Chapitre IV : Implémentation numérique des modèles microscopiques et macroscopiques

Introduction

Les modèles macroscopiques obtenus par la méthode d'homogénéisation sont numériquement implémentés dans ce chapitre. La difficulté de l'implémentation réside dans le couplage des paramètres microscopiques. La résolution numérique a été faite en utilisant la méthode des éléments finis (methode de Galerkin). La géométrie de la période est complexe donnée par la figure 38, contenant les domaines fluide Ω_f et solide Ω_s.

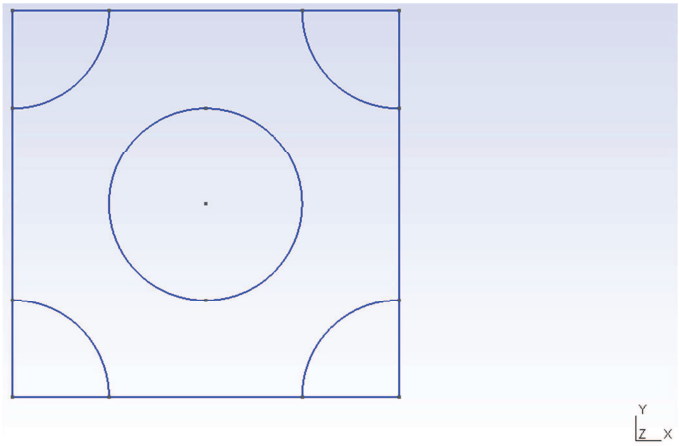

Figure 38 – Géométrie périodique à simple porosité 2D.

L'implémentation numérique est composée de deux étapes : i) calcul des paramètres effectifs à partir des problèmes microscopiques ; ii) résolution du problème macroscopique aux limites. Sur les domaines microscopiques fluide et solide, nous étudions respectivement les problèmes de Stokes, thermique suivants :

$$\begin{cases} \rho_0\omega^2 u^0 + i\omega\eta_2\Delta_y u^0 - \nabla_y p^1 = \left(\nabla_x p^0 - \rho_0\omega^2 u_s^0\right) \\ \nabla_y \cdot u^0 = 0 \\ u^0 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\left(\nabla_x p^0 - \rho_0\omega^2 u_s^0\right)$ est un vecteur constant sur Ω_f

$$\begin{cases} \rho_0 i\omega\tau^0 - K_d\Delta_y\tau^0 = i\omega p^0 \\ \tau^0 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Et sur les domaines solide, le problème de viscoélasticité linéaires [57]

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot \left(\sigma^s\left(u_s\right)\right) = 0 & sur\ \Omega_s \\ \sigma^s\left(u_s\right)\vec{n} = -p^0 Id\,\vec{n} & sur\ \Gamma \end{cases} \tag{4.3}$$

où $\sigma^s\left(u_s\right) = \lambda^* \nabla \cdot u_s + \mu^*\left(\nabla u_s + {}^t\nabla u_s\right)$ (4.4)

Nous rappelons aussi que par linéarité des problèmes fluide et solide, il existe une perméabilité $\langle k \rangle$ effective, conductivité thermique effective $\langle k' \rangle$ et un tenseur d'impédance solide $\langle \sigma_s^0 \rangle$ tels que :

$$i\omega\eta_2 \langle u^0 \rangle = -\phi \langle k \rangle \left(\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0\right) \ , \ \langle \tau^0 \rangle = \phi \frac{\langle k' \rangle}{K_d} i\omega p^0\left(x\right)$$

et

$$\langle \sigma_s^0 \rangle = \lambda_{eff}^* \nabla_x \cdot u_s^0 Id + 2\mu_{eff}^* e_x\left(u_s^0\right) \tag{4.5}$$

où $\lambda_{eff}^* = \lambda^*\left[\phi + \langle \nabla_y \cdot \xi_{kl} \rangle\right]$ et $\mu_{eff}^* = 2\mu^*\left[\phi + \langle \varepsilon_y\left(\xi_{kl}\right) \rangle\right]$

IV.1 Modèle microscopique fluide

La génération du maillage est effectuée à l'aide du logiciel GMSH qui est un logiciel de maillage par éléments finis développé par Christophe Geuzaine et Jean-François Remacle [57]. La description de la géométrie dans la partie fluide est donnée par la figure 39.

