

## INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME

La théorie de la Commande «Robuste» des Systèmes Linéaires a connu un essor remarquable durant ces dix dernières années. Sa popularité gagne aujourd'hui le milieu industriel où elle se révèle un outil précieux pour l'analyse et la conception des systèmes asservis. Cette percée rapide tient à deux atouts majeurs :

- son caractère appliqué et son adéquation aux problèmes pratiques aux chercheurs automaticiens,
- sa contribution à la systématisation du processus de synthèse d'un asservissement.

Pour apprécier l'originalité et l'intérêt des outils de Commande Robuste, rappelons qu'un asservissement a deux fonctions essentielles :

- façonner la réponse du système asservi pour lui imprimer le comportement désiré,
- maintenir ce comportement face aux aléas et fluctuations qui affectent le système pendant son fonctionnement (rafales de vent pour un hélicoptère, usure pour un système mécanique, changement de configuration pour un robot, etc.).

Cette seconde exigence est qualifiée de «robustesse à l'incertitude». Elle revêt une importance critique pour la fiabilité du système asservi. En effet, l'asservissement est typiquement conçu à partir d'un modèle idéalisé et simplifié du système réel.

Pour fonctionner correctement, il doit donc être robuste aux imperfections du modèle, c'est-à-dire aux écarts entre le modèle et le système réel, aux dérives des paramètres physiques, et aux perturbations externes.

L'avantage essentiel des techniques de Commande Robuste est de générer des lois de commande qui satisfont à la double exigence mentionnée ci-dessus. Plus précisément, étant donné une spécification fréquentielle du comportement désiré et une estimation de l'ordre de grandeur de l'incertitude, la théorie évalue la faisabilité, produit une loi de commande adaptée, et fournit une garantie sur le domaine de validité de cette loi de commande (robustesse). Cette démarche de synthèse est systématique et très générale. En particulier, elle est directement applicable aux systèmes à plusieurs entrées/sorties.

Dans une certaine mesure, la théorie de la Commande Robuste réconcilie l'Automatique Classique à dominante fréquentielle (Bode, Nyquist, P.I.D.) et l'Automatique Moderne à dominante variables d'état (Commande Linéaire Quadratique, Kalman).

Elle combine en effet le meilleur des deux. De l'Automatique Classique, elle emprunte la richesse de l'analyse fréquentielle des systèmes.

Ce cadre est particulièrement favorable à la spécification des objectifs de performance (qualité du suivi ou de la régulation), de bande passante (domaine d'action de l'asservissement) et de robustesse. De l'Automatique Moderne, elle hérite la simplicité et la puissance des méthodes de synthèse par variables d'état des asservissements.

Le contrôle de vol d'un hélicoptère est un problème complexe car il fait appel à plusieurs domaines de sciences et techniques tels que l'aérodynamique, la dynamique et l'automatique. En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non, continue ou discrète, permet de déterminer l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît l'état à l'instant initial et le comportement des variables exogènes qui influent sur le système.

Effectivement, ce travail contribue à la modélisation et à la synthèse des systèmes multivariables de l'hélicoptère. Il associe à la fois les domaines de l'Aéronautique, de l'Automatique et de l'Informatique.

Notre recherche qui a pour titre « **Contribution à la modélisation, à la commande robuste, à la mu-analyse des rotors et des systèmes de vol d'hélicoptère** » a pour objectifs :

- ✓ de développer et de mettre au point une méthodologie (ou un modèle) pour le problème de synthèses robustes satisfaisant des objectifs de performance de l'hélicoptère dans le domaine de l'Automatique,
- ✓ de développer des modèles mathématiques de vol et des rotors d'hélicoptères,
- ✓ de définir les différentes composantes d'un hélicoptère dans le domaine de l'Aéronautique,
- ✓ de modéliser les rotors et les différentes l'angle de battement de l'hélicoptère,
- ✓ de trouver les modèles mathématiques du rotor principal, du rotor de queue et de l'angle de battement de l'hélicoptère,
- ✓ de modéliser la déformation d'un modèle de pale élastique des rotors,
- ✓ de déterminer des correcteurs adaptés à l'hélicoptère par mu-analyse en prenant en compte des contraintes en termes de réglage et de validation à partir d'un cahier de charges.

