Le principe de la méthode PROMETHEE

1.1- Les trois phases de la méthode PROMETHEE:

La mise en œuvre de la méthode peut être ramenée à l'exécution des trois étapes suivantes:[99]

1-Choix de critère généralisés

A chaque critère $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$,…, $\mathbf{C_n}$ sera associé un critère généralisé choisi sur base d'une fonction de préférence et les effets d'échelle seront éliminés.

2-Détermination d'une relation de surclassement

Dans une deuxième phase, il convient de déterminer une relation de surclassement par le biais d'un indice de préférence (par exemple: l'écart maximum entre 2 actions) qui quantifiera les préférences du décideur.

3-Evaluation des préférences

L'évaluation de la préférence du décideur par la prise en compte des flux entrant et sortant.

Le principe de la méthode PROMETHEE consiste à établir un processus de comparaison numérique de chaque action par rapport à toutes les autres actions. Ainsi il est possible de calculer le plus (mérite) ou le moins (démérite) de chaque action par rapport à toutes les autres. Le résultat de cette comparaison permet le classement ordonné des actions.[100]

1.2- La notion de critère généralisé:

Soit **Ci(a)** un critère à optimiser (soit maximiser, soit minimiser)
pour chaque action "**a**" appartenant à "**A**", **Ci(a)** est une évaluation de cette action (critère **Ci** pour l'action "**a**").
Lorsque deux actions "$\mathbf{a_1}$" et "$\mathbf{a_2}$" sont comparées sur base de ce critère, le résultat de cette comparaison devra être donné sous la forme d'une expression de la préférence appelée la fonction de préférence.
Cette fonction traduit l'intensité de préférence de l'action "$\mathbf{a_1}$" par rapport à l'action "$\mathbf{a_2}$".

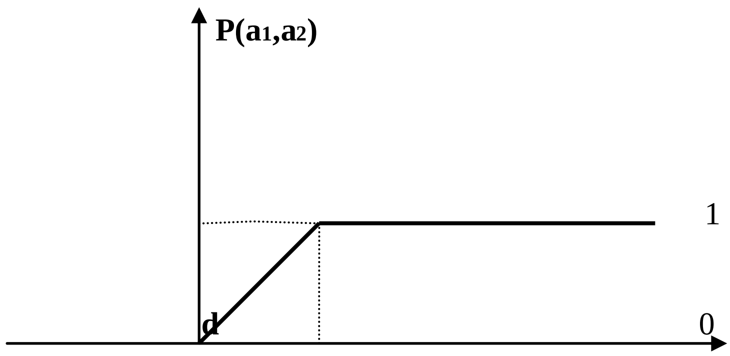
Il est réaliste de considérer que cette fonction de préférence est une fonction non décroissante de la différence entre les deux évaluations $\mathbf{C_i(a_1)}$ et $\mathbf{C_i(a_2)}$:

$$\text{Soit } \mathbf{d = C_i(a_1)-C_i(a_2)}$$

$\mathbf{P(a_1,a_2)= \mathit{f}[d]}$ pourrait, par exemple, avoir la forme suivante:

---

[99]- Jean Marc Harventg, Article:"Les méthodes de surclassement", L'université libre de Bruxelle, Belgique, 2005, p 10.
[100]- Brans J.P,"Elaboration d'instruments d'aide à la décision: méthode PROMETHEE", Déja cité, p 5.



Cette fonction pourrait être interprétée comme suit:[101]

$P(a_1,a_2) = 0$: indifférence de "a_1" par rapport à "a_2" $C_i(a_1) = C_i(a_2)$.

$P(a_1,a_2) \approx 0$: préférence faible de "a_1" par rapport à "a_2" $C_i(a_1) > C_i(a_2)$.

$P(a_1,a_2) \approx 1$: préférence forte de "a_1" par rapport à "a_2" $C_i(a_1) >> C_i(a_2)$.

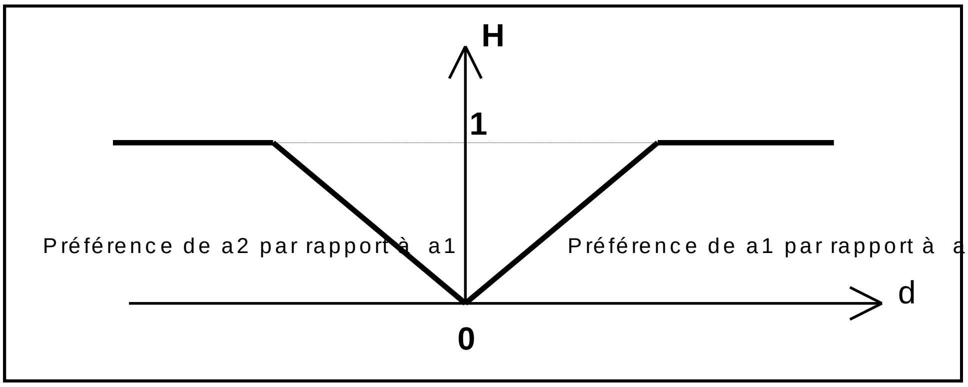
$P(a_1,a_2) = 1$: préférence stricte de "a_1" par rapport à "a_2" $Ci(a_1) >>> C_i(a_2)$.

A fin de mieux mettre en évidence le domaine d'indifférence, nous considérerons plutôt la fonction de préférence **H** qui traduira aussi bien la préférence de "**a_1**" par rapport à "**a_2**" que celle de "**a_2**" par rapport à "**a_1**".Ceci revient à considérer le quadrant de gauche sur le graphique précédent. Ce quadrant servira à la fonction de préférence de "**a_2**" par rapport à "**a_1**", qui dans beaucoup de cas est symétrique par rapport à la fonction de préférence de "**a_1**" par rapport à "**a_2**". Nous représenterons mathématiquement ces deux fonctions par:[102]

$$H= \{P(a_1,a_2) \geq 0, P(a_1,a_2) \leq 0\}$$

Le couple **(H, d)** est appelé critère généralisé associé au critère au **Ci**. Il faut remarquer que **H** n'est pas nécessairement symétrique.

[101]-Brans J.B, Mareschal B, "The PROMCALC and GAIA decision support system for multicriteria decision aid", 1994, vol 12, p297.
[102] - Alain Schärlig, "Pratiquer Electre et Prométhée: un complément à décider sur plusieurs critères", Presses polytechniques et universitaires romandes, 1er édition, Paris, 1996, p 67.



Commentaires:

- La définition d'un critère généralisé revient à dire que pour résoudre le problème multicritère posé, nous devons définir un critère généralisé c'est-à-dire un couple

(H, d) par critère **Ci**.

- Afin de faciliter la détermination des fonctions de préférence, ces dernières ont été regroupées en 6 familles.

Chacun des types de critère généralisé ainsi défini est fonction de 1 ou 2 paramètres à savoir:[103]

q seuil d'indifférence: c'est la plus grande valeur de "d" en dessous de laquelle le décideur considère qu'il y a indifférence.

p seuil de préférence stricte: c'est la plus petite valeur de "d" au dessus de laquelle le décideur qu'il y a préférence stricte.

