

### IV.1.3- Les lois fondamentales

#### IV.1.3.1- Loi de Hooke

Appliquée à une structure élastique homogène et isotrope, dans les conditions de petits déplacements, la loi de Hooke exprime que les composantes du tenseur de contrainte mécanique ( $\sigma$ ) sont liées à celles de ( $\varepsilon$ ) par une relation matricielle linéaire de la forme [39], [41]:

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (\text{IV.6})$$

avec

$$[H] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7a})$$

$\lambda$  et  $G$  étant les coefficients de Lamé

En exprimant les coefficients  $\lambda$  et  $G$  en fonction des paramètres d'élasticité  $E$  (module d'Young) et  $\nu$  (coefficient de Poisson), selon les définitions [39], [42], [43].

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

On peut obtenir la variante d'expression de  $[H]$  suivante :

$$[H] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7b})$$

Développée en coordonnées cartésiennes, la relation (IV.6) conduit aux expressions suivantes :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = a(1 - \nu)\varepsilon_{xx} + av\varepsilon_{yy} + av\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} = av\varepsilon_{xx} + a(1 - \nu)\varepsilon_{yy} + av\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} = av\varepsilon_{xx} + av\varepsilon_{yy} + a(1 - \nu)\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xy} = ab\gamma_{xy} \\ \sigma_{xz} = ab\gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} = ab\gamma_{yz} \end{array} \right. \quad (\text{IV.8})$$

avec

$$a = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad b = \frac{(1-2\nu)}{2}$$

En remplaçant les composantes de  $\{\varepsilon\}$  par les expressions définies en (IV.3), on obtient le système d'équations qui exprime  $\{\sigma\}$  en fonction de  $\underline{U}(u, v, w)$ , soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = a(1 - \nu)u_{,x} + avv_{,y} + avw_{,z} \\ \sigma_{yy} = avu_{,x} + a(1 - \nu)v_{,y} + avw_{,z} \\ \sigma_{zz} = avu_{,x} + avv_{,y} + a(1 - \nu)w_{,z} \\ \sigma_{xy} = ab(u_{,y} + v_{,x}) \\ \sigma_{xz} = ab(u_{,z} + w_{,x}) \\ \sigma_{yz} = ab(v_{,z} + w_{,y}) \end{array} \right. \quad (\text{IV.9})$$

#### IV.1.3.2- Loi de comportement

La loi de comportement établit la relation entre le vecteur déformation ( $\varepsilon$ ) et l'ensemble des contraintes existantes, indépendamment de leur origine (mécanique, résiduelle ou thermique). Elle est traduite par l'égalité :

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} - \{\sigma_{th}\} = [H]\{\varepsilon\} \quad (\text{IV.10})$$

où  $\{\sigma_0\}$  représente les contraintes résiduelles liées à l'histoire de la structure considérée

$\{\sigma_{th}\}$  définit les contraintes thermiques dues à l'influence de la répartition de température qui modifie les propriétés physiques du matériau de la structure

Le vecteur contrainte thermique  $\{\sigma_{th}\}$  a pour expression :

$$\{\sigma_{th}\} = -[H]\{\varepsilon_{th}\}$$

où  $\{\varepsilon_{th}\}$  désigne le vecteur déformation thermique de composantes :

$$\langle \varepsilon_{th} \rangle = \alpha T \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$\alpha$  étant le coefficient de dilatation thermique, et  $T$  la variable température.

#### IV.1.4- Equations d'équilibre

La résolution d'un problème d'équilibre se rapportant à un solide déformable ( $\Omega$ ) de volume ( $V$ ) et délimité par une surface frontière  $S = S_U \cup S_f$  consiste à traduire les effets des sollicitations (en contrainte) qu'il subit, par des modifications de son état mécanique global. Dans notre analyse, les variations de cet état sont décrites à partir de l'évolution de la répartition du vecteur déplacement  $\underline{U}$  en tout point du solide.

