

## L'utilisation de la méthode polaire

tenseur  $\mathbf{U}$  :

$$\bar{T} = h T,$$

$$\bar{R} e^{2i\bar{\phi}} = \frac{h}{n} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tenseur  $\mathbf{U}^*$  :

$$\bar{T}^* = T,$$

$$\bar{R}^* e^{2i\bar{\phi}} = \frac{1}{n} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k};$$

tenseur  $\mathbf{V}$  :

$$\hat{T} = 0,$$

$$\hat{R} e^{2i\hat{\phi}} = \frac{1}{2n^2} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur  $\mathbf{V}^*$  :

$$\hat{T}^* = 0,$$

$$\hat{R}^* e^{2i\hat{\phi}} = \frac{1}{n^2} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur  $\mathbf{W}$  :

$$\tilde{T} = \frac{h^3}{3} \frac{T}{4},$$

$$\tilde{R} e^{2i\tilde{\phi}} = \frac{1}{12n^3} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k};$$

tenseur  $\mathbf{W}^*$  :

$$\tilde{T}^* = T,$$

$$\tilde{R}^* e^{2i\tilde{\phi}} = \frac{1}{n^3} R e^{2i\phi} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k}.$$

## L'utilisation de la méthode polaire

- Encore une fois, la partie isotrope de  $\mathbf{V}$  est nulle, comme pour  $\mathbf{B}$ , et celle de  $\mathbf{U}^*$  et  $\mathbf{W}^*$  est identique à celle de la couche de base, comme pour  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{D}^*$ .
- En outre, en comparant  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{V}$ , on observe immédiatement que, si les couches sont identiques,

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{O},$$

mais le contraire n'est pas vrai. Dans d'autres termes, on peut avoir des stratifiés découplés thermoélastiquement, mais couplés élastiquement. Cette propriété peut être opportunément exploitée pour la construction d'hélices thermoformées à contrôle passif du pas (Winkler, 1986).

- Au contraire, un stratifié élastiquement découplé sera aussi toujours thermoélastiquement découplé (si à couches identiques).
- Ce qu'on a dit doit être mieux précisé; en fait, on a déjà observé, page 346, que si  $\mathbf{V} = \mathbf{O}$ ,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}\mathbf{W}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}^T \mathbf{U}.$$

## L'utilisation de la méthode polaire

- Dans d'autres termes, on a dans un cas de ce type le découplage thermoélastique seulement en rigidité, pour  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$ , mais pas en souplesse, pour  $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$  et  $\boldsymbol{\kappa}$ .
- Toutefois, par ce qu'on a vu, on a aussi que le découplage élastique implique tous les découplages:

$$\mathbf{B} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{V} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{G} = \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{O}.$$

## Chapitre 6

### ■ Types de stratifiés d'usage fréquent

|  |     |
|--|-----|
| <input type="checkbox"/> Introduction                | 363 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés découplés        | 365 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés équilibrés       | 367 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés <i>angle-ply</i> | 371 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés <i>cross-ply</i> | 372 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés quasi-isotropes  | 373 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés isotropes        | 374 |
| <input type="checkbox"/> Stratifiés quasi-homogènes  | 377 |

## Introduction

- Dans ce chapitre on considère certains types de stratifiés d'usage fréquent dans les applications et leurs propriétés élastiques.
- Les résultats qui suivent concernent seulement les stratifiés à couches identiques, car seulement dans ce cas on peut donner des règles générales concernant les propriétés élastiques et leur conception.
- En effet, au chapitre précédent on a vu comment le comportement d'un stratifié à couches identiques soit conditionné, d'un côté par les propriétés élastiques de la couche de base, de l'autre par la séquence des couches et par leur orientation.
- Un point fondamental concerne justement les orientations: les différentes couches sont en général orientées de façon différente et donc, on l'a dit plusieurs fois, dans les formules qui donnent les tenseurs qui décrivent le comportement d'un stratifié, les tenseurs de rigidité des couches doivent être tournés dans le repère global du stratifié. Ceci se fait à l'aide de la transformation de page 308.

363

## Introduction

- Or, si l'on observe les formules de cette transformation on remarque qu'elles dépendent de combinaisons de quatrième degré des fonctions circulaires des orientations  $\delta_k$  de la couche.
- Ceci implique que la conception d'un stratifié lorsque les orientations des couches sont les variables de conception est un problème très compliqué et en général avec solution non unique (si formulé comme un problème d'optimum il est non convexe).
- Alors, on a développé toute une série de règles pratiques pour concevoir les stratifiés, en particulier pour obtenir des stratifiés répondant à certains requis de rigidité en termes de symétries élastiques (on a déjà remarqué que le découplage pour les stratifiés à couches identiques coïncide avec l'isotropie de **B**).
- Ces règles ne sont, en général, que des conditions suffisantes, et pas nécessaires, pour obtenir une certaine propriété. Il s'agit normalement de règles simples, parfois intuitives, qui ont permis de déterminer des classes de stratifiés d'usage particulièrement fréquent.

364

## Stratifiés découplés

- La propriété la plus recherchée dans un stratifié est le découplage élastique, à savoir on veut toujours, hormis certains cas particuliers qu'on a déjà vu,  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ .
- Si on considère les formules de page 351 (Cartésiennes) ou de page 356 (polaires) et si l'on se rappelle que les coefficients  $b_k$  varient linéairement sur l'épaisseur et qu'ils sont antisymétriques par rapport au plan moyen, on a immédiatement qu'une condition suffisante pour avoir  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$  est celle de disposer les couches de manière symétrique par rapport au plan moyen, à savoir de façon que

$$\bar{\delta}_k = \bar{\delta}_{-k}, \quad \forall k = -p, \dots, p.$$

- Cette règle, très simple, est celle suivie dans la presque totalité des cas. Toutefois, il faut souligner que, contrairement à ce qu'on dit souvent, cette règle n'est pas une condition nécessaire, mais seulement suffisante pour le découplage élastique.

365

## Stratifiés découplés

- Déjà en 1982 Caprino et Crivelli Visconti avaient démontré l'existence de stratifiés découplés à séquence non symétrique.
- Ensuite, Vannucci et Verchery (1998) ont montré que le nombre de solutions découplés symétriques est très exigu dans une classe bien plus vaste de stratifiés découplés (séquences *quasi triviales*).
- En outre, le désavantage le plus grand à utiliser les séquences symétriques est dans le fait que, si l'on veut obtenir le découplage, on est souvent obligés à doubler le nombre de couches; dans d'autres termes, l'usage des séquences symétriques dans la recherche de stratifiés ayant certaines propriétés, comporte souvent un nombre de couches beaucoup plus important de celui, minimum, avec lequel on aurait pu obtenir les mêmes propriétés recherchées.
- La recherche de stratifiés découplés à séquence non symétrique est possible soit de façon exacte en faisant appel au concept de séquence quasi triviale, soit de façon approximée en recourant à des solutions numériques.

