

### 3.6 Forces et moments des rotors

Tenant compte des cadres de référence fondamentaux tirant dans les équations (3.15) et (2.44) à (2.46), en association avec la figure 3.27, nous notons que les forces de moyeu peuvent être écrites comme suit :

$$X = M_a(\dot{u} - rv + qw) \quad (3.16)$$

$$Y = M_a(\dot{v} - pw + ru)$$

$$Z = M_a(\dot{w} - qu + pv)$$

$$X_{hw} = \sum_{i=1}^{N_b} \int_0^R \{-(f_z - m a_{zb})_i \beta_i \cos\psi_i - (f_y - m a_{yb})_i \sin\psi_i + m a_{xb} \cos\psi_i\} dr_b \quad (3.17)$$

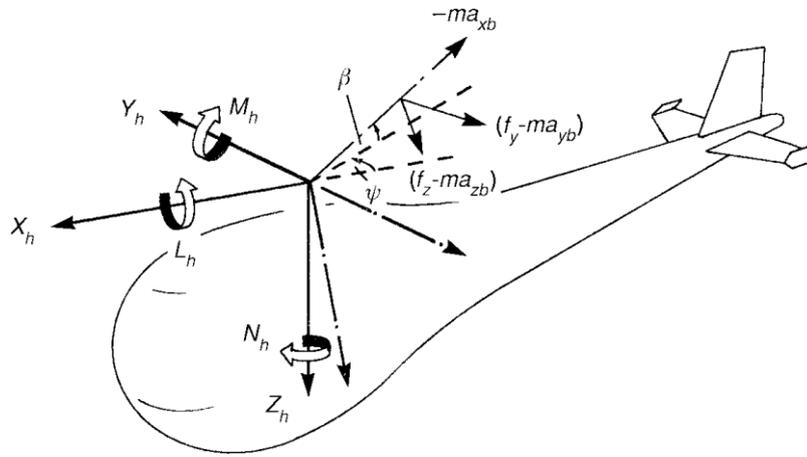


Figure 3.11 : Forces et moments agissant sur un moyeu de rotor

$$Y_{hw} = \sum_{i=1}^{N_b} \int_0^R \{(f_z - m a_z)_i \beta_i \sin\psi_i - (f_y - m a_y)_i \cos\psi_i - m a_x \sin\psi_i\} dr \quad (3.18)$$

$$Z_{hw} = \sum_{i=1}^{N_b} \int_0^R \{(f_z - m a_{zb} + m a_{xb})_i\} dr \quad (3.19)$$

Les expressions pour les accélérations inertielles de l'élément de lames ont tirées de la section précédente. Le chargement aérodynamique est approché par un ascenseur simple et paire de traînée, avec un angle global d'entrée supposé petit, de sorte que [3.08]:

$$f_z = -l \cos\phi - d \sin\phi \approx -l - d\phi \quad (3.20)$$

$$f_y = d \cos\phi - l \sin\phi \approx d - l\phi \quad (3.21)$$

Après avoir effectué les intégrations analytiquement en utilisant les approximations dérivées dans les équations (3.17) à (3.19), nous pouvons écrire les forces sous forme de coefficient comme :

$$\left(\frac{2C_{xw}}{a_0 s}\right) = \frac{X_{hw}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 s a_0} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} F^{(1)}(\psi_i) \beta_i \cos\psi_i + F^{(2)}(\psi_i) \sin\psi_i \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{2C_{yw}}{a_0 s}\right) = \frac{Y_{hw}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 s a_0} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} -F^{(1)}(\psi_i) \beta_i \sin\psi_i + F^{(2)}(\psi_i) \cos\psi_i \quad (3.23)$$

$$\left(\frac{2C_{zw}}{a_0 s}\right) = \frac{Z_{hw}}{\frac{1}{2}\rho(\Omega R)^2 \pi R^2 s a_0} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} F^{(1)}(\psi_i) = -\left(\frac{2C_T}{a_0 s}\right) \quad (3.24)$$

Où

$$F^{(1)}(\psi_i) = - \int_0^1 \{\bar{U}_T^2 \theta_i + \bar{U}_P \bar{U}_T\} d\bar{r}_b \quad (3.25)$$

$$F^{(2)}(\psi_i) = - \int_0^1 \left\{ \bar{U}_P \bar{U}_T \theta_i + \bar{U}_P^2 - \frac{\delta_i \bar{U}_T^2}{a_0} \right\} d\bar{r}_b \quad (3.26)$$

