Le modèle de Ramsey

Les théories de la croissance économique s'interrogent sur les fondements de l'amélioration du niveau de vie, et mettent en avant l'accroissement du produit par tête qui a lieu avec l'accumulation de capital. Le modèle standard de R. Solow[50] (1956), démontre sous certaines hypothèses que l'épargne réinvestie à chaque période permet d'accumuler du capital par tête, mais uniquement jusqu'à un certain niveau d'équilibre. L'économie arrive à ce stade sur son sentier stationnaire, où le produit agrégé croît simplement au rythme de la population, et où le progrès technique devient seul déterminant d'une croissance supérieure.

La théorie de la croissance optimale intervient sur la phase transitoire qui précède ce niveau stationnaire, afin de lever l'hypothèse d'une propension à épargner fixe et exogène dans le modèle. Elle tente d'apporter des fondements microéconomiques, décrits par Ramsey[51] (1928), qui portent sur la question du choix optimal du niveau de l'épargne dans une économie. Ce choix résulterait d'un programme d'optimisation résolu du point de vu d'un planificateur social, et consistant à maximiser la consommation des agents sous une contrainte statique de budget, et sous une contrainte dynamique d'évolution du capital.

Dans ce chapitre, nous montrons qu'en général le taux d'épargne n'est pas constant, mais qu'il est au contraire fonction du stock de capital par tête, k. le modèle de Solow-Swan se trouve alors modifier de deux manières : d'une part, il faut maintenant trouver quel est le niveau moyen du taux d'épargne, et d'autre part, il faut rechercher s'il augmente ou diminue avec le développement de l'économie.

[50] Solow. R. [1956] « A contribution to economic growth theory » Quaterly Journal of Economics 70, 65-94.
[51] Ramsey F. [1928], « A mathematical theory of savings », Economic Journal 38(152), 543-559

La tendance des taux d'épargne à augmenter ou baisser en fonction du développement économique affecte la dynamique des états de transition, notamment la vitesse de convergence vers l'état régulier. Si le taux d'épargne augmente avec k, alors la vitesse de convergence est plus lente que dans le modèle de Solow-Swan, et vice-versa. Nous verrons toutefois que le modèle de Ramsey, même lorsque le taux d'épargne augmente, la convergence reste vérifiée, sous des conditions assez peu restrictives. Autrement dit, l'économie tend toujours à croitre, d'autant plus vite, en terme de variable par tête, qu'elle est initialement éloigné de son état régulier.

3.1 Présentation du modèle

Le modèle de Ramsey (1928) constitue la seconde référence (avec le modèle de Solow) des modèles de croissance, dans la mesure où il endogénéise le taux d'épargne. Ce taux devient expliqué par les comportements d'optimisation des agents. Le problème de la croissance est un problème de choix entre consommation présente et consommation future. Comprendre comment ce fait ce choix est donc fondamental.

Ramsey a cherché à déterminer l'épargne qu'une nation doit effectuer dans une perspective dynamique. La connaissance du niveau moyen du taux d'épargne est importante d'abord parce-que c'est lui qui détermine le niveau des autres variables sur le sentier de croissance d'état régulier. D'autre part, parce-que dans le modèle de Ramsey, ce sont les conditions d'optimisation qui permettent d'exclure l'épargne excessive et inefficiente qui pouvait exister dans le modèle de Solow-Swan.

L'intérêt de l'endogénisation de l'épargne est double. Elle permet de comprendre pourquoi l'équilibre est à gauche de $\hat{k}_{or}^{*}$, elle permet de juger la politique d'augmentation du taux d'épargne. Nous présentons successivement l'équilibre concurentiel, l'état régulier et enfin la dynamique transitoire.

3.1.1 Hypothèses du modèle

Nous allons maintenant étudier un modèle de croissance qui intègre explicitement un comportement de consommation des ménages. L'épargne ne sera donc plus déterminée à travers une propension moyenne exogène. Nous allons considérer que les individus ont un horizon infini. Plutôt qu'une vie infinie, cela correspond à une prise en compte, par chaque génération, de l'intérêt des générations futures, de manière altruiste.

Ce modèle peut être formulé de manière à peu près standard de la façon suivante :

H1: L'agent représentatif maximise la somme actualisée de ses utilités sur un horizon infini, l'argument de la fonction d'utilité est la consommation de l'agent. Celle-ci étant un prélèvement sur le produit net, sachant qu'il n'y a qu'un seul bien qui sert à la fois de bien de consommation et de bien de production et que l'économie est fermée.

H2 : Le capital évolue selon ce qui reste après la consommation des agents.

H3 : La fonction de production, à deux arguments, est à rendements d'échelle constants et à rendements de facteur décroissants. Les arguments sont le capital productif et le travail ; ce dernier est offert de façon inélastique, il peut être constant ou croître à taux constant ou être affecté par un progrès technique neutre au sens de Harrod.

Nous allons comparer deux mécanismes d'allocation différents : D'abord, en suivant le travail de Ramsey, nous allons considérer que l'allocation des ressources est effectuée par un planificateur central qui cherche à maximiser le bien-être de l'agent représentatif. Ensuite, nous allons intégrer une allocation décentralisée, par les marchés. Nous allons observer en particulier qu'avec un horizon de décision infini, des rendements d'échelle constants, des agents homogènes et des marchés concurrentiels, les deux mécanismes conduisent à la même allocation des ressources.

3.2 L'équilibre concurrentiel

Deux types d'agent se distinguent par la poursuite d'un objectif différent, l'un étant la maximisation de profit du côté des entreprises, et l'autre la maximisation de satisfaction pour les ménages. La modélisation est effectuée sous les hypothèses concurrentielles. La présentation de Barro et Sala-i-Martin (1995), distingue le problème des consommateurs de celui des producteurs.

3.2.1 L'équilibre des consommateurs

La population N_t, croît au taux n. On peut la voir comme une famille unique ou comme des familles identiques se développant dans le temps. Les adultes de la génération actuelle s'attendent à ce que la taille de leur famille élargie croisse au taux n > 0 du fait de la fécondité et de la mortalité.

Pour simplifier, nous considérons n exogène est constant. Nous négligeons également les migrations de personnes. Si nous normalisons à l'unité le nombre des adultes existant au temps 0, la taille de la famille (c'est-à-dire la population adulte) au temps t est : $L(t) = e^{nt}$

Chaque ménage comprend au moins un membre adulte appartenant à la population active. Lorsqu'ils font des projets, ces adultes pensent également au bien être et aux ressources de leurs descendants réels ou éventuels. Bien que la vie des individus soit elle-même finie, nous pouvons nous placer dans le cadre d'une famille élargie « immortel »[52]. Cette structure est appropriée si les parents sont altruistes[53] et réalisent des transferts en faveur de leurs enfants, qui font ensuite de même, etc.

[52] La famille immortelle est donc composée d'individus mortels liés entre eux par un mécanisme effectif de transferts entre génération, fondé sur l'altruisme

[53] Dans l'esprit de Robert Barro (1974), ce ménage représente une dynastie de générations liées par de l'altruisme et de l'héritage. Cette fiction autorise un bouclage par l'épargne relativement simple

Cette interaction entre les générations est prise en compte en supposant que la génération actuelle maximise son utilité sous une contrainte budgétaire dont l'horizon temporel est infini.

3.2.1.1 Les préférences inter temporelles

Les préférences inter temporelles sont définies sur l'ensemble des trajectoires de consommation C(t). Si C(t) est la consommation au temps t, alors $c(t) \equiv C(t)/L(t)$ est la consommation par adulte. Chaque ménage souhaite maximiser l'utilité globale, U, L'utilité inter temporelle s'écrit comme une somme des utilités instantanées u(t) de chaque tête du ménage. On a donc :

$$\max_{c_t} \mathrm{U} = \int_0^\infty e^{nt}.e^{-\rho t}.u[c(t)].dt \ldots\ldots\ldots\ldots 3.1$$

A la date $t = 0$, le « père fondateur » d'une dynastie, qui croit au taux n, maximise l'utilité par tête de tous les membres de sa famille vivant à chaque date t. Ce critère d'optimisation est donc un critère utilitariste : on maximise la somme des utilités (ce qui présuppose une fonction d'utilité cardinale).

la multiplication de $u(c)$ par la taille de la famille, $L(t) = e^{nt}$, correspond à l'addition des unités d'utilité de tous les membres de la famille vivants au temps t. Avec $c(t)$ le niveau de consommation par tête du ménage. Cette formule présume que l'utilité des ménages au temps 0 est une somme pondéré de tous les flux futurs d'utilité, $u(c)$. La fonction $u(c)$ relie le flux d'utilité par personne à la consommation par tête.

Le multiplicateur, $e^{-\rho t}$, fait intervenir le taux de préférence pour le présent, $\rho > 0$. Une valeur positive de ρ signifie que les unités d'utilité sont d'autant moins valorisées qu'elles sont obtenues tardivement[54]. Nous pouvons expliquer que ρ soit positif par la raison suivante : les unités d'utilité attendues d'un futur éloigné correspondent à la consommation des générations futures. Or, nous supposons que, partant d'un point où les niveaux de consommation par personne sont les mêmes à chaque générations, les parents préfèrent une unité de leur propre consommation à une unité de la consommation de leurs enfants. Cet « égoïsme » parental implique que ρ soit positif.

3.2.1.2 La fonction d'utilité

L'économie démarre avec un capital/tête $k_0 > 0$. L'utilité instantanée de la famille est donnée, en valeurs courantes, par :

$$u(c_t) \geq 0$$

Avec
$u' \geq 0$ ($u(c_t)$ est strictement croissante) ;
$u'' \leq 0$ ($u(c_t)$ est strictement concave) ;

54 Robert.J.Barro-Xavier Sala-i-Martin "La croissance économique" Ediscience international, 1996 p68.

$u(c_t)$ vérifie les conditions d'Inada (u′(c) → ∞ quand c→0 et u′(c)→0 lorsque c→∞.