σ paramètre équivalent à l'écart standard d'une distribution normale (loi de Gauss).

Tout ces paramètres ont, pour le décideur, une signification économique.-

Par exemple: choix d'une offre:

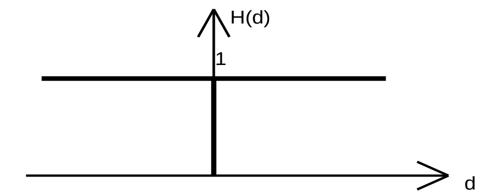
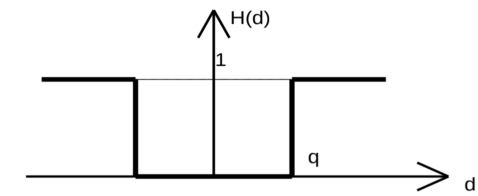
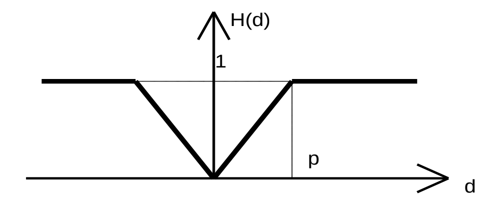
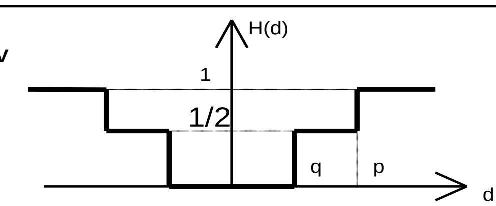
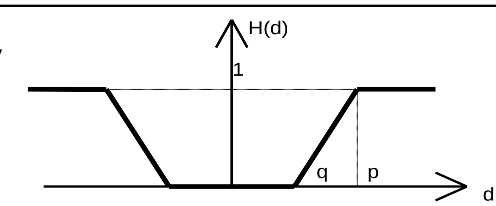
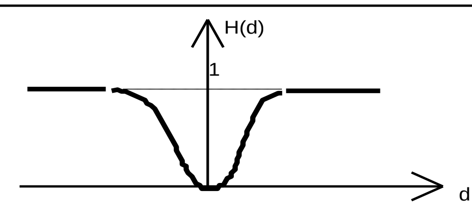
q = 60 signifie qu'une différence de prix de 60 unités monétaires m'est indifférente (négligeable).

p = 600 signifie que si une offre a_1 coûte 600 unités monétaires en moins que l'offre a_2, a_1 sera strictement préférée à a_2.

[103] **-**Idem, p 67.

2. Choix des fonctions de préférence

Un critère généralisé devra être associé à chaque critère $f_j(.)$, $j=1,\ldots,k$. Il s'agit d'une information complémentaire importante, et pour faciliter la tâche au décideur, un ensemble de six types lui est proposé:[104]

Type de critère	Forme proposée	
Usuel Critère	**Type I** 	---
Quasi Critère	**Type II** 	q
Critère à préférence Linéaire	**Type III** 	p
Critère à paliers (Pseudo)	**Type IV** 	q, p
Critère à préférence Linéaire avec zone d'indifférence	**Type V** 	q, p
Critère gaussien	**Type VI** 	σ

[104]-Phillipe Vinck, op cit, p103.

-Type I : critère usuel

La fonction type I est généralement employée lorsque les données présentent un caractère discret tel un classement ou ordinal ou encore une valeur de type tout ou rien. Dans ce cas, dès qu'il y a un écart, il y a préférence stricte pour l'action ayant l'évaluation la plus élevée. Si le décideur choisi le type I pour un critère particulier, il ne doit fixer aucun paramètre.

-Type II : quasi-critère

La fonction type II est employée lorsque les seuils d'indifférence sont clairement apparents dans les données du problème posé. Les actions $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$ sont dans ce cas indifférentes aussi longtemps que l'écart $\mathbf{d_j(a_1,a_2)}$ ne dépasse pas un seuil $\mathbf{q_j}$, et au-delà de ce seuil, la préférence est stricte. Ici, il faut fixer le seuil d'indifférence $\mathbf{q_j}$. Ce type de critère provient de la notion de quasi-ordre introduit par **Luce D**.

-Type III : critère à préférence linéaire

La fonction type III est généralement employée lorsque les données sont telles que les écarts entre elles présentent un caractère continu, ou encore lorsque toutes les valeurs intermédiaires entre les valeurs maximales et minimales de ces écarts sont possibles. Un tel critère permet au décideur de préférer progressivement $\mathbf{a_1}$ à $\mathbf{a_2}$ en fonction de l'écart observé entre $\boldsymbol{f_j(a_1)}$ et $\boldsymbol{f_j(a_2)}$. Le degré de préférence croît alors jusqu'à ce que le seuil **P**; soit atteint, et au-dessus de ce seuil, la préférence est stricte. Dans ce cas, le seul paramètre à fixer est le seuil de préférence stricte.

-Type IV : critère à paliers (Pseudo)

La fonction type IV est parfois employée dans des cas d'espèce, en particulier lorsqu'on peut affirmer qu'un candidat n'est à la fois ni strictement préféré à un autre, ni indifférent. Ce candidat caractérisé par un écart donné par rapport à un autre se verra attribuer ½ point. Deux actions $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$ sont ici considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart entre $\boldsymbol{f_j(a_1)}$ et $\boldsymbol{f_j(a_2)}$ ne dépasse pas $\mathbf{q_j}$; entre $\mathbf{q_j}$ et $\mathbf{p_j}$, le degré de préférence est faible, et au-delà de $\mathbf{p_j}$, la préférence devient stricte. Il y a donc ici deux paramètres à fixer.

-Type V : critère à préférence linéaire avec zone d'indifférence

La fonction type V est employée lorsque les seuils d'indifférence et de préférence stricte sont clairement apparents dans les données du problème multicritère posé. Dans ce cas-ci comme dans le précédent, $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$ sont considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart entre $\boldsymbol{f_j(a_1)}$ et $\boldsymbol{f_j(a_2)}$ ne dépasse pas $\mathbf{q_j}$; au-delà de ce seuil, le degré de préférence croît linéairement avec $\mathbf{d_j}$ jusqu'à atteindre un seuil de préférence stricte à partir de $\mathbf{p_j}$. Ici encore, deux paramètres doivent être fixés.

-Type VI : critère gaussien

La fonction type VI (distribution gaussienne) est la fonction la plus employée dans les applications pratiques et est particulièrement indiquée en cas d'un nombre de candidats suffisamment élevé (en principe minimum 30). Dans ce cas il convient de calculer l'écart type $\boldsymbol{\sigma}$ de cette distribution. Dans ce cas, le degré de préférence croit de façon continue en fonction de $\mathbf{d_j}$, un seul paramètre $\mathbf{S_j}$ doit être fixé. Pour un écart égal à $\mathbf{S_j}$, on obtient une préférence moyenne (0.39).