Dans le plan de la composante de la force de traînée, le rotor de solidités est défini de la manière suivante :

$$s = \frac{N_b c}{\pi R} \quad (3.27)$$

D'après les équations (3.22) à (3.26), les fonctions F peuvent être étendues pour donner les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\psi) = & \left(\frac{1}{3} + \mu \sin\psi + \mu^2 \sin^2\psi\right) \theta_p + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\mu \sin\psi + \frac{1}{2}\mu^2 \sin^2\psi\right) \theta_{tw} \\ & + \left(\frac{1}{3} + \frac{\mu \sin\psi}{2}\right) (\bar{\omega}_y - \lambda_1 - \beta') + \left(\frac{1}{2} + \mu \sin\psi\right) (\mu_z - \lambda_0 - \beta \mu \cos\psi) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
F^{(2)}(\psi) = & \left\{ \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \mu \sin\psi \right) (\bar{\omega}_y - \lambda_1 - \beta') + \left( \frac{1}{2} + \mu \sin\psi \right) (\mu_z - \lambda_0 - \beta \mu \cos\psi) \right\} \theta_p \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{\mu \sin\psi}{3} \right) (\bar{\omega}_y - \lambda_1 - \beta') + \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu \sin\psi}{2} \right) (\mu_z - \lambda_0 \right. \\
& \left. - \beta \mu \cos\psi) \right\} \theta_{tw} + (\mu_z - \lambda_0 - \beta \mu \cos\psi)^2 \\
& + (\mu_z - \lambda_0 - \beta \mu \cos\psi) (\bar{\omega}_y - \lambda_1 - \beta') + \frac{(\bar{\omega}_y - \lambda_1 - \beta')^2}{3} - \frac{\delta}{a_0} \left( \frac{1}{3} \right. \\
& \left. + \mu \sin\psi + \mu^2 \sin^2\psi \right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Cette paire de forces normales dans le plan va produire des charges vibratoires (c'est à dire, les harmoniques de Régime du rotor) et quasi-stable au niveau du moyeu. Les composants quasi-stationnaires dans le système d'axes hub-vent sont d'un intérêt principal dans la dynamique de volet peuvent être obtenus en augmentant les charges dans le système de rotation, donnée par les équations (3.27) et (3.28) jusqu'au second harmonique.

Ainsi :

$$F^{(1)}(\psi) = F_0^{(1)} + F_{1c}^{(1)} \cos\psi + F_{1s}^{(1)} \sin\psi + F_{2c}^{(1)} \cos 2\psi + F_{2s}^{(1)} \sin 2\psi \tag{3.30}$$

$$F^{(2)}(\psi) = F_0^{(2)} + F_{1c}^{(2)} \cos\psi + F_{1s}^{(2)} \sin\psi + F_{2c}^{(2)} \cos 2\psi + F_{2s}^{(2)} \sin 2\psi \tag{3.31}$$

En utilisant les équations (3.30) à (3.31), nous pouvons écrire les coefficients de force du moyeu

:

$$\left( \frac{2C_{XW}}{a_0 s} \right) = \left( \frac{F_0^{(1)}}{2} + \frac{F_{2c}^{(1)}}{4} \right) \beta_{1c} + \frac{F_{1c}^{(1)}}{2} \beta_0 + \frac{F_{2s}^{(1)}}{4} \beta_{1s} + \frac{F_{1s}^{(1)}}{2} \tag{3.32}$$

$$\left( \frac{2C_{YW}}{a_0 s} \right) = \left( \frac{F_0^{(1)}}{2} + \frac{F_{2c}^{(1)}}{4} \right) \beta_{1s} - \frac{F_{1s}^{(1)}}{2} \beta_0 - \frac{F_{2s}^{(1)}}{4} \beta_{1c} + \frac{F_{1c}^{(1)}}{2} \tag{3.33}$$

$$\left( \frac{2C_{ZW}}{a_0 s} \right) = - \left( \frac{2C_T}{a_0 s} \right) = -F_0^{(1)} \tag{3.34}$$