Cela nous amène au plan de rédaction comportant cinq chapitres essentiels.

Dans le premier chapitre, nous développons l'état de l'art en Automatique qui développe la théorie des systèmes linéaires multivariables dans l'espace d'état. La commande de l'hélicoptère est un problème complexe car il fait appel à plusieurs domaines des sciences et techniques aussi différents que l'aérodynamique, la dynamique et l'automatique.

Le problème de synthèse consiste à concevoir un correcteur assurant la stabilité asymptotique du système bouclé ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système augmenté ce dernier étant composé du processus physique augmenté des filtres de pondération.

Dans le second chapitre, nous résumons les généralités sur l'hélicoptère, sa composition, ses modes de vol, ses applications, la description des rotors, les mécanismes de fonctionnement et les équations fondamentales liées à la dérivation du mouvement d'un hélicoptère expliquant respectivement la détermination de la position et l'orientation de l'hélicoptère relatif aux systèmes inertiel et mobile et les angles correspondants. Le mouvement d'équations est obtenu par la mise en œuvre de la Loi de Newton ainsi que la modélisation des vols longitudinal et latéral de l'hélicoptère.

Dans le troisième chapitre, nous développons le modèle mathématique du rotor principal, du rotor de queue, les forces et moments des rotors, les vitesses de rotation du rotor principal et de l'angle de battement de l'hélicoptère.

Dans le quatrième chapitre mentionne la modélisation aeroelastique des pales du rotor. Dans ce chapitre, nous développons les modèles de la déformation d'une pale élastique des rotors et leurs effets.

Le cinquième chapitre présente les résultats de la simulation de la synthèse de l'hélicoptère qui est une tâche délicate puisque la dynamique du système bouclé est fortement non linéaire et pleinement couplée, et aussi sujette à des incertitudes de modélisation. Les hélicoptères fonctionnent dans un environnement où l'exécution de la trajectoire peut facilement être affectée par des turbulences atmosphériques. Nous considérons ici le problème de commande d'un modèle linéaire de l'hélicoptère utilisant la méthode par  $\mu$ -analyse.

Nous présentons à la fin de cet ouvrage les conclusions et les perspectives de ce travail. Notre travail nous paraît être un ouvrage à la fois pédagogique et scientifique dans les domaines de l'Automatique et de l'Aéronautique.

# CHAPITRE 1 COMMANDE ROBUSTE ET $\mu$ -ANALYSE DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

## 1.1 Introduction

Ce chapitre donne une vision complète des différentes approches de la commande. Il fait souvent référence au volume consacré à l'analyse des systèmes linéaires.

On doit acquérir une certaine compréhension du comportement des systèmes afin de les concevoir, de les réaliser et de les commander. Pour cela, toute information dont il dispose sur le système considéré est également formulée sous forme d'un modèle mathématique. Par ailleurs, le concepteur décrit le comportement attendu du système à travers le cahier des charges. Les spécifications du système ainsi décrites sont formulées comme un ou plusieurs critères mathématiques à satisfaire sur ce modèle mathématique.

La connaissance du système à étudier est nécessairement partielle et incomplète. Même si sa structure est bien déterminée, les paramètres sont toujours mesurés avec une certaine erreur ou encore susceptibles d'évoluer dans le temps. Par exemple, la valeur d'une résistance est connue avec une certaine erreur. Par suite, il est impératif de prendre en compte cette méconnaissance sur le système. En fait, assez souvent un modèle mathématique idéal est considéré. Ce modèle idéal correspond à un comportement qui se retrouve sur le vrai système dans les cas où la sensibilité est faible.