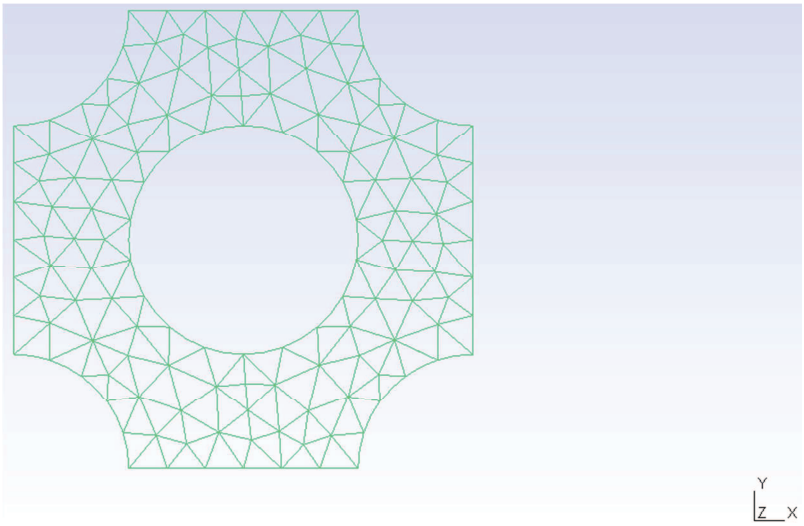

Figure 39 – Maillage de la partie fluide.

IV.1.1. Modèle microscopique fluide en déplacement

Dans cette section, nous établissons le code utilisé pour résoudre le problème microscopique fluide en déplacement. Pour des raisons de commodité numérique, nous adoptons préalablement les adimentionnalisation suivantes :

$$p^1 = p' P_0 \,,\ \nabla = \nabla' \frac{1}{l},\ \Delta = \Delta' \frac{1}{l},\ u^0 = u' U_0 \,,\ \omega = \omega' \omega_0 \tag{4.6}$$

où l est la longueur caractéristique microscopique et $P_0, U_0,\ \omega_0$ sont respectivement les valeurs caractéristique de la pression, du déplacement u^0 et de la fréquence ω .
Les variables adimentionnelles sont notées par prime. Le gradient de pression peut être écrit :

$$\underline{\alpha} = \frac{P_0}{l} \underline{\alpha}' \tag{4.7}$$

où $\underline{\alpha} = \left(\nabla_x p^0 - \rho_0 \omega^2 u_s^0 \right)$

Alors, les équations (4.1) deviennent

$$\begin{cases} \rho_0 \left(\omega' \omega_0 \right)^2 u' U_0 + i\omega' \omega_0 \eta_2 \dfrac{1}{l^2} U_0 \Delta' u^0 - \dfrac{p_0}{l} \nabla' p' = \dfrac{P_0}{l} \underline{\alpha}' \quad dans\ \Omega_f \\ \nabla' \cdot u' = 0 \quad dans\ \Omega_f \\ u' = 0 \quad sur\ \Gamma \end{cases} \tag{4.8}$$

En choisissant

$$U_0 = \frac{P_0 l}{\eta_2 \omega_0} \ , \omega_0 = \frac{\eta_2}{\rho_0 l^2} \tag{4.9}$$

Les équations (4.8) deviennent

$$\begin{cases} i\omega' \Delta' u' + \omega'^2 u' - \nabla' p' = \underline{\alpha}' \quad dans\ \Omega_f \\ \nabla' \cdot u' = 0 \quad dans\ \Omega_f \\ u' = 0 \quad sur\ \Gamma \end{cases} \tag{4.10}$$

Notons que ω' est exactement le nombre de Reynolds définie dans (3.12)

$$R_{tl} = \frac{\rho_0 \omega l^2}{\eta_2} \tag{4.11}$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide, η_2 la viscosité dynamique et l la longueur caractéristique microscopique.

