

Le développement des compétences numériques de la petite enfance à l'âge scolaire

1. Bref retour historique

Depuis plusieurs décennies, les chercheurs s'interrogent sur la spécificité du domaine numérique et son développement ontogénétique et phylogénétique.

Les premières études - longtemps influencées par les travaux menés par Piaget et le constructivisme piagétien - postulaient que l'enfant ne maîtrisait pas le concept du nombre avant 7 ans. Le positionnement de Piaget quant aux traitements numériques correspond davantage à une vision des compétences numériques comme une habileté globale (Piaget, 1952). Ainsi, d'après Piaget, jusqu'à 18 mois environ, le bébé est au stade « sensori-moteur ». Il est alors capable d'explorer l'environnement d'un point de vue sensoriel et avec un contrôle moteur. Ensuite, par observation et internalisation des règles stables de l'environnement, l'enfant construirait petit à petit des connaissances mathématiques et logiques. Le principe de conservation du nombre serait alors une étape clef de la compréhension mathématique. Avant cette acquisition, il n'y aurait pas de véritable représentation numérique chez les bébés.

Toutefois, quelques décennies plus tard, plusieurs résultats expérimentaux montraient que les très jeunes enfants seraient en mesure de traiter le nombre de manière visuo-spatiale et non langagière. Ainsi, de nombreux chercheurs se sont intéressés aux compétences numériques précoces et ont montré que les bébés sont capables de discriminer des numérosités, de comprendre les relations entre deux quantités ainsi que de comprendre et anticiper le résultat de situation d'ajout ou de retrait sur une quantité. Ces résultats amènent alors à reconsidérer la thèse piagétienne en reprochant notamment à Piaget d'utiliser des épreuves verbales qui ne permettent pas de révéler les compétences des jeunes enfants. Aussi, les questions posées aux enfants sont trop complexes, le langage faisant obstacle. De plus, l'interprétation et la compréhension des enfants sont différentes de celles des adultes. En réalisant le même type d'épreuve sans recourir au langage, on a pu constater que les enfants sont bien capables d'une compréhension rudimentaire. Bien sûr, il est probable que ces deux types d'activités ne mesurent pas exactement les mêmes processus. Toutefois, il semblerait que les épreuves utilisées par Piaget n'étaient pas adaptées pour étudier les prémisses de la représentation et de la compréhension du concept de nombre chez l'enfant.

Néanmoins, Piaget a été le premier à parler d'intelligence préverbale chez le bébé et c'est aussi grâce à ces travaux que les études sur le développement cognitif de l'enfant dès le plus jeune âge ont pu émerger.

Deux courants se sont alors opposés dans les études expérimentales : le nativisme et le constructivisme post-piagétien. Le nativisme, qui considère une continuité entre l'animal et l'homme, postule que les compétences numériques découvertes chez les animaux se rapprochent de celles des bébés et des êtres humains. Il y aurait ainsi un « état initial » de connaissances pour certaines facultés mentales. Depuis, plusieurs contre-arguments sont venus en porte-à-faux à ce courant. Le noyau de connaissance supposé présent dès la naissance n'a en réalité été observé qu'à partir de 2 mois (Spelke, 2000). De plus, les nativistes ne prennent pas en compte l'aspect développemental des acquisitions et le poids de l'environnement, comme si aucune évolution n'était possible après la naissance.

Le constructivisme post-piagétien (notamment avec Fuson, 1988, 1995) intègre les contraintes précoces et le poids de l'environnement socio-culturel. Ce courant prend en compte les connaissances précoces sans considérer pour autant qu'elles soient innées. Ces connaissances s'enrichissent avec l'âge et l'expérience de chaque enfant.

Si l'existence de capacités précoces de quantification est aujourd'hui largement montré, deux positionnements théoriques différents s'opposent quant à leur nature : le premier plaide l'existence d'un système numérique inné de traitement analogique et le second repose sur des mécanismes non numériques (capacités pré-attentionnelles et de représentation ainsi qu'un mécanisme analogique perceptif).

Des auteurs comme Gallistel et Gelman (1992) ou Wynn (1995) considèrent qu'il existe un système inné de traitement des quantités (cf. le modèle de l'accumulateur de Meck). Il y aurait ainsi une base phylogénétique aux capacités numériques précoces. Dans ce modèle, les représentations des quantités sont variables mais se distribuent normalement autour d'une moyenne. Plus la quantité à évaluer est importante plus la variabilité est marquée. Dehaene s'inscrit dans ce courant de pensée et développe l'idée un mécanisme inné de détection numérique présent aussi chez les animaux qui se développeraient tout au long de l'enfance. Les études chez l'animal par exemple, ont montré que les animaux sont capables de discriminer des quantités selon un certain rapport sans connaître les symboles numériques et sans apprentissage préalable (Brannon, 2005 ; Mechner, 1958). Cette représentation primaire des nombres serait traitée par le « système numérique approximatif (ANS). Elle est présente très précocement chez les bébés puis plus tard chez les

adultes qui maîtrisent le langage et les représentations symboliques des nombres. Dehaene, inspiré de l'idée de l'accumulateur, défend également l'idée d'une « ligne numérique mentale » comme représentation mentale des nombres.

Le second positionnement considère que les compétences précoces ne sont pas liées à des traitements numériques. Par exemple, les capacités de *subitizing* visuel seraient liées à un mécanisme de localisation spatiale des items et d'individuation (Trick et Pylyshyn, 1993 ; 1994). Pour Simon (1997), c'est l'individuation des éléments à traiter et la conservation d'une trace en mémoire qui explique les compétences des bébés dans l'étude de Wynn. Simon défend l'idée d'un traitement général qui permet de rendre compte des capacités de traitement multimodales. Enfin, d'autres auteurs (Feigenson, Carey et Spelke, 2002 ; Rousselle, Palmers et Noël, 2004) évoquent une hypothèse perceptive pour expliquer les capacités précoces. En effet, on ne peut pas démontrer que les bébés se basent uniquement sur la numérosité pour discriminer les collections. Les compétences des bébés seraient alors plutôt expliquées par des variations perceptives. Toutefois, ces différentes explications non numériques ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des observations issues des études chez le bébé.