Remarquons que, comme la plupart des méthodes multicritères, les méthodes **Prométhée** requièrent des évaluations numériques. Dans le cas où les différentes évaluations s'expriment comme des évaluations qualitatives, on devra associer aux niveaux d'une telle échelle des valeurs numériques afin de pouvoir choisir un type de critère généralisé. Ainsi, deux degrés de liberté importants sont laissés au choix du décideur: le type de critère généralisé et les seuils qui interviennent dans la définition de ce critère.

Phillipe Vinck nous fournit quelques lignes directrices afin de faire ces choix le plus efficacement possible:[105]

1.2 Choix du type de critère généralisé:

- Cas où les évaluations sont des nombres réels mesurés sur une échelle continue: le type V s'adapte bien à la situation car il fait intervenir une zone de préférence stricte et une zone d'indifférence; et dans le cas où le décideur pense ne pas devoir tenir compte d'une zone d'indifférence, le type III s'impose.

- Cas où les données sont qualitatives, mesurées sur une échelle discrète, le type IV s'adapte bien à une échelle numérique associée au critère.

- Cas où le décideur veut considérer un degré de préférence positif même si l'écart entre les deux actions est faible, il peut choisir un critère généralisé de typeI,

Et s'il souhaite voir croître ce degré de préférence lorsque l'écart grandit, il adoptera le critère VI.

---

[1]- Phillipe Vinck, op cit, p104.

2.2. Choix des seuils:

- Les significations des seuils d'indifférence q et de préférence stricte p ont une signification claire et ils sont en général choisis assez facilement par le décideur.

- Dans le cas d'un critère de type IV, le seuil S sera fixé entre q et p, plus proche de q si le décideur souhaite renforcer le degré de préférence pour des petits écarts, et plus proche de p s'il souhaite atténuer la progression du degré de préférence en fonction des écarts observés.

2.3. Détermination des poids de chaque critère:

Il convient, une fois les critères fixés, de déterminer les poids qui doivent être associés. A cette fin plusieurs techniques peuvent être employées, à savoir:

- le vote pondéré.
- la technique Delphi: cette méthode consiste à réunir, de la part de chaque membre d'un groupe, composé d'experts isolés les uns des autres, leur proposition relative aux poids à accorder avec la justification nécessaire. Un coordinateur réunit toutes ces propositions et les transmet ensuite à chaque membre du groupe. Se déroule ensuite un deuxième tour au cours duquel chaque membre revoit sa pondération eu égard aux avis émis par ces collègues.

On constate généralement, après un certain nombre de tours, une convergence des valeurs et l'on obtient ainsi un consensus. La durée élevée de cette technique constitue son handicap majeur.

3. Procédure de synthèse de surclassement:

3.1- L'indice de préférence multicritère:

Considérons le problème multicritère suivant:

"**A**" ensemble d'actions possibles.
{**Ci**} ensemble des critères à optimaliser.

A chaque critère **Ci** associons la fonction de préférence **P**.
Pour chaque couple d'action **(a_1,a_2)** définissons:[106]

$$\pi (a_1,a_2) = \sum w_i * P_i (a_1,a_2) \qquad \textbf{Poids différents.}$$

$$\pi (a_1,a_2) = (1/m) * \sum P_i (a_1,a_2) \qquad \textbf{Touts les poids sont égaux.}$$

[106]-Brans J.P, Mareschal B, Vinck Ph, "PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis", Proceedings of the tenth international conference on operational research, 1984, p477.

Nous appellerons:

$\boldsymbol{\pi}$ **(a_1,a_2)** l'indice de préférence.

$\mathbf{w_i}$ le poids de différents critères ($\mathbf{w_i} > \mathbf{0}$; $i = 1\ldots\ldots k$).

"**m**" est le nombre de critères ("**m**" permet simplement une moyenne arithmétique; cette formule sera employée lorsque les poids ne sont pas spécifiés ou sont tous égaux). Lorsque les poids sont spécifiés la première formule sera utilisée.
Il s'agit en fait de la moyenne pondérée de l'ensemble des intensités des fonctions de préférence ou encore une mesure de la préférence globale du décideur (pour tous les critères) de l'action "$\mathbf{a_1}$" par rapport à l'action "$\mathbf{a_2}$".

Nous avons évidemment:

$$\mathbf{0 \leq \pi\ (a_1,a_2) \leq 1}$$

De plus:[107]

Si $\pi\ (a_1,a_2) \approx 0 \leftrightarrow$ faible préférence de "a_1" par rapport "a_2".

Si $\pi\ (a_1,a_2) \approx 1 \leftrightarrow$ forte préférence de "a_1" par rapport "a_2".

Nous avons également les propriétés suivantes:

Propriété 1:

$$\mathbf{\pi\ (a_1,a_1) = 0}$$

Démonstration:
Ceci se déduit directement de la définition de **$\pi\ (a_1,a_2)$.**

Propriété 2:

$$\mathbf{0 \leq \pi\ (a_1,a_2) \leq 1}$$

Démonstration:
On sait par hypothèse que $\mathbf{0 \leq P_i\ (a_1,a_2) \leq 1}$, et que $\mathbf{w_i} > \mathbf{0}$, $i = 1\ldots..k$.
On peut donc multiplier chaque membre de $\mathbf{P_i(a_1,a_2)}$ par $\mathbf{w_i}$.
Sans changer le sens des inégalités et ensuite, comme cette suite d'inégalités est vraie pour $i = 1\ldots..n$, on peut sommer sur toutes les valeurs possibles de i.
On obtient alors

$$\mathbf{0 \leq \sum w_i * P_i\ (a_1,a_2) \leq \sum w_i}$$

et comme $\sum \mathbf{wi} = \mathbf{1}$, on a bien le résultat annoncé.

[107]-Farkas D, Nitzan S, "The Borda rule and Pareto stability: a comment", Econometrica, 1989; vol 47, p135

3.2- La relation de surclassement:

Après avoir calculé les valeurs de **π (a_1,a_2)** pour chaque paire d'actions, on peut construire le graphe valué **(A, π (a_1,a_2))**, ayant pour sommets les actions de **A** et tel que V **a_1**, **a_2 Є A**, les arcs **(a_1, a_2)** et **(a_2, a_1)** existent et ont comme valeurs respectives **π (a_1,a_2)** et **π (a_2,a_1)**.

Brans fait d'ailleurs remarquer que l'information obtenue grâce à cette relation de surclassement valuée est particulièrement réaliste. En effet, lorsque deux actions **a_1** et **a_2** sont comparées, **a_1** est préférée à **a_2** avec un certain degré **π (a_1,a_2)**, car **a_1** est meilleure que **a_2** sur certains critères; et inversement, **a_2** est préférée à **a_1** avec un certain degré **π (a_2,a_1)** car en général **a_2** sera également meilleur que **a_1** sur d'autres critères.