La formulation variationnelle du problème est donnée par la relation (4.12). Soit T_h, une triangdation de Ω. L'indice h caractérise la taille du maillage et est destiné à tendre vers 0. Soient X_h et M_h des sous espaces de dimension finie approximant respectivement X et M. Nous considerons ensuite le sous espace de $X_h, E = \left\{ v_h \in X_h \middle| (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \right\}$. La discrétisation par éléments finis du problème (4.12) conduit au problème mixte approché suivant :

Trouver $u_h \in [X_h]^3$ et $p_h \in M_h$ tels que :

$$\begin{cases} -i\omega' \int_{\Omega_f} \nabla u_h : \nabla v_h \, d\Omega + \omega'^2 \int_{\Omega_f} u_h v_h \, d\Omega \\ \qquad\qquad + \int_{\Omega_f} p_h \nabla \cdot v_h \, d\Omega = \int_{\Omega_f} \underline{\alpha}' \cdot v_h \, d\Omega \qquad \forall v_h \in [X_h]^3 \\ \int_{\Omega_f} q_h \nabla \cdot u_h = 0 \qquad \forall q_h \in M_h \end{cases} \tag{4.12}$$

où $X_h = \left\{ v_{i,h} \in P_2, \; v_{i,h/\partial F_D} = 0 \right\}$ et $M_h = \{ q_h \in P_1 \}$

obtenu en remplaçant respectivement u, v, p et q par u_h, v_h, p_h et q_h

Forme matricielle du problème microscopique fluide en déplacement

Nous notons $(\varphi_i)_{1 \le i \le N}$ les éléments de la base de X_h et $(\psi_i)_{1 \le i \le M}$ ceux de la base de M_h. Nous obtenons ainsi les écritures suivantes

$$u_{j,h}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u_{j,i} \varphi_i(x,y) \;, \; p_h(x,y) = \sum_{i=1}^{M} p_i \psi_i(x,y)$$

Finalement, en appelant U_j les vecteurs ${}^t(u_{j,i})_{1 \le i \le N}$, $1 \le j \le 2$ et P_k le vecteur ${}^t(p_i)_{1 \le i \le M}$, nous obtenons l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & A & B_2 \\ {}^tB_1 & {}^tB_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

avec $A = \left(-i\omega' \int_{\Omega_f} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_j \, d\Omega + \omega'^2 \int_{\Omega_f} \varphi_j \varphi_j \, d\Omega \right)_{1 \le i,j \le 3}$, $B_k = \left(\int_{\Omega_f} \partial_k \varphi_i \psi_j \, d\Omega \right)_{1 \le i,j \le 3}$

et $F_j = \left(\int_{\Omega_f} \underline{\alpha}' \psi_j \, d\Omega \right)_{1 \le j \le 3}$ $1 \le k \le 2$

Il est à noter que nous effectuons le calcul des intégrales précédentes sur chacun des éléments via un changement de variables pour permettre de faire tous les calculs sur un élément de référence $\widehat{K}$ (Figure 40). Nous nous donnons donc une transformation $T^K : \widehat{K} \to K$ qui envoie l'élément de référence $\widehat{K}$ sur l'élément K.

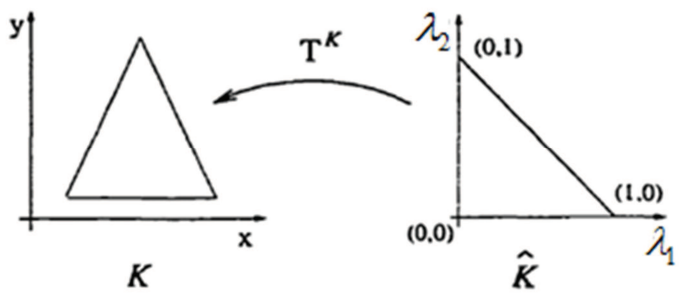

Figure 40 – Passage d'un élément K à l'élément de référence $\widehat{K}$ en 2d [21].

Ainsi nous effectuons toutes les intégrales seulement sur l'élément référentiel ce qui permet entre autres de pouvoir utiliser les quadratures de Gauss pour intégrer numériquement chacun des termes de formulation.

Le choix des fonctions d'interpolation dépend du choix du type d'éléments. Un choix populaire est l'élément de Taylor-Hood aussi connu sous le nom de $P_2 - P_1$ (Figure 41). Cet élément vérifie la condition de Brezzi, aussi connue sous le nom de condition $inf - sup$ qui assure l'existence et l'unicité de la solution en déplacement et en pression du problème de Stokes (A.3).