« La concavité de $u(c_t)$ indique que le ménage préfère les « mélanges inter temporelles » et cherche à « lisser » le sentier de consommation, c'est-à-dire à répartir la consommation sur les différentes générations »[55]. Les consommateurs préfèrent un profil relativement uniforme à celui où c est très bas à certaines périodes et très élevé à d'autres.

3.2.1.3 La trajectoire optimale de la consommation du ménage

Le planificateur central cherche à maximiser le bien-être social à chaque moment du temps. Il doit donc déterminer un sentier de consommation optimale qui tient compte des caractéristiques de l'économie. Ce sentier doit établir, à chaque moment, un arbitrage entre la consommation présente et la consommation future qui va profiter de l'investissement et donc de l'épargne.

On rapporte le produit et le capital au travail. Le problème de l'agent représentatif contient alors deux variables : la consommation par tête et le capital par tête. Selon la décision prise à tout moment sur le niveau de consommation, le devenir immédiat du capital est déterminé. De façon naturelle, la consommation est la variable de contrôle, tandis que le capital est la variable d'état. La décision de consommer une certaine quantité du produit entraîne, par le fait même, celle d'accumulation du capital productif. La consommation est donc bien la variable de commande. Le produit et la consommation viennent de la mise en œuvre du capital productif qui détermine donc l'état du système à tout instant.

$$\underset{c_t}{max}\, U_0 = \int_0^{\infty} u[c(t)].\, e^{-\rho t} e^{nt} dt$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} \dot{a} = w + (r-n)a - c \\ a(0) = a_0 \\ \forall t, a_t e^{-(r-n)t} \geq 0, c_t \geq 0 \end{cases}$$

La solution de ce problème est un sentier de consommation optimale: $c^*(t) = c_t^*$. C'est donc une fonction du temps et non une valeur unique. Nous avons donc un problème de commande optimale. On résout ce type de problème en appliquant le principe de maximum de Pontryagin.

- **Maximum de Pontryagin**

En macroéconomie, le principe de Pontryagin a été employé presque exclusivement pour la résolution des problèmes de croissance optimale. L'idée, qui est à l'origine du principe du Maximum, est de remplacer une optimisation inter temporelle globale par une suite d'optimisations instantanées locales. Dans notre cas particulier de croissance optimale,

[55] La croissance optimal, papier de Jérome Glachant, Septembre 1999,p 3.

la décision instantanée de l'agent en ce qui concerne sa consommation provient de l'arbitrage entre un gain d'utilité immédiat, s'il consomme plus tout de suite son utilité présente s'accroît, et un gain futur, s'il consomme moins tout de suite il épargne plus donc le produit va croître et il pourra consommer plus dans l'avenir. Son choix est guidé par la valeur, en termes d'utilité, associée à l'accumulation.

$$\max_{c_t} U_0 = \int_0^{\infty} u[c(t)].e^{-\rho t}e^{nt}dt$$

La maximisation se fait sous trois contraintes : la contrainte budgétaire par tête à chaque date t, la contrainte de la richesse initiale donnée, la contrainte de la richesse finale actualisée, non négative, car il n'y a pas possibilité de laisser des dettes.

$$w(t) + r(t)a(t) = c(t) + na(t) + \dot{a}(t)$$

à l'origine en $t = 0$: $a_0 = 0$
à l'infini en $t \to \infty$: $a(t)e^{-(r-n)t} \geq 0$.

La première contrainte nous donne la manière dont la commande influence l'évolution de l'état de ce système. C'est pour cette raison qu'on l'appelle l'équation de mouvement ou l'équation d'état. La deuxième contrainte tient compte de l'état initial de ce système.

Quand on considère l'évolution dynamique de cette économie, à chaque moment du temps, l'état du système peut être décrit avec a. Cette variable est donc comme nous l'avons déjà dis la variable d'état. L'évolution de cette variable est donnée par $\dot{a}_t$ et elle est déterminée d'une part par l'état (a_t), mais d'autre part, par une autre variable qui la commande c_t. c_t est donc la variable de commande.

- **L'équation d'état**

$$w(t) + r(t)k(t) = c(t) + na(t) + \dot{a}(t)$$

$a(t)$représente les actifs nets par personne, $a(t)$ est mesuré en termes réels, c'est-à-dire en unité de consommation. Les agents détiennent des actifs sous forme de droits de propriété sur le capital ou sous forme de prêts. Ils peuvent prêter ou emprunter entre eux, mais l'agent représentatif (l'économie est fermée) a une position nette, nulle à l'équilibre. Puisque les deux sortes d'actifs, le capital et les prêts, sont supposés parfaitement substituables, ils doivent rapporter le même taux de rendement réel $r(t)$. La contrainte de budget d'un agent peut s'écrire comme une contrainte d'accumulation :

$$Da = w + (r - n)a - c \dots\dots 3.2$$

Les actifs par tête (a) augmentent avec le revenu par tête, $w + ra$, et baissent avec la consommation par tête (c) et du fait de l'augmentation de la population, (na). Pour chaque période, le ménage doit tenir compte du fait que son choix de consommer $c(t)$ n'est pas indifférent sur ce qu'il pourra consommer plus tard. Il doit tenir compte de l'impact de $c(t)$sur son patrimoine futur. Pendant la période dt, son patrimoine varie du montant de son épargne, c'est à dire de ses revenus (salaire + intérêt sur son capital) diminués de sa consommation.

- **Résolution dynamique**

La résolution de ce système revient à chercher une commande optimale, $c^*(t)$qui maximise l'utilité des agents à chaque moment du temps : c'est une fonction du temps. La valeur optimale de cet objectif sera donc donnée par :

$$U_0^* = \int_0^{\infty} u[c^*(t)].\, e^{-\rho t} e^{nt} dt$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} Da = w + (r-n)a - c \\ a(0) = a_0 \\ \forall t, a_t e^{-(r-n)t} \geq 0, c_t \geq 0 \end{cases}$$

- **Le lagrangien**

Le problème du « père fondateur » est de choisir le profil temporel de (t) sous la contrainte d'accumulation (Da). Puisque w, r et n sont données et puisque à un moment donné, l'état de la richesse (a) est donné, choisir la consommation $c(t)$ c'est choisir l'épargne $Da(t)$. Le lagrangien est :

$$\boldsymbol{L} = \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)t}.\, [uc(t) + \lambda(w + (r-n)a - c - Da)]\,.\, dt + vae^{-(r-n)t}$$

Pour la période t, le ménage doit maximiser l'utilité actualisée de sa consommation courante compte tenu de la perte ou du gain d'utilité future liée au fait que le niveau de sa consommation courante influence sa richesse donc sa consommation future.

On résout ce type de problème de maximisation d'un fonctionnel (fonction de fonctions) sous contrainte en utilisant une transformation proche du Lagrangien : La solution à ce problème de maximisation inter temporelle consiste à chercher le maximum de la fonction H(t) dite Hamiltonien.

- **Le Hamiltonien**

On construit une nouvelle fonction objectif qui intègre aussi la contrainte mais en la multipliant par un prix implicite qui est similaire au multiplicateur de Lagrange. Mais ce multiplicateur varie avec le temps : μ_t.

La variable μ est le prix implicite associé à la variable d'état a. Elle nous donne la valeur marginale actualisée au moment 0 d'une unité de capital supplémentaire au moment **t**.

$$\lambda_t \equiv \mu_t . e^{(\rho-n)t} \Leftrightarrow \mu_t = \lambda_t e^{-(\rho-n)t}$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\mu}. e^{(\rho-n)\mathrm{t}} + (\rho-n)\mu. e^{(\rho-n)t} = \dot{\mu}. e^{(\rho-n)t} + (\rho-n)\lambda$$

On obtient alors le Hamiltonien associé à ce problème :

$$H(t) = u(c)(t)e^{-(\rho-n)t} + \mu \frac{\partial a(t)}{\partial t}$$

$$H(t) = e^{-(\rho-n)t}. u(c)(t) + \mu(w + (r-n)a - c)$$

Cette fonction mesure l'utilité actualisée associée à la consommation directe de $(c)(t)$ à laquelle s'ajoute d'impact de la dernière unité consommée sur la variation de la richesse donc sur la consommation future. Cet impact est mesuré en termes d'utilité à la période t :[$\mu(t)$]. En t l'accroissement de la richesse due à la renonciation d'une unité de consommation vaut [$\mu(t)$] qui mesure donc le coût marginal d'opportunité de la consommation $(c)(t)$.

3.2.1.4 Conditions du premier ordre

La commande c(t) doit maximiser l'utilité globale H. Le choix de la fonction d'utilité instantanée permet de déterminer cette commande.les conditions du premier ordre pour un maximum de U sont :

La première condition est une condition d'optimalité standard. La seconde condition est l'équation de mouvement du prix implicite μ. La dernière condition est la condition de transversalité. En tenant compte de la définition de Het en utilisant μ, ces conditions deviennent :

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} \equiv \dot{\mu} = -\frac{\partial H(t)}{\partial a(t)}$$

$$\lim_{t\to\infty} a_t \mu_t = 0$$

- **Condition d'optimalité standard**

H(t) sera maximum si sa dérivée première par rapport à $(c)(t)$ est nulle. Partant de

$$H(t) = u(c)(t)e^{-(\rho-n)t} + \mu[(r-n)(t)a(t) + w(t) - c(t)]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = e^{-(\rho-n)t}\frac{\partial u(c_t)}{\partial c(t)} - \mu(t) = 0$$

On notera par la suite $\partial u(c_t)/\partial c(t) = u'[c(t)]$ l'utilité marginale de la consommation du ménage à la période t. Cette condition indique simplement que le niveau de la consommation à la période t doit être telle que son utilité marginale (convenablement actualisée car on raisonne en $t = 0$) doit être égale à son coût marginal d'opportunité (consommer moins dans le futur).

$$\mu = u'(c)e^{-(\rho-n)t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots .3.3$$

Si l'on peut trouver une fonction μ(t) telle que H soit maximum, le problème est résolu

- **L'équation de mouvement du prix implicite μ**

Si le ménage renonce à consommer une unité supplémentaire en t, il accroît sa richesse d'un euro qui en t, vaut $\mu(t)$ en terme d'utilité. A la fin de la période suivante, c'est-à-dire en $(t + dt)$, cet euro qui a été placé, lui rapporte rdt et le surplus de richesse disponible pour assurer sa consommation en $t + dt$ vaut $1 + rdt$ euros qui, en terme d'utilité mesuré en $t + dt$, vaut: $\mu(t + dt)(1 + rdt)$.