Pour ce faire, on doit inventorier les différentes sollicitations à prendre en compte et, définir les conditions portant sur les grandeurs caractéristiques suivantes :

- les forces de volume  $\underline{f}_v : \{f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}\}$ ,
- les forces de surface  $\underline{f}_s : \{f_{sx}, f_{sy}, f_{sz}\}$  appliquées à la surface frontière ( $S_f$ ),
- les forces d'inertie  $\rho \underline{\ddot{U}} : \{\rho \ddot{u}, \rho \ddot{v}, \rho \ddot{w}\}$ ,
- les contraintes initiales (ou résiduelles)  $\{\sigma_0\}$ ,
- les sollicitations thermiques  $\{\sigma_{th}\}$ ,
- les conditions cinématiques  $\underline{U}_0 : \{u_0, v_0, w_0\}$  sur la surface frontière ( $S_U$ ).

A partir de ces éléments de description, la théorie fonde la formulation des conditions d'équilibre sur les relations vectorielles suivantes :

a. Equation d'équilibre en volume dans ( $V$ )

$$\{div \langle \sigma \rangle\} + \{f_v\} - \rho \{\ddot{U}\} = \{0\} \quad (IV.11)$$

b. Equation d'équilibre en surface ( $S_f$ )

$$-(\sigma)\{n\} + \{f_s\} = \{0\} \quad (IV.12)$$

c. Loi de comportement

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} - \{\sigma_{th}\} = [H]\{\varepsilon\}$$

Le développement en expressions cartésiennes de ces relations de base conduit aux systèmes d'équations suivantes :

☞ Equation d'équilibre en volume

$$\text{Suivant la direction } 0x : \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_{vx} - \rho \ddot{u} = 0$$

$$\text{Suivant la direction } 0y : \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_{vy} - \rho \ddot{v} = 0 \quad (IV.13)$$

$$\text{Suivant la direction } 0z : \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_{vz} - \rho \ddot{w} = 0$$

☞ Equation d'équilibre en surface

$$\begin{aligned}
 \text{Suivant la direction } 0x : \quad & \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = f_{sx} \\
 \text{Suivant la direction } 0y : \quad & \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{zy}n_z = f_{sy} \\
 \text{Suivant la direction } 0z : \quad & \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = f_{sz}
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

☞ Loi de comportement

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{Bmatrix} (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz} \\ \nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz} \\ \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + (1-\nu)\varepsilon_{zz} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{xy} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{xz} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{xx0} \\ \sigma_{yy0} \\ \sigma_{zz0} \\ \sigma_{xy0} \\ \sigma_{xz0} \\ \sigma_{yz0} \end{Bmatrix} \tag{IV.15a}$$

Pour ramener les solutions de ce système d'équations aux vecteurs déplacement  $\underline{U}$ , on se sert de la relation déformation-déplacement, définie en (IV.3), qui une fois traduite dans la relation (IV.15a) conduit à l'expression de  $\{\sigma\}$  en fonction de  $\{U\}$ , soit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{Bmatrix} (1-\nu)u_{,x} + \nu v_{,y} + \nu w_{,z} \\ \nu u_{,x} + (1-\nu)v_{,y} + \nu w_{,z} \\ \nu u_{,x} + \nu v_{,y} + (1-\nu)w_{,z} \\ (1-2\nu)(u_{,y} + v_{,x}) \\ (1-2\nu)(u_{,z} + w_{,x}) \\ (1-2\nu)(v_{,z} + w_{,y}) \end{Bmatrix} + \frac{E\alpha T}{(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{xx0} \\ \sigma_{yy0} \\ \sigma_{zz0} \\ \sigma_{xy0} \\ \sigma_{xz0} \\ \sigma_{yz0} \end{Bmatrix} \tag{IV.15b}$$

## IV.2- Traitement du problème par la Méthode des Eléments Finis

### IV.2.1- Principe général de la M.E.F

L'étape d'analyse dont ce paragraphe fait l'objet est la résolution numérique des systèmes d'équations qui décrivent le problème d'équilibre, en utilisant la M.E.F.