366

## Stratifiés équilibrés

- Les stratifiés équilibrés (*balanced* en anglais) sont ceux pour lesquels à chaque couche orientée à l'angle  $\theta$  correspond une couche orientée à l'angle  $-\theta$ . Il s'agit donc de stratifiés à nombre pair de couches.
- Si en outre la séquence est symétrique, alors on a aussi le découplage.
- L'intérêt de cette classe de stratifiés est dans le fait qu'ils ont un comportement orthotrope en membrane.
- En fait, pour ces stratifiés

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k) = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^{n/2} [\mathbf{Q}(\delta_k) + \mathbf{Q}(-\delta_k)]$$

- Or, comme la couche de base est toujours orthotrope, si l'on considère, voir les formules à page 308, que

$$\begin{aligned} Q_{xs}(-\theta) &= -Q_{xs}(\theta), \\ Q_{ys}(-\theta) &= -Q_{ys}(\theta), \end{aligned}$$

367



## Stratifiés équilibrés

on a immédiatement que, par la formule de  $\mathbf{A}$ ,

$$A_{xs} = A_{ys} = 0.$$

- Donc, le stratifié est orthotrope en membrane dans le repère global de la plaque.
- Ceci en général n'est pas vrai en flexion. En fait,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

et la présence des coefficients  $d_k$  ne permet pas d'obtenir automatiquement l'orthotropie de flexion. Toutefois, comme (voir page 354)  $d_k = d_{-k}$ , si la séquence est *antisymétrique*, à savoir si  $\delta_{-k} = -\delta_k$ , on a que

$$\begin{aligned} d_{-k} Q_{xs}(\delta_{-k}) &= -d_k Q_{xs}(\delta_k), \\ d_{-k} Q_{ys}(\delta_{-k}) &= -d_k Q_{ys}(\delta_k). \end{aligned}$$

368



## Stratifiés équilibrés

- Donc,

$$D_{xs} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k Q_{xs}(\delta_k) = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^0 d_k [Q_{xs}(\delta_k) - Q_{xs}(\delta_k)] = 0,$$

$$D_{ys} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k Q_{ys}(\delta_k) = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=-p}^0 d_k [Q_{ys}(\delta_k) - Q_{ys}(\delta_k)] = 0,$$

et alors le stratifié est orthotrope même en flexion, non seulement en membrane.

- Toutefois, la séquence n'étant pas symétrique, le stratifié sera en général couplé (mais pas nécessairement; Valot et Vannucci, 2005, ont montré l'existence de stratifiés complètement orthotropes, antisymétriques et découplés).
- Donc, si même **A** et **D** sont orthotropes, en général **a** et **d** ne le sont pas, étant **B** ≠ **O** (voir les formules de page 322); c'est un cas typique qui montre la difficulté de définir les symétries élastiques pour les stratifiés: on a orthotropie en rigidité, mais pas en souplesse, à cause du couplage.

369

## Stratifiés équilibrés

- Cet exemple montre aussi la difficulté d'obtenir des stratifiés qui soient orthotropes en flexion et découplés. Ce problème est encore aujourd'hui une difficulté majeure en optimisation des stratifiés par rapport aux problèmes de stabilité élastique.
- En effet, la mise au point de méthodes, analytiques et numériques, pour la recherche de stratifiés découplés et orthotropes en flexion est encore objet de recherche; encore plus difficile est la recherche des stratifiés complètement orthotropes et découplés, et éventuellement avec les mêmes axes d'orthotropie en membrane et en flexion. Dans ces cas, il faut normalement faire appel à des méthodes numériques, si on ne veut pas faire recours aux séquences *cross-ply* (voir plus avant).

370

## Stratifiés *angle-ply*

- Un stratifié *angle-ply* est un cas particulier de stratifié équilibré, dans lequel on a une seule orientation possible,  $\theta$ , et son opposée,  $-\theta$ .
- Dans ce cas, on a que

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k) = \frac{h}{2} [\mathbf{Q}(\theta) + \mathbf{Q}(-\theta)] = h \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{ss} \end{bmatrix}.$$

- Le stratifié est orthotrope en membrane et les composantes  $Q_{xx}$  etc ci-dessus sont celles de la couche, tournées des  $\theta$  par rapport au repère global (formules de page 308).
- Comme pour les stratifiés équilibrés, en général  $\mathbf{D}$  n'est pas orthotrope.
- Normalement, on utilise des séquences *angle-ply* symétriques.

371

## Stratifiés *cross-ply*

- Les stratifiés *cross-ply* ont des couches orientées seulement à  $0^\circ$  ou à  $90^\circ$ .
- De cette façon, étant les couches orthotropes et avec les axes d'orthotropie coïncidents avec ceux du stratifiés, ce dernier est complètement orthotrope, aussi bien pour ce qui concerne  $\mathbf{A}$  que  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$ .
- C'est le cas des panneaux multicouches en bois.
- Contrairement à ce qu'on croit souvent, leur comportement reste orthotrope, à savoir il n'est pas isotrope, même si le nombre de couches dans les deux directions orthogonales est identique.

372

## Stratifiés quasi-isotropes

- Dans la littérature technique on indique avec *quasi-isotrope* un stratifié pour lequel la séquence comporte seulement des orientations à  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ .
- En outre, le nombre de couches à  $45^\circ$  doit être égal à celui des couches à  $-45^\circ$ .
- Dans ces conditions, on a immédiatement, il suffit de se rappeler ce qu'on a dit sur les angle-ply et les cross-ply, que le comportement en membrane est orthotrope.
- En plus, si le nombre de couches est identique dans chaque direction, alors le comportement de membrane est isotrope, mais pas celui en flexion, voir paragraphe suivant, d'où le nom donné à ce type de séquence.
- Ces stratifiés sont très utilisés surtout en aéronautique La raison est qu'ils offrent une bonne uniformité en rigidité et en résistance selon toutes les directions, et aussi une bonne opposition à la propagation des fissures.

