

2.4 Formulation variationnelle

Nous utilisons la formulation variationnelle associée au problème d'inéquation parabolique 2.11 afin de simplifier l'inconnu supplémentaire qui est la frontière libre.

Notations. On note l'ensemble des fonctions admissibles par

$$\mathcal{K}_\psi = \{v \mid v \in V_\alpha, v \geq \psi \text{ p.p sur } \mathbb{R}\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a^\alpha(u, v) = & \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + r \int u v e^{-\alpha|x|} dx \\ & - \int \left(\frac{\sigma^2}{2} \alpha \operatorname{sgn}(x) + \beta \right) \frac{\partial u}{\partial x} v e^{-\alpha|x|} dx. \end{aligned}$$

Alors, on peut écrire, par une intégration par parties pour $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ que :

$$(\mathcal{A}u, v)_\alpha = -a^\alpha(u, v).$$

Les propriétés de la forme bilinéaire $a^\alpha(.,.)$ sont caractérisées par la proposition suivante :

Proposition 2.4.1 (voir [24]) *La forme bilinéaire $a^\alpha(.,.)$ définie de $H_\alpha \times H_\alpha$ à valeur dans \mathbb{R} est continue, autrement dit :*

$$|a^\alpha(u, v)| \leq C \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha,$$

avec C une constante indépendante de u et v . De plus, il existe deux réels strictement positifs ρ et γ tel que :

$$a(u, u) + \rho |u|^2 \geq \gamma \|u\|^2.$$

La formulation variationnelle de notre problème est donnée d'après la proposition suivante :

Proposition 2.4.2 (voir [10]) Soit u une fonction $L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R}))$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$ tel que $u \in \mathcal{K}_\psi$. On suppose $\psi \in V_\alpha$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t)u &\leq 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t)u \right) (\psi - u) &= 0, \end{aligned} \quad \text{p.p dans } [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

pour tout élément $v \in \mathcal{K}_\psi$ on a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right)_\alpha + a^\alpha(u, v - u) \geq 0 \quad \text{p.p dans } [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

2.4.1 Existence et unicité de la solution du problème

Théorème 2.4.1 Soit $\psi \in V_\alpha$, alors il existe une, et une seule, fonction u vérifiant :

$$u \in L^2([0, T]; V_\alpha) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha),$$

et le problème (2.12). De plus, la fonction u est dans $L^\infty([0, T]; V_\alpha)$.

Pour assurer l'existence de la solution; dans théorème 2.4.1; P. Jaillet et all [10] utilisent la méthode dite de pénalisation, et pour assurer l'unicité on fait appelle à la proposition 2.4.1.

2.4.2 Théorème de régularité

Théorème 2.4.2 (voir [10]) Soit $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$, alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.12) vérifie :

$$u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})).$$

Remarque 2.4.1 Soit $\psi(x) = (E \exp(x) - E)_+$ (resp. $\psi(x) = (E - E \exp(x))_+$), et $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbb{R})$ mais n'est pas dans $W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$. Pour que ce théorème soit adapté pour notre cas, on prend une suite (ψ_m) d'éléments de $W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers ψ . Dans ce cas, la solution associée à $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbb{R})$ coïncide avec la solution associée à $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$ donné dans le théorème 2.4.2. Pour plus de détails, voir [23].

2.4.3 Monotonie et continuité

Dans ce qui suit, Nous donnons des propriétés qualitatives, sur la dépendance de la solution u de l'inéquation variationnelle par rapport à ψ , qui seront utiles dans le reste de notre travail.

Lemme 2.4.1 (voir [12]) Si ψ et $\hat{\psi}$ appartiennent à $V_\alpha : \psi \leq \hat{\psi}$, alors les solutions u et \hat{u} des inéquations variationnelles associées vérifient : $u \leq \hat{u}$ (en particulier $\psi \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$).