De façon générale, le principe de mise en œuvre de la méthode nécessite deux opérations fondamentales de préparation qui sont d'une part, la définition d'un modèle discrétisé de la structure étudiée, d'autre part, la transcription des équations aux dérivées partielles (dite formulation forte ou brute) constituant le système d'équations d'équilibre, en équations intégrales (dite formulation faible). Le passage peut être réalisé par application du principe variationnel.

#### IV.2.1.1- Modèle géométrique et conditions d'étude

Le modèle géométrique choisi pour l'étude est identique à celui que nous avons adopté dans la partie III de ce travail, lors de la détermination des charges hydro-thermiques, c'est-à-dire un bloc de géométrie parallélépipédique, discrétisé selon la figure IV.5a.

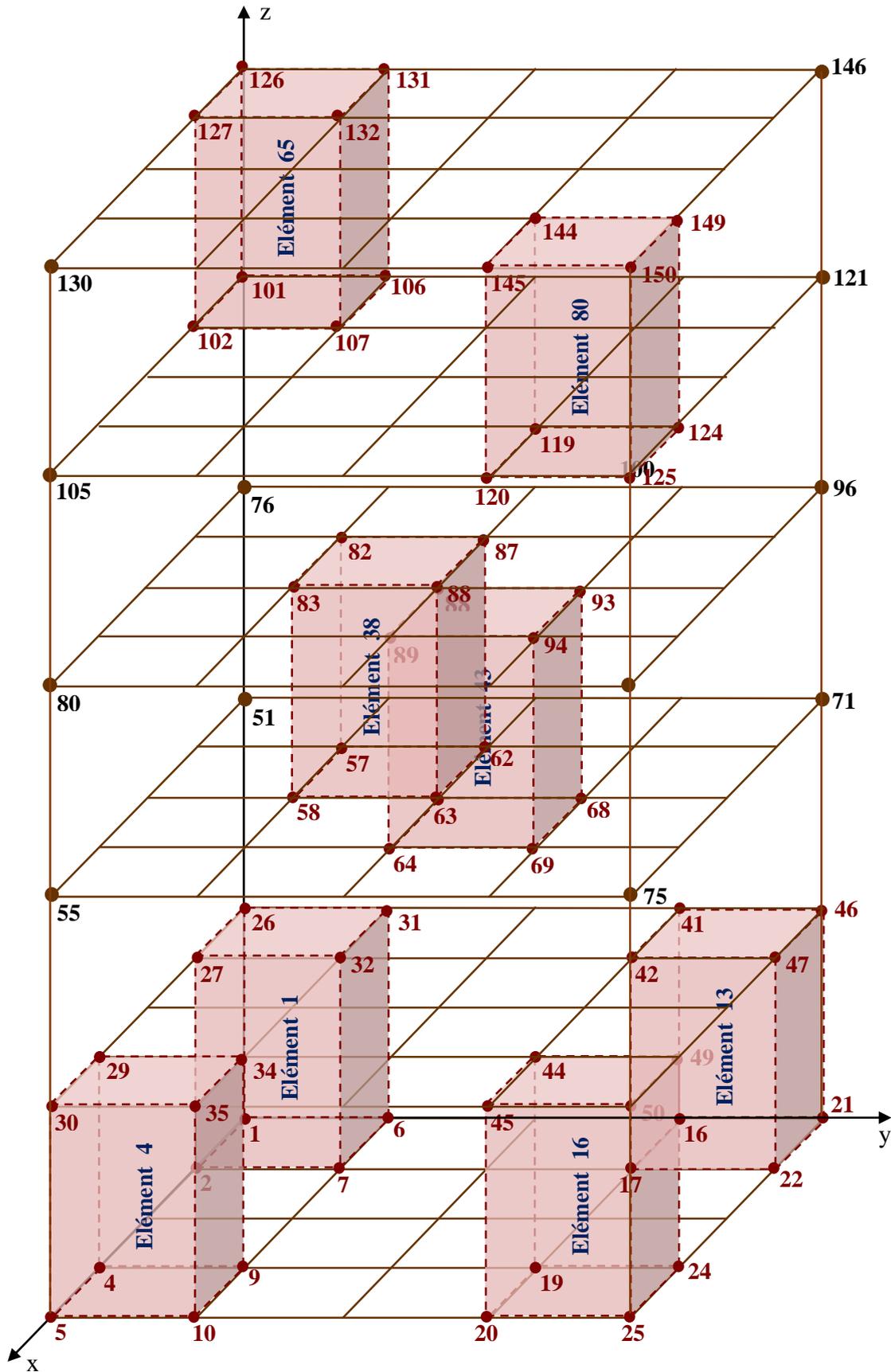


Figure IV. 5 a: Modèle discrétisé pour le traitement par éléments finis

Il comporte 80 éléments et 150 nœuds de description.

Les conditions d'étude appliquées à ce modèle comprennent (Figure IV.5b) :

- les charges volumiques  $\{f_v\}$  composées de la contribution des succions  $\{\psi\}$  et de celle des contraintes thermiques :

$$\langle \sigma_{th} \rangle = -\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \langle 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle$$

- les charges surfaciques  $\{f_s\}$  qui sont réduites à la pression atmosphérique  $\{P_{atm}\}$  appliquée à la face supérieure du modèle.

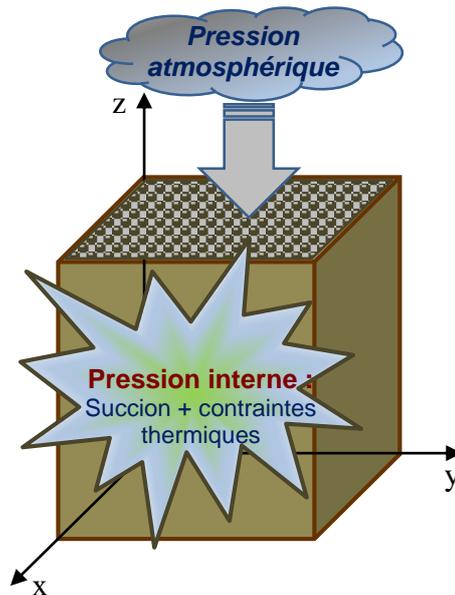


Figure IV.5 b: Conditions de charge sur le modèle

#### IV.2.1.2- Modèle mathématique

Etant donné le principe annoncé précédemment, nous allons d'abord rappeler les systèmes d'équations d'équilibre du problème sous sa forme forte et, exprimés en coordonnées cartésiennes avant de présenter la formulation faible équivalente [39], [40].

##### a) Synthèse des équations brutes du problème

###### a.1- Equations d'équilibre sur (V)

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \psi_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \psi_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \psi_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (IV.16a)$$

### a.2-Equations à la frontière ( $S_f$ )

$$\begin{cases} \sigma_{xz}n_z = (P_{atm})_x \\ \sigma_{zy}n_z = (P_{atm})_y \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = (P_{atm})_z \end{cases} \quad (IV.16b)$$

### a.3-Equations exprimant la loi de comportement

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{Bmatrix} (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz} \\ \nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz} \\ \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + (1-\nu)\varepsilon_{zz} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{xy} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{xz} \\ (1-2\nu)\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} + \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{xx0} \\ \sigma_{yy0} \\ \sigma_{zz0} \\ \sigma_{xy0} \\ \sigma_{xz0} \\ \sigma_{yz0} \end{Bmatrix} \quad (IV.16c)$$

### a.4-Equations exprimant la relation déformation-déplacement

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ u_{,z} + w_{,x} \\ v_{,z} + w_{,y} \end{Bmatrix}$$

### b) Formulation faible des équations du problème

Pour établir la formulation faible des équations du problème, nous avons procédé en appliquant la méthode des résidus pondérés dont le principe est le suivant.