373

## Stratifiés isotropes

- Même si dans la plupart des emplois les stratifiés en composite ont un comportement anisotrope, conçu selon les besoins structuraux, dans certains cas on utilise des stratifiés à réponse isotrope.
- Ceci est nécessaire par exemple lorsqu'on doit concilier les requis de légèreté avec ceux d'une réponse élastique qu'on veut constante avec la direction, généralement parce qu'elle est causée par des actions de diverse nature et direction.
- Werren et Norris (1950) ont donné les premiers une règle simple, suffisante mais pas nécessaire, pour l'isotropie en membrane: si la couche de base est à renfort unidirectionnel, il faut disposer le même nombre  $q$  de couches selon  $m$  orientations différentes, avec  $m \geq 3$ , décalées d'un angle constant et égal à  $\pi/m$ .
- Des solutions possibles sont donc les séquences suivantes:

$$\begin{aligned} &0^\circ_q / 60^\circ_q / -60^\circ_q, \quad q=n/3; \\ &0^\circ_q / 45^\circ_q / -45^\circ_q / 90^\circ_q, \quad q=n/4; \\ &0^\circ_q / 36^\circ_q / 72^\circ_q / 108^\circ_q / 144^\circ_q, \quad q=n/5; \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

374

## Stratifiés isotropes

- Si le renfort de la couche de base est en tissu équilibré, alors on peut montrer facilement, par la méthode polaire, qu'il suffit de disposer un nombre identique de couches à  $0^\circ$  et à  $45^\circ$ .
- Généralement, on applique la règle de Werren et Norris à des séquences symétriques, pour obtenir des stratifiés isotropes en membrane et découplés.
- Par la méthode polaire, Person, Vannucci et Verchery (2000) ont donné une autre condition suffisante et exacte pour construire des stratifiés isotropes en membrane, sans être une solution du type Werren et Norris.
- L'isotropie totale, de **A** et de **D**, ou même seule celle de **D**, est beaucoup plus compliquée et n'existent pas des règles générales.
- Certaines solutions exactes ont été donnée par Paradies (1996) pour la seule isotropie de flexion.
- La première solution exacte d'un stratifié totalement isotrope est due à Verchery et Vong (1986), avec une séquence à 48 couches.

375

## Stratifiés isotropes

- Ensuite, des tentatives ont été faites par plusieurs chercheurs pour trouver des solutions exactes totalement isotropes avec un nombre toujours plus petits de couches; Vannucci et Verchery ont proposé 5 solutions totalement isotropes, exactes, non symétriques à 18 couches, qui semble être le nombre minimum de couches pour une solution exacte.
- Par voie numérique, diverses chercheurs ont trouvé des solutions approximées totalement isotropes avec un minimum de 12 couches unidirectionnelles; il semble aujourd'hui impossible d'obtenir l'isotropie totale avec un nombre inférieur de couches unidirectionnelles ( non à symétrie du carré ou  $R_0$ -orthotropes).
- Si au contraire on utilise des couches à orthotropie spéciale (symétrie du carré ou  $R_0$ -orthotropie), alors on peut obtenir des solutions approximées totalement isotropes avec 7 couches (Grédiac, 2001, Vannucci, 2002), qui semble être le nombre minimum de couches nécessaire pour obtenir l'isotropie totale.

376

## Stratifiés quasi-homogènes

- Un stratifié, on l'a déjà dit, a en général un comportement différent en membrane et en flexion, c'est à dire qu'en général  $\mathbf{A}^* \neq \mathbf{D}^*$ , et en plus, sauf par une conception opportune, il est couplé,  $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ .
- Toutefois, il est possible de faire en sorte que le stratifié se comporte à tous les effets comme s'il était constitué par une seule couche, donc comme s'il était homogène; un tel stratifié est dit *quasi-homogène*.
- Cette notion a été introduite par Verchery (Verchery et Kandil, 1988), qui en a aussi donné les premières solutions. Ensuite, elle a été reprise par Wu et Avery (1992), avec la même signification, et après par Grédiac (1998) et par Verchery et Vannucci (1998), qui en ont donné une méthode de recherche de solutions exactes (séquences *quasi-triviales*).
- L'utilisation des stratifiés quasi-homogènes peut se révéler utile dans plusieurs situations, par exemple pour constituer des testes expérimentaux particuliers ou encore dans certains problèmes d'optimisation.

377

## Stratifiés quasi-homogènes

- Pour analyser la quasi-homogénéité on introduit le *tenseur d'homogénéité*:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^* - \mathbf{D}^*.$$

- Alors, un stratifié est quasi-homogène si et seulement si

$$\mathbf{B} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}.$$

- On a donc, pour un stratifié à couches identiques,

$$\mathbf{C} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

$$c_k = n^2 - d_k = -2n^2 - 12k(k - n - 1) - 4 - 6n.$$

- Il est intéressant aussi d'écrire les conditions de la quasi-homogénéité en polaire, et en utilisant la numérotation des couches de page 353, avec les couches numérotées à partir du centre.

378

## Stratifiés quasi-homogènes

- En fait, dans ce cas on obtient facilement que les composantes polaires de  $\mathbf{C}$ , indiquées par le symbole  $\check{\tau}$ , sont

$$\check{\tau}_0 = 0,$$

$$\check{\tau}_1 = 0,$$

$$\check{R}_0 e^{4i\check{\phi}_0} = \frac{1}{n^3} R_0 e^{4i\phi_0} \sum_{k=-p}^p c_k e^{4i\delta_k},$$

$$\check{R}_1 e^{2i\check{\phi}_1} = \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\phi_1} \sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k},$$

avec

$$c_k = \begin{cases} 4(p^2 + p - 3k^2) & \text{si } n = 2p + 1, \\ 4[p^2 - 3k^2 + 3|k| - 1], c_0 = 0 & \text{si } n = 2p. \end{cases}$$

## Stratifiés quasi-homogènes

- On observe que, comme pour  $\mathbf{B}$ , même pour  $\mathbf{C}$  la partie isotrope est nulle, et donc la quasi-homogénéité s'interprète en termes de symétries élastiques comme l'isotropie des tenseurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ .
- En outre, les coefficients  $c_k$  varient quadratiquement sur l'épaisseur et sont symétriques par rapport au plan moyen.
- Un stratifié sera donc quasi-homogène si et seulement si

$$\sum_{k=-p}^p b_k e^{4i\delta_k} = 0,$$

$$\sum_{k=-p}^p b_k e^{2i\delta_k} = 0,$$

$$\sum_{k=-p}^p c_k e^{4i\delta_k} = 0,$$

$$\sum_{k=-p}^p c_k e^{2i\delta_k} = 0.$$

- Celles-ci sont 8 conditions réelles à respecter en effet, les conditions sont 12, correspondantes aux 12 composantes Cartésiennes des tenseurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  à annuler, mais on a vu qu'en polaire 4

## Stratifiés quasi-homogènes

4 conditions sont automatiquement respectées, celles concernant les composantes polaires d'isotropie, si les couches sont identiques, et donc ne restent que 8 conditions indépendantes, qui en polaire sont celles ci-dessus.