D'évidence si l'utilité marginale de sa consommation en t, $\lambda(t)$, était supérieure à l'utilité future de l'accroissement de richesse que sa renonciation permet, le ménage consommerait d'avantage en t. Dans le cas contraire, il consommera moins. Le choix optimal du niveau de consommation du ménage en t impose donc que :

$$\mu(t) = \mu(t + dt)(1 + rdt)$$

$$\mu(t + dt) - \mu(t) = -r\mu(t + dt)$$

En raisonnant à la limite quand $dt \to 0$, on écrit en utilisant les notations habituelles

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{d\mu(t + dt) - \mu(t)}{dt} = -r\mu(t)$$

Partant de la fonction H(t), on vérifie que $\partial H(t)/\partial a(t)$ vaut $r\mu$ (t) on en déduit que λ(t) doit satisfaire la condition :

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial a(t)}$$

$$\Rightarrow D\mu = -\mu(r - n) \dots\dots\dots\dots\dots .3.4$$

L'équation (3.4) est la condition d'optimalité sur le taux de croissance du prix implicite des actifs par tête.

$$-\frac{D\mu}{\mu} = r - n$$

La valeur actuelle, du prix implicite des actifs par tête, diminue au taux $(r - n)$. Cette condition d'optimalité est intuitive: si la population ne croit pas, la valeur en termes d'utilité actuelle, des actifs détenus par un agent, diminue dans le temps à un taux égal à leur taux de rendement (r).

- **Condition de Non-Ponzi**

Si chaque ménage pouvait emprunter indéfiniment au taux d'intérêt donné, $r(t)$, il serait alors incité à recourir à « un montage financier » où chaque crédit supplémentaire serait remboursé au moyen d'un nouvel emprunt. Si un consommateur peut s'endetter sans limite $a < 0$ au taux d'intérêt courant r_t, il peut être tenté de s'engager à un enchaînement de dettes (Ponzi Game): il peut emprunter 1 euro aujourd'hui pour financer la consommation présente et s'endetter de nouveau demain pour reconduire sa dette et payer les intérêts. Puisque le principal n'est jamais remboursé, la consommation totale additionnelle de 1 euro est effectivement gratuite pour le ménage. Un ménage qui procèderait de cette manière pourrait financer indéfiniment un niveau de consommation aussi élevé qu'il le souhaite.

En contrepartie, la dette de la famille augmente indéfiniment au taux r_t. Afin d'éliminer cette possibilité, nous supposons que le marché du crédit impose une limite au montant emprunté. Ce type de situations aberrantes doit être éliminé des trajectoires d'équilibre. La contrainte appropriée est que la valeur actuelle des actifs doit être asymptotiquement positive ou nulle. C'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} a(t)e^{-(r-n)t} \geq 0 \ldots\ldots\ldots..3.5$$

Cette contrainte signifie qu'à long terme, la dette par tête du ménage (valeurs négatives de $a(t)$) ne peut pas croitre plus vite que $r(t) - n$, de sorte que le niveau d'endettement ne puisse augmenter aussi vite que $r(t)$. Cette restriction élimine la possibilité d'un financement où chaque crédit supplémentaire est remboursé au moyen d'un nouveau crédit.

Le problème d'optimisation du ménage est de maximiser U dans l'eq.(3.1), en fonction de la contrainte du budget de l'éq (3.2), du stock d'actifs initiaux, $a(0)$, et de la restriction de l'emprunt de l'éq (3.5).

3.2.1.5 L'équation d'Euler

L'équation d'Euler signifie que l'utilité globale marginale et l'utilité associée à l'accumulation varient en sens opposé. Plus l'agent dispose de capital, moins il attache de prix à accumuler. L'utilité globale est maximale et constante sur toute la trajectoire, une augmentation de a entraîne une baisse de λ. On peut interpréter λ comme utilité marginale associée à l'accumulation.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial a}.e^{(\rho-n)t} + (\rho - n)\lambda$$

$$\dot{\lambda} = -\mu(r-n).e^{(\rho-n)t} + (\rho - n)\lambda$$
$$\dot{\lambda} = -\lambda r + \lambda n + \rho\lambda - n\lambda$$
$$\dot{\lambda} = \lambda(-r + p)$$

La condition nécessaire d'optimisation étant $\partial H/\partial c = u'(c_t) - \lambda_t = 0$. On déduit la relation suivante:

$$\dot{\lambda} = \frac{du'(c_t)}{dt} = u'(c_t).(-r+\rho)$$

$$\Rightarrow \frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = -r + \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{u''(c_t).d(c_t)/dt}{u'(c_t)} = -r + \rho$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{c_t.u''(c_t)}{u'(c_t)}\right].\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -r + \rho$$

$$r = \rho - \frac{du'(c_t)/dt}{u'(c_t)} = \rho - \left[\frac{c_t.u''(c_t)}{u'(c_t)}\right].\frac{\dot{c}_t}{c_t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.6$$

Cette équation indique que les ménages choisissent leur consommation de façon à égaliser le taux de rendement, r , au taux de préférence pour le présent, ρ, augmenté du taux de diminution de l'utilité marginale de la consommation, u', due à l'augmentation de la consommation par tête c. Le taux d'intérêt, r, dans le membre de gauche de l'éq (3.6), est le taux de rendement de l'épargne.

Le membre le plus à droite de l'éq (3.6) peut être considéré comme le taux de rendement de la consommation. Les agents préfèrent la consommation présente à la consommation future pour deux raisons. Premièrement le terme ρ apparaît parce-que les ménages déprécient l'utilité future à ce taux. Deuxièmement, si $\dot{c}_t/c_t > 0$, alors c est faible aujourd'hui relativement à demain. Comme les agents ont tendance à préférer une consommation régulière dans le temps (puisque $u''(c_t) < 0$) ils chercheront à niveler le flux en « transférant » une partie de leur consommation future vers le présent.

Le second terme du membre de droite traduit cet effet. (Notons que ce terme est négatif si $\dot{c}_t/c_t < 0$). L'éq. (3.6) indique que les agents économiques qui souhaitent optimiser leur consommation doivent égaliser les deux taux de rendement, de façon à être indifférents, à la marge, entre la consommation et l'épargne.

L'éq. (3.6) peut également s'interpréter ainsi: les ménages choisissent un profil de consommation parfaitement uniforme, avec $\dot{c}_t/c_t = 0$, si $r = \rho$ et ils n'acceptent de dévier de ce profil uniforme (c'est-à-dire ne tolèrent $\dot{c}_t/c_t > 0$) que s'ils reçoivent en compensation un taux d'intérêt r suffisament supérieur à ρ. Le terme $[-u''(c_t)/u'(c_t)].\dot{c}_t/c_t$, dans le membre de droite de l'éq (3.6), indique le montant de cette compensation. Le terme entre crochet correspond à l'élasticité de $u'(c_t)$ par rapport à c_t. Cette élasticité mesure la concavité de $u(c_t)$ et détermine le niveau duquel r doit dépasser ρ. L'écart est d'autant plus élevé que l'élasticité est importante, pour une valeur donnée de $\dot{c}_t/c_t$.

3.2.1.6 La règle de Keynes-Ramsey.

Partant de la première condition : $e^{-(\rho-n)t}u'(c_t) = \mu(t)$ on peut écrire

$$ln\left[e^{-(\rho-n)t}u'(c_t)\right] = ln\,\mu(t)$$
$$-(\rho-n)t + ln[u'(c_t)] = ln\,\mu(t)$$

En différentiant par rapport au temps les deux membres de l'équation, on obtient:

$$-(\rho-n) + \frac{1}{u'(c_t)}\frac{du'(c_t)}{dt} = \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt}$$

$$-(\rho-n) + \frac{1}{u'(c_t)}\left[\frac{du'(c_t)}{d(c_t)}\right]\frac{dc_t}{dt} = \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt}$$

$$-(\rho-n) + \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{dc_t}{dt} = \frac{1}{\mu(t)}\frac{d\mu(t)}{dt}$$

en remplaçant $1/\mu(t)\ [d\mu(t)/dt]$ et en simplifiant les notations :

$$-(\rho-n) + \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{dc_t}{dt} = -r+n$$

On en tire le comportement optimal de consommation du ménage:

$$\frac{dc_t}{dt} = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(r-\rho)$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{u'(c_t)}{c_t.u''(c_t)}(r-\rho)$$

Cette équation différentielle constitue la règle de Keynes-Ramsey. Elle montre que le profil optimal de consommation par tête ne dépend pas de la richesse initiale. Cette dernière n'intervient que pour fixer le niveau initial de consommation via la contrainte budgétaire inter temporelle . Le profil de consommation résulte alors de deux considérations : Le ménage reporte de la consommation dans le futur $(\dot{c}/c > 0)$ si le taux d'intérêt est plus fort que le taux de préférence pour le présent. Toutefois, cette tendance à la substitution de consommation présente par la consommation future est limitée par l'effet de lissage. En effet, les substitutions sont d'autant plus actives que $u(c_t)$ présente une faible courbure.

En remarquant que l'élasticité de la fonction d'utilité marginale u' par rapport à la consommation s'écrit :

$$\sigma(c) = -\frac{du'/u'}{d(c)/c} = -\frac{du'/d(c)}{u'/c} = - \quad \frac{c.u''}{u'}$$

Le résultat précédent s'écrit :

$$\frac{\dot{c_t}}{c_t} = \frac{1}{\sigma(c)}(r-\rho) \ldots \ldots (3.7)$$

Ce qui décrit la trajectoire optimale de la consommation c_t. le premier terme de droite est l'élasticité de substitution inter-temporelle égale à l'inverse de l'élasticité de l'utilité marginale. Plus σ est fort, moins le ménage réagit à l'écart $(r-\rho)$, par conséquent, la relation entre r et ρ détermine si le profil de consommation par tête des ménages croit, demeure constant, ou baisse avec le temps. La consommation par tête augmentera au cours du temps si, à élasticité de substitution inter-temporelle constante, le rendement net du capital r est supérieur au taux de préférence pour le présent, ρ. Lorsque le rendement net est élevé, les ménages préfèrent épargner et investir maintenant pour consommer plus tard. L'évolution de l'élasticité de l'utilité marginale par rapport à c, $\sigma(c)$, dépend de la fonction d'utilité.