## 1.2 Outils mathématiques pour la commande robuste

- Calcul de la norme  $H_\infty$

En automatique, on se limite au cas des systèmes linéaires à temps continu de dimension finie dont la matrice de transfert possède des termes qui sont des fractions rationnelles à coefficients réels. On considère le sous-espace des matrices de transfert  $G(s)$  de dimension  $n \times n$  strictement propre et sans pôle sur l'axe imaginaire noté  $RH_\infty^n$  ou plus simplement  $RH_\infty$ .

*Définition 1.01 :*

La norme  $H_\infty$  étendue aux matrices de transfert de l'espace  $RH_\infty$  est la plus grande valeur singulière définie par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (1.01)$$

$\|G\|_\infty$  est appelé norme  $H_\infty$  de la matrice de transfert  $G(s)$ .

*Interprétation :*

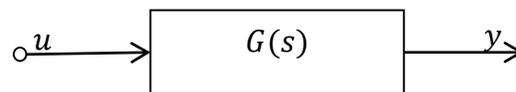
La norme  $H_\infty$  de la matrice de transfert  $G(s)$  d'un système linéaire à temps continu asymptotiquement stable représente donc une mesure du gain maximal atteinte sur l'ensemble des fréquences, par la plus grande valeur singulière de  $G(j\omega)$ . Elle représente aussi la valeur maximale du rapport d'énergie entre l'énergie du signal de sortie  $z(t)$  et l'énergie du signal d'entrée  $e(t)$ .

### 1.3 Systèmes linéaires multivariables invariants à temps continu

#### 1.3.1 Modèle d'état des systèmes à un vecteur d'entrées et à un vecteur de sorties

On appelle processus linéaire invariant (ou stationnaire) à temps continu tout système affine en état et en commande dont les paramètres sont constants dans le temps.

On considère le modèle d'état du processus représenté par la figure 1.01 ci-dessous:



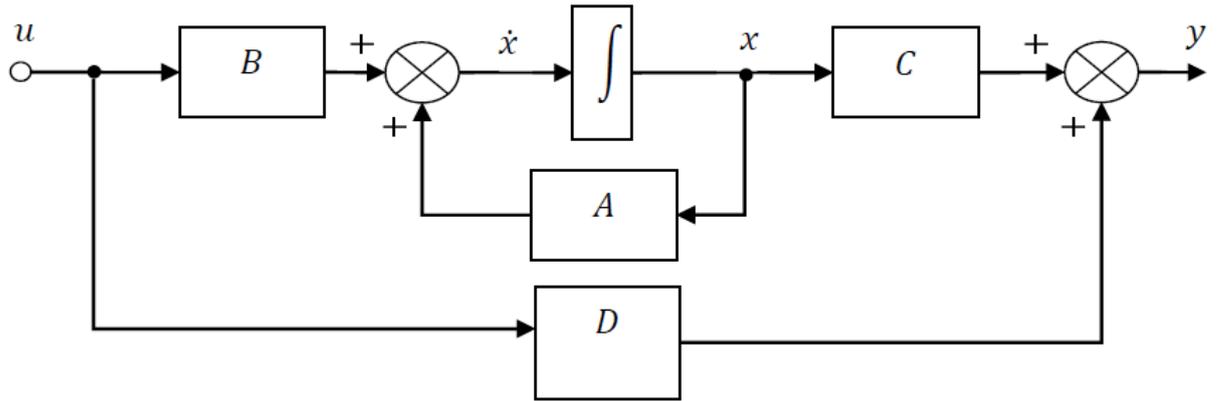
**Figure 1.01 : Schéma fonctionnel du système linéaire**

L'équation d'évolution d'état est une équation différentielle linéaire matricielle du premier ordre à temps continu et l'équation de sortie du processus linéaire est une équation affine. Elles sont définies par les expressions [1.01] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.02)$$

Où :