- La notion de quasi-homogénéité peut être étendue au cas thermoélastique: un stratifié est quasi-homogène thermoélastiquement si, outre les conditions élastiques de quasi-homogénéité, il est aussi

$$\mathbf{L} = \mathbf{O},$$

où  $\mathbf{L}$  est le tenseur d'homogénéité thermoélastique:

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^* - \mathbf{W}^*.$$

- En utilisant les expressions vues pour  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{W}$  on obtient

$$\mathbf{L} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k \gamma(\delta_k),$$

les coefficients  $\mathbf{c}_k$  étant les mêmes du tenseur  $\mathbf{C}$ .

381

## Stratifiés quasi-homogènes

- Encore une fois, en passant aux composantes polaires de  $\mathbf{L}$  on trouve

$$\tilde{T} = 0, \quad \tilde{R} e^{2i\tilde{\Phi}} = \frac{1}{n^3} R e^{2i\Phi} \sum_{k=-p}^p \mathbf{c}_k e^{2i\delta_k}.$$

- Donc, la condition supplémentaire pour la quasi-homogénéité thermoélastique est

$$\sum_{k=-p}^p \mathbf{c}_k e^{2i\delta_k} = 0.$$

- Or, cette dernière est déjà une des conditions précédentes, et donc si un stratifié est élastiquement quasi-homogène il l'est aussi thermoélastiquement, mais le contraire n'est pas vrai en général (au sens qu'il existe des stratifiés qui vérifient  $\mathbf{B}=\mathbf{L}=\mathbf{O}$  mais pas  $\mathbf{C}=\mathbf{O}$ ).
- Dans d'autres termes, la coïncidence des caractéristiques élastiques rend identiques aussi les coefficients thermiques, de dilatation et de courbure, dans chaque direction, mais pas le contraire.
- Pour la partie hydroélastique on a des résultats analogues.

382

## Chapitre 7

### ■ Méthodes classiques de conception des stratifiés

|   |     |
|---|-----|
| <input type="checkbox"/> Considérations générales         | 384 |
| <input type="checkbox"/> Les paramètres de stratification | 390 |
| <input type="checkbox"/> La méthode Miki                  | 400 |
| <input type="checkbox"/> Conception en rigidité           | 412 |
| <input type="checkbox"/> Conception en résistance         | 433 |
| <input type="checkbox"/> Approches numériques modernes    | 440 |

## Considérations générales

- On a vu aux chapitres précédents certaines caractéristiques des stratifiés, du point de vue mécanique, qu'on peut résumer en:
  - couplage membrane-flexion;
  - diversité de comportement en membrane et en flexion;
  - caractéristiques dépendantes de l'orientation des couches: symétries, rigidité,s, résistances etc.
- Dans d'autres termes, on peut dire qu'un stratifié est un *matériau à concevoir*.
- Mais lorsqu'on dit ça, il faut comprendre ce que ça comporte dans le cas d'un stratifié.
- En effet, pour un matériau classique, comme un métal, le seul paramètre de conception d'une plaque est l'épaisseur.
- Au contraire, pour un stratifié il faut établir trois types de données:
  - le nombre de couches;
  - l'orientation des couches;
  - les matériaux des couches.

## Considérations générales

- Même en se bornant au cas, comme on fera dans la suite, de stratifiés à couches identiques, et en fixant *a priori* le nombre de couches, ce qu'on fait la plupart des fois, il reste le problème de concevoir en ayant comme variables de conception les orientations des couches.
- Avec l'augmentation du nombre de couches, le nombre de variables de conception augmente et donc on a à faire en général à des problèmes avec beaucoup d'inconnues.
- En outre, un simple regard aux formules de composition des tenseurs **A**, **B**, **D** etc., et aux formules de rotation de page 308 suffit pour comprendre les difficultés qu'on rencontre.
- En fait, les variables de conception, les orientations des couches, entrent dans les composantes des tenseurs sous forme d'argument de fonctions circulaires, avec combinaisons de degré 4 de celles-ci.
- En outre, les requis de rigidité, comme le module d'Young dans une direction, se calculent à partir des composantes des tenseurs inverses **a**, **d** etc. et ceci complique ultérieurement l'affaire.

385



Copyright P. Vannucci - UVSQ  
paul.vannucci@meca.uvsq.fr



## Considérations générales

- Il ne faut pas oublier non plus qu'à côté de la maximisation ou minimisation d'une certaine grandeur, on veut que le stratifié respecte certains requis élastiques généraux, reductibles tous à une symétrie élastique: orthotropie en membrane et/ou flexion, découplage etc., et ces requis ne sont pas simples à obtenir.
- En définitive, la conception d'un stratifié est une opération difficile, pour laquelle n'existe pas encore des méthodes universelles.
- L'orientation des chercheurs a donc été, dans le passé, celle de simplifier le problème.
- Du moment que les requis les plus difficiles à obtenir sont ceux relatifs aux symétries élastiques, en général on s'est bornés à rechercher des solutions pour une classe particulière de stratifiés (par exemple les *angle-ply* symétriques) capables de garantir automatiquement certains requis, comme le découplage et l'orthotropie en membrane, qui sont les requis les plus demandés dans les applications.

386



Copyright P. Vannucci - UVSQ  
paul.vannucci@meca.uvsq.fr



## Considérations générales

- Cette approche permet de simplifier drastiquement le problème, mais elle le transforme radicalement au point qu'une véritable optimisation, par exemple en poids, n'est plus possible.
- Dans certains cas, les problèmes sont si difficiles qu'on renonce à les résoudre, c'est typiquement le cas de l'orthotropie en flexion.
- Dans ce sens, les méthodes classiques de conception des stratifiés, qui sont en partie introduites dans la suite de ce chapitre, ressemblent plus à des *rules of thumb* qu'à des véritables méthodes de conception optimale.
  
- Les premiers travaux sur l'optimisation des stratifiés remontent aux années 70 et concernent principalement:
  - la rigidité;
  - la résistance;
  - les fréquences propres;
  - la charge critique.

387

## Considérations générales

- D'autres travaux concernent des propriétés plus spécifiques des stratifiés, comme:
  - la minimisation des coefficients de dilatation thermique dans une direction;
  - la distribution optimale des axes d'orthotropie, etc.
- Dans la quasi-totalité des travaux les orientations des couches sont les variables de conception, rarement le sont les épaisseur des couches. Tous les travaux concernent des stratifiés à couches identiques, hypothèse qui sera adoptée aussi dans la suite.
- Seulement un nombre exigu de recherches, normalement plutôt récentes, considèrent la possibilité de séquences d'empilement non symétriques.
  