A ce jour, il semblerait alors que deux mécanismes coexistent chez le bébé : un mécanisme perceptif de traitement analogique et un système de traitement général d'individuation spatiale et de mémorisation.

Comme nous l'avons évoqué plus haut, le modèle de von Aster et Shalev (2007) permet de modéliser et de rendre compte de l'évolution des acquisitions numériques au cours du développement. Nous allons maintenant évoquer les résultats expérimentaux qui ont participé à l'élaboration des modèles de traitement des nombres, mais également celles menées plus récemment qui permettent d'affiner notre compréhension de ce domaine.

2. Les acquisitions numériques précoces

Les études chez le bébé sont pertinentes pour découvrir et analyser les compétences initiales qui influencent ou déterminent le développement de la cognition numérique. Toutefois, il n'est pas toujours aisé d'étudier et d'interpréter les performances des enfants si précocement. Les études chez le bébé utilisent principalement le paradigme d'habituation et se basent sur l'analyse des temps de fixation oculaire en situation de discrimination numérique (symbolique ou non).

2.1. La discrimination numérique chez le bébé

Dès 6 mois, les bébés savent discriminer deux quantités dans un rapport de 2 à 1 avec par exemple 8 contre 16 objets, même en contrôlant les variables continues telles que la taille des éléments ou la densité (Brannon, Abbott et Lutz, 2004 ; Xu et Spelke, 2000). Il semblerait même que, dès la naissance, les enfants présentent une sensibilité à la congruence entre les nombres, qu'ils soient présentés dans la modalité auditive ou visuelle, ce qui est en faveur de l'existence de connaissances numériques intermodales chez les bébés (Izard, Sann, Spelke, et Streri, 2009).

L'une des premières études à montrer que les bébés reconnaissent les petites quantités a été réalisée par Starkey et Cooper en 1980. Avec un paradigme d'habituation, ils ont mesuré les temps de fixation oculaire chez des bébés de 16 à 30 semaines lorsqu'on leur montre une diapositive avec 2 et 3 points ou 4 et 6 points noirs. Les résultats indiquent un temps de fixation supplémentaire lorsque la quantité change, indiquant que les bébés discriminent les quantités 2 et 3 puisqu'ils réagissent au changement de numérosité. En revanche, les bébés ne font pas la différence pour 4 et 6 points. Les auteurs concluent que dès 22 mois, les enfants sont en mesure de se représenter et de mémoriser les petites quantités. Par la suite, d'autres chercheurs ont retrouvé les mêmes résultats à partir de 6 mois d'âge, et même quelques jours après la naissance (Antell et Keating, 1983).

Strauss et Curtis (1981) ont observé les capacités de bébés de 10 à 12 mois à discriminer 2 à 5 objets homogènes ou hétérogènes sur des photographies. Durant la phase d'habituation, ils ont présenté des diapositives de deux patterns contenant 2 à 5 objets (maisons, animaux...). En fonction des conditions, les deux patterns représentaient le même nombre et type d'objet (condition homogène) ou seulement le même nombre (condition hétérogène). Ensuite, durant la phase de test, chaque diapositive contenait un pattern avec un objet de plus ou de moins. Les résultats indiquent que, quel que soit le type d'objets, les bébés de 10 à 12 mois réussissent bien à discriminer 2 contre 3 objets mais qu'au-delà et pour un écart d'un objet (3-4, 4-5 objets), ils y arrivent de moins en moins. Ainsi, la variation perceptive de l'objet n'influence pas la réaction des enfants.

Plus récemment, Xu et Spelke (2000) ont demandé à des enfants de 6 mois de discriminer différentes quantités d'objets. Les enfants sont capables de discriminer 8 objets de 16 mais pas 8 de 12 (rapport de 2 à 3). Les auteurs concluent que la capacité à se représenter les numérosités est présente très précocement, avant le développement langagier et les apprentissages numériques symboliques. D'autres études présentent des résultats similaires avec une discrimination possible pour 4 contre 8 et 16 contre 32 mais pas 16 contre 24 éléments (Xu, 2003 ; Xu, Spelke et Goddard, 2005 ; Wood et Spelke, 2005 ; Brannon, Abbott et Lutz, 2004).

Les résultats de ces études sont en faveur de l'existence d'une capacité à discriminer les quantités avant toutes acquisitions langagières verbales ou écrites. Dès 6 mois, les bébés sont en mesure de distinguer des objets dans un rapport 1 à 2. Dès 9 mois, la discrimination est possible dans un rapport de 2 à 3 ; leurs compétences se rapprochant alors des capacités de discrimination adultes. Cette compétence ne serait donc pas uniquement liée à l'éducation formelle, mais préexisterait déjà très précocement. En revanche, quand on dépasse les petites quantités, le traitement numérique est lié à un processus différent, puisque les jeunes enfants répondent plutôt de manière approximative (Mix, Huttenlocher et Levine, 2002), sollicitant le système numérique approximatif.

2.2. Une perception multimodale du nombre

Il semblerait que les compétences numériques des bébés soient multimodales. En effet, des études ont montré qu'ils étaient capables de discriminer des sons. Cette découverte fait suite à l'observation de Bijeljac-Babic, Bertoncini et Mehler (1993) concernant la capacité des bébés à décomposer des sons de parole en syllabes. Ils ont montré que les bébés de 4 jours sont capables de discriminer des sons de 2 et 3 syllabes.

Plus récemment, Lipton et Spelke (2003) ont étudié les capacités des bébés de 6 à 9 mois à discriminer de longues séquences sonores. Dès 6 mois, les bébés sont en mesure de discriminer 8 sons de 16 sons mais pas 8 de 12. A 9 mois, les enfants semblent augmenter leurs habiletés discriminatoires puisqu'ils sont en mesure de discriminer 8 sons de 12. Il semble alors que dès le plus âge, les bébés perçoivent des quantités plus ou moins grandes et les distinguent, et que leurs compétences augmentent très rapidement avec l'âge pour ce type d'épreuve. Et cela bien avant l'acquisition du langage.