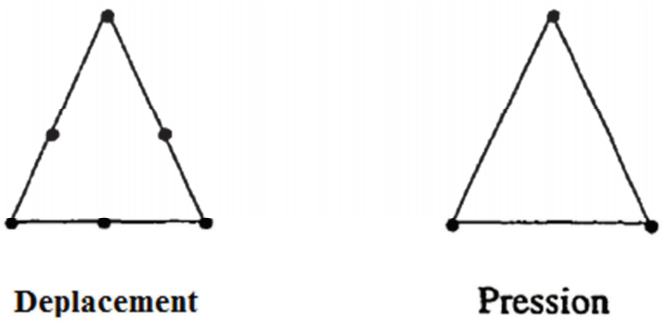

Figure 41 – Elément triangulaire $P_2 - P_1$ [21].

Avec cet élément $P_2 - P_1$, nous avons donc $n_c^u = 6$ nœuds de calcul en déplacement et $n_c^u = 3$ nœuds de calcul en pression dans le cas bidimensionnel.

Comme son nom l'indique, avec l'élément $P_2 - P_1$ nous utilisons des approximations quadratiques en déplacement et linéaires en pression. Par exemple, à deux dimensions, nous prendrions les 6 fonctions quadratiques suivantes en déplacement :

$$\begin{cases} \varphi_{u,1}^{\hat{K}} = 1 - 3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_2^2 \\ \varphi_{u,2}^{\hat{K}} = 2\lambda_2^2 - \lambda_1 \\ \varphi_{u,3}^{\hat{K}} = 2\lambda_2^2 - \lambda_2 \\ \varphi_{u,4}^{\hat{K}} = 4\left(\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2\right) \\ \varphi_{u,5}^{\hat{K}} = 4\lambda_1\lambda_2 \\ \varphi_{u,6}^{\hat{K}} = 4\left(\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2\right) \end{cases} \tag{4.14}$$

et les 3 fonctions linéaires suivantes en pression :

$$\begin{cases} \psi_{\mathrm{p},1}^{K} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \psi_{\mathrm{p},2}^{K} = \lambda_1 \\ \psi_{\mathrm{p},3}^{K} = \lambda_2 \end{cases} \tag{4.15}$$

De façon similaire, nous pourrions nous donner dix fonctions d'interpolation en déplacement et quatre en pression pour l'élément $P_2 - P_1$, dans le cas tridimensionnel.

Nous résoudrons le système final par la méthode d'Uzawa qui consiste à découpler la résolution du système (4.13) en deux étapes : en déplacement puis en pression.

Soit le système (4.13), réécrit sous la forme plus compacte suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{A}U + \mathrm{B}p = F \\ {}^t\mathrm{B}U = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ et ${}^t\mathrm{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$

Dans un premier temps, nous isolons U de l'équation (4.16a). Nous trouvons :

$$U = \mathrm{A}^{-1}\left(F - \mathrm{B}p\right) \tag{4.17}$$

Nous l'introduisons ensuite dans l'équation (4.16b). Le système d'équations (4.16) devient alors équivalent à résoudre le système :

$$\left({}^t\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)p = \left({}^t\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}F\right) \tag{4.18}$$

Afin de simplifier la notation, nous allons poser :

$$\begin{cases} \widehat{M} = {}^t\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ \widehat{F} = {}^t\mathrm{B}\mathrm{A}^{-1}F \end{cases} \tag{4.19}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système :

$$\widehat{M}p = \widehat{F} \tag{4.20}$$

où $\widehat{M}$ est réelle symétrique et définie positive

La relation (4.20) est résolue par l'algorithme classique du gradient conjugué (en abrégé CG) [58]. Elle utilise une suite de directions de descente constituée par des vecteurs $\widehat{M}$-orthogonaux, c'est-à-dire vérifiant $\forall k \geq 1$,

$$\left(\widehat{M}p^{(j)}\right)^T p^{(k+1)} = 0 \ , j = 0,\ 1,...,k \ .$$

Pour tout vecteur $x^{(0)}$, après avoir posé $r^{(0)} = b - \widehat{M}x^{(0)}$ et $p^{(0)} = r^{(0)}$, la méthode du gradient conjugué s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour } k = 0,1,\ldots \\ \alpha_k = \dfrac{p^{(k)^T} r^{(k)}}{p^{(k)^T} \widehat{M} p^{(k)}} \ , \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \ , \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k \widehat{M} p^{(k)}, \\ \beta_k = \dfrac{\left(\widehat{M} p^{(k)}\right)^T r^{(k+1)}}{\left(\widehat{M} p^{(k)}\right)^T p^{(k)}} \end{array}}$$

Le paramètre α_k permet de minimiser l'erreur $\left\| e^{(k+1)} \right\|_{\widehat{M}}$ le long de la direction de descente $p^{(k)}$, et β_k est choisi pour que la nouvelle direction $p^{(k+1)}$ soit $\widehat{M}$-conjuguée avec $p^{(k)}$, c'est-à-dire $\left(\widehat{M} p^{(k)}\right)^T p^{(k+1)} = 0$.