Les solutions du problème étant ramenées aux vecteurs déplacements  $\{\underline{U}\}$ , définissons deux opérateurs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$  tels que [41]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(\underline{U}) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \mathcal{L}_y(\underline{U}) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \mathcal{L}_z(\underline{U}) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (IV.17a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{C}_x(\underline{U}) = \sigma_{xz}n_z \\ \mathcal{C}_y(\underline{U}) = \sigma_{zy}n_z \\ \mathcal{C}_z(\underline{U}) = \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{cases}$$

De cette manière, les équations de volume et de surface peuvent être présentées sous les formes simples ci-après :

$$\begin{cases} \text{Equation de volume } \{\mathcal{L}_x(\underline{U})\} + \{f_v\} + \{f_{th}\} = \{0\} \\ \text{Equation de surface } \{C(\underline{U})\} = \{f_s\} \end{cases} \quad (\text{IV.17b})$$

où

$\{f_v\}$  représente la force volumique liée à la succion  $\Psi$

$\{f_{th}\}$  est le vecteur de force volumique liée aux contraintes thermiques  $\sigma_{th}$

$\{f_s\}$  est le vecteur de force surfacique représentée par la pression atmosphérique  $P_{atm}$

**N.B :**

Les contraintes initiales sont supposées nulles.

Toute fonction  $U^0(X)$  qui vérifie le système d'équations (IV.17b), à tout instant  $t$ , est solution du problème d'équilibre. Et, à toute fonction  $U(X)$  qui ne vérifie que l'équation de surface du système (IV.17b), on peut associer une quantité appelée « résidu  $R(\underline{U})$  » défini par la relation :

$$\{R(\underline{U})\} = \{\mathcal{L}(\underline{U}) + f_v + f_{th}\}$$

La méthode des résidus pondérés consiste à chercher les fonctions  $U(X)$  qui annulent la fonction intégrale généralisée déduite du principe variationnel.

$$W(\underline{U}) = \int_{(\Omega)} \langle \varphi(X) \rangle \{R(\underline{U})\} dv = \int_{(\Omega)} \langle \varphi(X) \rangle \{\mathcal{L}(\underline{U}) + f_v + f_{th}\} dv \quad (\text{IV.18})$$

où  $\langle \varphi(X) \rangle$  désigne un ensemble de fonctions de pondération.

D'après le théorème d'Euler sur les calculs variationnels, toutes solutions du système (IV.17b) minimisent l'expression de  $W(\underline{U})$  donnée en (IV.18). Par contre, toute solution de l'équation :

$$W(\underline{U}) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

représente une approximation de la solution d'équilibre du problème et, cette approximation dépend du choix des fonctions de pondération  $\langle \varphi(X) \rangle$ .

En exprimant le vecteur de description  $\underline{U}$  sous une forme discrétisée déduite de l'approximation nodale :

$$\underline{U}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \{U_i\}$$

avec  $\{U_i\}$  : les vecteurs de déplacement nodal,

$n$  : le nombre de nœuds de définition,

$\{N_i(x, y, z)\}$  : les fonctions d'interpolation nodale,

et en adoptant la méthode de Galerkin qui consiste à choisir

$$\langle \varphi(X) \rangle = \langle \delta U_n \rangle$$

le développement de l'équation (IV.19) conduit à la forme faible des équations du problème en passant par la forme matricielle ci-après :

$$W = \langle \delta U_n \rangle \{ [k]\{U_n\} + [c]\{\dot{U}_n\} + [m]\{\ddot{U}_n\} - \{f_{vs}\} - \{f_{th}\} \} = 0 \quad (\text{IV.20a})$$

où

$[k]$  désigne la matrice de rigidité, définie par :  $\left[ \int_{\Omega} k_{ij} dv \right]$

$[c]$ , la matrice d'amortissement, définie par :  $\left[ \int_{\Omega} c_{ij} dv \right]$

$[m]$ , la matrice de masse, définie par :  $\left[ \int_{\Omega} m_{ij} dv \right]$

$\{f_{vs}\}$ , le vecteur défini par :  $\left\{ \int_{\Omega} \psi_i dv + \int_s f_{si} ds \right\}$

$\{f_{th}\}$ , le vecteur défini par :  $\left\{ \int_{\Omega} f_{thi} dv \right\}$

L'identité (IV.20a) est vérifiée, quelles que soient les fonctions de pondération  $\langle \delta U_n \rangle$  si on a :

$$\boxed{[k]\{U_n\} + [c]\{\dot{U}_n\} + [m]\{\ddot{U}_n\} = \{f_{vs} + f_{th}\}} \quad (\text{IV.20b})$$

Cette équation matricielle représente la formulation faible des équations du problème, rapportée à l'espace réel.