Lemme 2.4.2 (voir [12]) Si ψ et $\hat{\psi}$ appartiennent à V_α et si $\psi - \hat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $u - \hat{u} \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ et : $\|u - \hat{u}\|_{L^\infty([0, T]; \mathbb{R})} \leq \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

Problème discret

3.1 Localisation à domaine borné	29
3.2 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis	30
3.3 Discrétisation par la méthode des différences finies	42
3.4 Convergence de la solution du problème discret	44

Il est intéressant de noter que fondamentalement la finance est un monde discret, et vue que la solution analytique n'existe pas pour le problème (2.5), il s'agit donc de résoudre le tout à l'aide des méthodes numériques. Ces méthodes numériques passent par une discrétisation. Parmi les méthodes de discrétisations, on distingue la méthode des élément finis

et différence finies. Ces méthodes requièrent la transformation du problème continu en un problème discret, d'abord nous procédons à la troncature du problème à un domaine borné (voir [10]) dans la première section. Dans la section deux, nous utilisons la méthode θ -schéma combiné avec l'approche des éléments finis, où une discrétisation en temps à l'aide du θ -schéma avant la discrétisation en espace par la méthode des éléments finis. On introduit ensuite une discrétisation en utilisant la méthode des différences finies dans la sections trois. On conclut ce chapitre par des résultats de convergence de la solution discrète.

3.1 Localisation à domaine borné

Le problème (2.10) est donné sur \mathbb{R} , afin de discrétiser ce dernier, on ramène le problème (2.10) sur un intervalle $] -l, +l[$ où l est une constante bien choisit (voir [26]). Et on est amené à imposé une condition au bord de type de Dirichlet. Cette procédure a été approuvée par P. Jaillet, B. Lapeyre, D. Lamberton (voir [10], [23]). Ce résultat nous permet, au lieu de calculer u solution de (2.6) sur \mathbb{R} , il suffit de la calculer sur $\Omega =] -l, +l[$. Ainsi, nous obtenons un problème d'inéquation parabolique avec une condition au bord de type Dirichlet s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}u &\geq 0, \\ u &\geq \psi, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}u \right) (u - \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pour $t \in (0, T]$ et $x \in \Omega$, avec la condition initial

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

avec condition au bord Dirichlet :

$$u(t, x) = \psi(x), x \in \partial\Omega. \quad (3.2)$$

Une intégration par parties nous permet d'écrire, pour $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(\mathcal{A}u, v) = -a(u, v).$$

Posons

$$a(u, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \beta \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u}{\partial x} v dx + r \int_{-l}^{+l} u v dx.$$

La formulation variationnelle du problème (3.1) peut, alors, être écrite sous forme (voir [29]) :

Trouver $u \in L^2([0, T], V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T], H)$ tel que $u \in \mathcal{K}_\psi$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) \geq 0, \text{ pour tout } v \in \mathcal{K}_\psi, \quad (3.3)$$

avec la condition initiale

$$u(0, x) = \psi(x), \quad (3.4)$$

et

$$\mathcal{K}_\psi = \{v \mid v \in V_\Omega, v \geq \psi \text{ sur } \Omega \text{ et } u(t, x) = \psi(x), \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (3.5)$$

3.2 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis

Pour calculer une solution approchée de (3.3), nous procédons à une discrétisation en temps à l'aide du θ -schéma et la discrétisation en espace par élément finis.

3.2.1 Discrétisation en temps

Subdivisions de l'intervalle $[0, T]$, en N sous intervalle de longueur égale $k = \frac{T}{N}$. Posons ensuite $t_n = nk$, $0 \leq n \leq N$, et $u^n = u(t_n)$. Alors