3.3- Le flux de surclassement:

Afin d'apprécier comment chaque action de **A** se comporte face aux **(n -1)** autres actions, nous introduisons ici trois flux de surclassement:

3.3.1- Le flux de surclassement sortant:
Considérons

$$\phi^{+}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a,x) \ ,$$

Ce flux exprime le caractère surclassant de l'action **a** face aux **(n -1)** autres actions, c'est-à-dire sa puissance. **Φ^{+}(a)** est d'autant plus grand que **a** surclasse fortement les autres actions.[108]

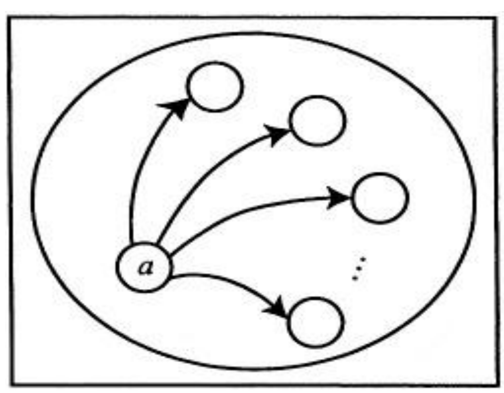


Figure n°13 : Flux de surclassement sortant

[108]-Hansson B, Sahlquist H, "A proof technique for social choice with variable electorate", Journal of economic theory, 1986, vol 13, p193.

Propriété 1 :

$$\mathbf{0 \leq \Phi^{+}(a) \leq 1}$$

Démonstration:

Nous avons déjà montré que $\mathbf{0 \leq \pi\ (a_1,a_2) \leq 1}$.

Or on déduit directement de ceci et de la définition de $\mathbf{\Phi^{+}(a)}$ que

$$\frac{1}{n-1}\sum_{x \in A} 0 \leq \phi^{+}(a) \leq \frac{1}{n-1}\sum_{x \in A} 1$$

Donc,

$$0 \leq \phi^{+}(a) \leq \frac{1}{n-1}(n-1)$$

On a donc bien montré que:

$$\mathbf{0 \leq \Phi^{+}(a) \leq 1}.$$

3.3.2- Le flux de surclassement entrant:

Considérons

$$\mathbf{\phi^{-}(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi\ (x,a)}\ .$$

Ce flux exprime le caractère surclassé de l'action **a** face aux **(n -1)** autres actions, c'est-à-dire sa faiblesse. $\mathbf{\Phi^{-}(a)}$ est d'autant moins grand que **a** est peu surclassé.[109]

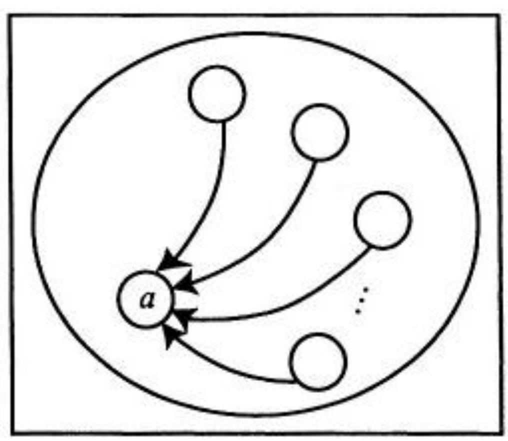


Figure n°14 : Flux de surclassement entrant

[109]-Keeney R.L, Raiffa H, "Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs", series in probability and mathematical statistics, 1986, p56.

Propriété 2:

$$0 \leq \Phi^{-}(a) \leq 1$$

Démonstration:
Ceci se démontre de façon analogue à la démonstration concernant les flux sortants.

3.3. Le flux de surclassement net:

Considérons

$$\Phi(a) = \Phi^{+}(a) - \Phi^{-}(a)$$

Le flux net exprime le bilan des flux entrant et sortant de l'action **a**. Plus **Φ(a)** est grand, l'action est meilleur[110].

Propriété 3:

$$-1 \leq \Phi(a) \leq 1$$

Démonstration:
Ceci se déduit directement de la définition du flux net et des propriétés 1 et 2.

4. Exploitation de la valeur de la relation de surclassement:

4.1- La méthode PROMETHEE I: rangement partiel

Les flux sortant et entrant permettent de ranger les actions de **A** de façon naturelle. Désignons par (S^{+}, I^{+}) et (S^{-}, I^{-}) les deux préordres induits par ces flux. On sait qu'une action est d'autant meilleure que son flux sortant est élevé, et que sont flux entrant est faible:[111]

$$\begin{cases} a_1 \, S^{+} \, a_2 \iff \Phi^{+}(a_1) > \Phi^{+}(a_2) \\ a_1 \, I^{+} \, a_2 \iff \Phi^{+}(a_1) = \Phi^{+}(a_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \, S^{-} \, a_2 \iff \Phi^{-}(a_1) < \Phi^{-}(a_2) \\ a_1 \, I^{-} \, a_2 \iff \Phi^{-}(a_1) = \Phi^{-}(a_2) \end{cases}$$

[110]-Roubens M, Vinck Ph, "Preference modelling", Springer-Verlag, Lecture notes in economics and mathematical systems, Berlin, 1985, p94.
[111] -Brans J.P, Mareschal B et Vinck Ph, "How to select and how to rank projects: the PROMETHEE method", European Journal of Operational Research, p 24.

Prométhée I construit un rangement partiel en prenant l'intersection de ces deux préordres.

$$a_1I^+a_2 \text{ et } a_1S^-a_2 \quad \begin{cases} a_1Pa_2 \iff \begin{cases} a_1S^+a_2 \text{ et } a_1S^-a_2 \\ a_1S^+a_2 \text{ et } a_1I^-a_2 \end{cases} \\ a_1Ia_2 \iff a_1I^+a_2 \text{ et } a_1I^-a_2 \\ a_1Ra_2 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Où **(P, I, R)** désignent respectivement la préférence, l'indifférence et l'incomparabilité dans **Prométhée I.**

Ainsi, avec ce rangement partiel, certaines actions restent incomparables.

Les résultats possibles de la comparaison de deux actions seront donc les suivants:[112]

a_1Pa_2 : a_1 est préférée à a_2.

a_1 est dans ce cas plus «puissante» et moins «faible» que **a_2**. L'information fournie par les flux de surclassement va dans le même sens et peut être considérée comme sûre. Il est dans ce cas réaliste de déclarer **a_1 préférée à a_2**.

a_1Ia_2 : a_1 et a_2 sont indifférentes.

La puissance et la faiblesse de **a_1** et **a_2** sont égales donc rien ne permet de départager objectivement **a_1** et **a_2**.

a_1Ra_2 : a_1 et a_2 sont incomparables.