- Récemment, des tentatives ont été faites pour régler d'une façon générale le problème de conception d'un stratifié et pour s'affranchir des méthodes classiques et de la limitation des solutions que celles-ci offrent.

388

## Considérations générales

- Ces approches modernes s'appuient toujours sur une formulation d'un problème d'optimum et souvent font appel, à cause du fort caractère de non convexité (et parfois de continuité des solutions) à des algorithmes modernes de type métaheuristique.
- Dans la suite de ce chapitre, on passe en revue certaines approches classiques de conception des stratifiés et ensuite on introduira brièvement des tentatives modernes de solution numérique des problèmes de conception optimale des stratifiés.

389

## Les paramètres de stratification

- Dans le cas d'un stratifié à couches identiques, on a déjà vu que (page 351)

$$\mathbf{A} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{Q}(\delta_k), \quad \mathbf{D} = \frac{1}{12} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{Q}(\delta_k),$$

avec

$$b_k = 2k - n - 1, \quad d_k = 12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2).$$

- Or, si les couches sont identiques, les diverses composantes des différents tenseurs dépendent d'un côté des caractéristiques élastiques de la couche de base, de l'autre d'une combinaison de fonctions circulaires des orientations.
- En principe, ces deux facteurs peuvent être séparés, du moment que, étant les caractéristiques élastiques communes à toutes les couches, elles ne dépendent pas des sommations qui apparaissent dans les formules de composition des tenseurs de rigidité.

390

## Les paramètres de stratification

- Cette séparation entre "partie élastique" et "partie géométrique" dans la rigidité d'un stratifié s'opère facilement et encore mieux si l'on fait appel aux paramètres de Tsai et Pagano ou à la méthode polaire.
- Dans le premier cas, si le matériau de base est orthotrope et ses propriétés connues dans le repère matériel, avec des simples passages on parvient à

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{xs} \\ A_{ys} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \\ 0 & \xi_3/2 & \xi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3/2 & -\xi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

pour les composantes de rigidité en membrane, à

391

## Les paramètres de stratification

$$\begin{Bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{xy} \\ B_{ss} \\ B_{xs} \\ B_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & \xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_5 & \xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_7/2 & \xi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_7/2 & -\xi_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

pour celles de couplage et à

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{ss} \\ D_{xs} \\ D_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 0 & 1 \\ 0 & \xi_{11}/2 & \xi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{11}/2 & -\xi_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix}$$

392

## Les paramètres de stratification

pour celles de flexion. Dans les formules ci-dessus, les paramètres  $U_i$  sont les paramètres de Tsai et Pagano, au nombre de 5 seulement pour le hypothèses faites au sujet de la symétrie de la couche de base:

$$U_1 = \frac{3Q_{11} + 2Q_{12} + 3Q_{22} + 4Q_{66}}{8}, \quad U_2 = \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2},$$
$$U_3 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8},$$
$$U_4 = \frac{Q_{11} + 6Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}}{8}, \quad U_5 = \frac{Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} + 4Q_{66}}{8}.$$

- On insiste que, étant les couches identiques, ces paramètres sont des constantes dans un processus de conception, une fois le matériau de base choisi. Pour cette raison ils sont appelés invariants par certains auteurs, mais ceci évidemment doit être entendu dans ce sens et il ne faut pas l'équivoquer avec la signification courante que le terme invariant a en algèbre tensorielle.

393

## Les paramètres de stratification

- Quant aux paramètres  $\xi_i$ , introduits par Tsai et Hahn (1980), ils sont appelés *paramètres de stratification* (*lamination parameters* en anglais) et sont définis ainsi:

$$\xi_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \cos 4\delta_k,$$

$$\xi_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 2\delta_k,$$

$$\xi_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n} \sum_{k=-p}^p \sin 4\delta_k,$$

pour le comportement de membrane,

394

## Les paramètres de stratification

$$\xi_5 = \int_{-h/2}^{h/2} z \cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_6 = \int_{-h/2}^{h/2} z \cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \cos 4\delta_k,$$

$$\xi_7 = \int_{-h/2}^{h/2} z \sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \sin 2\delta_k,$$

$$\xi_8 = \int_{-h/2}^{h/2} z \sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n^2} \sum_{k=-p}^p b_k \sin 4\delta_k,$$

pour le couplage et

395

## Les paramètres de stratification

$$\xi_9 = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cos 2\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_{10} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cos 4\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \cos 4\delta_k,$$

$$\xi_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sin 2\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 2\delta_k,$$

$$\xi_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sin 4\delta \, dz = \frac{1}{n^3} \sum_{k=-p}^p d_k \sin 4\delta_k.$$

pour la flexion.

- Les paramètres de stratification décrivent entièrement l'influence de la "géométrie", en termes de nombre, disposition et orientation des couches, sur la rigidité du stratifié.
- Certains auteurs en donnent une définition légèrement différente mais équivalente.

396

## Les paramètres de stratification

- Avec la méthode polaire, on utilise les formules de page 356 et suivantes et on considère que la couche de base est orthotrope.
- Alors, en choisissant  $\phi_1=0$ , ce qui revient à choisir l'axe  $x_1$  comme axe fort d'orthotropie, on a, page 171, que  $\cos 4\phi_0=(-1)^k$ ,  $k=0,1$  et que  $\sin 4\phi_0=0$ ; on obtient alors, par des simples passages, que

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \\ A_{ss} \\ A_{xs} \\ A_{ys} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 2 & \xi_2 & 4\xi_1 \\ 1 & 2 & \xi_2 & -4\xi_1 \\ -1 & 2 & -\xi_2 & 0 \\ 1 & 0 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_4 & 2\xi_3 \\ 0 & 0 & -\xi_4 & 2\xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$

397

## Les paramètres de stratification

$$\begin{Bmatrix} B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{xy} \\ B_{ss} \\ B_{xs} \\ B_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_6 & 4\xi_5 \\ 0 & 0 & \xi_6 & -4\xi_5 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_6 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_8 & 2\xi_7 \\ 0 & 0 & -\xi_8 & 2\xi_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{ss} \\ D_{xs} \\ D_{ys} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \xi_{10} & 4\xi_9 \\ 1 & 2 & \xi_{10} & -4\xi_9 \\ -1 & 2 & -\xi_{10} & 0 \\ 1 & 0 & -\xi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{12} & 2\xi_{11} \\ 0 & 0 & -\xi_{12} & 2\xi_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ (-1)^k R_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}$$

398

## Les paramètres de stratification

- Fondamentalement, la structure des formules est la même qu'avec les paramètres de Tsai et Pagano, mais les coefficients qui décrivent les propriétés matérielles sont différents.
- L'avantage de l'utilisation de la méthode polaire est dans le fait que les 4 paramètres polaires sont liés directement aux symétries élastiques, voir page 171.
- Pour cette même raison il peut s'avérer plus utile de faire usage des formules de page 356 et suivantes, qui sont directement liées aux symétries élastiques du stratifié, à chaque fois que ces dernières sont un objectif faisant partie du processus d'optimisation du stratifié.
- Par des simples passages on montre aussi que les tenseurs de rigidité hygro- et thermo-élastique dépendent des mêmes paramètres de stratification.