Dans les modélisations, on utilise très souvent des fonctions d'utilité CRRA (Constant relative risk aversion pour lesquelles σ (c) = σ = constante.

3.2.1.7 La fonction CRRA (Constant Relative Risk Aversion)

En choisissant pour la fonction d'utilité instantanée une spécification à élasticité de substitution inter temporelle constante, on vérifie la continuité de l'utilité marginale quand σ tend vers 1. Pour obtenir la continuité de l'utilité elle-même, il faut écrire, dans le cas $\sigma \neq 1$:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

La présence au dénominateur de la constante $1-\sigma$ simplifie l'expression de l'utilité marginale et, surtout, assure que la fonction d'utilité est croissante quand $\sigma > 0$. On vérifie que l'utilité marginale est décroissante.

Plus σ est élevé, plus la diminution proportionnelle de $u'(c)$ est rapide en réaction à l'augmentation de c et, de ce fait, moins les ménages sont enclins à consentir des déviations par rapport à un profil de c uniforme dans le temps. Quand σ tend vers 0, la fonction d'utilité tend vers une forme linéaire en c. Cette linéarité signifie que lorsque $r = \rho$ s'applique, les ménages sont indifférents au profil temporel de leur consommation.

La forme de $u(c)$ dans l'éq (3.7) implique que la condition d'optimalité de l'eq (3.6) se simplifie ainsi :

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(r - \rho)$$

L'intérêt de ce cas particulier dans un contexte de croissance est qu'il autorise une évolution à taux constant de la consommation si r est lui-même constant. Le consommateur fait croitre sa consommation au taux g dès que son épargne est rémunérée au taux $r = \rho + \sigma g$

La formule fait apparaître les propensions à consommer la richesse, à toutes les dates. La consommation dépend de la richesse et, de manière complexe, de toute la chronique des taux d'intérêt. Si r est constant, la consommation croît au taux constant $(r - p)/\sigma$

$$1/c[dc/dt] = \frac{r - \rho}{\sigma} \Rightarrow c(t) = c_0 e^{\frac{(r-\rho)}{\sigma}t}$$

Dans le cas CRRA, la fonction d'utilité inter-temporelle est homogène. Les préférences sont homothétiques. Les consommations sont donc proportionnelles à la richesse.

- **Le taux marginal de substitution**

La règle de Keynes-Ramsey est plus facile à comprendre quand on voit le temps en termes discrets et si l'on considère le problème d'allocation de consommation entre les moments t et $t + 1$ par le planificateur central. S'il diminue la consommation à la date t de dc, il cause une perte d'utilité de $u'(c_t)dc$. Néanmoins, cette diminution de la consommation permet un investissement plus élevé et donc une production plus élevée qui pourra être consacrée à la consommation en $t + 1$: $dc\ (1 + r)$. La population augmentant au taux n pendant cette période, la consommation/tête en $t + 1$ peut augmenter de:

$$\frac{dc\ (1 +\ r)}{1 + n}$$

Cette consommation supplémentaire implique alors une croissance d'utilité en $t + 1$ (en valeur actualisée) de :

$$\frac{1}{1 + \rho}\ .u'((c_{t+1}).\frac{dc\ (1 +\ r)}{1 + n}$$

Or, le long du sentier de consommation optimale, cette réallocation ne doit pas améliorer (ni détériorer) le bien-être globale:

$$u'(c_t)dc = \frac{1}{1 + \rho}\ .u'((c_{t+1}).\frac{dc\ (1 +\ r)}{1 + n}$$

$$\Rightarrow u'(c_t) = \frac{1}{1 + \rho}\ .u'((c_{t+1}).\frac{(1 +\ r)}{1 + n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\rho}\frac{u'((c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1+n}{1+\ r}$$

$$TMS_{t+1,t} = \ TMST_{t+1,t}$$

Où les indices envoient aux dates des consommations. Si le délai entre t et $t+1$ est suffisamment court, cette condition est équivalente à la condition (3.6). La règle de Keynes-Ramsey nous indique que la consommation augmente ; reste constante ; diminue selon que le produit marginal du capital (net de la croissance de la population) est plus - autant - moins élevé que le taux de préférence pour le présent.

Cela est assez intuitif : plus le produit marginal du capital est élevé par rapport au taux de préférence pour le présent, plus est-il intéressant de réduire la consommation présente pour profiter d'une consommation future plus élevée. Si ce produit marginal est fort initialement, la consommation sera croissante dans le temps sur le sentier optimal. Le rôle de l'élasticité de substitution apparaît à ce niveau : plus élevée est cette élasticité, plus facile il est de sacrifier la consommation présente pour profiter de la consommation future et donc, pour un niveau excédentaire du produit marginal (par rapport à la préférence pour le présent), plus fort est le taux de variation de la consommation.

- **La condition de transversalité**

Une condition de transversalité indique le comportement que doit avoir la commande quand on arrive à l'horizon du programme (ici à l'infini) : la manière dont la commande doit traverser la ligne d'horizon. Cette condition doit nous aider à choisir le sentier optimal parmi les sentiers possibles. Dans notre cas cette condition est donnée par la contrainte .

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)a_t = 0$$

Le prix implicite μ évolue dans le temps selon l'éq (3.4). L'intégration de cette équation par rapport au temps donne

$$\mu(t) = \mu(0).exp\left\{-\int_0^t [r(\mu) - n]\, d\mu\right\}$$
$$\mu(t) = \mu(0).e^{-(r-n)t}$$

Le terme $\mu(0)$ est égal à $u'(c[0])$, qui est positif parce que $c(0)$ est fini (si U est fini), et $u'(c)$ est positif tant que c est fini. Si nous remplaçons $\mu(t)$ par sa valeur dans l'équation précédente la condition de transversalité devient alors :

$$\lim_{t\to\infty} a_t\mu(0).e^{-(r-n)t} = 0 \ldots\ldots\ldots..(3.8)$$

Cette équation signifie que la quantité d'actifs par personne, a, croit asymptotiquement à un taux inférieur à $r-n$, ou de manière équivalente, que le niveau d'actifs croit à un taux inférieur à r. Il n'est donc pas optimal pour les ménages d'accumuler éternellement une quantité positive d'actifs au taux r, ou plus élevé, car il peuvent augmenter leur utilité en consommant ces actifs.

La condition de transversalité indique que la valeur actualisée des actifs par tête (la quantité $a(t)$multiplier par le prix $\mu(t)$) doit être nulle à la fin de la période de planification. Autrement dis, la valeur des actifs du ménage doit tendre vers 0 quand t tend vers l'infini. En effet la dynastie pourrait augmenter son utilité si les actifs détenues jusqu'à cette période terminale étaient utilisés pour augmenter la consommation. C'est la condition de non-Ponzi qui implique que la dette ne peut croître plus rapidement que r. Les familles ont en fait intérêt à saturer cette contrainte.

On peut comprendre mieux la signification de cette contrainte si l'on considère notre problème avec un horizon fini : T. Dans ce cas, si $u'(c_T).e^{-(\rho-n)t}$ était positive, il serait sous-optimal de terminer avec un stock de capital positif car on pourrait améliorer le bien-être en consommant ce capital. Par conséquent, on doit avoir sur le sentier optimal :

$$a_T > 0 \; et \; u'(c_T^*).e^{-(\rho-n)t} = 0$$

$$a_T = 0 \; et \; u'(c_T^*).e^{-(\rho-n)t} > 0$$

$$a_T = 0 \; et \; u'(c_T^*).e^{-(\rho-n)t} = 0$$

On peut condenser ces conditions en une seule :

$$a_T \, . u'(c_T).e^{-(\rho-n)t} = 0$$

La condition à horizon infini peut être vue comme étant la limite de cette condition quand T devient très grand.

$$\lim_{T\to\infty} a_T.\left(u'(c_T).e^{-(\rho-n)t}\right) = 0$$

3.2.2 L'équilibre des producteurs

Un grand nombre de firmes identiques possèdent une technologie de production employant du capital (K) et du travail (L), et faisant intervenir un facteur exogène de progrès technique (A) qui croît au taux constant (g) . La production d'un bien unique (Y) qui sert à sa propre reproduction en tant que capital, est supposée régie par une fonction de production à rendements d'échelle constants et à productivité marginale décroissante :

$$Y(t) = K(t).[A(t).L(t)]$$

L'état régulier ne pouvait coexister avec un progrès technique exogène à taux constant que si ce progrès prenait la forme d'une augmentation de l'efficacité du travail. Nous supposons par conséquent que la fonction de production peut s'écrire :

$$Y(t) = K(t).\hat{L}(t)$$

Où $\hat{L}(t) \equiv A(t).L(t)$ est le montant de travail effectif et $A(t)$, le niveau de la technologie, croit au taux constant $g \geq 0$, par conséquent, $A(t) = e^{gt}$, où le niveau initial de technologie, $A(0)$, est normalisé à 1. Il est plus commode de raisonner en termes de variables par tête, car elles sont constantes à l'état régulier. Par conséquent, nous exprimons de nouveau les variables en unités de travail effectif :

$$\hat{y}(t) \equiv Y(t)/\hat{L}(t) \quad et\ \hat{k} \equiv K/\hat{L}$$

La fonction de production peut être écrite sous forme intensive :

$$\hat{y}(t) = f[\hat{k}(t)]$$

Où $f(0) = 0.$ On peut immédiatement vérifier que les produits marginaux des facteurs sont donnés par :

$$Y(t) = \hat{L}(t)f[\hat{k}(t)]$$
$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} = f'[\hat{k}(t)]$$

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)} = [f(\hat{k}) - \hat{k}.f'(\hat{k})]e^{gt}$$

Les conditions d'Ina da impliquent $f'(\hat{k}) \to \infty$ quand $\hat{k} \to 0$ et $f'(\hat{k}) \to 0$ quand $\hat{k} \to \infty$.