#### IV.2.2- Principe de résolution du problème

Le traitement numérique du problème comporte deux parties complémentaires telles que la première vise à déterminer les répartitions de température et de succion au sein du sol qui est siège des processus d'infiltration et de transfert thermique (cf. Partie III). Le traitement de cette première partie a été réalisé par la M.D.F. et, les résultats obtenus sont insérés dans la deuxième partie en tant que charges thermique et mécanique.

Le but de l'étude numérique par la M.E.F. qui est menée dans la deuxième partie, est d'évaluer les déformations provoquées par ces charges, sur la structure du sol.

Les deux parties du traitement ont fait l'objet d'un même programme dont le déroulement suit les étapes d'opération suivantes :

#### IV.2.2.1- Calcul des charges par la M.D.F.

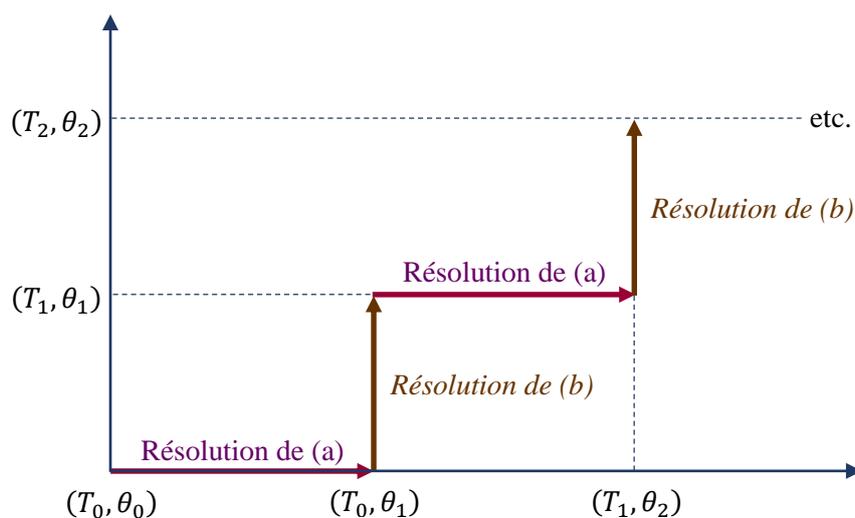
Le calcul est basé sur la résolution du système composé par l'équation hydrique et l'équation thermique couplées, rapporté au modèle géométrique présenté à la figure (III.1).

Le but est de déterminer les répartitions de succion  $\{\psi\}$  et de température  $\{T\}$  qui représentent les éléments de charge s'exerçant sur la structure. Pour ce faire, les étapes d'opération du traitement numérique peuvent être résumées comme suit [27], [28].

- A un instant initial  $t_0$ , on se donne les valeurs de la teneur en eau  $\{\theta_0\}$ , de la température  $\{T_0\}$  et de la succion  $\{\psi_0\}$ .
- On résout le système d'équations couplées donné dans les relations (II.8) que l'on peut mettre sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \text{Equation en } \theta: & [M_\theta]\{\theta\} = \{Y_\theta\} & (a) \\ \text{Equation en } T: & [M_T]\{T\} = \{Y_T\} & (b) \end{cases} \quad (IV.21)$$

La résolution a été menée en utilisant la méthode d'élimination de Gauss et, en procédant par itération, selon des étapes successives que nous pouvons schématiser comme suit.