399

## La méthode de Miki

- Miki a proposé le premier (1982) une méthode générale, graphique et analytique, basée sur l'usage des *lamination parameters*;
- Cette méthode est approximée et concerne évidemment la conception de stratifiés à couches identiques, au début pour les propriétés de membrane (tenseur **A**), et on se limitera presque exclusivement à considérer ce cas.
- A l'origine, la méthode de Miki concerne seulement les stratifiés équilibrés et symétriques.
- Dans ce cas, le comportement est orthotrope, ce qui implique

$$A_{xs} = A_{ys} = 0.$$

- En plus, la symétrie garantit que **B=O**. Donc, les seuls paramètres de stratification  $\xi_1$  et  $\xi_2$  définissent entièrement la conception en membrane d'un stratifié équilibré et découplé, si le matériau est déjà choisi.
- En outre, supposons qu'il y a  $n_g$  groupes d'orientations possibles  $\pm\delta_k$ , avec  $n_k$  couches à  $\pm\delta_k$ .

400

## La méthode de Miki

- Alors, les paramètres de stratification  $\xi_1$  et  $\xi_2$  (les seuls qui nous intéressent dans la suite, mais pour les autres on peut procéder de la même façon) peuvent être écrits comme

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{n_g} v_k \cos 2\delta_k,$$

$$\xi_2 = \sum_{k=1}^{n_g} v_k \cos 4\delta_k,$$

où

$$v_k = \frac{n_k}{n}$$

est la fraction de couches du groupe  $k$ , à orientation  $\pm\delta_k$ , sur la totalité des couche (par certains auteurs appelée *fraction volumique des couches*).

## La méthode de Miki

- Dans la méthode de Miki on prend en compte justement ces deux paramètres comme variables libres, à savoir on opère un changement de variables de conception, laquelle maintenant se fait dans l'espace des paramètres de stratification, de dimension 2, qui est normalement inférieure à la dimension de l'espace des authentiques variables de conception, les orientations.
- En outre, si l'on observe les formules de page 391, basées sur les paramètres de Tsai et Pagano, ou celles de page 398, qui font usage des paramètres polaires, on voit que toutes les composantes Cartésiennes de  $\mathbf{A}$  sont des fonctions linéaires de  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .
- Considérons d'abord un stratifié *angle-ply*, donc un stratifié équilibré ayant un seul angle possible d'orientation (avec son opposé),  $\delta$ ; donc  $n_g=1$ ,  $v_1=1$ .
- Dans ce cas, on a évidemment que

$$\xi_1 = \cos 2\delta, \quad \xi_2 = \cos 4\delta = 2\xi_1^2 - 1.$$

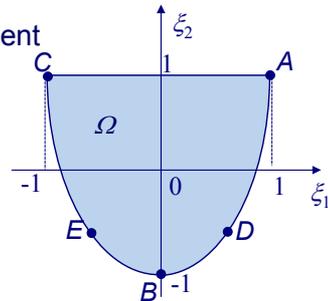
## La méthode de Miki

- Dans d'autres termes, les stratifiés *angle-ply* sont représentés dans le plan  $\xi_1$ - $\xi_2$  par un arc de parabole, voir la figure, délimité par la condition trigonométrique

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1.$$

- En particulier, les points indiqués correspondent à des stratifiés particuliers:

- $A=(1,1)$  :  $\delta=0^\circ$ ;
- $B=(0,-1)$  :  $\delta=\pm 45^\circ$ ;
- $C=(-1,1)$  :  $\delta=90^\circ$ ;
- $D=(1/2,-1/2)$  :  $\delta=\pm 30^\circ$ ;
- $E=(-1/2,-1/2)$  :  $\delta=\pm 60^\circ$ ;



- Dans le cas de diverses orientations possibles  $\pm\delta_k$ , alors on montre que la deuxième équation à la page précédente devient une condition limite:

$$\xi_2 \geq 2\xi_1^2 - 1,$$

403

## La méthode de Miki

et donc la région admissible  $\Omega$  dans la plan  $\xi_1$ - $\xi_2$  est le secteur de parabole délimité par les conditions

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 2\xi_1^2 - 1 \leq \xi_2 \leq 1.$$

- Chaque point du domaine  $\Omega$  est dit *point de stratification*. Il lui correspond un seul couple  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , et donc un seul tenseur  $\mathbf{A}$ , mais ce même point de stratification peut être obtenu par différentes combinaisons d'orientations d'un même nombre, ou d'un nombre différent, de couches.
- C'est justement celui-ci le point essentiel: *il n'y a pas une correspondance bijective entre la rigidité et la séquence des couches*.
- Donc, si l'on résout le problème avec les paramètres de stratification, il faut ensuite disposer d'un critère pour remonter aux orientations ou en tout cas pour pouvoir les choisir.
- Dans ce but, il est important d'observer qu'il est possible de lier les points de stratification sur le bord de  $\Omega$  avec ceux à l'intérieur de  $\Omega$ .

404

## La méthode de Miki

- En fait, les formules de page 401 montrent que les paramètres de stratification sont des fonctions linéaires des fractions volumiques des couches, les  $v_k$ .
- Alors, les paramètres de stratification le long d'une ligne droite qui lie deux points de  $\Omega$  représentent des stratifiés avec des fractions volumiques proportionnelles à la distance entre ces deux points.
- Dans d'autres termes, le vecteurs des fractions volumiques  $\mathbf{v}_Q=(v_1, \dots, v_g)$  d'un point de stratification  $Q$  qui se trouve entre les points  $P$  et  $R$ , distants  $\ell$ , sera

$$\mathbf{v}_Q = (1-r)\mathbf{v}_P + r\mathbf{v}_R,$$

où  $r\ell$  est la distance entre  $Q$  et  $P$  tandis que  $\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_R$  sont les vecteurs des fractions volumiques de  $P$  et  $R$ .

- Alors, les points qui se trouvent entre  $A$  et  $C$ , voir la figure précédente, représentent des stratifiés avec des couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  seulement, à savoir,  $AC$  est la ligne des *cross-ply*.