De la même manière, les enfants seraient capables de discrimination dans des contextes non directement numériques avec des séquences d'actions. Par exemple, dès 6 mois, ils seraient en mesure de discriminer un nombre d'action comme un nombre de sauts (Wood et Spelke, 2005 ; Wynn, 1996).

Est-ce que les jeunes enfants perçoivent le nombre de manière indépendante à la modalité visuelle ou auditive ? Starkey, Spelke et Gelman (1983 ; 1990) ont présenté à des bébés de 6 à 8 mois des diapositives composées à droite de deux objets communs et à gauche de trois objets. En parallèle, les bébés pouvaient entendre une séquence sonore. Les résultats indiquent que les bébés

regardent plus longtemps la diapositive contenant le même nombre d'objet que le nombre de sons. Ainsi, les enfants sont capables d'apparier les nombres dans des modalités sensorielles différentes et ce dès le plus jeune âge. L'explication apportée par les auteurs est que les enfants perçoivent les sons ou les configurations géométriques comme des nombres.

L'étude d'Izard, Sann, Spelke et Streri (2009) apporte également un éclairage sur la question. Les chercheurs étudient les capacités discriminatoires numériques chez les nouveaux nés. Pour cela, ils présentent à des bébés de quelques heures des associations de sons et d'objets et observent les temps de regard. Les résultats indiquent que les nouveaux nés discriminent des appariements congruents de 4 à 18 objets avec des séquences sonores. Ils regardent significativement plus longtemps les quantités congruentes avec les sons présentés durant la familiarisation dans un ratio de 3 à 1 (4 contre 12 ou 6 contre 18).

Mais les résultats de ces différentes études sont discutables quand il s'agit d'interpréter les capacités observées en termes de compétences numériques ou de compétences non spécifiquement numérique. Ces résultats n'ayant pas toujours été répliqués et certaines études trouvant des résultats contradictoires, il est difficile à ce jour de statuer sur l'indépendance de la représentation numérique chez le jeune enfant.

2.3. Des connaissances plus complexes dès la naissance ?

Les compétences numériques précoces ne se limiteraient pas à une sensibilité à la numérosité ou à des capacités de discrimination.

Certaines études se sont attardées aux compétences additives et soustractives des bébés. Wynn (1992) a ainsi testé chez des bébés de 4 à 5 mois les opérations d'addition et de soustraction, en montrant des capacités précoces de compréhension pour ces deux opérations à travers le paradigme de l'événement impossible. Pour Wynn (1992 ; 1995), les bébés s'attendent à une modification du nombre d'objet et ont des attentes précises quant au résultat. L'existence de ces compétences proto-arithmétiques est liée d'après Wynn à la présence d'un système numérique conceptuel dès la naissance qui traiterait les relations de quantités et d'équivalences entre numérosités. Tous les auteurs ne partagent pas ce positionnement notamment car les résultats de Wynn sont difficilement répliquables. De plus, le développement des compétences proto-arithmétiques remet en cause ce postulat car dans des situations additives et soustractives, les enfants de 2 ans et demi se comportent aléatoirement (Vilette, 2002 ; Vilette et Mazouz, 1998).

Nous avons vu que les capacités de discrimination chez les enfants évoluent très rapidement avec l'âge. En effet, les bébés sont capables très précocement de percevoir les quantités et de les discriminer dans les modalités visuelles et auditives quand le ratio est de 3 :1 (Izard et al., 2009). A 6 mois, les capacités discriminatoires s'améliorent avec une réussite pour un ratio de 2 :1 (Lipton et Spelke, 2003 ; Xu et Spelke, 2000) dans les deux mêmes modalités. A l'âge de 9 mois, le ratio de discrimination est de 2 :3.

C'est l'existence de ces connaissances numériques préverbales, basée sur une représentation analogique des nombres, qui justifie initialement le rôle cette représentation spatiale et non-verbale dans les acquisitions arithmétiques symboliques. Sans en connaître la référence symbolique exacte, les enfants sont en mesure de percevoir et discriminer les petites quantités. Par la suite, ils seront en mesure de donner un sens à ces capacités de discrimination en terme de « plus » ou « moins ». La représentation analogique est d'ailleurs le premier format impliqué dans la construction de la ligne numérique mentale, élaborée et affinée au fur et à mesure des apprentissages.

En revanche, leurs compétences mathématiques restent limitées. S'ils sont sensibles à la numérosité et en mesure de différencier des quantités visuelles ou auditives, ils ne sont bien évidemment pas encore en mesure d'utiliser le comptage exact puisqu'il faut attendre les premiers apprentissages symboliques qui ont lieu à l'âge préscolaire et scolaire.

3. Acquisitions à l'âge préscolaire et scolaire

Pour les enfants d'âge préscolaire et scolaire, les activités numériques se diversifient : quantification approximative, dénombrement exact, numération, calculs et résolution de problèmes (Siegler, 1996). Au cours de l'apprentissage de ces différentes tâches, l'ensemble des représentations numériques est sollicité, tantôt de manière isolée et tantôt conjointement.

3.1. Avant les premiers apprentissages formels

Les bébés présentent dès la naissance une sensibilité à la quantité et sont en mesure de discriminer relativement deux quantités d'une grandeur limitée et selon un certain ratio. Même si leurs connaissances arithmétiques continuent de se développer et de s'affiner, elles sont limitées par la non-maîtrise du codage symbolique des nombres.

Dès 16 mois, les enfants sont en mesure de comprendre la notion de « le plus » mais pas celle de « le moins » (Cooper, 1984 ; Strauss et Curtis, 1984). Brannon (2002) observe ce phénomène déjà à l'âge de 11 mois avec un matériel probablement plus propice à l'observation de ce phénomène. D'autres études retrouvent, entre 10 à 12 mois, une préférence vers la quantité la plus grande (Feigenson et Carey, 2003 ; Feigenson, Carey et Hauser, 2002). Ainsi, la compréhension des relations entre les quantités se met en place progressivement vers un an.