Où les coefficients harmoniques sont donnés par les expressions [3.09]:

$$F_0^{(1)} = \theta_0 \left( \frac{1}{3} + \frac{\mu^2}{2} \right) + \frac{\mu}{2} \left( \theta_{1sw} + \frac{\bar{p}_{hw}}{2} \right) + \left( \frac{\mu_z - \lambda_0}{2} \right) + \frac{1}{4} (1 + \mu^2) \theta_{tw} \quad (3.35)$$

$$F_{1s}^{(1)} = \left( \frac{\alpha_{1sw}}{3} + \mu \left( \theta_0 + \mu_z - \lambda_0 + \frac{2}{3} \theta_{tw} \right) \right) \quad (3.36)$$

$$F_{1c}^{(1)} = \frac{\alpha_{cw}}{3} - \frac{\mu\beta_0}{2} \quad (3.37)$$

$$F_{2s}^{(1)} = \frac{\mu}{2} \left\{ \frac{\alpha_{1cw}}{2} + \frac{\theta_{1cw} - \beta_{1sw}}{2} - \mu\beta_0 \right\} \quad (3.38)$$

$$F_{2c}^{(1)} = -\frac{\mu}{2} \left\{ \frac{\alpha_{1sw}}{2} + \frac{\theta_{1sw} - \beta_{1cw}}{2} + \mu \left( \theta_0 + \frac{\theta_{tw}}{2} \right) \right\} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} F_{1s}^{(2)} = & \frac{\mu^2}{2} \beta_0 \beta_{1sw} + \left( \mu_z - \lambda_0 - \frac{\mu}{4} \beta_{1cw} \right) (\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}) - \frac{\mu}{4} \beta_{1sw} (\alpha_{1cw} \\ & - \theta_{1cw}) + \theta_0 \left( \frac{\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}}{3} + \mu (\mu_z - \lambda_0) - \frac{\mu^2}{4} \beta_{1cw} \right) \\ & + \left( \frac{\alpha_{1sw} - \theta_{1sw}}{4} + \frac{\mu}{2} \left( \mu_z - \lambda_0 - \frac{\beta_{1cw}\mu}{4} \right) \right) \theta_{tw} \\ & + \theta_{1sw} \left( \frac{\mu_z - \lambda_0}{2} + \mu \left( \frac{3}{8} (\bar{p}_{hw} - \lambda_{1sw}) + \frac{\beta_{1cw}}{4} \right) \right) \\ & + \frac{\mu}{4} \theta_{1cw} \left( \frac{\bar{q}_{hw} - \lambda_{1cw}}{2} - \beta_{1sw} - \mu\beta_0 \right) - \frac{\delta\mu}{a_0} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} F_{1c}^{(2)} = & (\alpha_{1cw} - \theta_{1cw} - 2\beta_0\mu) \left( \mu_z - \lambda_0 - \frac{4}{3} \mu\beta_{1cw} \right) - \frac{\mu}{4} \beta_{1sw} (\alpha_{1sw} \\ & - \theta_{1sw}) + \theta_0 \left( \frac{\alpha_{1cw} - \theta_{1cw}}{3} - \frac{\mu}{2} \left( \beta_0 + \frac{\mu}{2} \beta_{1sw} \right) \right) \\ & + \theta_{tw} \left( \frac{\alpha_{1cw} - \theta_{1cw}}{4} - \mu \left( \frac{\beta_0}{3} + \frac{\mu}{8} \beta_{1sw} \right) \right) \\ & + \theta_{1cw} \left( \frac{\mu_z - \lambda_0}{2} + \frac{\mu}{4} \left( \frac{\bar{p}_{hw} - \lambda_{1sw}}{2} - \beta_{1cw} \right) \right) \\ & + \frac{\mu}{4} \theta_{1sw} \left( \frac{\bar{q}_{hw} - \lambda_{1cw}}{2} - \beta_{1sw} - \mu\beta_0 \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Les angles d'incidence de la lame efficaces sont donnés par les expressions suivantes :

$$\alpha_{1sw} = \bar{p}_{hw} - \lambda_{1sw} + \beta_{1cw} + \theta_{1sw} \quad (3.42)$$

$$\alpha_{1cw} = \bar{q}_{hw} - \lambda_{1cw} + \beta_{1sw} + \theta_{1cw} \quad (3.43)$$

### 3.7 Modélisation du rotor de queue de l'hélicoptère

Le rotor de queue permet donc de contrôler le lacet qui fournit une force de poussée sur le côté du rotor de queue et produit un moment de lacet autour de l'arbre du rotor principal.