## La méthode de Miki

- Par exemple, le point  $P=(0.2,1)$  représente un *cross-ply* avec le 60% des couches à  $0^\circ$  et le 40% à  $90^\circ$ ; c'est par exemple le cas des stratifiés de type  $[0_3/90_2]_s$ .
- La ligne  $AC$  est un cas particulier, car c'est la seule qui appartient entièrement au bord de  $\Omega$ .
- La règle précédente sur les fractions volumiques des couches s'applique toutefois à une ligne quelconque, qui en général passera à l'intérieur de  $\Omega$ .
- Or, un quelconque point interne à  $\Omega$  appartient à d'infinies droites distinctes, ce qui veut dire qu'à chaque point de stratification, et donc à chaque tenseur  $\mathbf{A}$ , correspondent divers (en général infinis) stratifiés distinctes, comme on avait déjà annoncé.
- Considérons par exemple l'origine  $O$  du plan  $\xi_1-\xi_2$ , le point  $\xi_1=\xi_2=0$ . On remarque immédiatement, par les formules de page 397, que celui-ci correspond à tous et seuls les stratifiés qui ont un comportement isotrope en membrane. Mais comment les obtenir grâce aux considérations faites?

## La méthode de Miki

- Le point  $O$  appartient à divers segments, dont par exemple:
  - le segment  $AE$ ;  $O$  diste  $rl=2/3l$  de  $A$  et donc il a  $2/3$  des couches à  $\pm 60^\circ$  et  $1/3$  à  $0^\circ$ ; donc on obtient un stratifié isotrope en membrane en disposant un identique nombre de couches à  $0^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $-60^\circ$  (solution de type Werren et Norris);
  - le segment  $CD$ ; le raisonnement est analogue, cette fois on obtient une solution avec un égal nombre de couches à  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $-30^\circ$  (la solution précédente tournée de  $30^\circ$ );
  - le segment vertical  $\xi_1=0$ , qui va du point  $(0,1)$ , où on a la même quantité de couches à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ , au point  $B$ , où on a la même quantité de couches à  $\pm 45^\circ$ ; du moment que  $O$  se trouve à mi parcours entre ces deux points, il sera composé d'un égal nombre de couches à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $-45^\circ$  (solution quasi-isotrope, autre type de solution de Werren et Norris);
  - le segment horizontal  $\xi_2=0$ ; dans ce cas on obtient facilement que la solution est identique à la précédente, mais tournée de  $22,5^\circ$ .

407

## La méthode de Miki

- Naturellement, d'autres combinaisons sont possibles, en prenant en considération d'autres segments (à savoir, la condition de Werren et Norris est seulement suffisante pour l'isotropie de membrane, mais pas nécessaire).
- Donc on voit qu'un point de stratification, on l'a déjà dit, peut représenter plusieurs stratifiés; toutefois, du moment qu'un point est défini par deux seuls paramètres, deux angles sont suffisants pour obtenir un stratifié avec les caractéristiques souhaitées.
- Dans d'autres termes, dans la classe des stratifiés symétriques et équilibrés deux groupes d'orientations,  $\pm\delta_1$  et  $\pm\delta_2$ , suffisent pour obtenir les caractéristiques de rigidité en membrane recherchées.
- Alors, une fois déterminé le point de stratification, il suffit de faire passer un segment par ce point et d'en trouver les intersections avec la frontière de  $\Omega$  (sur laquelle, on le rappelle, se trouvent en fait seulement les solutions de type  $\pm\delta$ , à l'exception du segment AC); en procédant ensuite comme décrit auparavant on obtient une solution possible.

408

## La méthode de Miki

- Analytiquement, pour un stratifié avec deux groupes d'orientations, on a

$$\xi_1 = v_1 \cos 2\delta_1 + v_2 \cos 2\delta_2, \quad \xi_2 = v_1 \cos 4\delta_1 + v_2 \cos 4\delta_2.$$

avec évidemment

$$v_2 = 1 - v_1.$$

- Donc, il n'y a que 3 paramètres à choisir pour obtenir un stratifié correspondant à un point de stratification; par les équations ci-dessus, on peut calculer deux de ces paramètres si on en fixe un troisième.
- Si par exemple on fixe  $v_1$ , on obtient les orientations dans la forme

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \arccos Q_1, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \arccos Q_2,$$

où

$$Q_1 = \frac{2v_1\xi_1 \pm \sqrt{2v_1v_2(1 + \xi_2 - 2\xi_1^2)}}{2v_1}, \quad Q_2 = \frac{\xi_1 - v_1Q_1}{v_2}.$$

409



## La méthode de Miki

- Miki a aussi considéré le cas des stratifiés équilibrés ayant en plus des couches à  $0^\circ$  (l'orthotropie de membrane se conserve, on le voit facilement).
- Dans ce cas,

$$\xi_1 = v_1 \cos 2\delta_1 + v_2 \cos 2\delta_2 + v_3,$$

$$\xi_2 = v_1 \cos 4\delta_1 + v_2 \cos 4\delta_2 + v_3,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 1.$$

- Pour un choix fait de 2 des 3 paramètres de stratification, on a

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{\xi_1 - v_2\Theta - v_3}{v_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \arccos \Theta, \quad \text{où}$$

$$\Theta = \frac{-K_b \pm \sqrt{K_b^2 - K_a K_c}}{K_a}, \quad K_a = 2v_2(v_1 + v_2), \quad K_b = 2v_2(v_3 - \xi_1),$$

$$K_c = 2v_3^2 + 2(v_1 - 2\xi_1)v_3 - (1 + \xi_2)v_1 + 2\xi_1^2.$$

410



## La méthode de Miki

- Il faut toutefois tenir compte du fait que, d'un côté, pas tous les segments qui passent par un point de stratification peuvent être pris en considération pour obtenir un stratifié avec les propriétés recherchées et de l'autre, que les fractions volumiques, surtout pour les stratifiés à faible nombre de couches, ne sont pas toutes disponibles, étant donné que celles-ci doivent être des fractions du nombre total des couches, et pas des réels quelconque.
- Miki et Sugiyama (1991) ont généralisé cette approche pour prendre en considération le fait que le nombre de couches dans chaque direction est un entier, en pratique en déterminant *a priori* sur le domaine  $\Omega$  un réseau de points capables de donner lieu à des stratifiés avec des fractions volumiques des couches qui coïncident avec des rapports entre entiers d'usage relativement fréquent.