IV.1.3. Résultats sur le déplacement relatif et sur la pression

Réécrivons l'équation (4.10) :

$$\begin{cases} \omega'^2 u' + i\omega' \Delta_y u' - \nabla_y p' = \underline{\alpha}' \\ \nabla_y \cdot u' = 0 \\ u' = 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

Développons ce système d'équations et séparons la partie réelle de la partie imaginaire. Soient u' et p' la solution de (4.21) de la forme :

$$\begin{cases} u' = u'_r + iu'_i \\ p' = p'_r + ip'_i \end{cases} \tag{4.22}$$

avec $u'_r = \mathrm{Re}(u')$, $u'_i = \mathrm{Im}(u')$, $p'_r = \mathrm{Re}(p')$ et $p'_i = \mathrm{Im}(p')$

La relation (4.21) et (4.22) nous donne :

$$\begin{cases} \omega'^2 \left(u'_r + iu'_i\right) + i\omega\eta_2 \Delta_y \left(u'_r + iu'_i\right) - \nabla_y \left(p'_r + ip'_i\right) = \underline{\alpha}' \\ \nabla_y \cdot \left(u'_r + iu'_i\right) = 0 \\ \left(u'_r + iu'_i\right) = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

En développant la relation (4.23)

$$\begin{cases} \omega'^2 u'_r + i\omega'^2 u'_i + i\omega'\Delta_y u'_r - \omega'\Delta_y u'_i - \nabla_y p'_r - i\nabla_y p'_i = \underline{\alpha}' \\ \nabla_y \cdot u'_r + i\nabla_y \cdot u'_i = 0 \\ u'_r + iu'_i = 0 \end{cases} \tag{4.24}$$

La partie réelle de (4.24) implique que :

$$\begin{cases} \omega'^2 u'_r - \omega\eta_2\Delta_y u'_i - \nabla_y p'_r = \underline{\alpha}' \\ \nabla_y \cdot u'_r = 0 \\ u'_r = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Et la partie imaginaire de (4.24) nous donne :

$$\begin{cases} \omega^2 u'_i + \omega\eta_2\Delta_y u'_r - \nabla_y p'_i = 0 \\ \nabla_y \cdot u'_i = 0 \\ u'_i = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

Le système (4.25) donne la partie réelle du déplacement u' et de la pression p'. Et la relation (4.26) pour la partie imaginaire du déplacement.

En établissant un code de programmation par la methode des éléments finis sur Matlab, nous obtenons les figures 42 jusqu'à 55. Ces figures représentent la partie réelle de la pression, la partie imaginaire de la pression, la partie réelle du déplacement relatif et la partie imaginaire du déplacement relatif quand la fréquence varie de 10 à 40Hz par bon de 10 Hz.

- <u>Partie réelle de la pression</u> :

A l'entrée (Figure 44), nous remarquons une diminution de la pression (dépression) au contact du solide. Ce phénomène se répète quel que soit la fréquence (Figure 48, 52 et 56).

A la sortie c'est le phénomène inverse qui se passe : la pression est plus forte au contact du solide et elle est minimale loin du solide. Ce phénomène reste identique quel que soit la fréquence.

- <u>Partie imaginaire de la pression</u> :

A l'entrée la pression est minimale et elle augmente au contact du solide (Figure 45). A la sortie, la pression est minimale au contact du solide et elle augmente au fur

et à mesure que l'on s'éloigne du solide. Que ce soit à l'entrée ou à la sortie ces phénomènes se répètent.

Du point de vue de l'intensité, il n'y a pas de grand changement sur la partie réelle de la pression et sur la partie imaginaire de la pression quand la fréquence varie : nous observons presque la même chose sur les couleurs des différentes figures.

- <u>Résultat sur le déplacement relatif</u>

Concernant la partie réelle du déplacement relatif, nous constatons que l'intensité des vecteurs relatifs diminue quand la fréquence augmente (Figure 42, 46, 50 et 54).

Pour la partie imaginaire du déplacement relatif, l'intensité du vecteur déplacement est presque inchangeable quand la fréquence augmente (figure 43, 47, 51 et 55).