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k}, v - u^{\theta, n+1} \right) + a(u^{\theta, n+1}, v - u^{\theta, n+1}) \geq 0, \text{ pour tout } v \in \mathcal{K}_\psi, \quad (3.6)$$

où

$$u^{\theta, n+1} = \theta u^{n+1} + (1 - \theta) u^n, \quad (3.7)$$

avec

$$u^0 = \psi.$$

3.2.2 Discrétisation en espace

Considérons la subdivisions de l'intervalle Ω en $m + 1$ sous intervalle de même longueur $h = \frac{2l}{m + 1}$. Soit $x_i = -l + ih$, $0 \leq i \leq m + 1$, et $u_h^n = (u_1, \dots, u_m)^T$ désigne le vecteur d'approximation de la solution $u(t, x)$ par rapport à l'instant t et la position x . Soit V_h sous-espace vectoriel engendré par des fonctions de base à support minimal, c'est-à-dire, elle doivent être non nulles sur un nombre minimal de sous-intervalle. Cette propriété est vérifiée par les fonctions de base suivantes, appelées fonctions chapeaux, voir la figure (3.1)

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Les fonctions (3.11) sont telles que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

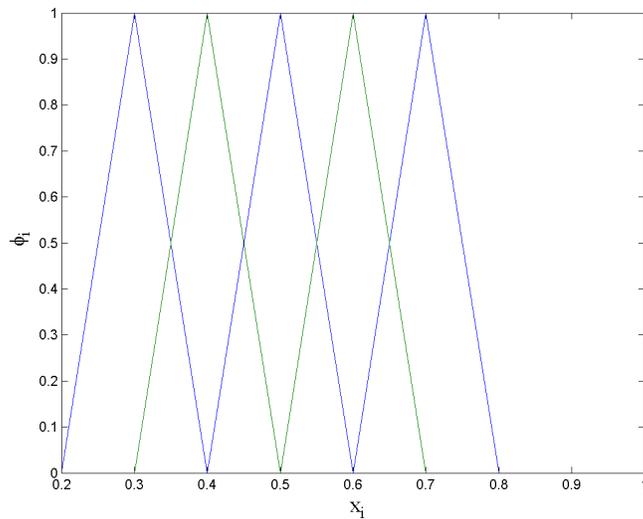


FIGURE 3.1 – Fonction de base linéaire.

Pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^m v_j \phi_{h,j}(x), \quad (3.9)$$

$$v'_h(x) = \sum_{j=1}^m v_j \phi'_{h,j}(x), \quad (3.10)$$

avec

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{-1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Définissons

$$(u_h, v_h)_h = \int_{\Omega} u_h v_h dx, \quad \forall u_h, v_h \in V_h,$$

et

$$\begin{aligned} |v_h|_h &= \sqrt{(v_h, v_h)_h} = |v_h|_{L^2(\Omega)}, \\ \|v_h\|_h &= \left[|v_h|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$|v_h|_h \leq \|v_h\|_h, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Selon (3.10), alors (voir [30])

$$\|v_h\|_h \leq \frac{C_0}{h} |v_h|_h, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.12)$$

Par ailleurs, on approche \mathcal{K}_ψ définit en (3.5) par

$$\mathcal{K}_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h \geq \psi_h \text{ p.p sur } \Omega \text{ et } v_0 = 0, v_{m+1} = \psi(-l)\}.$$

Le problème discret est : trouver $u \in \mathcal{K}_h$ tel que

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}, v_h - u_h^{\theta, n+1} \right) + a_h(u_h^{\theta, n+1}, v_h - u_h^{\theta, n+1}) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h, \quad (3.13)$$

où

$$u_h^{\theta, n+1} = \theta u_h^{n+1} + (1 - \theta) u_h^n,$$

avec

$$u_h^0 = \psi.$$

Nous définissons pour tout u_h et $v_h \in V_h$

$$a_h(u_h, v_h) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} dx - \beta \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u_h}{\partial x} v_h dx + r \int_{-l}^{+l} u_h v_h dx,$$

la forme bilinéaire associée à cet opérateur

$$\mathcal{A}_h = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x} - r.$$

Il est évident, par une intégration par parties, que :

$$(\mathcal{A}_h u, v) = -a_h(u, v).$$

3.2.3 Forme matricielle

L'inéquation variationnelle parabolique discrète (3.13) est vérifiée pour $v_h = u_h^{\theta, n+1} + \phi_i \geq \psi$, ce qui donne