- $x(t)$  : vecteur d'état (variables internes)
- $u(t)$  : vecteur des entrées (ou de commande)
- $y(t)$  : vecteur des sorties (ou d'observation)
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : matrice dynamique du système
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  : matrice d'application de la commande
- $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  : matrice d'observation
- $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$  : matrice d'application directe de la commande



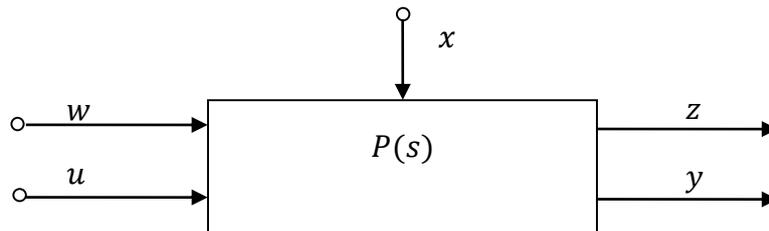
**Figure 1.02 : Schéma fonctionnel d'une représentation d'état**

- $\mathcal{R}(A, B, C, D)$  est dite représentation d'état du système linéaire.
- La matrice de transfert du processus  $G(s)$  s'écrit :

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D \quad (1.03)$$

### 1.3.2 Modèle d'état des systèmes à deux vecteurs d'entrées et à deux vecteurs de sorties

Considérons un système linéaire multivariable représenté par la figure 1.03 suivante :



**Figure 1.03 : Représentation d'un système multivariable**

Avec :

- $x$ : vecteur d'état (variables internes)
- $w$ : vecteur d'entrées et de perturbations du processus  $P$
- $z$ : vecteur de sorties du processus  $P$
- $u$ : vecteur de commande (action) du processus  $P$
- $y$ : vecteur des sorties (ou de mesures)

Dans l'espace d'état, les équations d'état et d'observation du processus  $P$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2w(t) \\ y(t) = C_1x(t) + D_{11}u(t) + D_{12}w(t) \\ z(t) = C_2x(t) + D_{21}u(t) + D_{22}w(t) \end{cases} \quad (1.04)$$

Sous forme matricielle, l'équation du processus de transfert  $P$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ u \\ w \end{bmatrix} \text{ avec } P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (1.05)$$

La matrice de transfert du processus  $P(s)$  s'écrit :

$$P(s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} [sI - A]^{-1} [B_1 \quad B_2] + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (1.06)$$

#### 1.4 Critère de commandabilité de Kalman

Considérons un système linéaire défini par la paire  $(A, B)$ . L'analyse de la commandabilité d'un système est donc caractérisée par l'étude de la matrice de commandabilité  $M_{com}$  définie par :

$$M_{com} = [B \quad A^1B \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (1.07)$$

*Théorème 1.01 :*

Un système est complètement commandable, si et seulement si, le rang de sa matrice de commandabilité  $M_{com}$  est égal à l'ordre du système par [1.02] et [1.03]:

$$\text{rang}[M_{com}] = n \quad (1.08)$$

#### 1.5 Critère d'observabilité de Kalman

Considérons un système linéaire défini par la paire  $(A, B)$ . L'analyse de l'observabilité d'un système est donc caractérisée par l'étude de la matrice d'observabilité  $M_{obs}$  définie par :

$$M_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.09)$$

*Théorème 1.02 :*

Un système linéaire est complètement observable, si et seulement si, le rang de sa matrice d'observabilité  $M_{obs}$  est égal à l'ordre du système :

$$\text{rang}[M_{obs}] = n \quad (1.10)$$

### 1.6 Schéma bloc du système nominal et du système perturbé

Le système nominal est le système bouclé à retour unitaire de la figure 1.04 où  $G$  représente la matrice de transfert du processus nominal et le correcteur  $K$ .  $L = GK$  représente la matrice de transfert en boucle ouverte.