En appliquant la force externe  $F_y$  et les moments L et M, l'équation du rotor de queue est déterminée par l'expression :

$$\left(\frac{2C_{TT}}{a_{0T}S_T}\right) = \frac{1}{3} \frac{\theta_{0T} + K_3 \left(\frac{\eta_\beta}{\lambda_\beta^2}\right)_T \frac{4}{3} (\mu_{zT} - \lambda_{0T})}{1 - K_3 \left(\frac{\eta_\beta}{\lambda_\beta^2}\right)_T (1 + \mu_T^2)} \left(1 + \frac{3}{2} \mu_T^2\right) + \left(\frac{\mu_{zT} - \lambda_{0T}}{2}\right) \quad (3.44)$$

L'entrée de commande du rotor de queue est l'angle  $\theta_{0T}$  qui exprime par la relation :

$$\theta_{0T} = \frac{g_{t0} + g_{t1}(g_{ct0}(1 - \eta_p) + (1 - 2g_{ct0})\eta_c) + k_\psi(\psi - \psi_H) + k_r r}{1 + \tau_{c3}S} \quad (3.45)$$

- $g_{t0}, g_{t1}$  sont des constantes de pédales ;
- $g_{ct0}$  est la constante du câble de pédale.

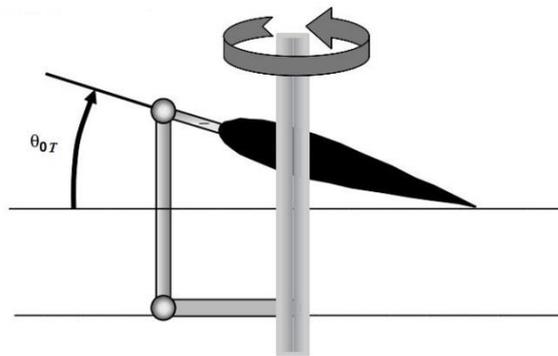


Figure 3.12 : Angle de commande du rotor de queue

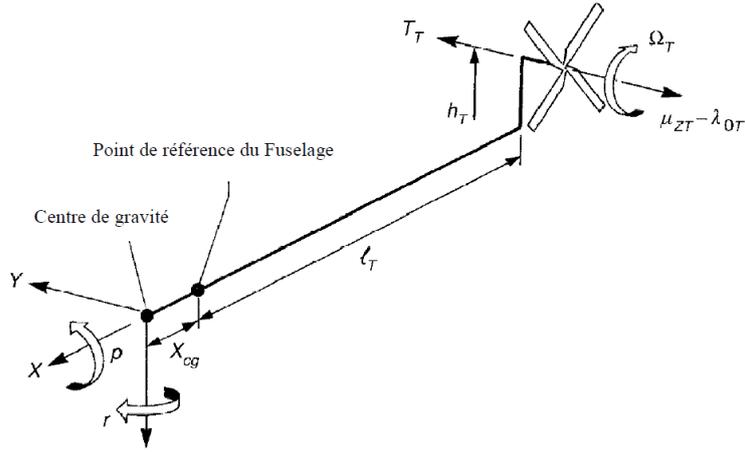


Figure 3.13 : Croquis de sous-système de rotor de queue

### 3.8 Modélisation de la vitesse de rotation du rotor principal de l'hélicoptère

La modélisation de la vitesse de rotation du rotor principal qui est gouverné par le modèle dynamique du moteur se fait de la façon suivante :

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{I_R} (Q_E - Q_R - G_T Q_T) + \dot{r} \quad (3.46)$$

$$Q_E = -K_3 (\Omega - \Omega_i) \quad (3.47)$$

$$Q_R = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 \Pi R^3 s a_0 \left( \frac{2C_Q}{a_0 S} \right) \quad (3.48)$$

$$Q_R = \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 \Pi R_T^3 s_T a_{0T} \left( \frac{2C_{QT}}{a_{0T} S_T} \right) \quad (3.49)$$

$$Q_R = \frac{1}{2} \rho (\Omega_T R_T)^2 \Pi R_T^3 s_T a_{0T} \left( \frac{2C_{QT}}{a_{0T} S_T} \right) \quad (3.50)$$

Dans le domaine temporel, le modèle mathématique du rotor est une équation différentielle linéaire à coefficient constant qui s'écrit :

$$\ddot{Q}_E = \frac{1}{\tau_{e1} \tau_{e3}} \{ -(\tau_{e1} + \tau_{e3}) \dot{Q}_E - Q_E + K_3 (\Omega - \Omega_i + \tau_{e2} \dot{\Omega}) \} \quad (3.51)$$

- $Q_E$ ,  $Q_R$  et  $Q_T$  sont respectivement le couple total du moteur, le couple du rotor principal et le couple du rotor de queue ;
- $G_T$  est le rapport de vitesse du rotor de queue ;
- $I_R$  est le moment d'inertie du système tournant ;
- $\Omega_i$  est la vitesse du rotor tournant au ralenti vitesse ;
- $K_3$  est le gain de la vitesse du rotor.

