right) < \gamma$$

Cette contrainte est satisfaite pour  $D_C = -W \Sigma_{12}^{-1} \Delta \Sigma_{21}^{-1} Z^T$

❖ Calcul des paramètres réduits :

$$\begin{aligned} A &= A + B_2 D_C C_2 \\ B &= B_1 + B_2 D_C D_{21} \\ C &= C_1 + D_{12} D_C C_2 \\ D &= D_{11} + D_{12} D_C D_{21} \end{aligned} \quad (1.53)$$

❖ Calcul de  $B_C$  :

$$\begin{aligned} B_C - (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} [ (Y_\infty C_2^T D_{21}^T + B) + (Y_\infty \tilde{C}_1^T \\ + B_1 \tilde{D}_{11}^T) (\gamma^{-2} I - \tilde{D}_{11} \tilde{D}_{11}^T)^{-1} D ] D_{21}^+ \end{aligned} \quad (1.54)$$

Où

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= C_1 - D_{11} D_{21}^+ C_2 \\ \tilde{D}_{11} &:= D_{11} (I - D_{21}^+ D_{21}) \end{aligned}$$

❖ Détermination de  $C_C$  :

$$C_C = D_{12}^+ \left[ (D_{12}^{+T} B_2^T X_\infty + C) + D (\gamma^2 I - \tilde{D}_{11}^T \tilde{D}_{11})^{-1} (\tilde{B}_1^T X_\infty) + \tilde{D}_{11}^T C_1 \right] \quad (1.55)$$

Où:  $\hat{B}_1 = B_1 - B_2 D_{12}^+ D_{11}$  et  $\hat{D}_{11} := (I - D_{12} D_{12}^+) D_{11}$

❖ Détermination de  $A_C$  :

$$\begin{aligned} (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) A_C \\ = A + \gamma^{-2} A^T X_\infty + B_2 C_C + (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) B_2 C_2 + ((-\gamma^{-1} Y_\infty C^T B) \\ + (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty) B_C D_{21}) \begin{bmatrix} \gamma I & D \\ D^T & \gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C + D_{12} C_C \\ -\gamma^{-1} B^T X_\infty \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.56)$$