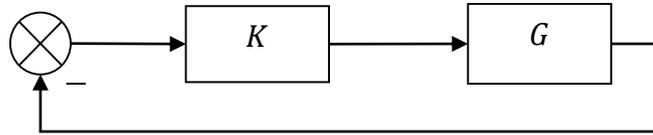


Figure 1.04 : Schéma bloc du système nominal

La figure 1.05 ci-dessous représente le schéma bloc du système bouclé perturbé où  $\tilde{G}$  représente la matrice de transfert du processus perturbé prenant en compte les erreurs de modélisation  $\Delta$ .

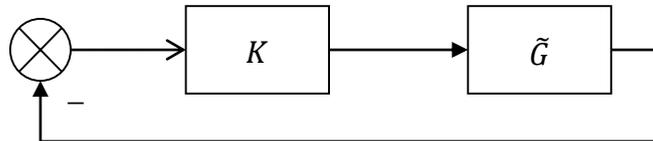


Figure 1.05 : Schéma bloc du système perturbé

On a :

$$\tilde{G} = f(G, \Delta) \tag{1.11}$$

### 1.7 Transformation fractionnaire linéaire d'une matrice

Dans ce paragraphe, nous développons que l'expression des objectifs de synthèse ainsi que la modélisation des incertitudes intervenant sur le modèle, peuvent être traduits par un même formalisme de représentation des systèmes : les transformations linéaires fractionnaires (LFT). Soit une matrice complexe  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  partitionnée comme suit par [1.04]:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

*1<sup>er</sup> cas* : Les incertitudes du modèle sont connectées sur la partie supérieure de  $M$ .

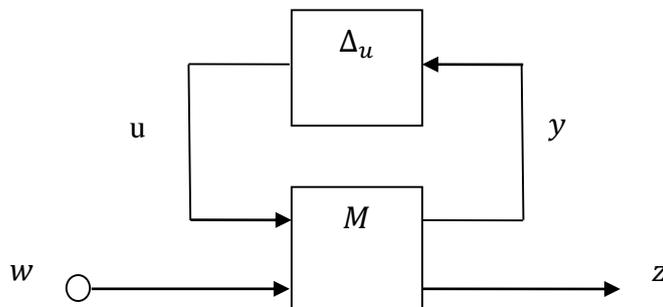


Figure 1.06 : Représentation par  $LFT_u$

La matrice d'interconnexions du système perturbé est définie par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

En connectant la matrice des incertitudes de modèles, nous avons :

$$u = \Delta_u y \quad (1.14)$$

La matrice de transfert en boucle fermée entre  $w$  et  $z$  notée  $T_u$  satisfait la relation :

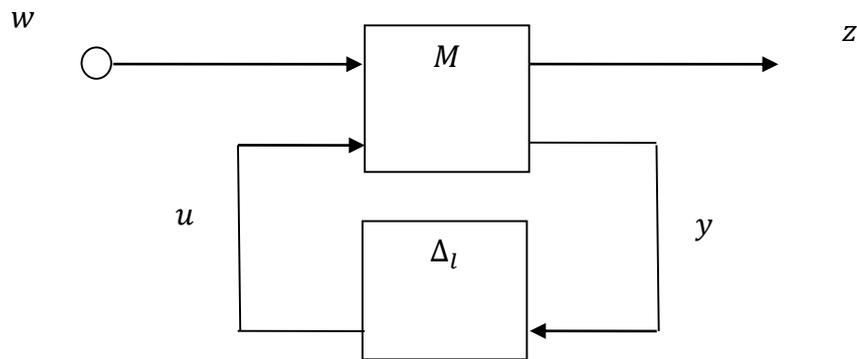
$$z = F_u(M, \Delta_u) \cdot w \text{ si } (I - M_{11}\Delta_u)^{-1} \text{ existe} \quad (1.15)$$

*Définition 1.02 :*

La transformation fractionnaire linéaire ou  $LFT_u$  lorsque les incertitudes de modélisation  $\Delta_u$  sont appliquées à la partie supérieure de  $M$  est définie par :

$$F_u(M, \Delta_u) = [M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}] \quad (1.16)$$