Dans notre analyse, les entreprises empruntent le capital aux ménages qui le possèdent. Par conséquent, les couts en capital supportés par les entreprises sont égaux aux versements des rentes, qui sont proportionnelles à K. Ceci implique que le capital peut être augmenté ou diminué sans encourir de dépenses supplémentaires, telles que le cout d'installation des machines ou celui lié à d'autres changements.

Nous partons d'un modèle où la fonction de production s'applique à toute l'économie, et où une unité de production peut être utilisée pour créer une unité de consommation des ménages, C, ou une unité de capital additionnel, K. par conséquent, tant que l'économie n'atteint pas une situation limite où toute la production courante est consacrée à la consommation ou au capital nouveau, le prix de K en termes de C reste fixé à 1.

Puisque C est différent de 0 à l'équilibre, nous avons seulement besoin de nous occuper du cas où la part de la production affectée au capital est nulle, c'est-à-dire au cas où l'investissement brut est égal à 0. Même dans cette situation, si le capital est réversible (c'est-à-dire le stock existant peut servir à la consommation), le prix de K en termes de C reste égal à l'unité : si le capital est réversible, l'investissement brut de l'économie peut être négatif, et le prix de K en termes de C reste égal à 1.

Soit R le prix d'une unité de capital. Supposons de nouveau que le stock de capital se déprécie au taux constant $\delta \geq 0$. Le taux de rendement net obtenu par un ménage qui possède une unité de capital est donc égal à $R - \delta$. Rappelons que les ménages peuvent aussi recevoir un taux d'intérêt r sur les fonts prêtés à d'autres ménages. Puisque le capital et les prêts sont parfaitement substituables en tant que réserve de valeur, nous devons avoir $r = R - \delta$, ou de façon équivalente, $R = r + \delta$. Le flux de recettes nettes ou de profits de l'entreprise représentative, à tout moment est donné par :

$$\pi(t) = F\left[K(t), \hat{L}(t)\right] - (r(t) + \delta).K(t) - w(t)L(t)$$

C'est-à-dire, les recettes brutes provenant de la production vendue, $F\left[K(t), \hat{L}(t)\right]$, moins le paiement des facteurs de production, c'est-à-dire la rente de capital, $(r(t) + \delta).K(t)$, et les salaires versés au travailleurs, $w(t)L(t)$.

Nous supposons que les entreprises cherchent à maximiser la valeur actuelle des profits. Comme les entreprises louent les services du capital et du travail, et qu'il n'y a pas de cout d'ajustement, le problème de maximisation de l'entreprise ne contient pas d'éléments inter-temporels. Le problème de maximisation de la valeur présente des profits se réduit à un problème de maximisation des profits à chaque période, sans considération du résultat des autres périodes.

3.2.2.1 Les conditions de premier ordre

Nous reprenons le modèle de Solow avec progrès technique neutre au sens de Harrod.

$R = r + \delta$ est le prix de location du capital et w le prix de location du travail. L'entreprise maximise :

$$\pi(t) = F[K(t), L(t)e^{gt}] - (r(t) + \delta).K(t) - w(t)L(t)$$

$$= L(t)e^{gt}\left[f\left[\hat{k}(t)\right] - (r(t) + \delta).\hat{k}(t) - w(t)e^{-gt}\right]$$

On suppose que dans le contexte de transparence et d'efficience des marchés, elles emploient pleinement les facteurs de production et donc que les différents marchés sont équilibrés à chaque instant. Ce programme d'optimisation se situe à un niveau « statique » et se traduit par :

$$\frac{\partial \pi(t)}{\partial K(t)} = 0 \; avec \; r(t) + \delta = f'\left[\hat{k}(t)\right]$$

$$\frac{\partial \pi(t)}{\partial L(t)} = 0 \; avec \; w(t) = \left[f\left(\hat{k}\right) - \hat{k}.f'\left(\hat{k}\right)\right]e^{gt}$$

Les firmes louent le capital au taux d'intérêt $r(t) + \delta$, et payent un salaire $w(t)$ aux travailleurs qu'elles emploient. Elles sont considérées à chaque instant (t) en situation de maximisation de profit (π) en rémunérant les facteurs de production à leur productivité marginale. C'est-à-dire, une entreprise concurrentielle, avec r et w donnés, maximise son profit, pour $\hat{L}$ également donné, en respectant la condition suivante :

$$r(t) + \delta = f'[\hat{k}(t)] \ldots\ldots\ldots..(3.9)$$

Autrement dit, elle choisit le ratio du capital au travail effectif qui égalise le produit marginal du capital à son prix(ou « rente »). Le niveau de profit qui en résulte est positif, nul, ou négatif, suivant la valeur de w. Si le profit était positif, l'entreprise pourrait réaliser un profit infini en choisissant une échelle infini. Si le profit était négatif, la taille de l'entreprise diminuerait jusqu'à devenir nulle. Par conséquent, lorsque l'équilibre de marché est « complet », w doit être tel que le profit soit nul. Autrement dit, le total des payements versés aux facteurs de production, $(r(t) + \delta).K(t) - w(t)L(t)$, est juste égal aux recettes brutes. De ce fait la taille de l'entreprise n'affecte pas les résultats.

Pour que le profit soit nul, il faut d'autre part que le taux de salaire soit égal au produit marginal du travail correspondant à la valeur de $\hat{k}$ satisfaisant :

$$w(t) = [f(\hat{k}) - \hat{k}.f'(\hat{k})]e^{gt} \ldots\ldots\ldots\ldots(3.10)$$

Le modèle ne détermine donc pas la taille d'une entreprise concurrentielle individuelle opérant avec une fonction de production à rendements d'échelle constants. Mais détermine en revanche le ratio du capital au travail effectif, $\hat{k}$, ainsi que le niveau agrégé de la production.

3.2.2.2 L'équilibre concurrentiel

Nous avons commencé par modéliser le comportement des ménages, en situation de concurrence, confrontés à un taux d'intérêt, r, donné, et un taux de salaire, w, donné. Nous avons ensuite introduit les entreprises concurrentielles, également confrontées à des valeurs données de r et w. Nous pouvons maintenant combiner le comportement des ménages et des entreprises pour analyser la structure d'un équilibre de marché concurrentiel.

Puisqu' en économie fermée le ménage représentatif a une dette nulle, les actifs par personne adulte, a, doivent être égaux au capital par tête, k. (rappelons que le nombre de travailleurs est égal au nombre d'adultes, et que chaque adulte fournit 1 unité de travail par unité de temps) . L'égalité entre k et a s'ensuit car tout le stock de capital doit être possédé par les adultes composant l'économie. En effet, dans ce modèle d'économie fermée, tout le capital par tête du pays est possédé par les résidents. Si l'économie était ouverte aux marchés internationaux de capitaux, l'écart entre k et a correspondrait à la dette intérieure nette du pays à l'égard du reste du monde.

3.2.2.3 L'équation dynamique fondamentale

Puisque tout les ménages sont identiques et toutes les entreprises ont la même fonction de production. A l'équilibre concurrentiel : les conditions d'optimalité (3,4,5,9,10) sont satisfaites et les conditions d'équilibre, sur les trois marchés, sont satisfaites.

Sur le marché du capital, la condition d'équilibre est :

$$a = k = \hat{k}e^{gt}$$

Elle permet avec (3.9) et (3.10) de réécrire la contrainte d'accumulation de l'agent représentatif en fonction de $\hat{k}$.

$$Da = w + (r - n)a - c$$

Devient

$$D\hat{k}e^{gt} + \hat{k}ge^{gt} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k}.f'(\hat{k})\right]e^{gt} + \left(f'\left[\hat{k}(t)\right] - \delta - n\right)\hat{k}e^{gt} - c$$

Et en divisant par e^{gt}

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{k}.f'(\hat{k}) + \left(f'\left[\hat{k}(t)\right] - \delta - n\right)\hat{k} - \hat{k}g - ce^{-gt}$$

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) \ - \hat{c} - (g + n + \delta)\hat{k} \ldots\ldots\ldots\ldots(3.11)$$

C'est l'équation dynamique du capital dans le modèle de Ramsey. Elle correspond à l'équation (2.13) du modèle de Solow. Où $\hat{c} \equiv C/\hat{L} = ce^{-gt}$, et où $\hat{k}(0)$ est donné. L'éq (3.11) est la contrainte des ressources de l'économie globale : la variation du stock de capital est égale à la production moins la consommation et la dépréciation, et la variation de $\hat{k} \equiv K/\hat{L}$ prend également en compte le taux de croissance de $\hat{L}$ au taux, $g + n$.

L'équation différentielle (2.13) est la relation clé qui détermine l'évolution dans le temps de $\hat{k}$ et de ce fait, de $\hat{y} = f(\hat{k})$. l'élément manquant, cependant, concerne la fixation de $\hat{c}$. Si nous connaissons la relation entre $\hat{c}$ et $\hat{k}$ (ou $\hat{y}$), ou si nous avions une autre équation différentielle permettant de déterminer l'évolution de $\hat{c}$, nous pourrions alors étudier la dynamique complète de l'économie.