Avant de commencer l'école, les enfants peuvent apprendre des faits arithmétiques simples spontanément ou avec l'entourage (Griffin et Case, 1997 ; Hughes, 1986). Toutefois, malgré ces acquisitions informelles, leurs connaissances se limitent aux petits nombres avec lesquels ils sont familiers. Dès l'âge de 5 ans, ils seraient en mesure de comparer deux grandes quantités présentées de manière simultanée (Barth, La Mont, Lipton et Spelke, 2005). Les auteurs ont montré qu'avant l'école élémentaire, les enfants sont capables de discriminer deux quantités dont l'une est cachée et même de les additionner puis de comparer leur somme à une autre quantité. Il semblerait également que les enfants présentent les mêmes capacités quand les quantités sont remplacées par des sons. Ainsi, les enfants de 5 ans sont capables de comparer et d'additionner des quantités numériques et sonores et ce, même avec une connaissance très faible de l'arithmétique symbolique.

De Hevia et Spelke (2009) se sont intéressés à la ligne numérique mentale et à un biais spatial connu chez les adultes. Quand on demande à un participant de marquer le milieu d'une ligne séparant deux nombres, on constate que les participants présentent un biais spatial vers le nombre le plus grand, indépendamment de sa position spatiale (de Hevia, Girelli et Vallar, 2006 ; Fischer, 2001). Ce biais indique que la longueur et la numérosité sont mis en correspondance à travers la LNM. Leurs résultats indiquent que les enfants de 5 ans présentent également ce biais spatial, ce qui implique que la LNM puisse être sollicitée dès cet âge là. Ainsi, le *mapping* bidirectionnel entre les nombres et l'espace commencerait déjà avant l'instruction formelle et symbolique qui débute réellement en Cours Préparatoire.

3.2. Les apprentissages symboliques

Très précocement dans le développement, on observe une forte mobilisation du système verbal oral avec l'acquisition de la comptine numérique (de 2 à 6 ans en moyenne).

Plusieurs opérations concrètes sont acquises de 5 à 7 ans comme la réversibilité, la conservation, la classification (dès 4 ans) qui permettra d'accéder à l'aspect cardinal du nombre, la sériation (autour de 7 ans) qui met en place la propriété ordinale du nombre ,

3.2.1. La comptine numérique

La chaîne numérique verbale de 0 à 20 s'acquiert progressivement et lentement entre 2 et 6 ans car l'enfant doit apprivoiser un vocabulaire numérique précis et complexe (Mirassou in Chokron et Démonet, 2010). Mais avant l'âge de 3 ans, les enfants ne sont pas en mesure d'associer le nom des nombres à leur cardinalité. La variabilité interindividuelle est importante puisque les capacités préscolaires jouent un rôle dans la vitesse d'acquisition de la chaîne numérique.

La représentation verbale orale des nombres commence à être reconnue comme une catégorie spécifique vers 2 ans et demi selon Gelman et Gallistel (1978, cités par Noël, 2005b) mais s'acquière véritablement vers 6 ans (Fuson, Richards et Briars, 1982, cités par Noël, 2005). C'est notamment à cet âge que les enfants connaissent la suite de nombres de 1 à 20. Pour Noël (2005), les résultats de Gelman et Gallistel peuvent toutefois être nuancés car son étude montre que les enfants réussissent à juger si des mots présentés à l'oral sont des nombres avec un pourcentage de réussite de plus de 80% à 5 ans seulement.

Fuson (1988) s'est intéressée de près à l'acquisition de la suite numérique verbale. Elle a décrit 5 niveaux de construction de la chaîne :

- « en chapelet » : la suite n'est pas segmentée ;
- « non sécable » : on commence toujours à un ;
- « sécable » : on peut commencer n'importe où dans la suite ;
- dénombrable : comptage en l'absence d'objets et la suite peut se dénombrer ;
- bidirectionnelle : possibilité de regrouper et décomposer.

Jusqu'à l'âge de 3 ans, les noms sont récités dans un ordre insécable et sans attribution de sens aux mots-nombres. Vers 4 ans, la suite devient sécable ce qui permettra la correspondance terme à terme. La compréhension du suivant et du précédent a lieu vers 5 ans, moment où les relations entre les mots de la chaîne sont perçues. Enfin, vers 6 ans, le sens des mots-nombres est acquis.

L'acquisition se fait toujours comme suit : les enfants apprennent d'abord les chiffres de 1 à 9 puis de manière différée les particuliers. Ils devront ensuite se familiariser avec les règles morphosyntaxiques des mots-nombres. C'est l'automatisation de l'énonciation de la chaîne numérique qui permettra d'améliorer par la suite les compétences de dénombrement.

L'apprentissage de la chaîne numérique verbale se fait pour la plupart des enfants conjointement avec l'utilisation des doigts pour formaliser le nombre. Ce support permettra de

désigner le nombre de manière symbolique physique avant de savoir écrire les nombres. Il sera également utilisé ensuite pour le calcul ou le dénombrement.

3.2.2. L'utilisation des doigts

La représentation morphologique des nombres sur les doigts apparaît pour certains auteurs comme déterminante dans les acquisitions numériques ultérieures (Fayol, Marinthe et Barrouillet, 2004). Quand les élèves apprennent à compter vers 4-5 ans, on constate de grandes différences de performances. Pour Fayol, Marinthe et Barrouillet (2004), cela pourrait être lié à un déficit dans la représentation des nombres sur les doigts. C'est dès l'âge de 2-3 ans que les jeunes enfants commencent à utiliser leurs doigts pour matérialiser l'ajout et le retrait sans qu'il n'y ait eu au préalable d'enseignement de cette technique. Les études en neuropsychologie (Butterworth, 1999 ; Gerstmann, 1930 ; Kinsbourne et Warrington, 1962 ; 1963) ont montré qu'il existait bien une relation fonctionnelle entre les nombres et la représentation sur les doigts puisque l'acquisition des compétences numériques est perturbée en cas de représentation déficitaire sur les doigts.