**2<sup>ème</sup> cas :** Les incertitudes du modèle sont connectées sur la partie inférieure de  $M$



**Figure 1.07 : Représentation par  $LFT_l$**

La matrice d'interconnexion du système perturbé est définie par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

En connectant la matrice des incertitudes de modèle, nous avons :

$$u = \Delta_l y \quad (1.18)$$

La matrice de transfert en boucle fermée entre  $w$  et  $z$  notée  $T_l$  satisfait la relation :

$$z = F_l(M, \Delta_l) \cdot w \text{ si } (I - M_{22}\Delta_l)^{-1} \text{ existe} \quad (1.19)$$

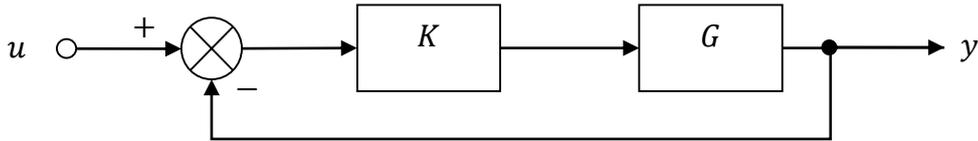
*Définition 1.03 :*

La transformation fractionnaire linéaire ou  $LFT_l$  lorsque les incertitudes de modélisation  $\Delta_l$  sont appliquées à la partie inférieure de  $M$  est définie par :

$$F_l(M, \Delta_l) = [M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}] \quad (1.20)$$

### 1.8 Analyse en stabilité des systèmes linéaires bouclés à temps continu

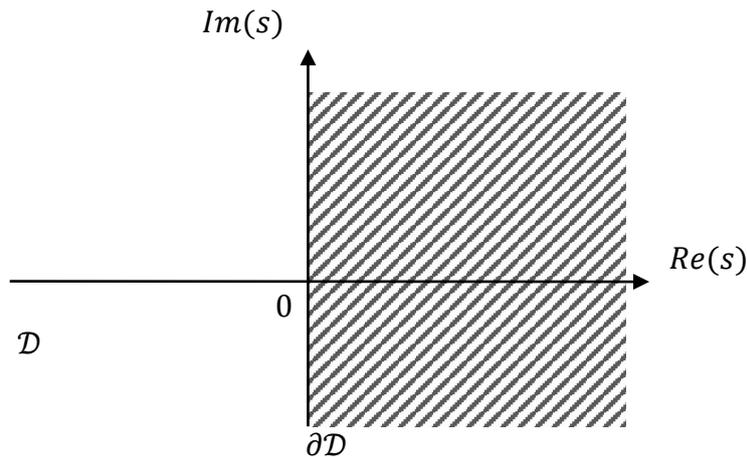
Les paragraphes suivants sont consacrés à un rappel des outils d'analyse des systèmes bouclés. Après un bref rappel sur l'analyse de la stabilité et de la performance du système bouclé nominal, nous nous intéressons à la notion de robustesse. Nous rappelons le théorème du petit gain appliqué à l'analyse de la robustesse face à des erreurs de modélisation non structurées. La stabilité est la propriété fondamentale que doit impérativement vérifier tout système à commander. La stabilité d'un système est, de manière qualitative, la capacité de ce dernier à revenir à une position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté.



**Figure 1.08 :** Schéma bloc du système asservi pour l'étude de la stabilité nominale

La région de stabilité de la figure 1.09 ci-dessous est définie par [1.04]:

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid \gamma = 0, \omega \in \mathbb{R}\} \quad (1.21)$$



**Figure 1.09 :** Région de stabilité  $\mathcal{D}$  pour assurer la marge de stabilité asymptotique

### 1.8.1 Spécifications fréquentielles de performance nominale

Considérons le système bouclé de la figure 1.10 où  $G$  et  $K$  désignent respectivement le processus à contrôler et le correcteur. Nous définissons d'après ce schéma bloc les différentes matrices de transfert entre les entrées et les sorties considérées ainsi que leurs différentes significations.