Nous pouvons constater ainsi sur la figure 44 et 45 suivantes une dépression au niveau du solide. Ce phénomène est causé par l'incapacité du fluide de passer (nous imposons un déplacement nul à ce niveau) ; alors il s'écoule d'autant mieux qu'il est éloigné du matériau. D'ailleurs au niveau des vecteurs de déplacement représentés sur la figure 42 et 43, nous obtenons bien que celui-ci est quasi nul au niveau du solide.

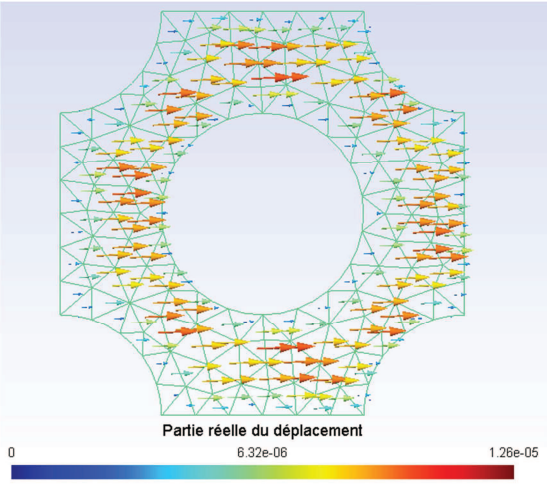

Figure 42 – Partie réel du déplacement relatif $\mathrm{Re}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 10\,Hz$

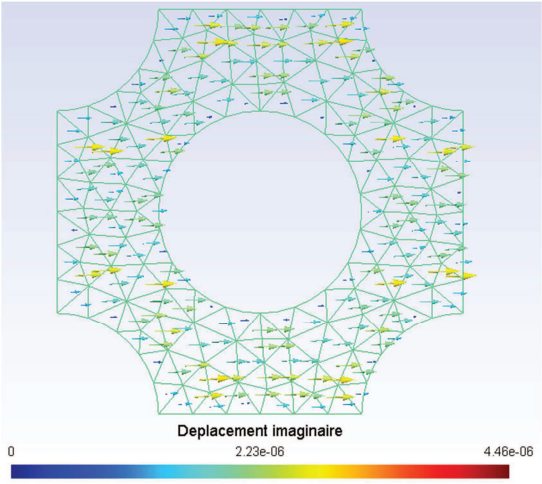

Figure 43 – Partie imaginaire du déplacement relatif $\mathrm{Im}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 10\,Hz$

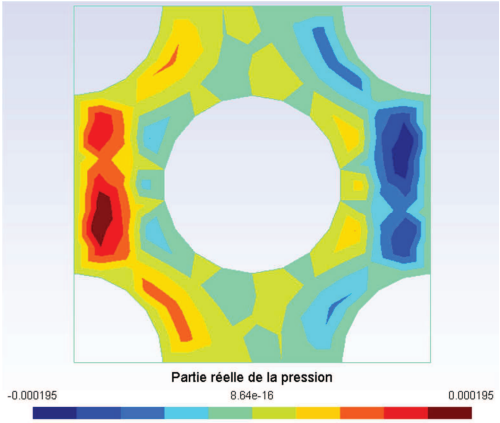

Figure 44 – Partie réelle de la pression $\mathrm{Re}\left(p^1\right)$ pour $\omega = 10\,Hz$

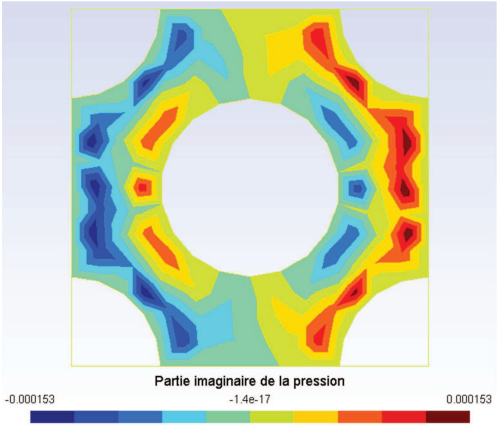

Figure 45 – Partie imaginaire de la pression $\mathrm{Im}\left(p^1\right)$ pour $\omega = 10\,Hz$