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}, \phi_i \right) + a_h(u_h^{\theta, n+1}, \phi_i) \geq 0, \quad (3.14)$$

ou encore

$$(u_h^{n+1} - u_h^n, \phi_i) + k a_h(u_h^{\theta, n+1}, \phi_i) \geq 0, \quad (3.15)$$

en utilisant (3.7) et (3.9)-(3.10)

$$\sum_{j=1}^m [(\phi_j, \phi_i) + k \theta a_h(\phi_j, \phi_i)] u_j^{n+1} - \sum_{j=1}^m [(\phi_j, \phi_i) + k(1-\theta) a_h(\phi_j, \phi_i)] u_j^n \geq 0. \quad (3.16)$$

Posons

$$\begin{aligned} M_{ij} &= (\phi_j, \phi_i), \\ R_{ij} &= a_h(\phi_j, \phi_i). \end{aligned}$$

la matrices de rigidité $\mathbf{R} = (R_{i,j})$ et la matrice masse $\mathbf{M} = (M_{i,j})$.

Le problème à résoudre, à chaque pas de temps, est donc : trouver $u_h^{n+1} \in \mathcal{K}_h$

$$\left((\mathbf{M} + k \theta \mathbf{R}) u_h^{n+1} - (\mathbf{M} - k(1-\theta) \mathbf{R}) u_h^n, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h, \quad (3.17)$$

avec la condition initial $u_h^0 = \psi$.

Construction des matrices M et R

Le calcul des coefficients des matrices M et R se fait sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Les éléments diagonaux de la matrice de rigidité R

$$R_{i,i} = a_h(\phi_i, \phi_i) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi_i')^2(x) dx - \beta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i' \phi_i(x) dx + r \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx,$$

$$\begin{aligned} R_{i,i} &= \underbrace{\frac{\sigma^2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i')^2(x) dx - \beta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i' \phi_i(x) dx + r \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^2(x) dx}_I \\ &\quad + \underbrace{\frac{\sigma^2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i')^2(x) dx - \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i' \phi_i(x) dx + r \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx}_{II}. \end{aligned}$$

Pour I, nous posons $z = x - x_{i-1}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^h \frac{1}{h^2} dz - \beta \int_0^h \frac{z}{h^2} dz + r \int_0^h \frac{z^2}{h^2} dz \\ &= \frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\beta}{2} + \frac{r h}{3}. \end{aligned}$$

Pour II, nous posons $z = x - x_i$

$$\begin{aligned} II &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^h \frac{1}{h^2} dz + \beta \int_0^h \frac{z}{h^2} dz + r \int_0^h \frac{z^2}{h^2} dz \\ &= \frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\beta}{2} + \frac{r h}{3} \end{aligned}$$

$$R_{i,i} = I + II = \frac{\sigma^2}{h} + \frac{r h}{3}.$$

Les éléments hors diagonaux de la matrice de rigidité \mathbf{R}

$$R_{i,i+1} = a_h(\phi_{i+1}, \phi_i) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i+1} \phi'_i(x) dx - \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i+1} \phi_i(x) dx + r \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1} \phi_i(x) dx.$$

Nous posons $z = x - x_i$, alors

$$\begin{aligned} R_{i,i+1} &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{-1}{h}\right) dz - \beta \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{h-z}{h}\right) dz + r \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right) \left(\frac{h-z}{h}\right) dz \\ &= -\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

De même pour

$$\begin{aligned} R_{i-1,i} &= a_h(\phi_i, \phi_{i-1}) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i \phi'_{i-1}(x) dx - \beta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i \phi_{i-1}(x) dx + r \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i \phi_{i-1}(x) dx \\ &= -\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