Fayol, Barrouillet et Marinthe (1998) ont montré que le niveau de performances perceptivo-tactile à 5 ans est un meilleur prédicteur des performances en mathématique à 5 et 6 ans que le niveau de développement. D'autres auteurs ont montré qu'avant 5 ans, les enfants ne sont pas en mesure de résoudre de simples problèmes additifs ou soustractifs présentés verbalement. En revanche, la résolution est possible si ces problèmes sont présentés de manière non verbale (Huttenlocher, Jordan et Levine, 1994 ; Jordan, Huttenlocher et Levine, 1992). L'analogie quantité/nombre permise par utilisation des doigts rend possible la manipulation des quantités et permet une première compréhension du calcul. D'après nous, ce n'est pas tant l'utilisation même des doigts que l'information sémantique qu'ils représentent qui joue un rôle. En revanche, l'utilisation des doigts présente l'inconvénient, chez beaucoup d'enfants, de rendre dépendant à leur utilisation et ainsi d'empêcher le recours à une stratégie de comptage ou de symbolisation plus efficiente et plus rapide. Nous pensons que l'entraînement au *mapping* par l'estimation numérique semble être un bon moyen de fournir de l'information sémantique sans créer de dépendance contextuelle.

3.2.3. Connaître le nom des nombres et leur écriture

Avant de l'utiliser les représentations dans le dénombrement, le calcul ou la résolution de problèmes, une maîtrise de ces codes est indispensable. Savoir lire et écrire les nombres nécessite

des connaissances spécifiques et indépendantes liées au système langagier français. Les mots-nombres sont abstraits et présentent des irrégularités (English et Halford, 1995 ; Fayol, 2002 ; Mix, 1999). De ce fait, l'apprentissage des nombres verbaux jusqu'à 10 est lent chez les occidentaux et les orientaux (Miller et Paredes, 1996). De plus, certaines habiletés peuvent être affectées par ces spécificités langagières comme l'empan de chiffres, la résolution de problème sollicitant fortement la mémoire de travail, ... (Ellis 1992). L'acquisition du code verbal est basée au moins au départ sur une représentation quantitative du nombre. Dès deux ans, l'enfant a bien compris qu'à une quantité correspond un mot-nombre. Entre 2 et 4 ans, les enfants sont en mesure de mettre en relation un mot-nombre avec sa représentation ordinale (Benoit, Lehalle, Molina, Tijus et Jouen, 2013) et ce dans les deux directions de traitement (Le Corre et Carey, 2007 ; Wynn, 1990 ; 1992). Toutefois, cet apprentissage se limite principalement aux petits nombres (1 à 3), pour accéder plus tard à des numérosités supérieures (Benoit et al., 2004). Il faut cependant attendre l'âge de 7 ans pour une connaissance verbale ordonnée des nombres jusqu'à 100. Cette connaissance participera à l'élaboration de la quatrième étape du modèle de Von Aster et Shalev (2007) sur le versant oral.

Les premiers nombres arabes écrits apparaissent vers 3 ans mais dépendront largement ensuite de l'enseignement scolaire et d'un apprentissage explicite. La représentation écrite s'appuierait sur le code verbal oral au départ mais s'en distinguerait rapidement pour évoluer de manière indépendante. C'est quand les principes du comptage deviennent explicites vers la fin de la scolarisation en Maternelle que les enfants sont de plus en plus confrontés à l'écrit des nombres. Cela devient ensuite systématique dès le CP.

L'acquisition des nombres arabes dépendrait de la compréhension de la notation positionnelle c'est à dire de saisir que la position donnée à un chiffre correspond à l'unité décimale qui permet de former le nombre. Par exemple, un nombre en deuxième position correspond à 10^1 . Si une unité décimale n'est pas utilisée on met un zéro signifiant l'absence de chiffre. Le zéro est considéré lorsqu'il est placé derrière des chiffres, sinon il n'est pas pris en compte. De même, il est nécessaire d'acquérir la conception décimale du nombre afin de réaliser des calculs mentaux plus élaborés nécessitant un passage à la dizaine. L'élève pourra alors composer ou décomposer les nombres ce qui est une stratégie très pertinente de résolution de calcul.

L'analogie entre le nombre oral et le chiffre arabe écrit nécessite un apprentissage particulier car il s'agit de deux symboles arbitraires, ce qui rend leur acquisition plus difficile et plus longue. Les irrégularités langagières des nombres verbaux auraient également des conséquences jusqu'au CE2, ainsi que chez les adolescents en difficulté (Barrouillet et al., 2004 ; Seron et Fayol, 1994).

Les conséquences de ces difficultés liées aux langages seront abordées plus en détail dans la quatrième partie de ce travail.

3.3. La quantification

La quantification est la capacité à chiffrer une quantité et donc à « fournir le cardinal exact ou approximatif d'une collection » (Fayol in Billard et Touzin, 2008 p.22). Pour Fayol (1990), il existe trois types de procédures :

- le *subitizing* (moins de 5 objets),
- le comptage ou dénombrement exact,
- et l'évaluation approximative globale (au delà de 5 objets).

Selon leur expérience et la situation, les enfants utiliseraient préférentiellement un type de procédure. La quantification est primordiale pour les acquisitions arithmétiques ultérieures (Barrouillet et Camos, 2003).

3.3.1. Le *subitizing*

Le *subitizing* est un processus utilisé par les enfants pour dénommer les petites quantités jusqu'à 4 objets. Si les études révèlent déjà la présence d'un *subitizing* perceptif avec l'existence d'une représentation discrète de petites collections dès l'âge de 4-5 mois (Shipley et Shepperson, 1990 ; Wagner et Walters, 1982), le processus de *subitizing* avec dénomination verbale serait réellement effectif seulement avec l'acquisition des premiers mots-nombres pour désigner précisément les petites quantités de 3 ou 4 objets (Chi et Klahr, 1975 ; Fischer, 1991). Avec des collections plus importantes, le dénombrement ou l'estimation devient incontournable et, même s'il s'agit ici des mêmes stratégies que celles utilisées par l'adulte, les enfants sont beaucoup moins rapides.