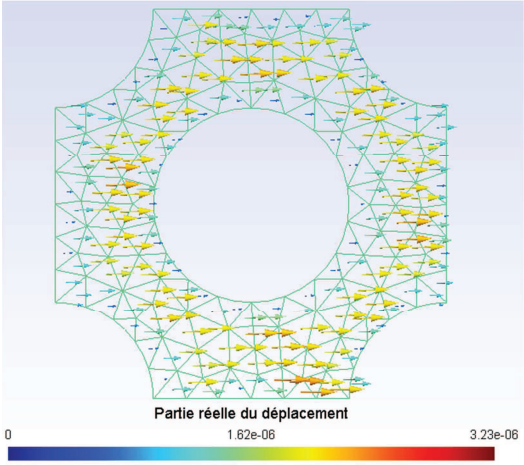

Figure 46 – Partie réel du déplacement relatif $\mathrm{Re}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 20\,Hz$

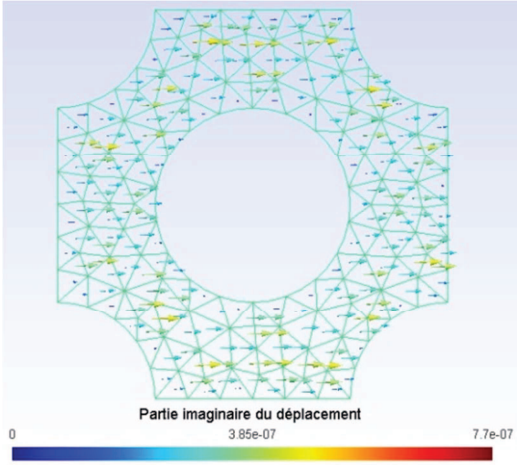

Figure 47 – Partie imaginaire du déplacement relatif $\mathrm{Im}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 20\,Hz$

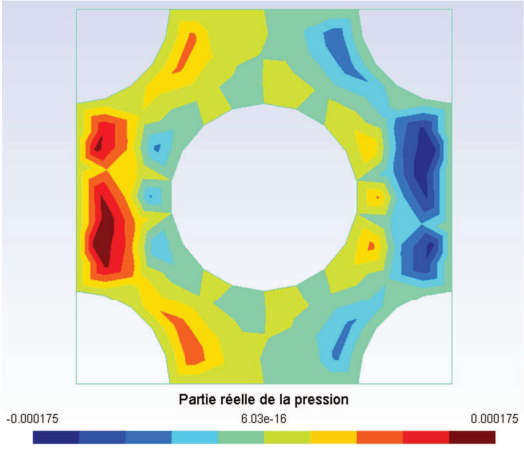

Figure 48 – Partie réelle de la pression $\mathrm{Re}\left(p^1\right)$ pour $\omega = 20\,Hz$

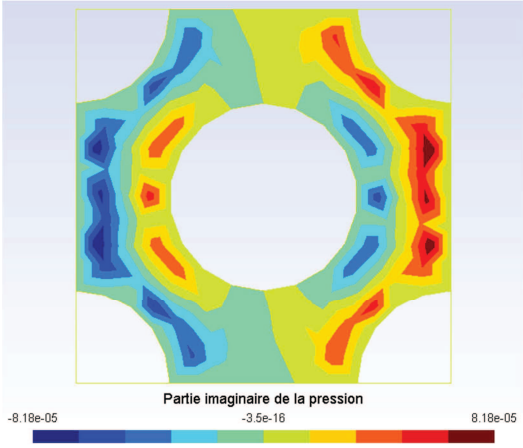

Figure 49 – Partie imaginaire de la pression $\mathrm{Im}\left(p^1\right)$ pour $\omega = 20\,Hz$

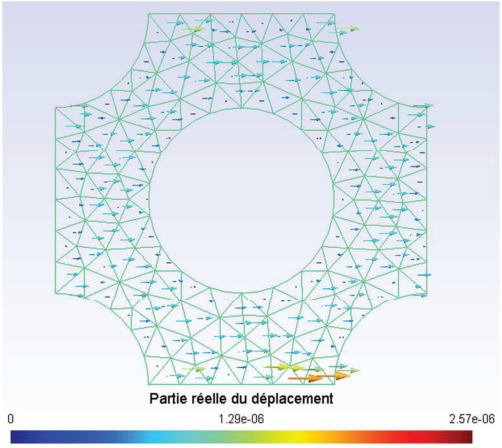

Figure 50 – Partie réel du déplacement relatif $\mathrm{Re}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 30\,Hz$