Notations. Soit

$$a_{-1} = -\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}, \quad (3.18)$$

$$a_0 = \frac{\sigma^2}{h} + \frac{r h}{3}, \quad (3.19)$$

$$a_1 = -\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}. \quad (3.20)$$

La matrice de rigidité peut être calculée d'une manière explicite

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_0 & a_1 & & & \\ & a_{-1} & a_0 & a_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ & & & & a_{-1} & a_0 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m+2)}$$

Nous suivons le même principe du calculer pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice de masse \mathbf{M}

$$M_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx = \frac{2h}{3},$$

et les éléments hors diagonaux de la matrice de masse \mathbf{M}

$$M_{i,i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_{i+1} \phi_i(x) dx = \frac{h}{6}.$$

La matrice de masse est

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m+2)}$$

Nous remarquons que les matrices de rigidité et de masse \mathbf{R} et \mathbf{M} diffèrent de celles introduites dans le papier de L. Feng, V. Linestsky, J.L. Morales et J. Nocedal [13]. La technique d'assemblage des matrices de masse et de rigidité sont inespérées dans [31, 32]. Pour le moment, une fois calculés les matrices de rigidité \mathbf{R} et de masse \mathbf{M} , il faut les modifier, pour prendre en considération les conditions aux limites Dirichlet.

Nous devons donc supprimer la première et dernière colonne, conduisant à des matrices

restreintes \mathbf{R}_r et \mathbf{M}_r .

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_r = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & . & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

En utilisant les conditions aux bords de Dirichlet défini en (3.5), nous fixons un vecteur nul $g \in \mathbb{R}^m$, excepté la première composante, $g_1 = k a_{-1} \psi(-l)$. Ensuite, pour chaque pas de temps, nous devons résoudre le système :

$$\left((\mathbf{M}_r + k\theta\mathbf{R}_r) u_h^{n+1} - (\mathbf{M}_r - k(1-\theta)\mathbf{R}_r) u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h, \quad (3.21)$$

avec la condition initial $u_h^0 = \psi_h$.

De (3.21) pour u_h^n connu on calcul u_h^{n+1}

— Pour $\theta = 0$ il correspond au schéma explicite d'Euler.

$$\left(\mathbf{M}_r u_h^{n+1} - (\mathbf{M}_r - k\mathbf{R}_r) u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.22)$$

— Pour $\theta = 1$ il correspond au schéma implicite d' Euler.

$$\left((\mathbf{M}_r + k\mathbf{R}_r) u_h^{n+1} - \mathbf{M}_r u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.23)$$

— Pour $\theta = \frac{1}{2}$ il correspond au schéma de Crank-Nicolson .

$$\left(\left(\mathbf{M}_r + \frac{k}{2}\mathbf{R}_r \right) u_h^{n+1} - \left(\mathbf{M}_r - \frac{k}{2}\mathbf{R}_r \right) u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.24)$$

Nous posons $\mathbf{B} = (\mathbf{M}_r + k\theta \mathbf{R}_r)$, est une matrice tridiagonale de taille $m \times m$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & a & b & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix},$$

avec

$$b = a_0 k\theta + \frac{4h}{6}, \quad (3.25)$$

$$c = a_{+1} k\theta + \frac{h}{6}, \quad (3.26)$$

$$a = a_{-1} k\theta + \frac{h}{6}, \quad (3.27)$$

et $\mathbf{d}^n = (\mathbf{M}_r - k(1-\theta)\mathbf{R}_r) u_h^n - g \in \mathbb{R}_r^m$.

La nouvelle forme d'écriture du problème original (3.1) comme un problème de complémentarité linéaire discrétisée (LCP), en utilisant la proposition 1.3.1, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} u_h^{n+1} &\geq d^n, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ (\mathbf{B} u_h^{n+1} - d^n)(u_h^{n+1} - \psi_h) &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

pour $n = 0, \dots, N$.

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+2) \times (m+2)}$$

Les entrées de la matrice \mathbf{R} sont définis en (3.18), (3.19) et (3.20).