Ici, une plus grande puissance d'une des actions est assortie d'une faiblesse moindre de l'autre et l'information fournie par les deux flux est alors contradictoire. On rencontre généralement cette situation lorsque l'action **a_1** est nettement meilleure que **a_2** sur un sous-ensemble de critères et que **a_2** est meilleure que **a_1** sur un autre sous-ensemble de critères. Il est dans ce cas raisonnable d'interdire au modèle de se prononcer en faveur d'une des actions et il appartient dans ce cas au décideur de trancher en faveur d'une des deux actions.

[112] -Idem, p 25.

4.2- La méthode PROMETHEE II : rangement complet:

On utilisera **Prométhée II** si on souhaite disposer d'un rangement complet de toutes les actions. Ce rangement est obtenu en rangeant les actions dans l'ordre décroissant des **Φ**.

On aura alors:[113]

$$\begin{cases} \mathbf{a_1 P a_2} \iff \mathbf{\Phi(a_1) > \Phi(a_2)} \\ \mathbf{a_1 I a_2} \iff \mathbf{\Phi(a_1) = \Phi(a_2)} \end{cases}$$

Où **P** et **I** désignent respectivement la préférence et l'indifférence au sens de **Prométhée II**. Remarquons que **Prométhée II** ne laisse pas de place à l'incomparabilité. L'information fournie par le préordre complet est plus simple à interpréter, mais est moins riche que celle fournie par **ProméthéeI**. En effet, dans **ProméthéeII**, une partie de l'information disparaît dans la différence entre les flux et le résultat obtenu peut donc être plus discutable.

4.3- La différence entre Prométhée I et II:

La différence entre les méthodes Prométhée I et II se trouve dans les différences de rangement des actions.

Les deux méthodes ont le même cheminement initial, mais leurs buts sont différents. Prométhée I permet de dégager des relations partielles de classement; alors que Prométhée II fournit un classement de toutes les actions.

1. Pour la méthode **Prométhée I**, quatre relations sont fixées entre les actions:[114]

$a_1P^+a_2$ si et seulement si $\Phi^+(a_1) \geq \Phi^+(a_2)$ (a_1 domine plus d'action que a_2).

$a_1P^-a_2$ si et seulement si $\Phi^-(a_1) \leq \Phi^-(a_2)$ (a_1 est dominé par moins d'action que a_2).

$a_1I^+a_2$ si et seulement si $\Phi^+(a_1) = \Phi^+(a_2)$ (a1 et a2 dominent autant d'action).

$a_1I^-a_2$ si et seulement si $\Phi^-(a_1) = \Phi^+(a_2)$($a_1$ et a_2 sont dominées par autant d'actions)

On considère alors que **a_1 surclasse a_2** si:

$a_1P^+a_2$ et $a_1P^-a_2$, ou;

$a_1P^+a_2$ et $a_1I^-a_2$, ou;

$a_1I^+a_2$ et $a_1P^-a_2$.

[113]-Roubens M,"Analyse et agrégation des préférences: modélisation, ajustement et résumé de données relationnelles", Revue Belge de statistique, d'informatique et de R.O, 1984, vol 20, N2, p67.

[114] - Brans J.P, Mareschal B et Vinck Ph, "How to select and how to rank projects: the PROMETHEE method", Déja cite, p 26.

a_1 sera **indifférent à** a_2 si: $a_1 I^+ a_2$ **et** $a_1 I^- a_2$.

Dans tous les autres cas, a_1 et a_2 seront **incomparables.**

On peut alors tracer un graphe de dominance entre les solutions, et on pourra en déduire un classement des actions en différents groupes d'actions à performances équivalentes.

2. Pour la méthode **Prométhée II**, on dira que:[115]

a_1 **surclasse** a_2 si et seulement si :

$$\Phi(a_1) \geq \Phi(a_2).$$

a_1 **est indifférente à** a_2 si et seulement si :

$$\Phi(a_1) = \Phi(a_2)$$

On en déduira de même un graphe de dominance, qui permettra de dégager un classement des actions.

4.4- PROMETHEE III, α: Amplification de la relation d'indifférence.

PROMETHEE III est une extension de PROMETHEE II dans laquelle la notion d'indifférence est amplifiée. En effet, le préordre complet PROMETHEE II laisse relativement peu de place aux indifférences, étant donné qu'elles résultent d'égalités entre les flux nets des actions. En pratique, vu le caractère continu des flux de surclassement, ces situations sont rares et, le plus souvent, PROMETHEE fournit un ordre complet sur l'ensemble des actions, sans aucune indifférence. Cette situation peut paraître paradoxale, en particulier lorsque deux actions ont des flux nets très proches l'un de l'autre.

PROMETHEE III apporte une solution à ce problème en remplaçant les flux nets ponctuels par des intervalles. Pour ce faire, remarquons tout d'abord que calculer le flux net **Φ(a)** associé à une action **a** correspond à comparer cette action aux **n-1** autres et à prendre la moyenne des degrés de préférences résultants **(π(a,x)-π(x,a), x ≠a)**. Cette grandeur résume donc l'information obtenue lors de ces **n-1** comparaisons et peut être interprétée comme la position attendue de **a** lorsqu'elle est comparée à une autre action quelconque. Dans cette optique, la variance de ces quantités apporte une information supplémentaire sur la position de **a**:[116]

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{n-1}\sum_{x\in A}[(\pi(a,x) - \pi(x,a) - \Phi(a)]^2$$

---

[115] -Idem, p 27.

[116]- Brans J.P, Bertrand M, "Prométhée-Gaia: une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples", op cit, p 67.

En effet, si **σ^2(a)** est petit, la position de a vis-à-vis des autres actions apparaît comme solidement établie. Dans le cas contraire, les performances de **a** par rapport à une action quelconque peuvent varier beaucoup plus. Il paraît donc logique d'accorder plus de signification à la valeur exacte de **Φ(a)** lorsque **σ^2(a)** est petit.

C'est pourquoi d'après les auteurs de la méthode PROMETHEE l'intervalle de flux net associé à l'action **a** dans PROMETHEE III est reproduit de la façon suivante:[117]

$$\left[\Phi_{\min}(a) = \phi(a) - \alpha \cdot \sigma(a), \phi_{\max}(a) = \phi(a) + \alpha \cdot \sigma(a)\right]$$

Où α est un nombre réel positif à déterminer.

La structure de préférence construite sur **A** par PROMETHEE III est définie de la façon suivante[118]:

$$aPb \Leftrightarrow \phi_{\min}(a) \succ \phi_{\max}(b)$$
$$aIb \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_{\min}(a) \le \phi_{\max}(b) \\ \phi_{\min}(b) \le \phi_{\max}(a) \end{cases}$$

Géométriquement, des intervalles ayant une intersection non vide correspondent à des actions indifférentes. Pour qu'une action **a** soit préférée à une action **b** dans PROMETHEE III, il faut que l'intervalle associé à **a** soit situé entièrement à droite de celui associé à **b**. ce type de structure de préférence est appelé ordre intervalle et la relation définie n'est pas transitive. Cette propriété n'est pas en soit mauvaise car elle permet de prendre en compte un certain seuil d'indifférence. Néanmoins, les résultats obtenus peuvent être plus difficiles à interpréter pour le décideur.