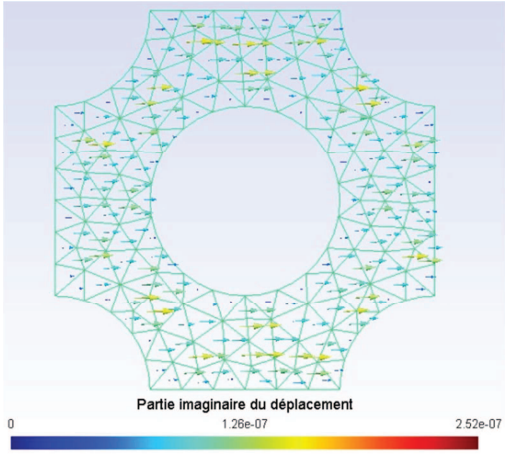

Figure 51 – Partie imaginaire du déplacement relatif $\mathrm{Im}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 30\,Hz$

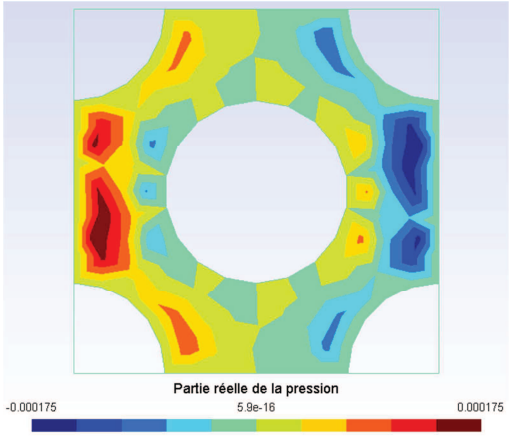

Figure 52 – Partie réelle de la pression $\mathrm{Re}\left(p^1\right)$ pour $\omega = 30\,Hz$

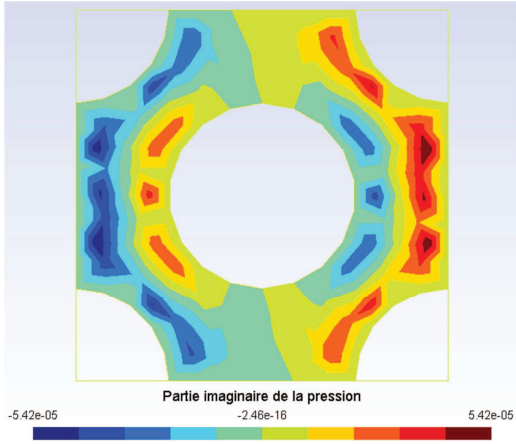

Figure 53 – Partie imaginaire de la pression $\mathrm{Im}\left(p^1\right)$ pour $\omega = 30\,Hz$

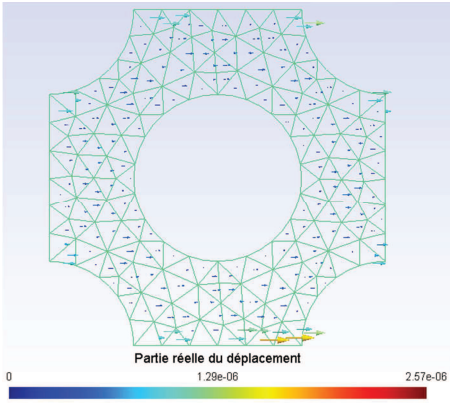

Figure 54 – Partie réelle du déplacement relatif $\mathrm{Re}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 40\,Hz$

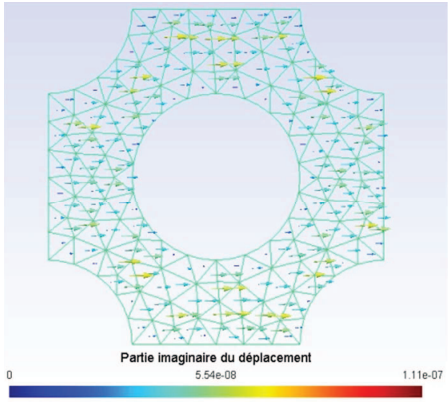

Figure 55 – Partie imaginaire du déplacement relatif $\mathrm{Im}\left(u^0\right)$ pour $\omega = 40\,Hz$