3.2.2.4 La règle de Keynes-Ramsey

Dans le modèle de Solow-Swan le taux d'épargne était exogène, et l'évolution de la consommation était déterminée par celle de $\hat{y}$. Dans le modèle de Solow la dynamique du capital était suffisante pour réduire les dynamiques des autres variables. En effet :

$$\hat{c} = (1 - s)f(\hat{k})$$

$$\frac{D\hat{c}}{\hat{c}} = \frac{D\hat{y}}{\hat{y}} = \frac{D\hat{k}}{\hat{k}}$$

$$\hat{c} = \frac{c}{e^{gt}}, on\ a\ \frac{Dc}{c} = \frac{D\hat{c}}{\hat{c}} + g$$

Dans le modèle de Ramsey, l'évolution de la consommation est déterminée par la règle de Ramsey Keynes:

$$\frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}(r - \rho)$$

A l'équilibre concurrentiel, la variable r est égale à la productivité marginale du capital nette (condition 3.9)

$$r = f'(\hat{k}) - \delta$$

L'évolution de la consommation est donc déterminée par

$$\frac{Dc}{c} = \frac{1}{\sigma}\left(f'(\hat{k}) - \delta - \rho\right)$$

$$\frac{D\hat{c}}{\hat{c}} = \frac{Dc}{c} - g$$

On a donc un équilibre concurrentiel caractérisé par une seconde équation dynamique qui détermine l'évolution de la consommation par tête efficaces :

$$\frac{D\hat{c}}{\hat{c}} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma g\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (3.12)$$

Les eqs (3.11) et (3.12) forment un système de deux équations différentielles en $\hat{c}$ et $\hat{k}$. Ce système, la condition initiale, $\hat{k}(0)$, et la condition de transversalité, déterminent les sentiers temporels de $\hat{c}$ et $\hat{k}$.

3.2.2.5 La condition de transversalité

Ecrivons la condition de transversalité en termes de $\hat{k}$ en substituant $a = k$ et $\hat{k} = ke^{-gt}$ dans l'éq (3.8)

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)a_t = \lim_{t\to\infty} \hat{k}e^{gt}e^{-(f'(\hat{k})-\delta-n)t} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu(0)\hat{k}e^{-(f'(\hat{k})-\delta-g-n)t} = 0 \ldots\ldots\ldots (3.13)$$

Nous pouvons interpréter ce résultat en utilisant par anticipation celui suivant lequel $\hat{k}$ tend asymptotiquement vers la valeur d'état régulier constante, $\hat{k}^*$, comme le modèle de Solow-Swan. La condition de transversalité de l'éq (3.13) requiert donc que $f'(\hat{k}) - \delta$, le taux de rendement de l'état régulier, soit supérieur à $g + n$, le taux de croissance de k à l'état régulier.

3.3 L'état régulier

Nous allons maintenant chercher si les conditions d'équilibre données par les équations (3.11),(3.12) et (3.13) , sont compatibles avec un état régulier, c'est-à-dire avec une situation où les diverses quantités croissent à taux constant. Nous allons d'abord montrer que le taux de croissance d'état régulier de $\hat{c}$ et $\hat{k}$ doit être nul.

Soit $(\gamma_{\hat{k}})^*$, le taux de croissance de $\hat{k}$ à l'état régulier, et $(\gamma_{\hat{c}})^*$, le taux de croissance de $\hat{c}$, à l'état régulier. A l'état régulier l'éq (3.11) s'écrit :

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (g+n+\delta)\hat{k}$$

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (g+n+\delta)\hat{k} - \hat{k}(\gamma_{\hat{k}})^*$$

En dérivant cette condition par rapport au temps, nous voyons que

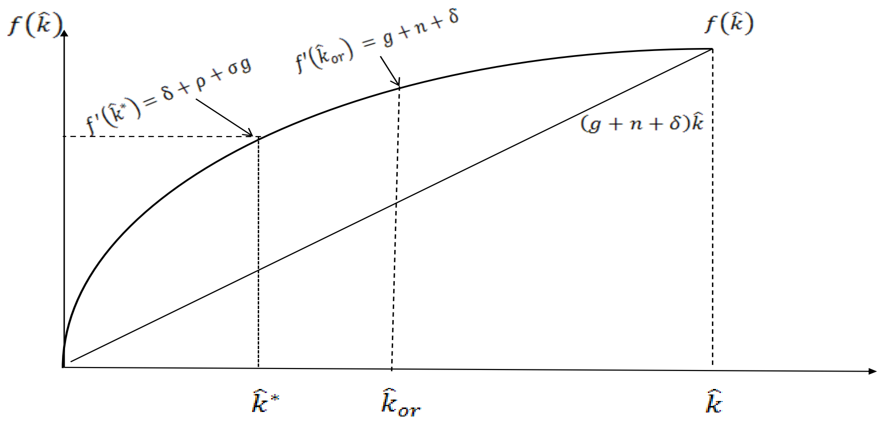
$$\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}}.\{f'(\hat{k}) - [g+n+\delta+(\gamma_{\hat{k}})^*]\}$$

Doit être vérifié à l'état régulier. L'expression entre accolades est positive, d'après la condition de transversalité de l'éq (3.13). par conséquent $(\gamma_{\hat{k}})^*$ et $(\gamma_{\hat{c}})^*$doivent être de même signe. Lorsque$(\gamma_{\hat{k}})^* > 0$, alors $\hat{k} \to \infty$ et d'après les conditions d'Inada $f'(\hat{k}) \to 0$. l'éq (3.12) implique alors $\gamma_{\hat{c}} < 0$. Ce résultat contredit celui selon lequel $(\gamma_{\hat{k}})^*$ et $(\gamma_{\hat{c}})^*$ sont de même signe.

Lorsque$(\gamma_{\hat{k}})^* < 0$, alors $\hat{k} \to 0$ et $f'(\hat{k}) \to \infty$. l'éq (3.12) implique alors $\gamma_{\hat{c}} > 0$, un résultat qui contredit de nouveau celui indiquant que $(\gamma_{\hat{k}})^*$ et $(\gamma_{\hat{c}})^*$ sont de même signe. La dernière possibilité est que $(\gamma_{\hat{k}})^* = (\gamma_{\hat{c}})^* = 0$. le résultat $(\gamma_{\hat{k}})^* = 0$ implique $(\gamma_{\hat{y}})^* = 0$. Ainsi les variables par unité de travail effectif, $\hat{k}, \hat{c}$ et $\hat{y}$ sont constantes à l'état régulier. Cette évolution implique que les variable par tête k, c et y, croissent au taux g à l'état régulier, et que les variables K, C et Y croissent au taux $n+g$ à l'état régulier. Ces résultats sur les taux de croissance d'état régulier sont les mêmes que ceux du modèle de Solow-Swan avec taux d'épargne exogène et constant.

3.3.1 La règle d'or

État régulier du modèle de ramsey



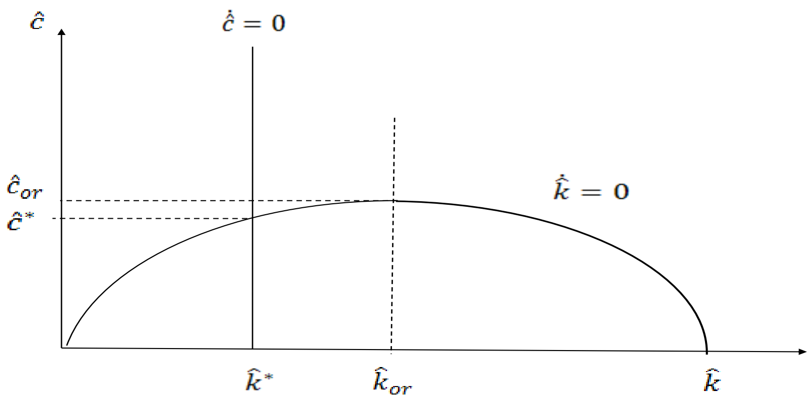


Figure (3.1)

La courbe en forme de dôme de la figure (3.1), qui correspond à $\hat{c} = f(\hat{k}) - (g + \mathrm{n} + \delta)\hat{k}$, montre les paires ($\hat{c}$, $\hat{k}$) qui satisfont à $\dot{\hat{k}} = 0$ dans l'éq (3.11). Notons que la courbe atteint son maximum quand la pente de la fonction de production est égale à la pente de la consommation de capital : $f'(\hat{k}) = \delta + g + n$, de sorte que le taux d'intérêt, $f'(\hat{k}) - \delta$, est égal au taux de croissance de la production à l'état régulier, $g + n$. Cette égalité entre le taux d'intérêt et le taux de croissance correspond au niveau de règle d'or de $\hat{k}$, parce qu'elle conduit à maximiser $\hat{c}$ dans l'état régulier. Nous désignons par $\hat{k}_{or}$ la valeur de $\hat{k}$ correspondant à la règle d'or.

L'éq (3.12) et la condition $\dot{\hat{c}}/\hat{c} = 0$ impliquent

$$f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \sigma g \dots\dots\dots\dots\dots (3.14)$$

Cette équation indique que le taux d'intérêt d'état régulier, $f'(\hat{k}^*) - \delta$, est égal au taux d'actualisation effectif, $\rho + \sigma g$. La composante σg du taux effectif d'actualisation traduit l'effet de l'utilité marginale décroissante de la consommation due à la croissance de c au taux g.

La ligne verticale $\hat{k}^*$, sur la figure (2.1), correspond à cette condition. Notons que $\dot{\hat{c}} = 0$ est vérifié pour cette valeur de $\hat{k}$, indépendamment de la valeur de $\hat{c}$. L'éq (3.12) indique que $\dot{\hat{c}} = 0$ est aussi satisfaite dès lors que $\hat{c} = 0$.

Les rendements décroissants du capital sont le facteur clé de détermination de $\hat{k}^*$dans l'éq (3.14), puisqu'ils expliquent que $f'(\hat{k}^*)$ soit une fonction monotonement décroissante de $\hat{k}^*$. De plus les conditions d'Inada : $f'(0) = \infty$ et $f'(\infty) = 0$, garantissent que l'éq (3.14) est vérifiée pour une valeur positive unique de $\hat{k}^*$.

La figure (3.1) montre comment se déterminent les valeurs d'état régulier, ($\hat{k}^*$et $\hat{c}^*$), à l'intersection de la droite verticale et de la courbe en forme de dôme. En particulier, avec $\hat{k}^*$ déterminé par l'éq ((3.14), on trouve la valeur de $\hat{c}^*$en égalisant l'expression de l'éq (3.11) avec 0.

$$\hat{c}^* = f'(\hat{k}^*) - (g + n + \delta).\hat{k}^* \dots\dots\dots\dots\dots (3.15)$$

Notons que $\hat{y}^* = f(\hat{k}^*)$ est la valeur d'état régulier de $\hat{y}$.