3.3 Discrétisation par la méthode des différences finies

Le but de cet section est de souligner la différence dans la justification de la méthode de Brennan et Schwartz pour la méthode des éléments finis et celle de différences finies introduite par P. Jaillet, B. Lapeyre et D. Lambertan [10]. L'approximation de (3.1) par différences finies consiste à subdiviser les intervalles $[0, T]$ et Ω en N et $m + 1$ sous intervalles de longueurs respectives

$$k = \frac{T}{N}, \quad h = \frac{2l}{m+1}.$$

Posons $t_n = nk$, $x_i = -l + ih$, et $u_i^n = u(t_n, x_i)$ pour $n = 1, \dots, N$ et $i = 1, \dots, m$. Nous remplaçons par la suite les dérivées partielles par des approximations d'ordre un ou deux en utilisant la formule de Taylor. Pour des résultats théoriques complet sur l'approximation par différences finies voir [33, 32, 31]. Nous avons déjà vu comment discrétiser les dérivées partielles en temps dans la section précédente. Il nous reste donc l'approximation de l'opérateur \mathcal{A} est donné par (voir [30, 34]), si $u_h = (u_h^i)_{1 \leq i \leq m}$

$$(\mathcal{A}_h u_h)_i = \frac{\sigma^2}{2h^2} (u_h^{i+1} - 2u_h^i + u_h^{i-1}) + \frac{\beta}{2h} (u_h^{i+1} - u_h^{i-1}) + r u_h^i.$$

On procède par récurrence : pour u_h^n donné, on calcule u_h^{n+1} en résolvant le problème de complémentarité linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \mathcal{A}_h u_h^{n+\theta} &\geq 0, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \mathcal{A}_h u_h^{n+\theta} \right) (u_h^{n+1} - \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec la condition initial

$$u_h^0 = \psi_h(x), \quad x \in \Omega,$$

avec condition au bord Dirichlet :

$$u_h^n = \psi_h \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.30}$$

En posant

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} \tilde{b} & \tilde{c} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a} & \tilde{b} \end{pmatrix},$$

avec

$$\tilde{a} = -\frac{k \sigma^2}{2h^2} + \beta \frac{k}{2h}, \tag{3.31}$$

$$\tilde{b} = 1 + \frac{k \sigma^2}{h^2} + r k, \tag{3.32}$$

$$\tilde{c} = -\frac{k \sigma^2}{2h^2} - \beta \frac{k}{2h}. \tag{3.33}$$

Si nous utilisons les conditions de Neumann, la matrice a la forme [20]

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} \tilde{b} + \tilde{a} & \tilde{c} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a} & \tilde{b} + \tilde{c} \end{pmatrix},$$

Le problème de complémentarité linéaire à résoudre pour chaque pas du temps est :

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + k\theta\mathcal{A}_h)u_h^{n+1} - (\mathbf{I} - k(1-\theta)\mathcal{A}_h)u_h^n + g &\geq 0, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ ((\mathbf{I} + k\theta\mathcal{A}_h)u_h^{n+1} - (\mathbf{I} - k(1-\theta)\mathcal{A}_h)u_h^n + g)(u_h^{n+1} - \psi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec la condition initial

$$u_h^0 = \psi_h(x), \quad x \in \Omega,$$

où \mathbf{I} est la matrice d'identité et g est défini de la même façon que dans la méthode des éléments finis.

3.4 Convergence de la solution du problème discret

Vue que la solution analytique ne s'offre pas ; pour le problème (3.1) ; alors on se contente de la solution approchée. C'est pour quoi on va étudier la convergence de la solution approchée. On remarque que la forme bilinéaire discrète $a_h(u_h, v_h)$ est bornée, c'est-à-dire

$$|a_h(u_h, v_h)|_h \leq C_a \|u_h\|_h \|v_h\|_h, \quad \text{pour } u_h \text{ et } v_h \in V_h, \quad (3.35)$$

avec $C_a = 3(\sigma^2 + |\beta| + r)$.