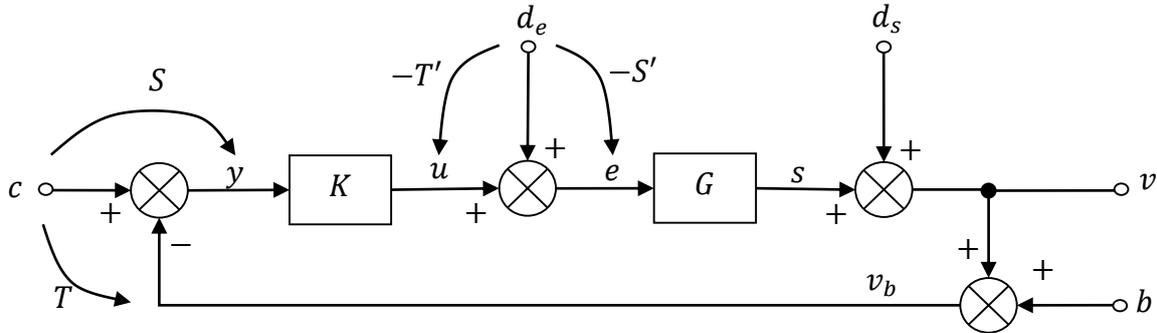


Figure 1.10 : Schéma bloc du système asservi pour l'étude de la performance nominale

Comme le système est linéaire, nous obtenons à partir de ce schéma bloc :

- la matrice de transfert entre la référence  $c$  et le signal d'erreur du système global  $y$  est appelée matrice de sensibilité en sortie et est définie par :

$$S = [I + GK]^{-1} \quad (1.22)$$

- la matrice de transfert entre la référence  $c$  et la sortie de retour bruitée  $v_b$  du système ; elle est appelée matrice de sensibilité complémentaire en sortie et est définie par :

$$T = [(I + GK)^{-1}GK] \quad (1.23)$$

*Propriété 1.01 :*

- Les deux matrices de sensibilité en sortie vérifient l'identité matricielle :

$$S + T = I \quad (1.24)$$

*Remarque 1.01 :*

Les matrices de sensibilité caractérisent le comportement du système asservi. Nous souhaitons prendre en considération les points suivants, pour le système bouclé :

- un bon suivi de la référence est obtenue lorsque  $S$  est faible ;
- une bonne réjection des bruits de mesure est obtenue lorsque  $T$  est faible ;
- la commande reçue par le processus est faible lorsque  $S'$  est faible ;
- l'effort de commande est faible lorsque  $T'$  est faible.

### 1.8.2 Condition de performance nominale

La performance nominale des systèmes linéaires à temps continu consiste à assurer, pour le système en boucle fermée correspondant au modèle utilisé pour le calcul de la commande, des propriétés convenables, notamment de précision et de rapidité.

La performance nominale est caractérisée par les différentes matrices de sensibilité de la boucle de régulation. Cette performance nominale du système asservi de la figure 1.11 est jugée satisfaisante si les objectifs de performance sont satisfaits pour le modèle nominal. La performance du système nominal est évaluée en fonction de l'erreur  $y = c - v_b$ . Or la matrice de sensibilité  $S$  est le rapport du signal d'erreur global  $y$  sur la consigne.

Rechercher la performance nominale revient à fixer un majorant noté  $\varepsilon_y$  de la norme  $H_\infty$  de la matrice de sensibilité  $S$  en fonction de la fréquence  $\omega$ .