3.3.2 La règle d'or modifiée

$$\lim_{t\to\infty} \mu(0)\hat{k}e^{-(f'(\hat{k})-\delta-g-n)t} = 0$$

Considérons la condition de transversalité de l'éq (3.13),

puisque $\hat{k}$ est constant à l'état régulier, cette condition est vérifiée lorsque $e^{-(f'(\hat{k})-\delta-g-n)t}$ tend vers zéro. Donc lorsque le taux de rendement de l'état régulier $r^* = f'(\hat{k}^*) - \delta$, est supérieur au taux de croissance de l'état régulier, $g + n$.
L'éq (3.14) implique que cette condition peut s'écrire

$$f'(\hat{k}^*) - \delta > g + n$$

$$\delta + \rho + \sigma g - \delta > g + n$$

$$\rho > n + (1-\sigma)g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3.16)$$

Une autre façon de trouver cette condition est d'examiner la fonction d'utilité inter temporelle. Pour qu'il existe une solution d'équilibre, il faut que l'utilité soit bornée. Pour cela, il faut que la préférence pour le présent soit suffisamment grande, $\rho > n + (1-\sigma)g$, afin qu'il existe une solution au choix rationnel de l'agent. Cette condition (qui impose l'existence d'une préférence pour le présent, positive et suffisamment forte) doit donc être considérée comme un principe de la rationalité.

L'équation $f'(\hat{k}^*) = \delta + \rho + \sigma g$ est la règle d'or modifiée. A l'optimum au sens utilitariste [56] Le taux d'intérêt est égal au taux d'intérêt psychologique.

$$r^* = \rho + \sigma g$$

C'est une implication de la règle de Ramsey-Keynes à l'état régulier :

- Tant que $r^* > \rho + \sigma g$, les agents ont intérêt à investir, à renoncer à la consommation présente pour consommer plus demain, alors $\dot{\hat{c}} > 0$.
- Tant que $r^* < \rho + \sigma g$, les agents ont intérêt à consommer aujourd'hui au prix d'un renoncement à la consommation futur, alors $\dot{\hat{c}} < 0$.

A l'état régulier, puisque $\dot{\hat{c}} = 0$, on a $r^* = \rho + \sigma g$, où $g = \dot{c}/c$.

- **Comparaisons des deux règles d'or**

Maximiser la consommation d'état régulier selon le critère de phelps, ou maximiser l'utilité inter temporelle selon le critère utilitariste, ne conduit évidemment pas à la même norme d'optimalité.

Sur la figure (3.2), la valeur d'état régulier, $\hat{k}^*$, est à gauche de $\hat{k}_{or}$. Cette relation est toujours vérifiée lorsque la condition de transversalité de l'éq.(3.16) est satisfaite . La valeur d'état régulier est déterminée d'après $r^* = \rho + \sigma g$, alors que la valeur de règle d'or est donné par $r_{or} = g + n$. L'inégalité de l'éq.(3.16) implique $\rho + \sigma g > n + g$, et par conséquent, $r^* > r_{or}$ ou encore $f'(\hat{k}^*) > f'(\hat{k}_{or})$. Le résultat $\hat{k}^* > \hat{k}_{or}$ découle de $f''(\hat{k}) < 0$.

Le niveau de la consommation par tête, qui découle de la règle d'or modifiée , est inférieur à celui qui résulte de l'application de la règle d'or. En effet, la règle d'or modifiée résulte d'une modélisation où l'agent représentatif a une préférence pour le présent, et cette préférence pour le présent à un prix : c'est l'écart entre $\hat{c}^*$ et $\hat{c}_{or}$. Il faut bien noter que ce résultat est optimal au sens utilitariste (il est donc aussi au sens de Paréto) ; étant donné sa

[56] Tous les équilibres à gauche de $\hat{k}_{or}$ sonts des optimums de Paréto. Parmi ceux-ci, un est optimal au sens de phelps $(\hat{k}_{or})$ et un est optimal au sens utilitariste $(\hat{k}^*)$.

préférence pour le présent, « le père fondateur de la dynastie » préfère, à la date $t = 0$, la consommation d'état régulier $\hat{c}^*$ inférieur à $\hat{c}_{or}$. On comprend donc pourquoi l'équilibre peut être à gauche de $\hat{k}_{or}$.

3.3.3 Le taux d'épargne optimal

On va calculer le taux d'épargne déterminé de façon endogène. Avec la Cobb-Douglas ($\hat{y} = \hat{k}^\alpha$) on a:

$$s^* = \frac{I}{Y} = \frac{DK + \delta K}{Y} = \frac{DK/K + \delta}{Y/K} = \frac{g + n + \delta}{(1/\alpha)Pmk^*} = \alpha \frac{g + n + \delta}{\delta + \rho + \sigma g}$$

Le taux d'épargne optimale est inférieur au taux qui résulte de la règle d'or. Le modèle de Ramsey donne une explication plus réaliste des taux d'épargne, il explique leur faiblesse par la préférence pour le présent.

Nous en déduisons qu'une sur-épargne inefficiente ne peut pas exister dans ce cadre d'optimisation, alors qu'elle pouvait se produire dans le modèle de Solow-Swan caractérisé par un taux d'épargne arbitrairement constant. Car si le ménage type (qui se comporte comme s'il était éternel) épargnait à l'excès, il s'apercevrait que son comportement n'est pas optimal (c'est-à-dire qu'il ne respecte pas la condition de transversalité) et choisirait donc une voie de moindre épargne. Par contre, le ménage au comportement optimal n'épargne pas assez pour atteindre la valeur de règle d'or $\hat{k}_{or}$. Cette impatience, due à un taux d'actualisation effectif, $\rho + \sigma g$ positif, l'empêche de sacrifier le montant de consommation courante nécessaire pour atteindre le maximum de $\hat{c}$ (c'est-à-dire la valeur de règle d'or $\hat{c}_{or}$) à l'état régulier.

3.3.4 Le taux de croissance

Le taux de croissance à l'état régulier ne dépend ni de paramètres qui décrivent la fonction de production, $f(\cdot)$, ni de paramètres de préférence ρ et σ qui caractérisent l'attitude des ménages envers la consommation et l'épargne. Ces paramètres exercent en revanche des effets à long terme sur le niveau des variables.

Sur la figure (3.2), une propension à épargner (représentée par une réduction de ρ ou σ) déplace le barème $\dot{\hat{c}} = 0$ vers la droite et laisse le barème $\dot{\hat{k}} = 0$ inchangé. De même, un déplacement proportionnel, vers le haut, de la technologie de production, ou une réduction du taux de dépréciation, δ, déplace la courbe $\dot{\hat{k}} = 0$ vers le haut, et la courbe $\dot{\hat{c}} = 0$ vers la droite. Ces déplacement entrainent des augmentations de $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$et $\hat{y}^*$.

Une augmentation de g accroit la préférence effective pour le présent, $\rho + \sigma g$, et réduit également la valeur de $\hat{c}^*$ qui correspond au $\hat{k}^*$ donné par l'équation (3.15). sur la figure (2.1), ces modifications déplacent le barème $\dot{\hat{k}} = 0$ vers le bas et le barème $\dot{\hat{c}} = 0$ vers le bas et la gauche, réduisant de ce fait $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$et $\hat{y}^*$. (Bien que $\hat{c}$ baisse, l'utilité croit parce que la hausse de g augmentele taux de croissance de c relativement à celui de $\hat{c}$.) Finalement, l'effet de n sur $\hat{k}^*$et $\hat{y}^*$est nul, si l'on maintient ρ fixé. L'éq.(3.15) implique que $\hat{c}^*$décline. Si lorsque n est plus élevé, le taux de préférence pour le présent s'élève aussi, l'augmentation de n conduit alors à une réduction de $\hat{k}^*$et $\hat{y}^*$.

3.4 Dynamique de la transition

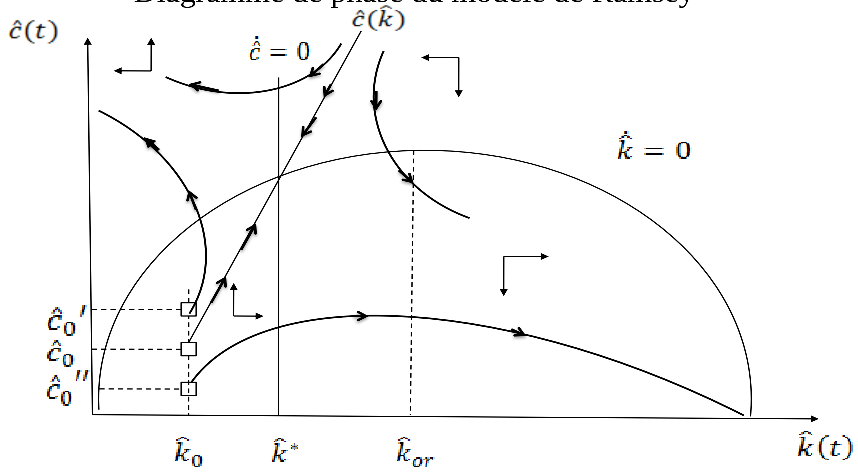
La dynamique transitoire est intéressante pour deux raisons, l'une positive, l'autre normative :

- ✓ on vérifie si l'état régulier est stable.
- ✓ Le critère de Pareto ne nous permettait pas de savoir, s'il fallait, et comment il fallait passer d'une épargne top faible à l'épargne optimale d'état régulier. Le critère utilitariste répond à cette question de la façon suivante : la dynamique transitoire résulte ici des comportements optimaux de consommation inter-temporelle des agents de la société, sensés maximiser la fonction d'utilité inter-temporelle utilitariste, elle est donc nécessairement optimale

3.4.1 Diagramme de phase

Le modèle de Ramsey permet d'étudier l'évolution des taux de croissance (et autres variables) le long des sentiers de transition partant d'une condition initiale, $\hat{k}(0)$, et rejoignant le ratio d'état régulier $\hat{k}^*$. Les équations (3.11),(3.12) et (3.13) déterminent le sentier d'évolution de $\hat{k}$ et $\hat{c}$ pour une valeur donnée $\hat{k}(0)$. Le diagramme de la figure (3.2) montre la nature de cette dynamique.