- Après la résolution, on dispose des couples de solutions  $(\{\theta_t\}, \{T_t\})$  et, l'injection des valeurs de  $\{\theta_t\}$  obtenues dans la relation (I.40c) permet de déduire les valeurs de la succion qui a pour expression :

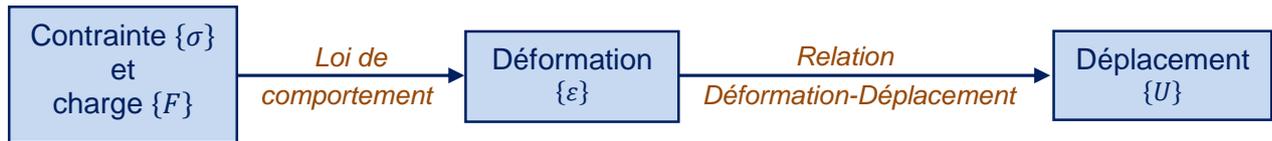
$$\psi_t = \frac{\left[ \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-1/m} - 1 \right]^{1/n}}{\beta}$$

Après l'exécution de cette partie du programme, les éléments de charge  $\{\Psi_t\}$  et  $\{T_t\}$  obtenus sont insérés dans le système d'équations de la structure pour en déduire le champ de déplacement résultant.

#### IV.2.2.2- Calcul du champ de déplacement

Le traitement numérique dont cette seconde partie fait l'objet, a été réalisé en utilisant la M.E.F.. Il vise à résoudre numériquement l'équation d'équilibre (IV.20b) du problème de structure, rapporté au modèle discrétisé de la structure étudiée. Cette équation exprime la relation entre les contraintes ( $\sigma$ ) (donc les charges  $F$ ) existantes et, les déplacements ( $\underline{U}$ ) résultants.

Le passage entre ces grandeurs peut être présenté sous la forme simpliste :



Le déroulement de la résolution est à caractère répétitif à chaque pas de temps  $\Delta t$ , fixé au préalable, afin de reproduire l'évolution au cours du temps de l'état mécanique du milieu.

Les étapes d'opérations qui composent le traitement peuvent se résumer comme suit :

- A un instant  $t_0$ , on se donne la répartition  $U_0(x, y, z)$  des déplacements.
- On passe à la résolution de l'équation d'équilibre
 
$$[k]\{\underline{U}_n\} + [c]\{\dot{\underline{U}}_n\} + [m]\{\ddot{\underline{U}}_n\} = \{f_{vs} + f_{th}\}$$
 qui est présentée sous sa forme faible :
 
$$\left[ \int k_{ij} dv \right] \{\underline{U}_n\} + \left[ \int c_{ij} dv \right] \{\dot{\underline{U}}_n\} + \left[ \int m_{ij} dv \right] \{\ddot{\underline{U}}_n\} = \left\{ \int (\psi + f_{th}) dv \right\} + \left\{ \int P_{atm} ds \right\}$$
- Cette résolution comprend les opérations suivantes :
  - Détermination des matrices  $[k]$ ,  $[c]$  et  $[m]$  ainsi que des vecteurs  $\{f_{vs}\}$  et  $\{f_{th}\}$ .
  - Explicitation des termes  $\{\dot{U}\}$  et  $\{\ddot{U}\}$  en fonction de  $\{U\}$  par la méthode de Newmark et Wilson.
  - Assemblage de chaque terme de l'équation d'équilibre pour ramener la formulation faible sous la forme matricielle :  $[K]\{U\} = \{F\}$
  - Résolution de cette dernière forme d'équation par la méthode d'élimination de Gauss
- Après la résolution, on dispose des solutions qui sont représentées par les composantes  $(u, v, w)$  du vecteur déplacement  $\underline{U}$ , à un instant  $t = t_0 + \Delta t$ .
- Après cette étape, la résolution se poursuit par itération jusqu'à l'instant final  $t_{max}$  de l'étude.

#### IV.2.3- Organigramme global de calcul

La première partie de cet organigramme correspond au calcul des charges hydro-thermique par la M.D.F. et, la dernière partie, à celui du champ de déplacement par la M.E.F. [26], [31], [41].