Dès 6 ans, les temps de réponse des enfants diminuent pour les quantités inférieures à 4, montrant que les compétences de *subitizing* s'optimisent pour rejoindre les performances d'adultes. Les études n'ont pas vraiment réussi à étudier cette compétence avant l'âge de 5 ans ce qui ne permet pas de trancher quant à l'existence précoce de connaissances proto-numériques.

3.3.2. L'estimation numérique

L'estimation est une quantification rapide et approximative. Il s'agit de la procédure de quantification la plus fréquente notamment car elle est nécessaire très précocement et tout au long de la vie (Siegler et Booth, 2005).

On distingue l'estimation de la numérosité, l'estimation computationnelle et l'estimation sur la ligne numérique. L'estimation de la numérosité est probablement celle qui apparaît la plus tôt au cours du développement. Il s'agit de la traduction d'une représentation quantitative non numérique en nombre dont la précision augmente avec l'âge. L'estimation computationnelle est la traduction d'une représentation numérique à l'autre. Son développement est plus tardif, autour du CE2. L'estimation sur la ligne numérique quant à elle résulte en l'intégration des différentes représentations. Il s'agit de situer la position d'une représentation symbolique sur une ligne numérique analogique.

Il existe peu d'études sur les habiletés d'estimations chez les enfants. De même, peu d'études se sont intéressés aux capacités d'estimation en fonction de l'implication de la modalité orale ou écrite.

On sait que dès 3 ans, les indices visuo-spatiaux qui permettent de répondre dans une tâche de comparaison de quantités sont utilisés même si les enfants continuent de prendre en compte les éléments de densité (Gelman, 1972 ; Siegel, 1974). Chillier (2002) montre que les enfants de 6 à 8 ans sous-estiment (de manière croissante) la numérosité de collections de 8 à 20 points. Même si la variabilité des réponses et les erreurs augmentent avec la quantité à estimer, la précision des estimations augmente avec l'âge (Chillier, 2002 ; Huntley-Fenner, 2001).

Les capacités d'estimation font directement référence à la représentation non-symbolique. C'est d'ailleurs le système numérique approximatif (ANS) qui sous-tend la quantification approximative. Ainsi, le développement des habiletés d'estimation est fonction du développement de la mise en correspondance entre la représentation analogique et les représentations symboliques.

3.3.3. Dénombrement et comptage

Le dénombrement : une coordination de plusieurs compétences

Dénombrer, c'est savoir « combien il y a en tout ». Cette activité nécessite de synchroniser une action verbale (énonciation de la comptine) et une action motrice de pointage visuel ou digital (Beckwith et Restle, 1966 ; Potter et Levy, 1968). La durée du dénombrement augmente avec la

taille de la collection à dénombrer. Le dénombrement peut être utilisé par l'enfant dès l'âge de deux ans et permet de poursuivre l'amélioration de l'acuité du système analogique. Les enfants dénombrent, un à un, chaque élément d'une collection et ce de manière bidirectionnelle, réussissant à terme à un quantifier de façon exacte des quantités croissantes. Le dénombrement est une quantification exacte essentielle dans l'acquisition des habiletés numériques (Fuson, 1988 ; Halford, 1993). Il existe même un lien entre une acquisition perturbée du dénombrement et l'existence de difficultés mathématiques à 7 ans (Geary, Bow-Thomas et Yoa, 1992).

Le dénombrement ne peut se développer qu'une fois les premières connaissances numériques symboliques orales consolidées. Les capacités de dénombrement dépendent des possibilités de la chaîne numérique ; les enfants ne peuvent dénombrer que les quantités qui n'excèdent pas sa longueur. Les enfants sont toujours moins rapides et font plus d'erreurs que les adultes à cause d'une automatisation du rappel et d'une intégration des règles de construction des nombres l'oral (Camos, Barrouillet et Fayol, 2001 ; Camos, Fayol et Barrouillet, 1999). L'activité de pointage associée au dénombrement évolue elle aussi avec une utilisation préférentielle du pointage manuel chez les enfants d'âge préscolaire (Gelman et Gallistel, 1978 ; Ginsburg et Russel, 1981) qui cède peu à peu sa place à un pointage visuel chez les adultes, bien que ces derniers continuent ponctuellement de recourir au doigt pour dénombrer (Camos, 2003). Le pointage manuel aurait pour avantage principal de distinguer les objets déjà décomptés de ceux qui restent à dénombrer (Gelman et Gallistel, 1978) et d'alléger la mémoire de travail (Alibali et Dirusso, 1999). Le geste de pointage serait bénéfique pour les enfants de 4 ans qui apprennent à compter alors qu'à 6 ans il n'est déjà plus indispensable ; les enfants ayant acquis une expérience suffisante (Saxe et Kaplan, 1981).

La coordination du pointage et de l'énonciation des nombres induit de nombreuses erreurs dans les tâches de dénombrement. Le dénombrement serait une procédure à proprement parler où le pointage et l'énonciation se contraindraient l'une et l'autre (Camos, Barrouillet et Fayol, 2001). Il faut attendre l'âge de 6 ans pour qu'il n'y ait plus de conflit entre les deux composantes du dénombrement et que les enfants soient plus rapides et plus efficace.

Deux courants théoriques différents s'opposent quant à l'émergence du dénombrement : la théorie des « principes en premier » et la théorie des « principes après ». La théorie des « principes en premier » considère que les principes de comptage sont présents précocement et, avec l'utilisation répétée de ces principes, l'activité de dénombrement s'améliore (Gelman et Gallistel, 1978 ; Gelman et Meck, 1983). La théorie des « principes après » postule que la répétition des procédures de dénombrement par répétition permet l'acquisition progressive de ses principes (Briars et Siegler, 1984 ; Fuson, 1988 ; Secada, Fuson et Hall, 1983). Ces deux courants théoriques

guident notamment la mise en place de programme d'apprentissage ou de remédiation en mathématiques dont nous parlerons dans deuxième partie de la thèse. Malgré leur opposition théorique, ces deux courants considèrent qu'il existe des habiletés de quantification précoce.