Diagramme de phase du modèle de Ramsey



La courbe en forme de dôme de la figure (3.2) montre la dynamique transitionnelle du modèle de Ramsey. $\dot{\hat{c}} = 0$ et $\dot{\hat{k}} = 0$divisent l'espace en quatre régions, et les flèches indiquent la direction du mouvement dans chaque région. Le modèle est caractérisé par une stabilité de sentier- selle. Le bras stable est une courbe à pente positive qui passe par l'origine et par l'état régulier. Partant d'un faible niveau de $\hat{k}$, la valeur optimale initiale de $\hat{c}$ est faible.

Rappelons que la ligne verticale en $\hat{k}^*$ correspond à la condition $\dot{\hat{c}} = 0$ dans l'éq (3.12). Cette équation implique également que $\hat{c}$ est croissant quand $\hat{k} < \hat{k}^*$ donc sur cette partie de la figure, les flèches pointent vers le haut) et décroissant pour $\hat{k} > \hat{k}^*$ (les flèches pointent vers le bas).

Rappelons que également que la courbe en forme de dôme de la figure (3.2) indique les combinaisons de $\hat{k}$ est $\hat{c}$ qui satisfont $\dot{\hat{k}} = 0$ dans l'éq (3.11). Cette équation implique aussi que $\hat{k}$ diminue pour les valeurs de $\hat{c}$ situées au dessus de la courbe en forme de dôme (donc, dans cette partie de la figure, les flèches pointent vers la gauche) et augmente avec les valeurs de $\hat{c}$ situées au dessous de la courbe (les flèches pointent vers le la droite.

En dynamique transitoire, $\dot{\hat{c}}$ croit ou décroit selon que la productivité marginale du capital est plus ou moins forte :

$$D\hat{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma g\right]\hat{c} = 0 \Leftrightarrow f'(\hat{k}) = \delta - \rho - \sigma g \Leftrightarrow \hat{k} = \hat{k}^*$$
$$D\hat{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma g\right]\hat{c} > 0 \Leftrightarrow f'(\hat{k}) > \delta - \rho - \sigma g \Leftrightarrow \hat{k} < \hat{k}^*$$
$$D\hat{c} = \frac{1}{\sigma}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \sigma g\right]\hat{c} < 0 \Leftrightarrow f'(\hat{k}) < \delta - \rho - \sigma g \Leftrightarrow \hat{k} > \hat{k}^*$$

En dynamique transitoire, $\dot{\hat{k}}$ croit ou décroit selon que la consommation est plus ou moins forte :

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (\mathrm{g} + n + \delta)\hat{k} = 0 \Leftrightarrow \hat{c} = f(\hat{k}) - (g + n + \delta)\hat{k}$$

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (g + n + \delta)\hat{k} > 0 \Leftrightarrow \hat{c} < f(\hat{k}) - (g + n + \delta)\hat{k}$$

$$D\hat{k} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (g + n + \delta)\hat{k} < 0 \Leftrightarrow \hat{c} > f(\hat{k}) - (g + n + \delta)\hat{k}$$

3.4.2 Evolution du taux d'épargne

Le taux d'épargne brut (s) est égale à $1 - \hat{c}/f(\hat{k})$. Le modèle de Solow-Swan, supposait que s était une constante d'un niveau arbitraire. Dans le modèle de Ramsey, avec des consommateurs optimisateurs, s peut suivre un sentier compliqué, comprenant des segments croissants et décroissants, à mesure que l'économie se développe et approche de l'état régulier.

On comprend que si l'évolution du taux d'épargne est indéterminée, c'est parce qu'elle fait intervenir les effets contraires de substitution et de revenu. Lorsque $\hat{k}$ augmente, la baisse de $f'(\hat{k})$ réduit le taux de rendement r de l'épargne. L'incitation moins à épargner tend à réduire le taux d'épargne quand l'économie se développe (effet de substitution inter-temporelle). Le revenu par travailleur effectif dans une économie pauvre $\left(f(\hat{k})\right)$ est bien inférieur au revenu à long terme (revenu permanent) de cette économie. Puisque les ménages préfèrent un flux de consommation régulier, ils souhaitent consommer plus que leur revenu quand celui-ci est peu élevé : le taux d'épargne est donc faible lorsque $\hat{k}$ est faible. Lorsque $\hat{k}$ augmente, l'écart entre les revenus actuel et permanent diminue ; de ce fait, la consommation tend à baisser par rapport au revenu, et le taux d'épargne tend à s'accroitre. Cet effet (de revenu) augmente le taux d'épargne au fur et à mesure du développement économique.

L'évolution du taux d'épargne au cours de la transition dépend de l'importance relative des effets de revenu et de substitution. L'effet net est en général indéterminé, et le sentier d'évolution de l'épargne au cours de la transition peut en être compliqué. Cependant pour une fonction Cobb-Douglas, les résultats se simplifient. Suivant les valeurs des paramètres, le taux d'épargne chute régulièrement, reste constant, ou croit régulièrement quand $\hat{k}$ augmente.

Dans le cas Cobb-Douglas, le taux d'épargne d'état régulier, s^*, est donné par

$$s^* = \frac{\alpha(g+n+\delta)}{\delta+\rho+\sigma g} \dots\dots\dots\dots\dots.(3.17)$$

3.4.3 Vitesse de convergence

La vitesse de convergence dans le modèle de Ramsey est calculée par une version log-linéaire du système dynamique en $\hat{k}$ et $\hat{c}$, formée par les éqs (3.11) et (3.12). Lorsque ces deux équations sont développées au voisinage d'état régulier, les résultats peuvent s'écrire :

$$log[\hat{y}(t)] = e^{-\beta t}.log[\hat{y}(0)] + \left(1-e^{-\beta t}\right).log(\hat{y}^*)\dots\dots\dots(3.19)$$

Où $\beta > 0$. Ainsi pour $t \geq 0$, $log[\hat{y}(t)]$ est une moyenne pondérée de la valeur initiale $log[\hat{y}(0)]$ et de la valeur d'état régulier $log(\hat{y}^*)$, la pondération de la valeur initiale déclinant exponentiellement au taux β. La vitesse de convergence, β, dépend des paramètres de la technologie et des préférences. Dans le cas d'une technologie Cobb-Douglass, la formule du coefficient de convergence (obtenue par une approximation log linéaire autour de la position d'état régulier) et :

$$2\beta = \left\{\zeta^2 + 4\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right).(\rho+\delta+\sigma g).\left[\frac{\rho+\delta+\sigma g}{\alpha} - (n+g+\delta)\right]\right\}^{1/2} - \zeta\dots\dots(3.20)$$

$$\text{Où } \zeta = \rho - n - (1-\sigma)g > 0.$$

L'éq (3.19) implique que le taux de croissance moyenne de la production par tête, y, sur un intervalle allant de la date initiale 0 à toute date future $T > 0$ est donné par :

$$\left(\frac{1}{T}\right) log\left[\frac{\hat{y}(t)}{\hat{y}(0)}\right] = g + \frac{\left(1-e^{-\beta t}\right)}{T} log\left[\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}(0)}\right] \ldots \ldots \ldots (3.21)$$

Maintenant fixés pour le moment, le taux de croissance d'état régulier, g, la vitesse de convergence, β, et l'intervalle d'approximation, T. L'éq (3.21) indique alors que le taux de croissance moyen de la production par tête dépend négativement du ratio $\hat{y}(0)$ à $\hat{y}^*$. L'effet de la position initiale, $\hat{y}(0)$, est conditionné par la position d'état régulier, $\hat{y}^*$. Autrement dit, le modèle de Ramsey prévoit également une convergence conditionnelle plutôt qu'absolue.

Le coefficient qui relie le taux de croissance de y à $log\left[\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}(0)}\right]$ dans l'éq (3.21), $\frac{(1-e^{-\beta t})}{T}$, décline avec T, pour β donné. Si $\hat{y}(0) < \hat{y}^*$, de sorte que le taux de croissance déclinent avec le temps, une augmentation de T signifie que les taux de croissance plus faibles influencent d'avantage la moyenne que les taux de croissance plus élevés, proches de l'état réguliers. Par conséquent, le taux de croissance moyen, qui entre dans l'éq (3.21), baisse à mesure que T augmente.

Lorsque $T \to \infty$, le taux de croissance d'état régulier, g, domine la moyenne. De ce fait le coefficient $\left(1-e^{-\beta t}\right)/T$ approche 0, et le taux de croissance de y dans l'éq (3.21) tend vers g.

Pour T donné, un β plus élevé implique un coefficient $\left(1-e^{-\beta t}\right)/T$ plus élevé. (Quand $T \to 0$ le coefficient tend vers β. L'eq (3.20) exprime la dépendance de β par rapport aux paramètres sous- jacents. Considérons d'abord le cas du modèle de Solow-Swan où le taux d'épargne est constant. Comme nous l'avons noté précédemment, cette situation s'applique ici lorsque le taux d'épargne d'état régulier, s^*, qui apparaît dans l'éq.(3.17), est égal à $1/\sigma$ ou, de façon équivalente, si la combinaison des paramètres $\alpha(n+\delta) + (\delta+\rho)/\sigma - g(1-\alpha)$ est égale à 0.

Avec un taux d'épargne constant, la formule du coefficient due convergence β se simplifie d'après l'éq (3.20) au résultat du modèle de Solow-Swan, donné par l'équation :

$$\beta = (1-\alpha).(g+n+\delta)$$

Dans le cas d'un taux d'épargne variable, l'équation (3.20) détermine les effets complets des divers paramètres sur la vitesse de convergence. L'élément nouveau concerne l'inversion du sentier temporel du taux d'épargne au cours de la transition. Si le taux