*Définition 1.04 :*

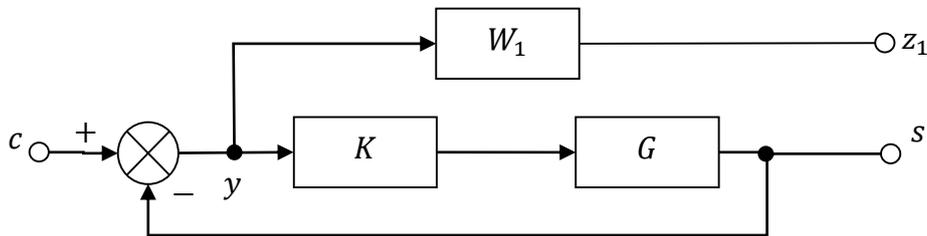
La spécification de la performance nominale du système bouclé peut être exprimée par :

$$\|S(j\omega)\|_\infty < \varepsilon_y \quad (1.25)$$

Dans ce cas l'erreur de régulation est inférieure à  $\varepsilon_y$ . L'inverse du majorant  $\varepsilon_y$  définit la matrice de pondération du système linéaire. Cette matrice appartient à  $RH_\infty$  et est notée :

$$W_1(s) = w_1(s) \cdot I = \frac{1}{\varepsilon_y} I \quad (1.26)$$

Où la fonction de pondération  $w_1$  est un filtre du premier ordre ou du second ordre à  $d$  degrés de liberté. Cette matrice de pondération traduit la performance nominale du système linéaire. La façon dont cette matrice intervient dans la description du système asservi est représentée schématiquement sur la figure 1.12. Cette matrice de transfert de performance nominale est calculée entre la consigne  $c$  et la sortie pondérée  $z_1$ . Elle est notée  $M_{pn}$ .



**Figure 1.11 : Schéma bloc du système asservi pour le calcul de la matrice de transfert de performance nominale**

*Théorème 1.03 :*

La performance nominale du système asservi est jugée satisfaisante si :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \|W_1 S\|_\infty < 1 \quad (1.27)$$

En effet, nous avons d'après la figure 1.12 :  $M_{pn} = T_{z_1 c} = [I + GK]^{-1}W_1 = SW_1$ .

L'application de (1.27) fournit le résultat suivant :  $\|SW_1\| < 1$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

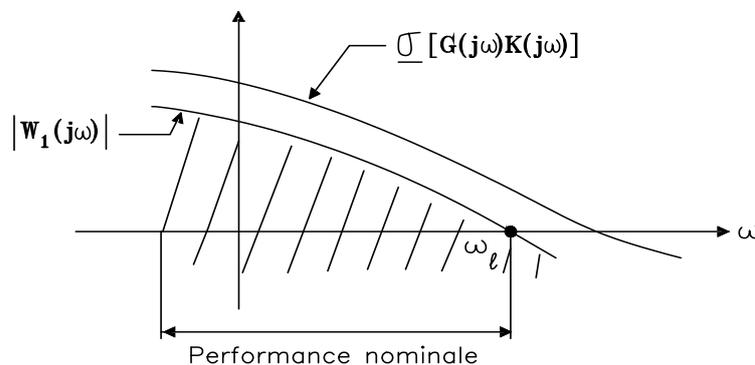
## 1.9 Mise en forme de la boucle de commande

*Définition 1.05 :*

La mise en forme de la boucle de commande consiste à établir un gabarit tel que la courbe des valeurs singulières de la matrice de transfert en boucle ouverte  $G(j\omega)K(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , possède une forme adéquate.

Lors de la spécification de la performance nominale, nous souhaitons que la référence  $C$  ait une faible influence sur l'erreur d'asservissement  $y$ . Ainsi l'introduction de la matrice de pondération permet de modéliser les différentes matrices de sensibilité et d'assurer la condition (1.27). En basse fréquence, la condition de performance nominale (1.27) devient [1.05]:

$$\forall \omega \in ]0, \omega_l], |W_1(j\omega)| < \underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \quad (1.28)$$



**Figure 1.12 : Gabarit de performance nominale**

Nous obtenons alors le gabarit de performance nominale de la figure 1.12 qui permet de régler la performance nominale lorsque nous effectuons un modelage de la matrice de transfert en boucle ouverte  $G(j\omega)K(j\omega)$  par rapport à la matrice de pondération  $W_1(j\omega)$ .