Développement du dénombrement

Cinq principes définissent les règles liées au comptage (Gelman et Gallistel, 1983):

- chaque élément compté a une étiquette verbale et une seule,
- le dernier mot-nombre prononcé désigne le cardinal,
- il n'y a pas d'influence de l'endroit où démarre le dénombrement,
- l'ordre de comptage est indifférent,
- et la nature des éléments comptés n'a pas d'influence sur le cardinal.

Pour Gelman, l'aptitude à compter est naturelle et universelle. Elle considère que les principes sont précoces et guident l'acquisition du comptage verbal (théorie des « principes en premier »). Les enfants d'âge préscolaire recourent d'ailleurs spontanément au comptage. Pour Fuson (1988) ou encore Siegler et Shipley (1987) les principes seraient acquis au cours des apprentissages et de l'acquisition des procédures de comptage (théorie des « principes-après»). Plus précisément, Fuson considère que les principes s'acquièrent par imitation socio-culturelle. Au final, il est bien établi que les principes sont nécessaires pour accéder au dénombrement mais il semble qu'il faille attendre l'âge de 4 ans au moins pour qu'ils soient maîtrisés. Ainsi, les études sont plutôt en faveur de la théorie des « principes-après ».

Au fur et à mesure du développement, les individus développent des stratégies qui améliorent la vitesse de dénombrement. Par exemple, on trouve le dénombrement classique (chaîne verbale), le dénombrement par n (par 2, par 4 ou plus), une stratégie d'addition (repérage d'une somme de quantité), une stratégie de multiplication et l'estimation. Camos (2003) a étudié l'utilisation de ces stratégies de 7 à 20 ans. La stratégie classique (par la chaîne verbale) est utilisée préférentiellement par les plus jeunes enfants et délaissée peu à peu avec l'avancée en âge. Dès 7 ans, les enfants peuvent utiliser la stratégie de dénombrement par n ou d'addition tandis que la stratégie multiplicative commence vers 9 ans. Les stratégies se développent donc avec l'âge mais la stratégie de dénombrement par n devient la stratégie privilégiée chez les sujets plus âgés.

Avant l'acquisition du comptage verbal et le développement des capacités de la mémoire de travail, l'enfant préscolaire aura tendance à tout compter. Cette stratégie, où l'élève dénombre tout

depuis le début (en partant de 1 et en s'aidant parfois de ses doigts), est progressivement remplacée par un surcomptage où l'élève compte à partir du plus grand terme. Néanmoins, cette stratégie ne doit pas perdurer et sera remplacée elle aussi par des stratégies de comptage plus élaborées (passage à la dizaine, groupement, dégroupement...) ou par des connaissances arithmétiques automatisées comme les faits numériques.

3.4. Apprentissages plus complexes

Notre objectif n'est pas d'étudier les capacités de dénombrement, de calcul ou d'activités mathématiques plus complexes. Nous nous intéressons plutôt à la manière dont, en amont, les représentations s'acquièrent et s'imbriquent pour ensuite pouvoir être sollicitées dans les activités numériques. Même si nous ne développons pas dans notre propos les apprentissages plus complexes, nous allons rapidement évoquer ce qu'il en est de leur développement chez les enfants.

Par le comptage, les enfants sont en mesure dès 5 ans de résoudre des problèmes d'ajouts ou de retraits de quantités (Siegler et Jenkins, 1989). Ils utilisent alors majoritairement le comptage sur les doigts ou le comptage verbal (Siegler et Shrager, 1984). Mais, il semblerait que déjà à l'âge de trois ans les enfants peuvent utiliser des objets pour résoudre des additions simples (Fuson, 1982) après constitution des deux opérandes et dénombrement de l'ensemble.

En ce qui concerne les soustractions, leur résolution est possible dès 4 ans à l'aide de manipulations. La multiplication et la division en revanche, ne se développent pas spontanément avant l'enseignement formel.

L'expérience mathématique de l'enfant est déjà bien entamée lorsqu'il fait son entrée à l'école primaire. Il possède déjà, dans son répertoire de résolution, plusieurs stratégies pour l'addition et la soustraction.

Les premières multiplications sont apprises par apprentissage par coeur (Geary, 1994). Il existe chez les jeunes enfants une représentation naïve des fractions (Gallistel et Gelmann, 1992 ; Mix et al., 1999). Les premières expériences des enfants dans ce domaine sont permises par les situations de partage. Il faudrait multiplier les représentations concrètes des fractions pour permettre aux enfants de construire le concept (Streefland, 1997).

L'expertise INSERM (2007) indique que les difficultés et les erreurs présentées pour les fractions chez les élèves sont « probablement dues à des représentations et des conceptions erronées qui font ensuite obstacle à la suite de l'apprentissage » (Inserm, 2007 ; p121). Les difficultés peuvent s'expliquer par le fait que les fractions ne sont pas considérées comme des nombres mais

comme la partie d'un tout et que les élèves se les représentent comme des objets, qui sont donc par essence, impossible à fractionner.

De la petite enfance jusqu'à l'âge scolaire, les différentes représentations se développent à travers leurs acquisitions et leurs implications dans les activités mathématiques. Au départ indépendantes, elles s'intègrent et se combinent pour la plupart des tâches arithmétiques. Ainsi, pour dénombrer, on peut solliciter la représentation orale et écrite. Pour comparer deux nombres, on peut solliciter la représentation symbolique et la représentation analogique. C'est l'ensemble de ces connexions, réalisées tout au long des apprentissages qui permet d'élaborer la Ligne Numérique Mentale. D'abord essentiellement analogique, elle s'enrichit ensuite des codes symboliques pour leur conférer du sens.