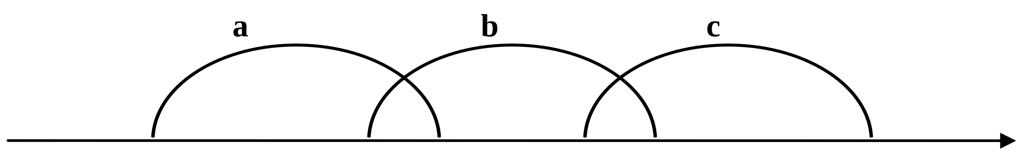


Figure n°15 : Intransitivité de l'indifférence.

Si l'obtention d'un préordre est souhaitée, il est possible d'y arriver en réduisant suffisamment la valeur du paramètre **α**. Une procédure itérative peut être facilement conçue de façon à éviter de réduire trop la valeur de **α** et de retomber alors sur le préordre de PROMETHEE II (qui est équivalent à prendre **α=0**). Pour ce faire, en partant d'une valeur raisonnable de **α**, il faut détecter la présence et réduire progressivement **α** de façon à

[117] -Idem, p 67.
[118]- Idem, p 68.

éliminer ces situations. De cette façon, on arrive à un préordre complet dans lequel les proximités entre flux nets se traduisent par des indifférences.

PROMETHEE III n'a pas été implémentée dans le logiciel Decision Lab. Néanmoins, une représentation graphique de l'échelle des flux nets prévue en parallèle avec le préordre PROMETHEE II. Il est ainsi possible d'apprécier visuellement les proximités entre flux et d'adapter en conséquence le préordre PROMETHEE II dans le même sens que PROMETHEE III.

4.5- PROMETHEE VI: Problèmes aisés ou difficiles

La méthode GAIA permet une classification des problèmes multicritères en problèmes aisés et difficiles, tout en laissant beaucoup de liberté au décideur. L'outil ainsi mis au point est appelé PROMETHEE VI.[119]

Dans le cas où le décideur est à même de fixer des valeurs précises des poids attribués aux critères, la longueur de l'axe de décision PROMETHEE **(π)** permet déjà d'apprécier le degré de difficulté du problème.

Dans beaucoup de cas, le décideur hésite à fixer des valeurs précises pour ces poids. Il est conscient de l'importance que les poids peuvent avoir sur le processus décisionnel.

Dans PROMETHEE VI, il est proposé au décideur de fixer des intervalles dans lesquels les poids peuvent varier:

j=1,2,…,k $\quad w_j^- \leq w_j \leq w_j^+$

Où w^-_j et w^+_j sont des valeurs numériques fixées. De tels intervalles peuvent aussi être fixés à partir d'une valeur connue w_j en tolérant un pourcentage θ_j de variation autour de cette valeur:

j=1,2,…,k $\quad w_j \,.\, \theta_j \pm w_j$

En général, le décideur se sent ainsi beaucoup plus à l'aise. Il a la conviction que la véritable distribution de poids qu'il souhaite adopter, sans qu'il soit en mesure de la préciser, fait partie de l'espace de liberté qui lui est offert.

L'ensemble des vecteurs poids ainsi autorisés délimite, sur l'hypersphère unité de $\mathbf{R}^k$ centrée à l'origine, un ensemble **H** dont la projection sur le plan GAIA est désigné par **Δ**. Il est signifié **Δ** le cerveau du décideur par rapport au problème multicritère. **Δ** traduit en effet les hésitations, l'espace de liberté que le décideur se donne avant de finaliser sa décision.

Distinguons le cas où **Δ** contient l'origine du plan GAIA et le cas où il ne la contient pas.

---

[119]-Brans J.P, Mareschal B, Article:"How to discrimante hard and soft multicriteria problems in the discrate case: the PROMETHEE VI procedure, 1992, p 21.

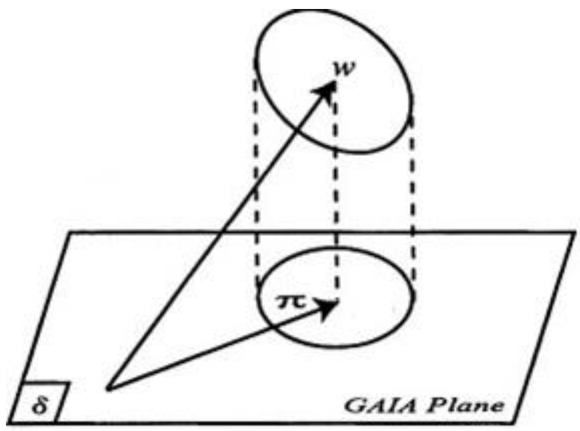


Figure n°16: Ensembles H dans R^k et Δ dans le plan GAIA.[120]

Problèmes multicritères aisés: si **Δ** ne contient pas l'origine, le vecteur **π** correspondant à toute répartition autorisée des poids est toujours orienté à peu près dans la même direction du plan GAIA. Les actions situées aussi loin que possible dans cette direction sont toujours de bonnes actions. Dans le cas d'une problématique de choix, il est alors facile de décider. Le problème multicritère est un problème aisé.

Problèmes multicritères difficiles: si **Δ** contient l'origine, le vecteur **π** peut être orienté dans toutes les directions du plan GAIA.

Des actions situées dans toutes les directions sont susceptibles d'être prises en compte à condition de retenir une répartition de poids appropriée. Le vecteur **w** est pratiquement orthogonal au plan GAIA. Il est alors très difficile de décider. Le problème multicritère nécessite souvent une analyse complémentaire. C'est également le cas, dans une moindre mesure, lorsque **Δ** est situé près de l'origine et inclut des directions quasiment opposées.

120 -Idem, p 22.

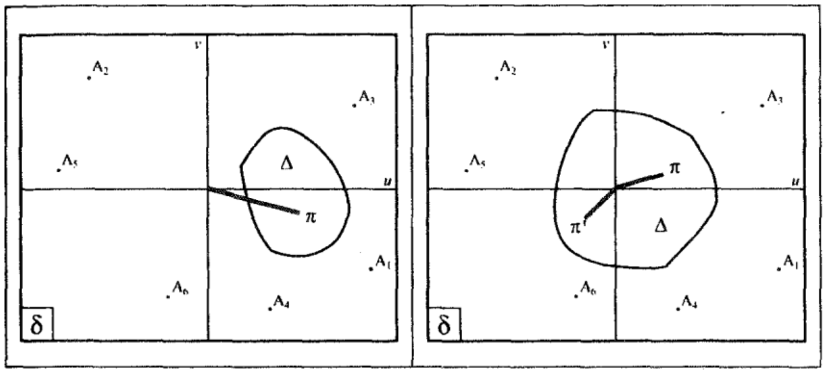


Figure n°17: Problèmes multicritères aisés et difficiles.