Pour le rotor principal, les angles de battements sont supposés de faibles variations et l'accélération globale du fuselage et les effets de poids des lames sont négligés.

Le taux de lacet et le taux de dérapage sont supposés faibles par rapport à la vitesse angulaire du rotor en  $\Omega$ .

En particulier, les hypothèses concernant l'aérodynamique de pales de rotor permettent d'intégrer la charge aérodynamique analytique.

Ainsi les hypothèses pour les expressions des forces et des moments des rotors sont les suivantes :

- Les effets de compressibilité sont ignorés ;
- Les effets des flux de décrochage sont ignorés ;
- La répartition des vitesses induites au disque du rotor sont linéaires lors des variations longitudinales et latérales ;
- Les coupleurs de pas de la pôle et la dynamique de décalage en mouvement de battement sont ignorés ;
- L'interaction des modes d'inclinaison avec le mode de fuselage est négligée.

L'implémentation de la composante du rotor de queue est basée sur un procédé théorique simplifié lors de la détermination de la caractéristique du rotor de sustentation en vol en palier. Les coordonnées du système de rotor comprennent  $X$  pour le flux d'air à jet libre et  $Z$  pour la direction de la poussée. Les couples de la poussée du rotor sont calculés en fonction du facteur de perte de la lame.

Le coefficient de la poussée du rotor de queue  $C_T$  s'exprime alors par la relation [3.09] :

$$C_T = \frac{T_T}{\rho(\Omega_T R_T)^2 \Pi R_T^2 k_{bl}} \quad (3.52)$$

La vitesse induite  $v_i$  peut être calculée par :

$$v_i = \mu_z - \lambda_0 \text{ avec } \lambda_0 = \frac{-\mu_z + \frac{1}{2} C_T}{\sqrt{\left(\mu^2 + \frac{1}{2} C_T\right)}} \quad (3.53)$$

En en appliquant la théorie des éléments de pâles et une procédure itérative, on obtient finalement :

$$v_i = \frac{a_{0T} s_T}{2} \left[ \frac{\mu_z t_{3,1} + \theta_0 t_{3,2} + \theta_1 t_{3,3}}{2 \sqrt{(\mu^2 + \lambda_0^2) + \frac{a_{0T} s_T}{2} t_{3,1}}} \right] \quad (3.54)$$

Les valeurs  $t_{3,1}$ ,  $t_{3,2}$  et  $t_{3,3}$  sont calculées par :

$$t_{3,1} = \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{4} \mu^2 \quad (3.55)$$

$$t_{3,2} = \frac{1}{2} B^3 + \frac{1}{2} B \mu^2 \quad (3.56)$$

$$t_{3,3} = \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu^2 \quad (3.57)$$

Une fois les valeurs de  $t_{3,1}$ ,  $t_{3,2}$  et  $t_{3,3}$  déterminées, la vitesse induite est de nouveau calculée en utilisant l'expression du coefficient de la poussée du rotor de queue :

$$C_T = 2v_i \sqrt{(\mu^2 \lambda_0^2)} \quad (3.58)$$

La poussée du rotor de queue peut alors être calculée par l'équation suivante :

$$T_T = \frac{\Pi}{180} \rho k_{bl} \Pi (\Omega_T R_T^2)^2 \quad (3.59)$$

Où l'effet de blocage  $k_{bl}$ , de l'ailette est donné par l'expression :

$$k_{bl} = (1 - b_{t1}) \frac{u_A^2}{v_{bl}^2} + b_{t1}, \{u_A \leq v_{bl}\} \quad (3.60)$$

$$k_{bl} = b_{t2}, \{u_A \geq v_{bl}\} \quad (3.61)$$

- $v_{bl}$  est la vitesse de transition ;
- $b_{t1}$  et  $b_{t2}$ , sont des constantes de blocage du rotor de queue.