3.5. Evolution de la représentation sur la ligne numérique mentale

Avant même que la chaîne numérique verbale ne soit développée, l'évaluation de collections linéaires sur une échelle analogique externe est possible dès l'âge de 3 ans et demi (Cuneo, 1982) et pour les numérosités jusqu'à 7. Toutefois, pour les numérosités supérieures, les aspects de longueur et densité ne sont distingués jusqu'à l'âge de 7 ans. On observerait dès 5 ans, des correspondances directes entre les systèmes de représentations symboliques et la LNM (De Hevia et Spelke, 2009 ; Donlan, Bishop et Hitch, 1998), l'élaboration de la LNM débiterait donc vers cet âge-là et rendrait possible les tâches d'estimation sur la LNM.

La ligne numérique mentale se développe principalement durant l'école élémentaire, permettant ainsi des estimations plus précises et avec moins d'erreurs (Siegler & Booth 2005). Toutefois, cette amélioration est vraie surtout pour les nombres compris entre 0 et 100 que 0 à 1000 par exemple (Siegler & Opfer, 2003) car ils sont plus fréquents et sollicités durant la scolarité.

L'effet de distance est présent dès 5 ans dans une tâche de comparaison de chiffres arabes (Donlan, Bishop et Hitch, 1998 ; Duncan et Mcfarland, 1980). Avec l'âge, l'effet de distance devient moins robuste et les temps de réponses sont moins influencés par cet effet (Sekuler et Mierkiewicz, 1977). La représentation sur la LNM serait plus comprimée chez les enfants jusqu'à 10 ans et avec plus de variabilité entre les numérosités. Pour Huntley-Fenner (2001), les représentations se chevauchent de moins en moins avec l'âge puisque de 5 à 7 ans la variabilité des réponses diminue. L'auteur explique que ce phénomène est lié à la maîtrise de la chaîne numérique verbale et du comptage. La représentation de la LNM serait donc similaire à celle des adultes mais

elle évoluerait en nuance et en précision avec l'âge. Toutefois, tous les auteurs ne s'accordent pas quant à une représentation linéaire des numérosités. D'autres recherches ont visé à mettre en avant l'aspect compressible de la ligne numérique chez les enfants d'âge scolaire (Todd, Barber et Jones, 1997). Une série d'expérience menée par Chillier (1999) montre que la ligne serait effectivement compressible chez les enfants de 6 à 9 ans, avec une diminution de la discriminabilité des nombres en raison de la diminution du chevauchement entre les numérosités. L'effet SNARC a été observé en situation de jugement de parité chez les élèves scolarisés en équivalent du CE2 (Berch, Foley, Hill et Ryan, 1999), probablement au moment où les différentes représentations du nombre sont suffisamment maîtrisées voire automatisées (Girelli, Lucangeli et Butterworth, 2000).

Des évolutions ultérieures sur la LNM concernent les nombres décimaux, les nombres relatifs, les nombres réels ... L'ensemble de ces changements conceptuels est important car il s'accompagne d'une intégration des propriétés logiques des nombres dans la LNM. De plus, l'affinement et la précision des représentations sur cette ligne permettent d'améliorer la fluidité et l'aisance arithmétique. Bien que fondamentales, ces évolutions dépassent notre propos et ne seront pas traitées ici.

Conclusion

L'étude des acquisitions numériques est un vaste champ d'investigation, complexe par son imbrication avec le langage et par son développement rapide dès la naissance. Plusieurs études s'y sont intéressées, et ce même chez les animaux afin de mieux comprendre comment ces compétences se développent et dans quelles conditions. Nous venons de voir dans la première partie, que le système analogique approximatif est essentiel dans les acquisitions et le développement des habiletés numériques. Nous avons également développé les modèles majeurs de la construction du nombre et du calcul. Ces modèles mettent en lien les différentes représentations sans toutefois considérer leurs relations et leurs évolutions au cours du développement. Ensuite, nous avons explicité rapidement l'évolution des acquisitions numériques au cours du développement. Les différentes activités mathématiques impliquent l'ensemble des représentations numériques à des degrés divers. Cela justifie de considérer l'acquisition des codes les uns par rapport aux autres ainsi que leurs interactions au cours du développement afin de mieux comprendre comment les enfants acquièrent les représentations numériques.

L'enfant de 5 ans est en mesure de mettre en correspondance les systèmes de représentations numériques avec une ligne numérique mentale. Cette capacité s'améliore avec l'âge et la scolarisation. Une manière pertinente de mettre en correspondance l'ensemble de ces systèmes et de donner du sens aux nombres et au calcul est de solliciter les activités d'estimation sur la ligne numérique mentale. Nous considérons ainsi que l'estimation sur la LNM est un moyen de redonner du sens aux apprentissages.

En dépit des liens importants qui existent entre la représentation analogique, les capacités d'estimation sur la LNM et les habiletés mathématiques exactes et symboliques, nous verrons dans la seconde partie de ce travail qu'aucun programme pédagogique n'a véritablement recouru à l'estimation. A partir de là, nous avons réalisé dans ce travail une première tentative d'injection d'activités d'estimation en classe de Cours Préparatoire afin d'améliorer l'acuité du sens des nombres et du calcul et la compréhension des symboles arithmétiques.

De même, nous observerons dans la troisième partie, que les programmes de remédiation des troubles du calcul chez des enfants porteurs de la trisomie 21 sollicitent principalement le calcul exact et symbolique alors que le langage fait défaut. Ainsi, nous proposerons une remédiation basée davantage sur le traitement visuo-spatial et analogique du nombre et sur le calcul approximatif avec les activités d'estimation.

Enfin, nous parlerons du transcodage et de la mise en correspondance entre les représentations, avec toujours l'objectif de mieux préciser les relations entre les codes. Nous

tenterons d'apporter des connaissances relatives aux capacités d'estimation sur la ligne numérique mentale selon la représentation symbolique impliquée (distinguer mot-nombre et chiffre arabe) ainsi que sur l'évolution des représentations les unes par rapports aux autres durant la scolarisation primaire.

L'ensemble de ces études doit permettre de mieux cerner le rôle de la représentation analogique et l'intérêt de l'estimation dans les apprentissages mathématiques.