Le degré de difficulté d'un problème multicritère peut donc être apprécié par la procédure PROMETHEE VI en considérant la position de l'ensemble **Δ** par rapport à l'origine du plan GAIA. Cette information nous semble extrêmement utile pour le décideur[121].

4.6- PROMETHEE V: Problèmes multicritères avec contraintes additionnelles.

Dans certains cas, le problème posé n'est pas de sélectionner une action particulière ou de ranger l'ensemble des actions de la meilleure à la moins bonne, mais au contraire de sélectionner un sous-ensemble d'actions. La problématique n'est plus de type **Pα** ou **Pβ** mais d'un type plus complexe, noté **Pα,θn**. Elle consiste à choisir **θ** actions parmi **n**, le nombre **θ** étant fixé à l'avance, ou à déterminer selon les cas.

Dans ce cas le problème peut se définir de la façon suivante[122]:

Max **{f_1(x), f_2(x),……, f_k(x) /x Є A sous les contraintes additionnelles}**

Il est clair qu'il s'agit toujours d'un problème mathématiquement mal posé, mais économiquement bien posé pour le décideur.

Brans et **Mareschal**[123] en 1992 proposaient la procédure PROMETHEE V qui substitue au problème multicritère initial un problème mathématiquement bien posé, prenant en compte l'information que l'on peut acquérir sur le problème sans contraintes par les procédures PROMETHEE et GAIA.

121- Brans J.P, Bertrand M, "Prométhée-Gaia: une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples", op cit, p107-109.
122- Idem, p136.
123 -Brans J.P, Mareschal B, "PROMETHEE V: MCDM problems with additional segmentation constraints", INFOR, 1992, p 38.

Afin de permettre aisément la sélection de **θ** actions parmi **n** (avec **θ** fixé ou non), il fut introduit les variables booléennes suivantes:

$$
x_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'action } a_1 \text{ est sélectionné,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
$$

La procédure PROMETHEE V comprend alors deux étapes:

Etape 1: effectuer l'analyse PROMETHEE-GAIA, sans tenir compte des contraintes. On obtient ainsi une appréciation des bonnes et des moins bonnes actions de **A**. au terme de cette étape, l'on dispose pour chaque action **ai** de son flux net **Φ(ai)**, correspondant au rangement PROMETHEE II. Une action est d'autant meilleure que son flux net est élevé.

Etape 2: résoudre le programme linéaire en variables (0,1) suivant[124]:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \phi(a_i) \cdot x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{p,i} \cdot x_i \approx \beta_p \qquad p = 1,2,\ldots,P$$

$$\sum_{i \in S_r} \gamma_{q_r,i} \cdot x_i \approx \delta_{q_r} \qquad q_r = 1,2,\ldots,Q_r,\ r = 1,2,\ldots,$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Où $\approx$ représente un des signes $\geq$, $\leq$ ou $=$.

La fonction économique **(2.1)** exprime que l'on cherche à sélectionner un ensemble d'actions totalisant le flux net le plus élevé possible.

Les contraintes **(2.2)** sont **P** contraintes additionnelles sur l'ensemble **A**. par exemple, dans le cas d'une égalité, si $\boldsymbol{\alpha_{p,i} = 1}$ **(**$_{i=1,2,\ldots,n}$**)** et si $\boldsymbol{\beta_p = \theta}$ est un nombre entier positif, la contrainte exprime que **θ** actions doivent être sélectionnées.

Les contraintes **(2.3)** portent sur chacun des segments $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \ldots, \mathbf{S_r}$. Il y a $\mathbf{Q_r}$ contraintes pour le segment $\mathbf{S_r}$.

Selon les valeurs attribuées aux coefficients $\boldsymbol{\alpha_{p,i}}$, $\boldsymbol{\beta_p}$, $\boldsymbol{\gamma_{qr,i}}$ et $\boldsymbol{\delta_{qr}}$, il est possible de formuler des contraintes de différents types (cardinalité, budget,…) sur l'ensemble **A** ou sur certains de ses segments.

[124]- Brans J.P, Bertrand M, "Prométhée-Gaia: une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples", op cit, p137-138.

Le programme linéaire en variables (0,1) **(2.1)-(2.4)** peut être résolu par une procédure de séparation et d'évaluation (Branch and Bound). Il fournit au décideur une solution au problème multicritère sous contraintes. Les actions retenues sont celles pour lesquelles les variables $\mathbf{x}_i$ sont égales à 1. Elles totalisent le flux net le plus élevé possible. Ce sont donc les meilleures actions respectant les contraintes.

5. Le plan GAIA: (**G**eometrical **A**nalysis for **I**nteractive **A**ssistance)

Jean-Pierre Brans et **Bertrand Mareschal**[125] en 1988 ont construit par analyse en composantes principales un plan dans lequel les actions de l'ensemble **A** sont représentés par des points.

Le plan GAIA, il s'agit du complément descriptif de PROMETHEE. GAIA fournit une visualisation graphique extrêmement claire du problème de décision et du cerveau du décideur (c'est-à-dire l'information supplémentaire fournie par celui-ci). les actions potentielles et les critères sont localisés dans le plan GAIA on déduit non seulement dans quelle mesure les actions sont bonnes ou mauvaises sur chacun des critères, mais aussi le caractère conflictuel de ces derniers. Un axe de décision met en évidence les actions privilégiées par un décideur particulier. Cet axe est relié à un véritable stick de décision qui permet le pilotage du processus de décision en fonction des poids de critère.

Le calcul du flux $\Phi_j(a)$ pour chacun des critères $C_{j\ (j=1\ldots k)}$ permet de représenter chaque action **a** de **A** par un point dans un espace de dimension k. l'ensemble des **n** actions de A forme donc un nuage de points dans cet espace. L'information contenue dans le nuage est plus riche que celle contenue dans les évaluations f_j: en particulier, la distance entre deux points est une bonne mesure de dissemblance entre les deux objets correspondants.

La qualité de la représentation obtenue est mesurée par le pourcentage d'inertie expliquée Δ: plus Δ se rapproche de 100%, plus la représentation est bonne. En particulier, pour un problème ne comportant que deux critères, Δ est égale à 100%.

[125]-Mareschal B, Brans J.P, "Geometrical representations for MCDA", European Journal of Operation Research, 1988, p 29.