On calcule alors la hauteur de la commande de base collective  $\theta_0$  par l'expression :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{180} [-T_T \delta_3 \tan \delta_3] + \theta_{bias} + \theta_c \quad (3.62)$$

- Où  $\theta_c$  est la hauteur de la commande de base collective ;
- le biais est un  $\theta_{biais}$  pré-réglé de pas collectif ;
- $T_T$  est la poussée du rotor de queue ;
- $\delta_3$  est l'angle d'inclinaison charnière pour le pas découplage.

Les composantes du fuselage et de l'empennage sont implémentées dans l'hélicoptère en utilisant la loi aérodynamique. Le moteur est commandé par un système de régulation qui détecte un changement de la vitesse du rotor  $\Omega$  exigeant un changement de débit de carburant  $\omega_f$ .

On obtient alors une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$\tau_{e1}\dot{\omega}_f + \omega_f = K_{e1}\Delta\Omega \quad (3.63)$$

- $\tau_{e1}$  est la constante de temps du moteur ;
- $K_{e1}$  est la pente de la chute de la vitesse du rotor lors du ralenti de vol d'urgence à l'écoulement de carburant maximale.

En notant respectivement  $\Delta\Omega$  et  $\Omega_i$  les changements de vitesse du rotor et du ralenti de vol, on a :

$$\Delta\Omega = \Omega - \Omega_i \quad (3.64)$$

- $\Omega$  est la vitesse du rotor au débit de carburant maximal d'urgence.

Le couple moteur  $Q_E$  répond au changement de débit de carburant décrit par un décalage de l'écoulement de carburant et ce débit est régi par l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\tau_{e3}\dot{Q}_E + Q_E = K_{e2}(\tau_{e2}\dot{\omega}_f + \omega_f) \quad (3.65)$$

- $K_{e2}$  est le gain;
- $\tau_{e2}$ ,  $\tau_{e3}$  sont les constantes de temps.

En combinant les résultats ci-dessus, on obtient une équation différentielle de second ordre de la forme :

$$\ddot{Q}_E = \frac{1}{\tau_{e1}\tau_{e3}} \{ -(\tau_{e1} + \tau_{e3})\dot{Q}_E - Q_E + K_3(\Omega - \Omega_i + \tau_2\dot{\Omega}) \} \quad (3.66)$$

En notant  $Q_{Emax}$  le couple moteur maximal, l'équation différentielle du second ordre normalisée s'écrit :

$$(\tau_{e1}\tau_{e3})\ddot{\bar{Q}}_E + (\tau_{e1} + \tau_{e3})\dot{\bar{Q}}_E + \bar{Q}_E = \frac{K_3}{Q_{Emax}} [(\Omega - \Omega_i)\tau_{e2}\dot{\Omega}] \quad (3.67)$$

$$\bar{Q}_E = \frac{Q_E}{Q_{Emax}} K_3 = K_{e1}K_{e2} \quad (3.68)$$

$$K_3 = -\frac{Q_{Emax}}{\Omega_i \left(1 - \frac{\Omega_m}{\Omega_i}\right)} \quad (3.69)$$

En notant  $q_{e2} = \ddot{\bar{Q}}_E = \dot{q}_{e1}$  et  $q_{e1} = \dot{\bar{Q}}_E$ , on obtient un modèle d'état d'ordre 2 pour la représentation matricielle des rotors de l'hélicoptère.

L'expression du moment du moteur est donnée par la relation :  $Q_E = \frac{P_E T_h}{\Omega}$

Le produit  $P_E T_h$  représente la puissance du moteur. Il est supposé que le couple total du rotor principal  $Q_E$  coïncide avec le couple moteur  $Q_M$  c'est-à-dire  $Q_E = Q_M$ .

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la description et l'aérodynamique du rotor principale et du rotor de queue. Nous développons aussi la modelisation de l'angle de battement, l'angle de pas collectif d'incidence, les forces, les moments, la vitesse de rotation du rotor principal ainsi que la modélisation rotor de queue ayant l'angle de commande. Les équations présentées du rotor de queue doivent compenser le couple de rotation dû au rotor principal afin que l'hélicoptère maintienne un angle de lacet régulier.

Certains paramètres qui dépendent des conditions d'environnement et de la météorologie (rafale de vent) du système de l'hélicoptère ont été négligés dans cette étude.

L'hélicoptère est donc un système dynamique non linéaire à plusieurs variables d'état.