411

## Conception en rigidité

- Voyons à présent comment on procède, par la méthode de Miki, à la conception d'un stratifié par rapport à des critères typique, concernant les modules de rigidité en membrane.
- D'abord, rappelons l'expression des modules en membrane pour un stratifié orthotrope (voir page 331):

$$E_x^m = \frac{1}{a_{xx}^*}, \quad E_y^m = \frac{1}{a_{yy}^*}, \quad G_{xy}^m = \frac{1}{a_{ss}^*}, \quad \nu_{xy}^m = -\frac{a_{xy}^*}{a_{xx}^*}.$$

- Comme le stratifié est découplé (séquence symétrique par hypothèse),  $\mathbf{a}^* = \mathbf{A}^{*-1}$  et en définitive on obtient

$$E_x^m = \frac{1}{h} \left( A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right), \quad E_y^m = \frac{1}{h} \left( A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}} \right), \quad G_{xy}^m = \frac{A_{ss}}{h}, \quad \nu_{xy}^m = \frac{A_{xy}}{A_{yy}}.$$

- En termes de paramètres de stratification on a donc

412

## Conception en rigidité

$$E_x^m(\xi_1, \xi_2) = U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

$$E_y^m(\xi_1, \xi_2) = U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

$$G_{xy}^m(\xi_2) = U_5 - \xi_2 U_3, \quad \nu_{xy}^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{U_4 - \xi_2 U_3}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3},$$

avec les paramètres de Tsai et Pagano, tandis qu'avec la méthode polaire il est

$$E_x^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1},$$

$$E_y^m(\xi_1, \xi_2) = \frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 + 4R_1 \xi_1},$$

$$G_{xy}^m(\xi_2) = T_0 - (-1)^k R_0 \xi_2, \quad \nu_{xy}^m(\xi_1, \xi_2) = -\frac{T_0 - 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1}.$$

413

## Conception en rigidité

- La maximisation de la rigidité en direction x, par exemple, correspond donc au problème de minimum en forme standard suivant:

$$\min -E_x^m(\xi_1, \xi_2) = -\left[ U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3 - \frac{(U_4 - \xi_2 U_3)^2}{U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3} \right]$$

$$\text{avec } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- Avec les paramètres polaires on a

$$\min -E_x^m(\xi_1, \xi_2) = -\frac{8[T_0 T_1 + (-1)^k T_1 R_0 \xi_2 - 2R_1^2 \xi_1^2]}{T_0 + 2T_1 + (-1)^k R_0 \xi_2 - 4R_1 \xi_1}$$

$$\text{avec } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- Ces problème a un sens seulement si on ajoute d'autres conditions, par exemple sur un minimum de la rigidité transversale, autrement la solution c'est bien connue, il faut simplement disposer toutes les couches avec les fibres en direction x.

414

## Conception en rigidité

- La fonction à minimiser n'est pas linéaire, et elle est convexe dans l'espace des paramètres de stratification mais pas dans l'espace des orientations (voir les formules de page 401).
- La solution de ce problème nécessite, en général, d'une approche numérique.
- Plus simple est la conception d'un stratifié ayant le module à cisaillement maximal.
- Il s'agit de résoudre le problème de minimum en forme standard

$$\min -G_{xy}^m(\xi_2) = \xi_2 U_3 - U_5$$

$$\text{avec } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- Ce problème n'est pas linéaire mais la solution est unique; on voit immédiatement que le stratifié qui maximise la rigidité à cisaillement en membrane est du type

415



## Conception en rigidité

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -1 \quad \text{si } U_3 > 0 \quad \text{séquence } \textit{angle-ply} \text{ de type } \pm 45^\circ;$$

$$\xi_1 = \text{quelconque}, \xi_2 = 1 \quad \text{si } U_3 < 0 \quad \text{séquence } \textit{cross-ply}.$$

- Normalement  $U_3 > 0$ , et donc c'est une séquence de type  $\pm 45^\circ$  qui d'habitude maximise la rigidité à cisaillement en membrane.
- Par la méthode polaire, on a:

$$\min -G_{xy}^m(\xi_2) = -T_0 + (-1)^k R_0 \xi_2$$

$$\text{avec } \xi_1 - 1 \leq 0, \quad -\xi_1 - 1 \leq 0, \quad \xi_2 - 1 \leq 0, \quad \xi_1^2 - \xi_2 - 1 \leq 0.$$

- La solution est donc

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = -1 \quad \text{si } k = 0 \quad \text{séquence } \textit{angle-ply} \text{ de type } \pm 45^\circ;$$

$$\xi_1 = \text{quelconque}, \xi_2 = 1 \quad \text{si } k = 1 \quad \text{séquence } \textit{cross-ply}.$$

- Dans les deux cas,

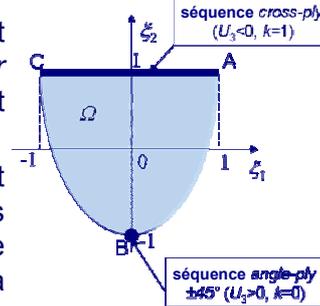
$$\max G_{xy}^m = T_0 + R_0 \quad (= U_3 + U_5).$$

416



## Conception en rigidité

- Le cas d'un matériau avec  $U_3 > 0, k=0$ , est celui que Pedersen appelle un *low shear modulus material*, tandis que  $U_3 < 0, k=1$ , est un *high shear modulus material*.
- Dans ce dernier cas, la rigidité à cisaillement du stratifié est maximisée en disposant les couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , selon un pourcentage quelconque: la séquence n'influe pas sur la valeur finale de la rigidité à cisaillement en membrane.
- Un problème différent, et plus simple, est celui de déterminer un stratifié ayant un module donné.
- Dans ce cas, il est utile de tracer les courbes de niveau des modules, qui se trouvent à partir des fonctions de page 413:



417

## Conception en rigidité

$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 - U_2 E_X^m \xi_1 + E_X^m U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3(2U_1 + 2U_4 - E_X^m)} \quad \text{courbes de niveau de } E_X^m,$$

$$\xi_2 = \frac{U_2 \xi_1^2 + U_2 E_Y^m \xi_1 + E_Y^m U_1 - U_1^2 + U_4^2}{U_3(2U_1 + 2U_4 - E_X^m)} \quad \text{courbes de niveau de } E_Y^m,$$

$$\xi_2 = \frac{U_5 - G_{XY}^m}{U_3} \quad \text{courbes de niveau de } G_{XY}^m,$$

$$\xi_2 = \frac{v_{XY}^m U_2 \xi_1 - v_{XY}^m U_1 + U_4}{U_3(1 + v_{XY}^m)} \quad \text{courbes de niveau de } v_{XY}^m.$$

- Avec les paramètres polaires on a

418