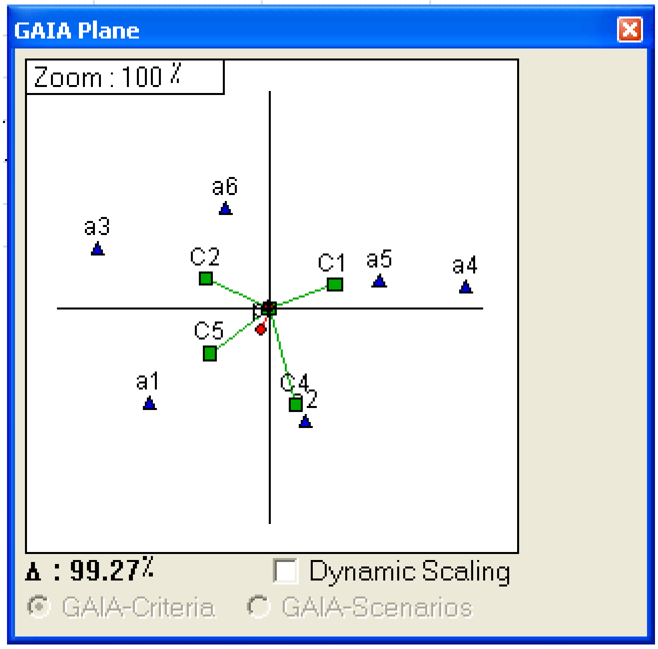


Figure n°18: Exemple sur le plan GAIA.

En particulier dans le plan GAIA:[126]

- les actions ayant des caractéristiques jugées similaires par le décideur sont représentées par des points proches l'un de l'autre.

- les actions fortes dissemblables sont représentées par des points éloignés.

- les critères exprimant des préférences similaires sont représentés par des axes pointant dans des directions proches l'un de l'autre.

- les critères conflictuels sont représentés par des axes opposés.

- les actions ayant les performances les meilleures sur un critère particulier sont situées dans la direction indiquée par l'axe correspondant au critère.

[126] -Idem, p 32.

6. Avantages et inconvénients de la méthode Prométhée:

6.1- Les Avantages:

Les méthodes Prométhée sont parmi les méthodes les plus utilisées dans la catégorie des méthodes de surclassement. Ceci est dû à un certain nombre d'avantages offerts par ces méthodes.

1- L'introduction de six fonctions de préférence différentes dans un seul et même processus; il s'agit d'une extension de critère mais de façon bien formalisée.[127]

2- Cette méthode est parvenue à intégrer de façon simple les développements récents dans la modélisation des préférences.

3- Prométhée, quoique dépourvue d'une base mathématiques, a essayé de combler ce manque en procédant par la systématisation de la fonction de préférence. En effet, le décideur, ayant à choisir la forme de sa préférence parmi six formes, se sentirait plutôt rassuré

4- La simplicité de Prométhée la place sur une bonne position pour être utilisée si on cherche à ranger des actions potentielles et que le décideur ne trouve pas beaucoup de peine à déterminer les poids des critères[128]. Bien souvent cette méthode est sujette à des modifications ou des extensions.

6.2-Les inconvénients:

Prométhée fait partie de la famille des méthodes de surclassement ; les critiques qui se trouvent dans la littérature s'adressent généralement à cette famille. Néanmoins on peut indiquer quelques critiques qui la concernent directement.

1- Par rapport à Electre III, Prométhée perd des nuances dans la valuation des arcs de surclassement [129](qui expriment par exemple que «a_1 est préférée à a_2»).

2-En tant que méthode de surclassement de type rangement. Prométhée permet de ranger les actions mais ne permet de rendre compte des différences quantitatives relatives à ces actions.

3- Le fait de prendre des seuils d'indifférence et de préférence constants peut être considéré comme une restriction[130].

---

[127]-Schärlig A, "Décider sur plusieurs critères: panorama de l'aide à la décision multicritère", Presse polytechniques et universitaires romandes, Suisse, 1985, p24.

[128]-Diakoulaki D, Koumoustsos N, "Cardinal ranking of alternative actions: extention of the PROMETHEE méthod", European journal opérational research, 1991, vol 53, p337.

[129]-Schärlig A, op cit, p24.

[130]- Diakoulaki D, Koumoustsos N, op cit, p338.

4- Par comparaison à la méthode MAUT, par exemple, la méthode Prométhée manque de fondements théoriques qui permettraient de mieux «apprécier les hypothèses implicites sur lesquelles elle repose[131]»

[131]- Vinck Ph, op cit, p 105.

Conclusion:

L'objectif des méthodes d'analyse multicritère PROMETHEE est de construire via un système de préférences floues, un classement des actions des meilleures aux moins bonnes; ce classement étant un préordre partiel (préférence stricte, indifférence et incomparabilité) pour PROMETHEE I, et un préordre complet (indifférence et préférence stricte) pour PROMETHEE II.

Nous tenterons de mettre en application la méthode PROMETHEE par le biais d'une étude de cas pour illustrer quelques développements théoriques liés à cette méthode.

Chapitre VI: Etude de cas: l'entreprise SEROR.

Chapitre 4: Etude de cas: l'entreprise SEROR.

Introduction.

1. Présentation de l'entreprise SEROR.
2. Présentation du problème.
3. Valeurs de critères selon les fonctions de préférence.
4. Application de la méthode PROMETHEE I et II.
5. Analyse des résultats.
6. Analyse de sensibilité des résultats obtenus.

Conclusion

Introduction:

Le présent chapitre traitera un cas d'application pris dans le cadre de la mise en place d'un outil d'aide à la décision proposé aux gestionnaires de l'entreprise SEROR ayant pour finalité de sélectionner une offre concernant l'achat d'un matériel de transport.

Dans ce chapitre, on présente l'organisation structurelle et fonctionnelle de l'entreprise SEROR, ensuite on applique la méthode Prométhée I et II sur le problème posé, enfin on conclu par l'analyse des résultats et de la sensibilité.

1. Présentation de l'entreprise SEROR:

1.1- Historique:

La **S**ociété d'**E**tudes et de **R**éalisation d'**O**uvrages d'Art de l'Ouest "**SEROR**" a été crée par décret **n° 80_155 du 24/05/1980**.

Une modification portant sur le siège de l'entreprise d'Oran vers Tlemcen a été effectué par décret **n° 84_86 du 15/01/1983**.

La Direction générale est située à Tlemcen; Adresse: N°71 Bd Kazi Aoul Mohamed B.P 254 Tlemcen.

TUTELLE:

1983_1989

Ministère des Travaux Publics.

1989_1996

Fonds de Participation "Construction" 40%.

Fonds de Participation "Service" 30%.

Fonds de Participation "Mines, Hydrocarbures et Hydraulique" 30%.

1997_1999

Holding Public Réalisations et Grands Travaux.

2000_2001

Holding Public Réalisations et Matériaux de Construction.

2002

Société de Gestion des Participations_Travaux Publics.

1.2-La SEROR aujourd'hui:

Aujourd’hui, la SEROR affiche un chiffre d’affaires consolidé de l’ordre de 1 652 millions de Dinars. Elle est devenue l'une des premières entreprises du secteur des travaux publics hydrauliques. Avec les plus hautes qualifications dans la construction d’ouvrages d’art, le génie civil, les barrages et le bâtiment, elle reste très active dans les domaines de la rénovation, de l’entretien et de l’ingénierie.

La SEROR est une entreprise spécialisée dans:

- L'étude et la réalisation d'ouvrages d'art.
- Réalisation d’ouvrages hydrauliques.