De la définition de $a_h(u_h, v_h)$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned} |a_h(u_h, v_h)|_h &\leq \frac{\sigma^2}{2} \left| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right|_h \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|_h + |\beta| \left| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right|_h |v_h|_h + r |u_h|_h |v_h|_h \\ &\leq 3(\sigma^2 + |\beta| + r) \|u_h\|_h \|v_h\|_h. \end{aligned}$$

On introduit le lemme suivant, il nous permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème discret.

Lemme 3.4.1 Il existe deux réels strictement positifs ρ et γ tel que :

$$a_h(u_h, u_h) + \rho |u_h|^2 \geq \gamma \|u_h\|^2$$

Nous reprenons les mêmes techniques que dans [10, 23], pour prouver le lemme 3.4.1.

Preuve. En utilisant la définition de $a_h(u, u)$ et $r > 0$

$$a_h(u_h, u_h) \geq \frac{\sigma^2}{2} \left(\|u_h\|_h^2 - |u_h|_h^2 \right) - |\beta| \|u_h\|_h \|u_h\|_h.$$

En posant $\mu = |\beta|$ et $\eta = \frac{\sigma^2}{2} > 0$, on a :

$$a_h(u_h, u_h) \geq \eta \|u_h\|_h^2 - \mu \|u_h\|_h \|u_h\|_h - \eta |u_h|_h^2.$$

D'ou pour tout $\rho > 0$

$$a_h(u_h, u_h) + \rho |u_h|_h^2 \geq \eta \|u_h\|_h^2 - \mu \|u_h\|_h \|u_h\|_h + (\rho - \eta) |u_h|_h^2.$$

Il suffit de choisir $\gamma = \frac{\eta}{2}$ et ρ tel que la forme quadratique

$$(x, y) \rightarrow \frac{\eta}{2} x^2 - \mu xy + (\rho - \eta) y^2,$$

soit positif. On remarque que ce ρ existe car en utilisant la relation classique $a.b < \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2$. D'ou

$$\frac{\eta}{2} x^2 - \mu xy + (\rho - \eta) y^2 \geq \frac{\eta - \delta\mu}{2} x^2 + \left(\rho - \eta - \frac{\mu}{2\delta} \right) y^2.$$

En prenant $\delta = \frac{\eta}{\mu}$ (car $\beta > 0$) et ρ assez grand tel que $\rho - \eta - \frac{\mu^2}{2\eta}$ soit positive. On obtient

$$\frac{\eta}{2} x^2 - \mu xy + (\rho - \eta) y^2 \geq \left(\rho - \eta - \frac{\mu^2}{2\eta} \right) y^2 \geq 0.$$

■

Avant d'annoncer le théorème qui nous assure la convergence de u_h^n vers u , introduit par [29, 35]. On impose la condition suivante dite la condition de stabilité (voir [30]). Il existe une constante $\beta_1 > 0$, telle que :

$$1 - (1 - \theta) \frac{8 C_0^2 C_a^2}{\sigma^2} \frac{k}{h^2} \geq \beta_1 > 0, \quad (3.36)$$

avec C_0 et C_a sont définis en (3.12) et (3.35).

Ce résultat suivant assure la convergence de u_h^n vers u (voir [29]).

Théorème 3.4.1 ([29]) Si, $\theta \in [0, 1]$, pour tous $h, k \rightarrow 0$ et si, $\frac{k}{h^2} \rightarrow 0$ (la condition (3.36) est satisfaite). Alors

$$u_h^n \rightarrow u, \text{ dans } L^2([0, T], L^2(\Omega)).$$

Remarque 3.4.1 D'après la condition de stabilité (3.36), nous ne pouvons pas assurer que pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, le schéma est inconditionnellement stable contrairement au cas, pour $\theta = 1$ dans (3.36) on peut obtenir des résultats de ce type. Pour les options européennes, selon le principe de Von Neumann (voir [33]), pour $\theta \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement stable. C'est pour quoi, dans la justification de l'algorithme de Brennan-Schwartz du chapitre 4, nous allons considérer le cas $\theta = 1$.