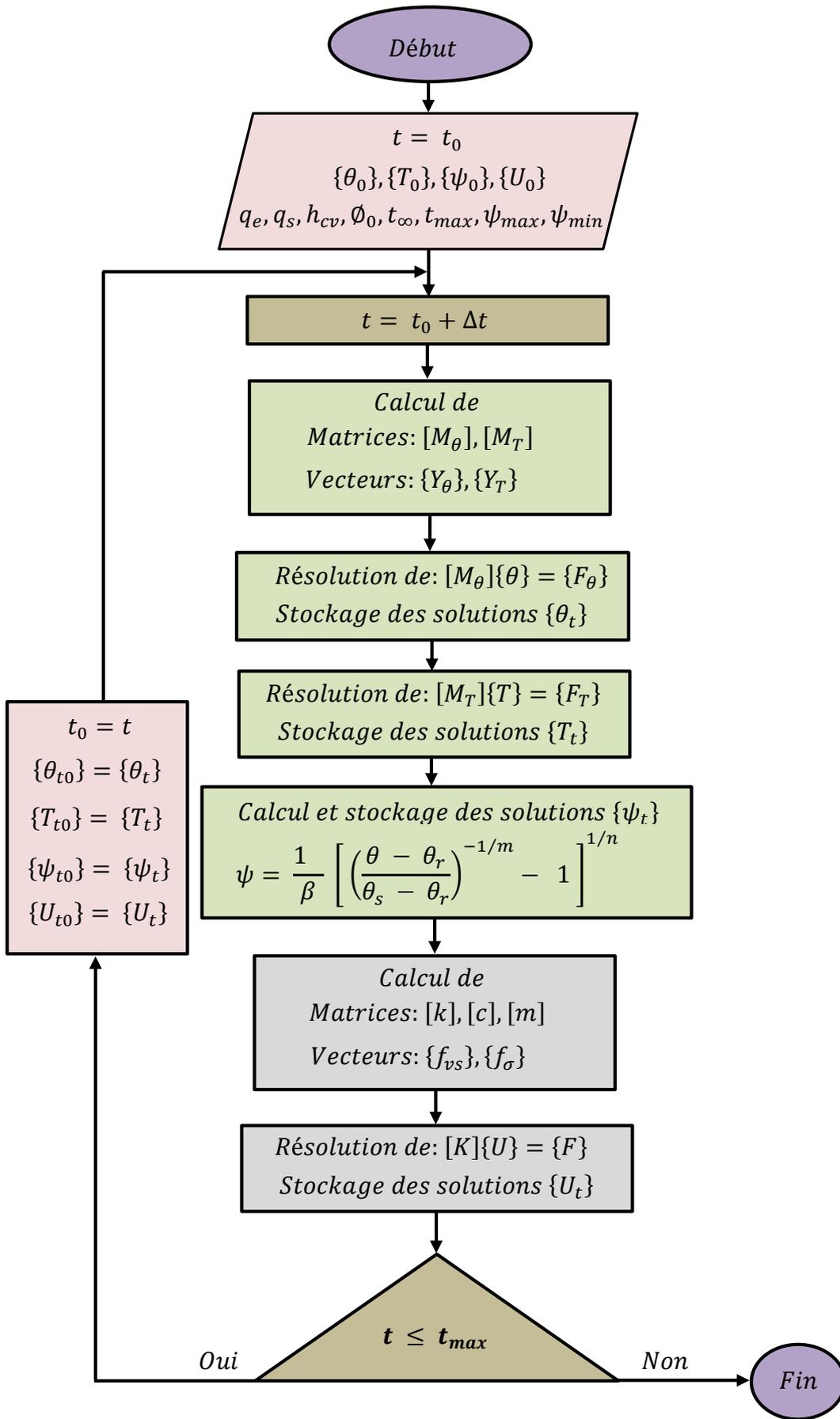


Figure IV. 6: Organigramme global de calcul